UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁLGEBRA NA ESCOLA BÁSICA VERSUS ÁLGEBRA NA LICENCIATURA: ONDE SE ENCONTRA O X DA QUESTÃO?

MESTRANDO: JULIANO PEREIRA DA SILVA
ORIENTADOR: PLÍNIO CAVALCANTI MOREIRA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JULIANO PEREIRA DA SILVA

ÁLGEBRA NA ESCOLA BÁSICA VERSUS ÁLGEBRA NA LICENCIATURA: ONDE SE ENCONTRA O X DA QUESTÃO?

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira

OURO PRETO
2015

S586a Silva, Juliano Pereira.
Álgebra na escola básica versus álgebra na licenciatura [manuscrito]: onde se encontra o X da questão? / Juliano Pereira Silva. - 2015.
107f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática.

1. Algebra - Ensino. 2. Matemática - Licenciatura. 3. Formação de professores. I. Moreira, Plínio Cavalcanti. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 37.02:51

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ÁLGEBRA NA ESCOLA BÁSICA VERSUS ÁLGEBRA NA LICENCIATURA: ONDE SE ENCONTRA O X DA QUESTÃO?

Autor: Juliano Pereira da Silva

Orientador: Plínio Cavalcanti Moreira

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Juliano Pereira da Silva e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 19/08/2015

.....

Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira

Profa. Dra. Samira Zaidan

Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos

2015

AGRADECIMENTOS

Deus, em sua infinita bondade, me concedeu os dons necessários para que eu conseguisse realizar o melhor trabalho em minhas limitações. Se hoje esta dissertação está escrita, a Ele toda a Glória!

Minha sincera gratidão ao meu orientador Plínio, que com paciência e generosidade me instruiu nos caminhos da escrita deste trabalho.

À minha família: meu pai, que mesmo do céu, está sempre a me olhar; minha mãe Izabel que com todo o carinho me confortou nos momentos de aflição; e minha maninha Graziana, que me assiste e torce com todas as forças que possui, meu eterno obrigado!

Aos membros da banca, Samira e Dilhermando, que contribuíram de forma efetiva para o melhoramento deste trabalho, meus agradecimentos.

Aos meus amigos da VI turma do Mestrado Profissional, que me ensinaram o valor da amizade na consecução de uma tarefa como esta. Eles foram, em grande parte, meu suporte quando pensava nas dificuldades que ainda enfrentaria. Vencemos a batalha amigos!
Em especial, um grande abraço a Alessandra, minha "motorista particular" com quem dividi as estradas de BH a Ouro Preto, com muitas histórias de alegrias e saudades!

Os amigos que carrego em meu peito foram essenciais nesta conquista. Mesmo não lhes dando a devida atenção, sei que continuaram a torcer por mim! Não vou colocar os seus nomes, pois melhor que estar neste papel, todos estão em meu coração.

A todos os mestres e professores que passaram em minha vida e deixaram suas marcas, se hoje sou quem sou, devo-lhes um carinhoso abraço e muito obrigado por tudo!

"E quando um professor (de Matemática) se dispõe a realizar uma pesquisa na área de Educação (Matemática), talvez seja porque ele vem problematizando sua prática, o que poderá levá-lo a se dedicar com afinco ao desenvolvimento de uma pesquisa originada dessa problematização (...)" Araújo e Borba.

RESUMO

Com o foco no ensino e na aprendizagem de Álgebra na escola, procuramos estabelecer um paralelo entre o que a literatura indica como conhecimento relevante na prática docente escolar e o conhecimento relevante na formação inicial de acordo com o currículo do curso de licenciatura em matemática. Tomamos como referência dos conhecimentos da formação o currículo do curso de licenciatura em matemática da UFMG e como referência dos conhecimentos relevantes para a prática docente escolar uma parte da literatura especializada sobre o ensino e aprendizagem de álgebra na Educação Básica, além de alguns trabalhos sobre as relações entre os saberes da prática e os saberes da formação. Basicamente, a pesquisa buscou responder as seguintes perguntas de investigação:

a) Quais são os conhecimentos matemáticos sobre álgebra trabalhados nas disciplinas obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais?

b) Como esses conhecimentos (identificados na Questão a) se relacionam com as demandas de conhecimento da prática docente em matemática na Educação Básica?

Analisamos o currículo da licenciatura em matemática da UFMG, selecionando, em primeiro lugar, as disciplinas que contêm elementos de conhecimento voltados para a formação em álgebra. Selecionadas as disciplinas, estudamos as correspondentes ementas e programas, incluindo as referências bibliográficas básicas e, a partir daí, produzimos uma resposta para a primeira questão de pesquisa. Para responder a segunda, identificamos, a partir de uma análise de parte da literatura especializada no ensino e aprendizagem da álgebra escolar, um conjunto de saberes que essa literatura examinada indica como relevante para a prática docente na educação algébrica escolar, traçando, então, um paralelo com o que havíamos construído como resposta à primeira pergunta. Os resultados indicam um distanciamento relativo entre os saberes da formação e os saberes da prática, no sentido de que a formação valoriza basicamente a construção de uma visão acadêmica da matemática escolar, enquanto as questões que o professor enfrenta na prática do trabalho com a álgebra na educação escolar demanda conhecimentos que vão muito além dessa visão acadêmica da álgebra.

Palavras Chaves: Educação Matemática, Licenciatura em Matemática, Saberes da formação docente, Saberes da prática docente, Educação Algébrica, Ensino de Álgebra, Álgebra

ABSTRACT

Focused on the teaching and learning of school algebra, we draw a parallel between what literature indicates as relevant mathematical knowledge in school teaching practice and the mathematical knowledge prescribed by a Brazilian university mathematics teacher education Program. Our reference for knowledge to teaching practice comes from specialized literature on teaching and learning of school algebra. Our research offers an answer to the following questions:

a) What are the mathematical knowledge of algebra taught in the compulsory subjects of the curriculum in Mathematics Degree at Universidade Federal de Minas Gerais? b) How this knowledge (identified in Question a) relate to the demands of mathematics teaching practice at school?

We analyzed the curriculum of the Mathematics teacher education program at UFMG, selecting the relevant disciplines, i.e., the ones that relate to prepare prospective teachers to work with algebra at school level. We then produced an answer to the first research question. To answer the second one, we identified, from the analysis of the literature on teaching and learning of school algebra, a set of knowledge that the examined literature indicates as relevant to teaching practice. Finally, we built comparison beetween the answers to the first and the second research questions. The results indicate a gap between the kind of mathematical knowledge listed in the teacher education curriculum and the one indicated as relevant to school teaching practice practice by the literature. We were led to the conclusion that the teacher education program values the construction of an academic vision of school mathematics, while the challenges teachers face in practice working with school algebraic education requires knowledge far beyond this academic view of mathematics.

Key Words: Mathematics Education, Mathematics Teacher Education, teachers professional knowledge in algebra, school algebraic education, Teaching of Algebra, school algebra.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Distribuição da carga horária do curso de Matemática, modalidade Licenciatura, da UFMG 35

Tabela 2. Grade Curricular do curso diurno de Licenciatura em Matemática UFMG..... 36

Tabela 3. Grade Curricular do curso noturno de Licenciatura em Matemática UFMG..... 37

Tabela 4. Ementa da Disciplina Cálculo I 41

Tabela 5. Ementa da Disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear 43

Tabela 6. Ementa da Disciplina Iniciação à Matemática 45

Tabela 7. Ementa da Disciplina Resolução de Problemas 47

Tabela 8. Ementa da disciplina Fundamentos de Álgebra 49

Tabela 9. Ementa da disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica 53

Tabela 10. Concepções de álgebra e o uso das letras (Usiskin, 1994,) 60

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Exemplo de atividade sobre generalizações (Booth, 1994) 62

Figura 2. Questões e seus índices de acertos, resposta correta e reposta típica (Lochhead e Mestre, 1994) 67

Figura 3. Quadro sobre as Vertentes do Pensamento Algébrico (Ponte, Branco e Matos, 2009) 70

Figura 4. Atividade sobre generalizações (Ponte, Branco e Matos, 2009) 71

Figura 5. Operações utilizando material concreto (Thompson, 1994) 74

Figura 6. Operações utilizando elementos pictóricos (Thompson, 1994) 74

Figura 7. Expressando problemas através de diagramas (Simon e Stimpson, 1994)...75

Figura 8. Da passagem da aritmética para a álgebra. (Demana e Leitzel ,1994) 76

Figura 9. Introduzindo as equações (Ponte, Branco e Matos, 2009) 78

Figura 10. Questão contextualizada sobre funções (Ponte, Branco e Matos, 2009) ... 85

Figura 11. Questões sobre funções e seus objetivos (Markovits, Eylon e Bruckheimer, 1994) 86

Figura 12. Quadro conceitual para análise do Raciocínio (Pereira e Ponte, 2011) 90

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO……..11
CAPÍTULO 1: REFERÊNCIAS TEÓRICAS ..……15
CAPÍTULO 2: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS..... 25
CAPÍTULO 3: O CURRÍCULO DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFMG 30
3.1 Um breve histórico do curso de Matemática da UFMG 30
3.2 O perfil do egresso curso de Licenciatura em Matemática da UFMG 31
3.3 A estrutura curricular do curso de Licenciatura atual 34
CAPÍTULO 4: OS CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS DA FORMAÇÃO..... 39
CAPÍTULO 5: AS DEMANDAS DA PRÁTICA ESCOLAR 58
5.1 Sobre concepções de álgebra e os significados das letras na simbologia algébrica58
5.2 Sobre os erros e dificuldades na álgebra 61
5.3 Sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico 69
5.4 Sobre a conquista da linguagem e dos significados dos símbolos algébricos 72
5.5 Sobre as relações entre álgebra e aritmética 75
5.6 Sobre o trabalho com as equações 77
5.7 Sobre o trabalho com a noção de proporcionalidade 81
5.8 Funções 83
5.9 Sobre o trabalho com Resolução de Problemas 87
5.10 Sobre as relações entre álgebra escolar e raciocínio lógico 91
5.11 Sobre conhecimentos matemáticos específicos para o ensino escolar 94
CONSIDERAÇÕES FINAIS 99
REFERÊNCIAS..……103

INTRODUÇÃO

Como professor de matemática da Educação Básica, com experiência profissional de mais de cinco anos, me inquieto ao olhar para trás e constatar falhas fundamentais em minha formação na licenciatura. Em consequência, me surgem questões gerais sobre a formação inicial do professor de matemática: será que os formandos dos cursos de licenciatura estão preparados para o exercício da docência em matemática numa sala de aula da escola, considerando todos os saberes que esse espaço demanda do professor? Egresso do curso Licenciatura em matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, senti na própria pele essa insegurança. A meu favor, tinha apenas a percepção de que esse era um sentimento compartilhado por outros colegas formandos, o que funcionou como um fator atenuante quando, pela primeira vez, adentrei esse espaço institucional. No início predominou esse sentimento de insegurança, a percepção de que não conhecia direito a prática para o exercício da qual pensava estar me preparando por quatro anos numa das melhores universidades do Brasil. Em seguida, já mais acostumado com a atividade docente na escola, a sala de aula continuou me propondo questionamentos e reflexões sobre a minha formação inicial. Onde estaria tudo aquilo trabalhado nas disciplinas universitárias? O corpo ordenado completo dos reais, as variáveis complexas, as geometrias não euclidianas, as integrais triplas, as transformadas de Laplace, tudo parecia se esvair no ar. Os olhares curiosos, mas nem sempre atentos às minhas falas, me levavam a descartar qualquer valorização desses conhecimentos universitários e me convidavam insistentemente a pensar em problemas matematicamente mais simples, porém dotados de outro nível de complexidade, como, por exemplo, a forma de conduzir um processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, voltado para alunos do sexto ou sétimo ano do Ensino Fundamental, trabalhar estratégias de resolução de problemas geométricos etc. O "não entendi, professor" soava como uma reprovação ao meu trabalho de ensinar, fazendo-me perceber, na sequência, que a prática docente escolar é um constante aprendizado, no exercício da qual fui me transformando e me formando professor outras vezes e de outras maneiras, agora sem pompas ritualísticas nem diplomas, me tornando mais curioso e atento em relação aos processos de aprender e de ensinar matemática, mais experiente, mais professor.

Esse rito de passagem, de licenciado a professor, de discente a docente, poderia ser menos traumático quem sabe, se nas licenciaturas, cursos voltados para a formação do professor da escola básica, as disciplinas específicas da matemática fossem trabalhadas tomando como referências as questões que o professor enfrenta em sua prática docente

escolar. No entanto, esse distanciamento entre os saberes da formação e as questões que se apresentam ao professor em sua prática na escola é renovadamente denunciado em quase todos os estudos sobre os cursos de licenciatura no Brasil, há pelo menos três décadas (ver Diniz, 2000; Ludke, 1994; Moreira e David, 2005). Este trabalho visa identificar aspectos desse distanciamento, no que diz respeito especificamente à formação e ao trabalho escolar em álgebra. Ainda que pretendamos nos restringir[1] ao campo da educação algébrica, vamos fazer delimitações mais específicas, na sequência deste texto.

O trabalho de formação escolar em álgebra na escola vem sendo objeto de atenção especial da comunidade nacional e internacional no campo da Educação Matemática há algumas décadas. De modo geral, o que as pesquisas empíricas e estudos teóricos têm mostrado é que quanto mais sabemos sobre o tema, mais questões surgem e se entrelaçam. Por exemplo, Usiskin (1994) discute as concepções acerca da álgebra na escola básica e nos remete à conclusão de que

> […] as finalidades do ensino de álgebra, as concepções que temos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas. As finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, as concepções diferentes da álgebra, as quais correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis (p.12-13).

Desta forma, se temos, por exemplo, uma situação em que é necessário encontrar uma expressão matemática que descreve uma recorrência, a letra que simboliza o estágio dessa recorrência representa um *valor genérico* dentro de um conjunto numérico determinado e a álgebra utilizada nessa situação pode ser vista como *aritmética generalizada.* Se temos uma situação-problema cuja tradução para a linguagem matemática conduz a uma equação a ser resolvida, a letra x simboliza uma *incógnita*, ou seja, um valor fixo, porém desconhecido, a ser determinado, e a álgebra associada a esse processo pode ser vista como decorrente do estudo da *estrutura do conjunto* no qual a equação deve ser resolvida. Quando, por outro lado, se afirma que a área de um círculo de raio r é dada por $A(r) = \pi r^2$, as letras A e r desempenham o papel de *variáveis* que se vinculam através da relação funcional dada e a álgebra correspondente se refere ao *estudo das funções*. No geral, Usiskin esquematiza quatro formas (não totalmente disjuntas) de se conceber a álgebra escolar: aritmética generalizada, ferramenta para a resolução de determinados tipos

[1] A partir deste ponto passamos a usar a primeira pessoa do plural no texto. Anteriormente vínhamos utilizando a primeira pessoa do singular porque se tratava de referências personalizadas.

de problemas, estudo das relações (e as consequências dessas relações) entre as medidas de duas grandezas que dependem uma da outra (especialmente as funções), estudo de certas estruturas abstratas.

House, por sua vez, relaciona a álgebra com a crescente modernização da sociedade. Para esse autor, o aumento do uso das tecnologias também exerce influência sobre as ideias acerca do que se entende por álgebra: "*É de se esperar que o novo básico de álgebra inclua também a manipulação e interpretação de planilhas eletrônicas* [...]" (House, 1994, p.5).

No que diz respeito à formação escolar, a álgebra percorre os documentos nacionais, os currículos básicos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, possuindo lugar de destaque no espaço de conhecimentos recomendados para esses níveis de escolarização básica (e.g., PCN, CBC/MG). Pelo menos duas características fundamentais da álgebra escolar se evidenciam nessas orientações curriculares: ela é vista como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas, ao mesmo tempo em que se enfatiza sua vinculação intrínseca com o desenvolvimento da capacidade de abstrair e de generalizar, o que é crucial na aprendizagem matemática.

Assim, dada a importância da álgebra na educação matemática básica, há um crescente número de pesquisas que procuram jogar luz sobre aspectos relativos ao seu ensino e aprendizado escolar, como também sobre a formação profissional para o trabalho docente com o tema. De modo geral, o ato de ensinar matemática na escola coloca o professor diante de situações que demandam saberes diversificados. O docente passa por uma formação universitária inicial que supostamente o prepararia para se situar no ambiente escolar em termos de gestão da classe, de planejamento das aulas, de avaliação do processo de ensino e de aprendizagem, de conhecimento das normas de funcionamento da escola, seus espaços e tempos etc. Cada um desses aspectos da atividade docente demanda conhecimentos específicos, embora, muitas vezes, imbricados. No que concerne o conhecimento matemático para a docência escolar, há uma série de estudos que nos ajudam a ampliar a visão que o toma como contido nos limites estreitos da disciplina "matemática" (Shulman, 1986, 1987; Moreira e David, 2005; Ball, Thames e Phelps, 2008, entre outros). Tais estudos alargam o horizonte puramente disciplinar do conhecimento matemático do professor da escola básica, de modo a incluir saberes que se encontram na interseção dos campos de conhecimento que envolvem a aprendizagem da matemática, os aspectos didático-pedagógicos vinculados ao ensino escolar da matemática e os aspectos que se referem às atitudes, valores e concepções dos alunos (e dos professores) a respeito

do ensino e da aprendizagem matemática e a respeito da própria matemática. No que se refere particularmente à álgebra, há pontos cruciais a serem trabalhados na formação do professor, devido às especificidades que envolvem o aprendizado escolar do tema. Como veremos adiante, a revisão da literatura especializada indica que o desenvolvimento do pensamento algébrico é um processo longo e complexo, envolvendo várias etapas e comportando a construção de habilidades que precisam ser trabalhadas em diferentes níveis no decorrer de todo o Ensino Básico.

No entanto, embora o esquema 3+1[2] aparentemente não vigore mais nas atuais formas estruturais dos cursos de licenciatura, ainda predomina, em grande parte desses cursos, uma estrutura que separa os "conteúdos matemáticos" e os saberes relativos ao ensino escolar da matemática (Moreira, 2012). Assim, é comum encontrar cursos de licenciatura em que os conhecimentos algébricos são trabalhados em disciplinas que tratam a álgebra como parte da matemática acadêmica enquanto, complementarmente, os aspectos relativos ao ensino escolar do tema são trabalhados (quando são) como parte de disciplinas com ementas amplas, do tipo Prática de Ensino ou Didática da Matemática, normalmente locadas nas Faculdades de Educação. O que queremos investigar nesse trabalho se refere ao que se perde, pelo menos potencialmente, em termos da formação algébrica do professor da Educação Básica, ao se desenvolver a preparação do futuro profissional docente em currículos que preservam esse tipo de estrutura nos cursos de licenciatura em matemática. Assim, a problemática em que se insere esse trabalho é a da preparação do licenciando para o trabalho com a educação algébrica na escola básica, focalizando o currículo do curso de licenciatura e o possível distanciamento dos saberes nele propostos em relação aos saberes efetivamente relevantes para a prática docente escolar em matemática.

[2] 3 anos de formação matemática seguidos de 1 ano de Didática, esquema que vigorou explicitamente no início dos cursos de Licenciatura no Brasil.

CAPÍTULO 1

REFERÊNCIAS TEÓRICAS

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), em um estudo sobre o ensino de álgebra na escola básica brasileira, afirmam :

> [...] o modo como a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra – de forma dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas, mostra que o seu ensino não tem recebido a devida atenção. (Miguel, Fiorentini e Miorim, 1992, p.40)

De acordo com esse artigo, desde a sua introdução no currículo escolar de matemática no Brasil (sec. XIX) até a década de 1960, a álgebra tinha um caráter instrumental, ou seja, voltava-se simplesmente para a resolução de alguns problemas típicos, sendo priorizadas as regras de manipulação mais ou menos mecânica dos símbolos utilizados nessas situações. Ainda segundo esses autores, na década de 1960, quando se inicia o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, toma corpo no ensino a tentativa de unificação dos campos elementares da matemática escolar, através da teoria dos conjuntos. Neste contexto, enfatiza-se a busca de rigor, especialmente nas aulas de álgebra, o que inclui a utilização de uma linguagem simbólica formalizada e precisa. Esse movimento teve seu declínio na metade da década de 1970, havendo, então, um retorno às aplicações da álgebra na resolução de problemas, através do estudo das equações (Miguel Fiorentini e Miorim, 1992). Percebe-se, no entanto, que o trabalho com a álgebra escolar, desenvolvido através de processos mecânicos e regras para operar com as expressões algébricas e resolver equações, acaba não fazendo sentido para os alunos e, muitas vezes, nem para os professores, anulando-se, assim, o objetivo inicial de mostrar a força da álgebra nas aplicações da matemática escolar (Fiorentini, 2013; Ponte, 2005).

Doerr (2004) comenta que diversas pesquisas indicam a ineficácia do ensino de álgebra como procedimentos desprovidos de significados e de propósito para os alunos. Na busca de uma alternativa a esse modelo de ensino, vem sendo proposto por pesquisadores do campo da Educação Matemática, entre os quais se destaca Luís Radford, o desenvolvimento de formas de pensamento algébrico que enfatizem a compreensão, a produção gradual (e provisoriamente personalizada) de uma simbologia adequada aos estágios desse desenvolvimento, até chegar, eventualmente, a um domínio significativo da linguagem algébrica padrão. Os estudos teóricos e empíricos de Radford levam-no à defesa da ideia de que o pensamento algébrico deve se desenvolver passando por diferentes

níveis ao longo de toda a trajetória escolar do aluno, incluindo os anos iniciais do Ensino Fundamental. Para esse autor, os símbolos formais padronizados (as letras) que costumam funcionar como os atores principais no ensino clássico da álgebra na escola, deveriam ceder lugar, num primeiro momento, a qualquer forma de discurso e de recurso de linguagem, como gestos, palavras, desenhos (Radford, 2011). A ideia é a de que uma criança que ainda não sabe representar uma "fórmula" utilizando a linguagem algébrica padrão possa ter seu pensamento e imaginação aguçados, por exemplo, a partir do envolvimento em tarefas de reconhecimento de padrões e regularidades que, por sua vez, podem ser descritos através de recursos simbólicos criados pela própria criança, já que esses recursos são, nestes casos, repletos de significados. Radford concebe esse processo geral de construção de representações semióticas das ideias da álgebra como "objetificação" do conhecimento algébrico e estabelece diferentes níveis de generalização associados a esse processo, os quais, por sua vez, associam-se a diferentes estágios de desenvolvimento do pensamento algébrico (Radford, 2011).

Outros pesquisadores (Ken, 1989; Lins e Gimenes, 1997; Blanton, 2008, Ponte, Branco e Matos, 2009) também enfatizam a necessidade de trabalhar com as crianças dos anos iniciais atividades que as levem a construir e desenvolver o pensamento algébrico. O desenvolvimento do pensamento algébrico deve, segundo esses autores, ser conduzido sem se prender ao formalismo de linguagem e de modo a articular o reconhecimento de padrões e regularidades em sequências e relações funcionais em geral com as formas de expressão simbólica dessas regularidades e relações funcionais observadas.

Outros trabalhos relacionados com o desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional e, portanto, com o ensino e a aprendizagem da álgebra escolar, se referem a uma compreensão, pelo professor, das dificuldades concretas dos alunos frente às tarefas que os colocam diante de situações que requerem o uso de letras em sentenças matemáticas convencionais. Kuchemann (1981) estabelece seis categorias de situações didáticas em que as letras utilizadas em sentenças matemáticas desempenham diferentes papéis do ponto de vista cognitivo, ou seja, estão associadas a diferentes estruturas cognitivas. Entre elas podemos destacar a letra como um valor fixo, mas desconhecido (incógnita), que pode ser determinado através de manipulações algébricas. Outro exemplo seriam as letras como variáveis, representando números não fixados, que podem assumir diferentes valores num mesmo problema, como, por exemplo, no caso do estudo das funções, onde há uma interdependência entre os valores que duas (ou mais) letras podem representar.

Os diferentes significados das letras, de acordo com o contexto e com as situações didáticas em que são utilizadas, reforçam a ideia de que para aprender álgebra nos anos finais da escolarização básica é preciso, eventualmente, dominar as sutilezas sintático-semânticas da linguagem específica que se utiliza. Os problemas em que os alunos cometem erros mais frequentemente são aqueles que envolvem uma transposição da linguagem escrita corrente para a linguagem matemática (Granell, 1997). Por outro lado, o desenvolvimento da capacidade de "tradução" da linguagem natural para uma linguagem matemática formalizada facilita, em dupla via, a percepção das relações sutis entre as possíveis interpretações dos dados e das hipóteses relevantes para a compreensão da situação, no contexto do enunciado do problema, assim como a percepção das abstrações inerentes ao tratamento matemático da situação.

Percebe-se, a partir dos estudos referidos anteriormente, que outro elemento chave nessa equação que relaciona a aprendizagem e o ensino escolar da álgebra é o tipo de formação que o professor vivencia no curso de licenciatura. É claro que os estudos universitários são apenas um estágio na formação profissional, que além deste estágio devem ser ponderados os vários elementos envolvidos no processo global de formação, desde a educação escolar do licenciando até o próprio exercício da atividade docente na escola, ao longo de sua carreira. Há um consenso na literatura especializada mais recente, de que a formação do professor continua se desenvolvendo durante todo o tempo em que se desenrola sua atividade em sala de aula. No entanto, nosso projeto toma como objeto de estudo as relações entre a formação inicial (licenciatura) e a prática profissional docente. Consideramos a formação inicial uma experiência universitária de formação profissional que, ao mesmo tempo em que é influenciada pela vida escolar pregressa do futuro professor, acaba por influenciar também a sua eventual formação em exercício.

Alguns estudos procuram entender as dificuldades vivenciadas na passagem do licenciando de aluno a professor. Essa experiência é vivida, normalmente pela primeira vez, ao longo da disciplina Estágio Supervisionado, quando o aluno tem a oportunidade de regência de uma classe de matemática na escola. Esse momento de passagem, embora amenizado pela supervisão compartilhada por dois profissionais, um professor da própria escola e o professor do curso de licenciatura, é permeado de incertezas e dúvidas, mas essas mesmas inseguranças geram reflexões e questionamentos interessantes. Fiorentini e Castro (2003) acompanham um aluno (Allan) do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. E relatam:

> Como aluno da licenciatura, Allan havia internalizado a ideia de que bastava ser um bom "resolvedor" de problemas e exercícios. Foi assim que ele aprendeu a ter sucesso nas disciplinas de matemática: é só resolver exercícios e passar nas provas. Mas precisou ir à prática de sala de aula, passar para o outro lado, para perceber que ser professor é diferente. Conclui, então, que tem ainda muito a aprender. Necessita, principalmente, saber mais sobre os conteúdos escolares [...] suas finalidades e as possibilidades formativas que eles têm [...] a licenciatura preocupa-se muito mais em formar um profissional que tenha o domínio operacional e procedimental da matemática do que um profissional que fale sobre a matemática, que saiba explorar suas ideias de múltiplas formas, tendo em vista a formação humana. (Fiorentini e Castro, 2003, p.137)

Este relato, juntamente com vários outros estudos sobre formação de professores de matemática, nos dá indicações de que o saber matemático do professor de matemática é diferente do saber matemático acadêmico. Não se trata, ao que parece, de uma simples questão deste último ser necessário, mas não suficiente. Os autores referem-se à experiência de Allan como uma vivência concreta que o levou à seguinte conclusão: conhecer matemática para se dar bem no curso de licenciatura é *diferente* de conhecer matemática para exercer bem a profissão docente na escola. Parece razoável pensar que o conhecimento matemático do professor, em sua prática concreta na Educação Básica, não contém necessariamente (e muito menos coincide com) uma soma de conhecimentos estanques sobre, por um lado, a matemática acadêmica e, por outro, o ensino da matemática escolar, como usualmente se apresenta nos cursos de licenciatura.

Doerr (2004) afirma que há "*carência de um corpo substancial de pesquisas sobre o conhecimento e a prática do professor no ensino de álgebra*" (p.268). Para tentar entender melhor o que tem sido feito em termos de pesquisas sobre o ensino de álgebra e a formação do professor para o trabalho específico de educação algébrica escolar, realizamos um levantamento no banco de dados da Capes, examinando teses e dissertações produzidas no Brasil, com o foco na formação do professor e na álgebra escolar. Para tanto, foram usados os termos "formação professor álgebra" sendo encontrados 59 trabalhos, dos quais 26 foram selecionados como de interesse para nossa pesquisa. Outra busca foi realizada com os termos "formação professor álgebra currículo", sendo encontradas 14 teses e dissertações, das quais foram selecionadas 8, sendo que 5 já estavam entre as 26 selecionadas anteriormente. Foi realizada, desta forma, uma primeira análise de 29 teses e dissertações e em várias delas se encontram extratos que poderiam constituir um discurso indicativo de que há falhas na formação universitária do professor, principalmente no sentido de que não se interliga a matemática acadêmica com as necessidades postas pela

prática docente escolar. Apresentamos a seguir uma descrição sintetizada de alguns desses trabalhos.

A dissertação de Mondini (2009), relata como os docentes que lecionam as disciplinas de álgebra nos cursos de formação de professores entendem a álgebra utilizada para a educação algébrica escolar. As entrevistas com esses professores formadores deixam claro, segundo os parâmetros da pesquisadora, um distanciamento entre a concepção de álgebra trabalhada na universidade e a concepção de álgebra relevante para o trabalho docente na educação escolar básica. Entre outros fatores identificados nas entrevistas, aponta-se a falta de um olhar específico para a formação do professor, o que resulta na oferta, na mesma classe, de disciplinas voltadas para a formação algébrica de alunos em diversos cursos, com diferentes perspectivas profissionais.

Linardi (2006) estuda como se estabelece, no ambiente escolar e no âmbito docente, a relação entre a matemática do matemático e a matemática do professor da escola básica. Um dos objetivos é analisar a adequação do que foi estudado na formação universitária em termos do uso na prática docente no Ensino Básico. Para isso são construídos instrumentos para identificar quais são os saberes profissionais utilizados por uma professora da escola básica. A autora conclui que a professora, sujeito do estudo, não organiza sua prática docente a partir dos conteúdos vistos na universidade. Ao final, propõe mudanças curriculares para as licenciaturas em matemática, as quais, segundo a autora, poderiam melhorar os cursos de formação de professores.

Ferreira (2014) em sua tese de doutorado busca identificar conhecimentos que são mobilizados pelos professores no ensino de álgebra, em salas de aula do 8º e 9º ano da escola básica. Ferreira utiliza os trabalhos de Ball e colegas como referência teórica, partindo da ideia de que há um conhecimento matemático específico para o ensino. Diversos exemplos de conhecimentos específicos para o ensino foram observados pela pesquisadora e dentre eles foram destacados dois aspectos importantes nas situações didáticas a partir das quais emergiram esses conhecimentos: a negociação com os alunos num processo de generalização, usando a linguagem algébrica (argumentação *versus* abordagem dedutiva) e a dualidade processo/objeto no trabalho com as expressões algébricas. A autora observa que muitos desses conhecimentos identificados por ela não fazem parte do conhecimento matemático normalmente recomendado para a formação docente, ou seja, não são reconhecidos como conhecimento matemático relevante para a prática docente escolar, embora tenham sido detectados em situações reais de sala de aula. Isso viria reforçar, segundo ela, o distanciamento existente entre os conhecimentos

trabalhados na formação e as questões que o professor enfrenta na sua prática profissional na docência escolar em matemática.

Voltando a trabalhos publicados em periódicos, sem vínculos com as teses relacionadas no levantamento no banco de dados da CAPES, Fiorentini (2005) discute as perspectivas da formação docente. Segundo esse autor, na medida em que os formadores e sua forma de ensinar funcionam como exemplos para os licenciandos, estes podem levar para sua prática docente as características do ensino que receberam na licenciatura. A maneira como as disciplinas específicas (matemática) e as didático-pedagógicas são lecionadas no processo de formação influenciaria, de acordo com Fiorentini, a forma como o futuro professor concebe os valores associados ao ensino da matemática na escola. No entanto, os formadores podem não perceber que suas atitudes e metodologias são parte integrante da formação pedagógica e didática do licenciando:

> Entretanto, o que tem acontecido é que os formadores de professores que ministram tais disciplinas geralmente não têm consciência de que participam dessa dupla – e eu diria múltipla – formação do futuro professor. Esse fato nos remete a defender que essa dupla/múltipla função do formador seja reconhecida por todos e assumida como uma função fundamental à formação do futuro professor. Isso, de certa forma, nos obriga, enquanto formadores de professores de Matemática – matemáticos ou educadores matemáticos – a desenvolver estudos, tanto em relação aos processos didático-pedagógicos do ensino e da aprendizagem da Matemática, quanto em relação à ampliação de sua cultura matemática sob uma perspectiva compreensiva, envolvendo aspectos históricos e epistemológicos deste campo de conhecimento (Fiorentini, 2005, p. 113-114)

As ementas das disciplinas juntamente com as metodologias utilizadas na licenciatura são questionadas pelo autor. Para ele, ao longo da negociação de saberes que se desenvolve no ambiente escolar, o professor deve estar apto a mobilizar e potencializar práticas que levem os alunos a compreender a matemática como instrumento útil em sua vida social, não apenas como instrumento necessário para desenvolver mais conhecimento a respeito da própria matemática. Fiorentini sugere que as disciplinas matemáticas da licenciatura sejam articuladas de modo a promover a investigação matemática em sala de aula, propondo ideias e caminhos que o licenciando possa desenvolver em sua prática docente futura, de modo a, entre outros objetivos, aguçar a curiosidade dos alunos e envolvê-los no processo de aprender matemática. Desta forma, a matemática não seria vista como algo pronto e acabado, mas o aluno vivenciaria a experiência de perceber a sua construção a partir de reflexões, vinculadas a situações que demandam essa construção. O licenciando poderia, assim, segundo o autor, repensar a matemática que irá ensinar, colocando em

xeque a forma como aprendeu a matemática em seus anos de escolarização. Ainda segundo Fiorentini, isso geraria ganhos aos futuros docentes, no sentido de promover a discussão de ideias que trouxeram para a formação universitária como ex-alunos da escola básica, as quais, se não postas em questão na formação profissional, podem se reproduzir na sua prática docente, perpetuando julgamentos, práticas e valores muitas vezes inadequados ao ensino e à aprendizagem matemática. Fiorentini conclui:

> Se, de um lado, pode haver uma perda em relação à sistematização e formalização rigorosa dos conceitos matemáticos a serem ensinados e aprendidos, de outro, o futuro professor viverá um ambiente rico em produção e negociação de significados, aproximando-se, assim, do movimento de elaboração/construção do saber matemático. (Fiorentini, 2005, p.112)

O enfoque dado na licenciatura a essa negociação e ressignificação de saberes oriundos da escola básica pode, segundo o autor, ser uma experiência animadora como possibilidade de superação do formalismo excessivo, além de promover um conhecimento matemático mais adequado para a formação do futuro profissional docente. Um exemplo dado por Fiorentini (2005, p.112-113) se refere à abordagem das equações na escola. Ele diz que muitos licenciandos em estágios de regência não dão importância a uma discussão sobre os diferentes significados do sinal de igual, ao trabalharem com as equações. Imaginam, quando muito, que a ideia de igualdade associada ao equilíbrio de uma balança é suficiente, do ponto de vista didático. Entretanto, como veremos no Cap. 5, o sinal de igual numa equação tem significado bastante diferente, em relação a uma série de outras situações didáticas em que aparece envolvendo a simbologia algébrica, especialmente as letras. Por essas razões, Fiorentini recomenda como possibilidade de enriquecimento da formação do professor de matemática na licenciatura, analisar e discutir episódios reais de sala de aula *"seja através de vídeos de aulas, seja através de episódios ou narrativas de aulas, que podem ser extraídas de relatórios de pesquisa sobre a prática, do diário de campo do próprio licenciando quando for fazer observações nas escolas e, principalmente, quando trouxerem relatos sobre a própria prática docente, durante a fase de estágio de regência de classe (Fiorentini, 2005, p.113).* Valls e Fiorentini (2009) também recomendam o uso de gravações de vídeos e apresentação dos mesmos em disciplinas dos cursos de formação de professores, de modo a viabilizar as discussões, relacionando de forma direta, teoria e prática. O licenciando, em seu processo de formação, poderia discutir teoricamente os saberes da prática, pois estes materiais funcionariam como fontes de conhecimentos utilizáveis em situações práticas de ensino, sem que o aluno esteja vivendo

o momento na própria regência, podendo, assim, reconsiderar e avaliar posturas e formas de introduzir e/ou problematizar o ensino de determinados conceitos, técnicas e processos que serão objeto de trabalho futuro na escola.

Ball e seus colegas pesquisadores da University of Michigan, nos anos 1990, introduzem na literatura o conceito de Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), derivando-o da noção de Pedagogical Content Knowledge (PCK), desenvolvida por Shulman (1986, 1987). Ball, Thames e Phelps (2008) descrevem o MKT a partir de estudos diretos da prática docente escolar, tomando como fundamento as questões que se apresentam ao professor nessa prática. Os autores identificam quatro domínios de conhecimento como principais constituintes do MKT: o conhecimento comum do conteúdo (CCK - Common Content Knowledge), o conhecimento matemático especializado (SCK - Specialized Content Knowledge), o conhecimento do conteúdo e do aluno (KCS - Knowledge of Content and Students), o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT - Knowledge of Content and Teaching). O primeiro (CCK) seria basicamente aquilo que o professor de matemática ensina aos alunos na escola (operações com frações, equações e inequações de primeiro e segundo graus, teorema de Tales etc.). O segundo (SCK) se refere aos saberes matemáticos que o professor tem que conhecer para ensinar o primeiro, mas que não ensina diretamente ao aluno (por exemplo, que a letra, numa determinada situação, assume o papel de incógnita, em outra situação assume o papel de variável e que esses diferentes papeis correspondem a diferentes estruturas cognitivas - de acordo com os estudos de Kuchemann, 1981). O terceiro domínio do MKT, o KCS, engloba o conhecimento do professor a respeito das relações dos alunos com a aprendizagem matemática. Inclui, por exemplo, o professor saber antecipar que um determinado problema pode ser motivador para os alunos e/ou que os alunos terão maior ou menor dificuldade ao realizarem uma determinada tarefa matemática. Por fim, o quarto domínio (KCT) refere-se, por exemplo, aos conhecimentos do professor a respeito de uma determinada sequência didática ser ou não adequada (e porque) para o trabalho com um conceito matemático particular. Em suma, a ideia de constituição do MKT seria a junção de componentes do saber docente como as citadas acima, formando, então, um corpo de conhecimentos específico para o trabalho profissional de ensinar matemática na escola, diferenciado, portanto, do conhecimento matemático potencialmente útil para o engenheiro, para o matemático, para o físico etc. Entretanto, ainda há muito a investigar neste âmbito, principalmente no que tange particularmente ao trabalho com temas específicos da matemática, como a álgebra escolar, a geometria, os sistemas numéricos etc.

Os trabalhos aqui revisados mostram que a discussão sobre os saberes considerados relevantes para a formação inicial do professor de matemática ainda precisa ser aprofundada em várias direções. Como vimos, há uma imensa gama de estudos e pesquisas que podem ajudar a nortear essa discussão, focalizando diferentes aspectos. O aspecto que selecionamos neste estudo refere-se às relações entre os conhecimentos matemáticos trabalhados no curso de Licenciatura e os conhecimentos matemáticos diretamente associados às questões que se apresentam ao professor na prática docente na Educação Básica. Moreira (2004), em sua tese de doutorado, aborda o distanciamento entre os saberes trabalhados na licenciatura e os saberes demandados pela prática docente escolar. Focando especificamente o caso dos sistemas numéricos e o currículo do curso de licenciatura em matemática de uma grande universidade brasileira, Moreira sintetiza a conclusão geral do seu estudo da seguinte forma:

> *[...] a formação matemática na licenciatura, ao adotar a perspectiva e os valores da matemática acadêmica, desconsidera importantes questões da prática docente escolar que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores. As formas do conhecimento matemático associado ao tratamento escolar dessas questões não se identificam — algumas vezes chegam a se opor — à forma com que se estrutura o conhecimento matemático veiculado no processo de formação. Diante disso, coloca-se claramente a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da matemática científica e da matemática escolar nesse processo* (Moreira e David, 2005, p.103).

O objetivo desta pesquisa é compreender melhor o distanciamento apontado por Moreira e as formas segundo as quais ele se manifesta, no que se refere à preparação docente para o trabalho com a educação algébrica na escola básica. Em outras palavras, fazer uma espécie de comparação entre o conhecimento matemático veiculado no processo de formação e o conhecimento matemático específico para o ensino na Educação Básica, uma vez que esses dois tipos de conhecimento matemático nem sempre coincidem ou se complementam e, mais do que isso, podem até ser conflitantes (Moreira e David, 2008). Na impossibilidade de proceder a essa comparação considerando a questão na generalidade em que está posta acima, tomamos como parâmetro de formação o curso de licenciatura em matemática da UFMG e, dentro do conhecimento matemático aí veiculado, selecionamos aquilo que se refere à álgebra, uma vez que, como vimos, este é considerado

um tema fundamental na formação escolar e, portanto, pelo menos em princípio, deve também ser fundamental na formação do professor. Para identificar o conhecimento matemático específico para o ensino (do tema escolhido) na Educação Básica, reportamo-nos à literatura especializada sobre educação algébrica na escola. Os procedimentos metodológicos utilizados e as delimitações que fizemos para tornar possível uma resposta fundamentada para as questões de pesquisa serão apresentados em detalhes no capítulo seguinte. Listamos a seguir nossas questões de pesquisa, as quais definem uma investigação que se situa, conforme mostrado neste capítulo, como uma contribuição para a literatura especializada sobre formação de professores de matemática, no que se refere ao trabalho docente com a educação algébrica escolar. Eis as questões que nos propusemos neste estudo:

Questão 1: Quais são os conhecimentos matemáticos sobre álgebra trabalhados nas disciplinas obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais?

Questão 2: Como esses conhecimentos (identificados na Questão 1) se relacionam com as demandas de conhecimento da prática docente em matemática na Educação Básica?

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Assim como os bacharelados, as licenciaturas têm suas disciplinas, ementas, programas e carga horária regulados por diversos documentos nacionais do Ministério da Educação e da universidade em que o curso é ministrado. Um desses documentos é o Projeto Pedagógico do curso, em que se apresentam, entre outros elementos importantes da formação, os conhecimentos considerados fundamentais na preparação para o exercício profissional docente. Considerando que o elemento norteador básico das interpretações e das ações pedagógicas dos professores formadores são as ementas das disciplinas, e que este elemento permanece fixo durante o ciclo de formação, consideramos serem essas ementas uma fonte de dados adequada e suficientemente confiável para a discussão que nos propomos desenvolver. Assim, o PPP do curso de Matemática da UFMG será uma importante fonte de dados utilizada em nossa pesquisa.

Observamos, ainda, que essas ementas mostram quais são os elementos considerados importantes (na formação profissional docente) pelos formuladores do currículo, uma vez que foram objeto de discussão em várias instâncias da instituição até serem incorporadas ao Projeto Pedagógico do curso. Pode-se inferir então que, de modo geral, a concepção de formação do professor que a instituição valoriza esteja expressa no projeto pedagógico do seu curso de licenciatura e, em particular, na grade curricular e nas ementas das disciplinas, o que legitima nossa escolha de fonte de dados.

As universidades possuem certa autonomia para criar os currículos de seus cursos, desde que estejam de acordo com as diretrizes nacionais que listam alguns elementos específicos a serem contemplados nesses cursos. Assim, as disciplinas que fazem parte da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática podem diferir, em suas ementas e/ou carga horária, de uma universidade para outra. Nesta pesquisa, selecionamos o currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais para servir de base de comparação, na análise das relações entre os saberes da formação e os saberes considerados relevantes para a prática profissional docente escolar (em matemática). A escolha dessa universidade se deve, entre outros elementos, ao acesso facilitado, no caso de eventual necessidade de contato mais frequente na coleta e análise dos dados, tendo em vista que o pesquisador reside em Belo Horizonte e se graduou no curso pela mesma instituição. Além disso, é importante considerar que a UFMG se destaca como uma das mais conceituadas universidades brasileiras, aparecendo também, em

rankings internacionais, como uma das 500 melhores universidades do mundo[3]. Na avaliação de cursos superiores brasileiros, feita pelo Inep, onde se consideram vários aspectos do funcionamento geral dos cursos, o de Licenciatura em Matemática da UFMG recebe a nota máxima (5).

No que segue, descrevemos os procedimentos de produção e coleta de dados para a elaboração de nossas respostas para as questões de pesquisa. A fim de facilitar a leitura, o acompanhamento e a avaliação da pertinência dos procedimentos utilizados, reproduzimos aqui as duas perguntas de investigação, como apresentadas no final do Capítulo 1:

Questão 1: Quais são os conhecimentos matemáticos sobre álgebra trabalhados nas disciplinas obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais?

Questão 2: Como esses conhecimentos (identificados na Questão 1) se relacionam com as demandas de conhecimento da prática docente em matemática na Educação Básica?

Para respondermos à primeira pergunta, utilizamos como fonte de dados, acessando-o através do site do Departamento de Matemática da UFMG, o Projeto Politico-Pedagógico do Curso de Matemática (modalidade Licenciatura). Neste documento se encontram, entre outras informações e considerações relativas ao curso, a sua grade curricular, juntamente com as ementas e programas das disciplinas, além das Referências Bibliográficas recomendadas para cada uma delas.

Procuramos identificar, inicialmente através de um exame da grade curricular, as disciplinas (obrigatórias) que pudessem tratar, no seu desenvolvimento, algum conhecimento matemático de relevância para este estudo. É sabido que a álgebra é uma ferramenta de solução de problemas matemáticos e, de modo mais geral, pode ser bastante utilizada em vários estudos relevantes em praticamente todas as disciplinas do curso, mas nos concentramos, efetivamente, nas disciplinas que tratam do *ensino da álgebra* ao longo do curso, considerando-a como um área do conhecimento matemático, com suas reconhecidas especificidades.

Selecionadas as disciplinas neste primeiro momento, examinamos as respectivas ementas e programas, a fim de detectar as finalidades, dentro da proposta de formação

[3] http://g1.globo.com/educacao/noticia/2014/08/brasil-tem-6-universidades-em-ranking-de-500-melhores-do-mundo.html

inicial do professor, de cada uma das disciplinas selecionadas e procuramos identificar o que elas trazem de importante para a formação algébrica do futuro professor de matemática da Educação Básica, segundo as perspectivas do projeto pedagógico do curso. Para maior precisão, examinamos também a bibliografia básica indicada nas ementas.

Para responder à segunda pergunta procedemos da seguinte maneira: as demandas de conhecimento da prática docente escolar relacionadas ao tema em questão foram detectadas a partir de uma revisão da literatura. Reforçamos que os textos utilizados não formam necessariamente uma teoria (ou um referencial teórico) que funcionaria como uma lente para olharmos os dados, mas são os próprios dados (demandas de conhecimento sobre álgebra da prática docente na escola básica) que serão usados para comparar com o que o currículo da UFMG considera relevante na formação do professor, sobre o mesmo tema. Os dados referentes a essas demandas poderiam ser obtidos através de várias fontes alternativas (observação direta de aulas na escola, entrevistas com professores experientes etc.), mas preferimos a identificação dessas demandas a partir da literatura porque consideramos que seria uma fonte mais abrangente, ampla e diversificada. Observamos, no entanto, que as pesquisas que nos alimentaram como fonte de dados têm objetivos próprios que, na grande maioria dos casos, se não em todos eles, não coincidem com os objetivos deste estudo. O que fizemos foi basicamente extrair de uma parte da literatura de pesquisa em ensino e aprendizagem da álgebra escolar, demandas de conhecimento profissional docente que, em tese, seriam importantes para que o professor reconheça determinadas questões que se lhe apresentam na prática docente escolar, relativas ao tema. Além de reconhecer essas questões como importantes para a educação algébrica escolar, esses conhecimentos lhes permitiriam dar um tratamento didático "eficiente", de acordo com os resultados dos estudos empreendidos por pesquisadores qualificados da comunidade nacional e internacional da Educação Matemática. Enfatizamos, assim, que, embora isso não seja comum em pesquisas educacionais, utilizamos a literatura também como fonte de dados, além das suas funções usuais como fonte de referências teóricas para o exame da problemática a ser estudada e também como uma espécie de vitrine que nos mostra o que já se estudou sobre a temática da pesquisa. Assim, para dar um exemplo, uma pesquisa que visava compreender as dificuldades dos alunos na resolução de equações nos fornece dados sobre saberes docentes importantes para lidar com essas dificuldades. Evidentemente, a ideia não foi (e nem poderia ser) esgotar a literatura existente sobre o tema em questão. Selecionamos uma quantidade de dados que consideramos suficientes para subsidiar com fundamento e riqueza a nossa análise.

A partir desses procedimentos, o que fizemos então foi uma comparação entre o que encontramos como conhecimentos relevantes para o processo de formação, segundo o projeto pedagógico do curso, e os conhecimentos relevantes para a prática, segundo os estudos da literatura especializada sobre o tema. Uma vez que formulamos a segunda pergunta de investigação em termos das *relações* entre conhecimentos, pensamos que caberia oferecer uma breve referência, a título de explicação, a respeito do sentido dessa expressão (relação entre os conhecimentos de formação e as demandas da prática) no enunciado da referida questão de pesquisa. Pensamos da seguinte forma: a) numa hipótese extrema, poderíamos chegar à conclusão de que a relação é de distanciamento total entre os conhecimentos comparados, ou seja, nada do que é considerado relevante para a formação é considerado relevante na prática docente escolar; b) noutro extremo, poderíamos imaginar uma coincidência total, ou seja, tudo que o currículo de formação considera relevante, a literatura examinada também considera relevante e vice-versa; c) mais realisticamente, imaginamos que algo intermediário aconteceria, ou seja, haveria alguma relação de proximidade e, provavelmente, alguma de distanciamento entre os conhecimentos comparados (a comparação é no sentido de identificar essas relações). O objetivo da comparação no estudo é exatamente dimensionar essas proximidades e distanciamentos, qualificando-os, na medida do possível, tendo como referência a finalidade do curso que é formar profissionais para o trabalho na prática docente escolar em matemática. Assim se constituiu, então, a nossa resposta para a segunda questão de pesquisa.

Os procedimentos aqui descritos se basearam no que se denomina pesquisa documental, onde os dados são encontrados em documentos, tratados cientificamente ou não, e que nos fornecem subsídios para a elaboração de respostas fundamentadas às questões da pesquisa. A confiabilidade dos dados da literatura tem suporte no fato de que nos apoiamos em resultados de estudos já tratados cientificamente por outros pesquisadores, embora seja importante ressaltar que a seleção dos estudos e a interpretação de seus resultados corram por conta do pesquisador que desenvolve esta pesquisa aqui relatada. O projeto pedagógico rege toda a estrutura de um curso universitário, sendo produto de discussões de uma comunidade acadêmica, podendo, desta forma, também ser considerado confiável como fundamento para nosso estudo (mesmas observações quanto às interpretações e seleções inerentes à coleta dos dados a partir da análise do projeto pedagógico). Assim, ao lado de questões relativas à inevitável subjetividade do pesquisador, presente em toda pesquisa qualitativa, acreditamos ter dado um tratamento

científico adequado ao processo de coleta e análise dos dados, de modo a obter resultados tecnicamente fundamentados e confiáveis, na medida do possível, numa pesquisa dessa natureza.

CAPÍTULO 3

O CURRÍCULO DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFMG

3.1 Um breve histórico do curso de Matemática da UFMG

O curso de matemática da UFMG teve seu início na Faculdade de Filosofia em 1941, e, de acordo com os documentos da época, não havia distinções entre as modalidades bacharelado e licenciatura. Pesquisas que se referem a este período indicam que, após a conclusão de um ciclo de três anos, os interessados em ser professores deveriam cursar mais um ano de estudo das denominadas disciplinas didáticas (cf. PPP do curso de Matemática, p.2). A conhecida forma dos cursos de licenciatura, denominada "3 + 1" (3 anos de disciplinas matemáticas específicas e 1 ano de disciplinas pedagógicas), é objeto de registro oficial, nos documentos relativos ao currículo do curso, a partir de 1957. Deste período até 1968, a principal mudança acontece neste mesmo ano (1968): o curso deixa a Faculdade de Filosofia e passa a ser ofertado pelo recém criado Instituto de Ciências Exatas (ICEX). As disciplinas pedagógicas passam a ser de responsabilidade da Faculdade de Educação. As reformas vivenciadas neste período de transição entre as faculdades de Filosofia, de Educação e o ICEX geraram mudanças significativas na licenciatura:

> É importante mencionar que a partir desse currículo [de 1968], passam a constar do curso de Licenciatura duas disciplinas de conteúdo matemático especialmente voltadas para a formação do futuro professor, localizadas no 5º e 6º períodos e denominadas, respectivamente, Fundamentos da Matemática Elementar I e Fundamentos da Matemática Elementar II. Por outro lado, a formação matemática do licenciando passa a diferenciar-se completamente da do bacharelando (...). (PPP do curso de Matemática, p.3)

Em 1978, foram aprovados novos currículos para as modalidades bacharelado e licenciatura, que passavam a se diferenciar desde o primeiro período. Para a licenciatura, as mudanças tinham, segundo o texto do PPP atual, o intuito de tornar as disciplinas de cunho matemático mais adequadas para a formação do professor do Ensino Secundário (hoje correspondente ao segundo segmento do Fundamental). As disciplinas didáticas continuavam a ser ministradas pela Faculdade de Educação, no último ano dos 4 que compunham a totalidade do curso. Ainda segundo o PPP do curso atual, alguns problemas foram detectados pela diferenciação nos primeiros períodos entre as duas modalidades, o que levou o Colegiado do curso, em 1984, a estudar mudanças curriculares que vieram a ser implantadas em 1987. Destas mudanças constam a proposta de disciplinas comuns à licenciatura e ao bacharelado nos três primeiros períodos do curso. A hipótese de que os

ingressantes não possuíam maturidade matemática nem formação sólida na matemática da escola básica levou a que fossem inseridas nos currículos três disciplinas que visavam desenvolver uma nova visão sobre a matemática.

> Dessas três disciplinas, duas seriam constituídas por resolução de problemas, uma delas com ênfase em problemas algébricos e a outra em problemas geométricos. A terceira disciplina[4], com os alunos divididos em grupos de dez, seria o local para o estudo de textos de Matemática que buscariam suprir as falhas da formação de 2º grau dos estudantes. A disciplina visaria ainda, que o aluno aprendesse "o que vem a ser a Matemática enquanto Ciência", e que adquirisse "elementos para começar a fazer sua opção entre o Bacharelado e a Licenciatura[5]." (PPP do curso de matemática, p. 4)

As mudanças ocorridas no currículo neste momento refletem a fase de redemocratização que acontecia na sociedade brasileira na década de 80. Dentro desse movimento de redemocratização houve quem se interessasse por repensar criticamente a preparação dos profissionais da docência escolar, visando estabelecer uma maior aproximação entre o processo de formação e a prática. O diálogo entre as duas instâncias institucionais responsáveis pela licenciatura - o Departamento de Matemática e a Faculdade de Educação - gerou frutos através da criação de três novas disciplinas em 1987 "(Matemática e Escola I, II e III), cujo objetivo era constituir um espaço institucionalizado para que alunos e professores da Licenciatura da UFMG se aproximassem do cotidiano da profissão de professor de Matemática." (PPP do curso de matemática, p.5). De acordo com a proposta, elas seriam ministradas em conjunto por um professor do departamento de matemática e um professor da FaE, além de contar com visitas às escolas da rede pública. Essas disciplinas representaram, à época, um avanço potencial na busca de integrar a formação com a prática, ainda que esteja por ser feita uma leitura crítica dos seus reais efeitos nessa integração. De todo modo, há que se ter em conta os limites de uma mudança curricular que se mantém essencialmente dentro da concepção formal do 3+1 (ver Moreira, 2012).

Em 1994 a modalidade Licenciatura passou a ser ofertada no turno da noite.

3.2 O perfil do egresso curso de Licenciatura em Matemática da UFMG

O principal objetivo do curso de Licenciatura em Matemática é formar o professor para a docência na escola básica regular, ou seja nos Ensinos Fundamental (segundo

---

[4] No currículo implementado, a disciplina recebeu o nome de Iniciação à Matemática.
[5] Colegiado do Curso de Matemática. *Proposta de novo currículo para o curso de Matemática*, 1986, p. 13.

segmento) e Médio. Os eixos que orientam a formação do professor na UFMG são assim descritos no Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática (modalidade licenciatura):

> - O entendimento da realidade e funcionamento dos lugares onde atuará, ou seja, a escola básica e instituições relacionadas, prioritariamente as escolas públicas;
> - A indivisibilidade entre ensino, pesquisa e extensão;
> - Ao longo de todo o tempo da formação do licenciando estarão em foco a aprendizagem, como processo de construção de conhecimentos, habilidades e valores em interação com a realidade e com os demais indivíduos, onde são colocadas em uso capacidades pessoais; os conteúdos, como meio e suporte para a constituição das competências; a avaliação, para possibilitar o diagnóstico de lacunas, mesurar os resultados e redefinir ações quando se fizer necessário. (p. 7)

Do docente formado pela instituição espera-se muita coisa, mas uma análise minimamente detalhada do perfil dos ingressantes (Moreira et. al. 2012) revela as idealizações presentes na descrição do perfil do egresso. Vejamos: espera-se que tenha um perfil crítico frente aos desafios de ensinar, que tenha uma postura que busque o aperfeiçoamento, o aprimoramento de seus métodos de ensino e avaliação, que estabeleça relações entre o ensino e a pesquisa. De forma mais detalhada o PPP do curso espera que o futuro professor de matemática:

> - Oriente sua atuação profissional pela ética. Enxergue na diversidade e heterogeneidade dos seus alunos fator que potencialize trabalhos em equipe, que solicitam dos alunos senso de colaboração e responsabilidade. Realize ainda observações individualizadas e elabore estratégias de atendimento particularizado quando se fizer necessário.
>
> - Crie, implemente, avalie e aperfeiçoe projetos de ensino e de aprendizagem, articulando-os com outras áreas do conhecimento e outras esferas de ação, tendo como parâmetro o projeto pedagógico da escola, inclusive quanto à sua construção e atualização, entendendo que este documento deva ser pensado coletivamente com toda a comunidade escolar;
>
> - Seja capaz de analisar as práticas escolares, entre elas sua própria prática profissional, e tenha autonomia e iniciativa de buscar formação complementar à inicial, procurando sempre atualizar seus conhecimentos técnicos e metodológicos, para que a qualidade de seu trabalho esteja em constante evolução;
>
> - Compreenda as potencialidades de raciocínio lógico em cada faixa etária, de modo que possa favorecer o desenvolvimento de raciocínio de seus alunos sem

extrapolar as exigências de rigor a ponto de gerar insegurança em relação à Matemática;

- Propicie situações onde sejam possíveis trabalhos conjuntos com professores de outras áreas, com diretores e supervisores e outras parcerias, incluindo a própria universidade;

- Possua familiaridade e reflexão sobre metodologias e uso de materiais didáticos complementares, incluindo o uso de computadores e o compromisso com a inclusão digital; tenha maturidade para decidir, em cada situação específica o que usar para maximizar a aprendizagem dos seus alunos; crie ou adapte novos procedimentos quando se fizer necessário, inclusive aqueles que visam a motivação dos alunos para estudar Matemática; avalie de forma continuada seus próprios resultados e os resultados de seus alunos. (p.9)

Além deste perfil de profissional, espera-se que o mesmo possua determinadas competências e habilidades a seguir discriminadas:

- compreensão do raciocínio geométrico e do raciocínio lógico formal dedutivo, do raciocínio analítico e da capacidade de fazer estimativas, do raciocínio algébrico e da capacidade de validar soluções, do raciocínio probabilístico, dos métodos de pesquisa em Matemática e Educação;
- clareza do papel dos raciocínios típicos da Matemática em outras ciências e outras áreas e que sua boa utilização é fundamental para o exercício pleno da cidadania;
- capacidade de realizar a leitura correta do desenvolvimento cognitivo de crianças, adolescentes, jovens e adultos, incluídas aí especificidades dos alunos com necessidades educacionais especiais e das comunidades indígenas;
- conhecimento das competências esperadas para alunos da educação básica, de Matemática e outras áreas, na leitura dos Parâmetros, leis específicas e textos relacionados;
- análise de projetos de ensino e aprendizagem, inclusive interdisciplinares, observados seus aspectos teóricos de concepção e sua evolução durante a sua aplicação na escola; capacidade de criar projetos, criticar e aperfeiçoar os já existentes;
- compreensão histórica do papel social da escola e de como a matemática com ele se relaciona;
- capacidade de avaliar e desenvolver materiais didáticos em geral, sejam livros, material concreto, *softwares*, vídeos, áudios e outros;

O profissional formado pela UFMG ainda deve ter uma postura crítica, centrada no eixo ensino/pesquisa. Ele deve ser capaz de investigar em suas próprias aulas quais são as

metodologias que promovem uma melhor aprendizagem para os alunos. Ele deve ser capaz de analisar os fatores que afetam o aprendizado, sejam eles internos ou externos à sala de aula. Enfim, segundo o PPP deve ser um profissional capacitado que se questione frente aos conteúdos que lhe foram ofertados na universidade e os que ele aplicará em sua prática docente.

Resta saber se o processo de formação descrito no PPP lhe proporcionará a possibilidade real de acesso a todas essas capacidades, habilidades, competências, atitudes e conhecimentos. Vejamos como se estrutura essa formação, em termos das disciplinas que deverão proporcionar, em seu conjunto, o desenvolvimento do perfil profissional descrito.

3.3 A estrutura curricular do curso de Licenciatura atual

A estrutura do curso, na sua distribuição e composição de disciplinas, bem como em sua carga horaria, é regulada pelas seguintes diretrizes do Conselho Nacional de Educação:

- as Diretrizes sobre Carga Horária dos Cursos de Licenciaturas, estabelecidas pela Resolução CNE/CP 2, de 19/02/2002, do Conselho Nacional de Educação.

- as Diretrizes Curriculares para os cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática estabelecidas pela Resolução CNE/CES 3 de 18/02/2003.

O curso de Licenciatura em Matemática da UFMG é ofertado em dois horários, no noturno e no diurno. A distribuição de carga horaria e tempo do curso em semestres são resumidos no quadro a seguir:

Curso	**Licenciatura Diurna**	**Licenciatura Noturna**
Turno	Diurno	Noturno
Tempo de integralização	8 semestres	9 semestres
Carga Horária Total	2835 h	2835 h
Total de Disciplinas	35	35
Total de créditos	165	165
Número mínimo de créditos por semestre	14	12
Tempo padrão de integralização	8 semestres	9 semestres

Tempo máximo de integralização	12 semestres	14 semestres

1 crédito =15 horas-aula

Tabela 1. Distribuição da carga horária do curso de Matemática, modalidade Licenciatura, da UFMG

Tempo máximo de integralização = Total de créditos / n^{0} mín. de créditos por semestre.

(PPP do curso de Matemática, p.10 - 11)

No quadro anterior podemos perceber que os cursos nos horários diurno e noturno apresentam a mesma carga horária, diferindo apenas na distribuição das disciplinas ao longo do curso. Algumas disciplinas são ofertadas em períodos diferentes no noturno em relação ao diurno e vice e versa. As disciplinas distribuídas pelos períodos semestrais, bem como as respectivas cargas horárias, estão apresentadas nos quadros a seguir para os dois turnos. Este currículo tem vigência a partir de 2008.

Grade curricular da Licenciatura em Matemática Diurna

Período	Disciplinas	Conteúdos curriculares de natureza científico – cultural (min. legal: 1800h)	Prática como componente curricular (min. legal: 400h)	Estágio curricular supervisionado (min. legal: 400 h)	Total de horas por período
1	Cálculo Diferencial e Integral I (6)	90 h			
	Geometria Anal. e Álgebra Linear (6)	90 h			
	Iniciação à Matemática (4)	60 h			
	Resolução de Problemas (4)	60 h			300 h
2	Cálculo Diferencial e Integral II (4)	60 h			
	Fundamentos de Mecânica (4)	60 h			
	Programação de Computadores (4)	60 h			
	Fundamentos de Álgebra (6)	90 h			
	Introdução. à Física Experimental	45 h			315 h
3	Calculo Diferencial e Integral III (4)	60 h			
	Equações Diferenciais A (4)	60 h			
	Fundamentos.de Eletromagnetismo (4)	60 h			
	Análise Combinatória (4)	60 h			
	Cálculo Numérico (4)	60 h			300 h
4	Álgebra Linear I (4)	60 h			
	Fundamentos de Oscilações Ondas e Óptica (4)	60 h			
	Política Educacional (4)	60 h			
	Psicologia da Educação (4)	60 h			
	Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico (6)	90 h			330 h

5	Números na Educação Básica (4)		60 h		
	Geometria Espacial (4)	60 h			
	Analise da Prática Pedagógica I (4)		60 h		
	Estágio I (8)			200 h	380 h
6	Estatística e Probabilidades (4)	60			
	Variável Complexa (4)	60 h			
	Analise da Prática Pedagógica II (4)		60 h		
	Estágio II (8)			200 h	380 h
7	Álgebra e Funções na Ed. Básica (4)		60 h		
	Fundamentos de Analise (6)	90 h			
	Carga Optativa (8)	120 h			
	Carga Optativa da Prática de Ensino 4		60 h		330 h
8	Geometria na Educação Básica (4)		60 h		
	Carga Optativa (8)	120 h			
	História da Matemática (4)	60 h			300 h
	Carga Optativa da Prática de Ensino 4		60 h		
Total		**1815 h**	**420 h**	**400 h**	**2635 h**
Atividades acadêmico- científico- culturais (encontros, extensão, conferências, etc) mínimo de					**200 h**
				TOTAL	**2835 h**

Tabela 2. Grade Curricular do curso diurno de Licenciatura em Matemática UFMG

Grade curricular da Licenciatura em Matemática Noturna

Período	Disciplinas	Conteúdos curriculares de natureza científico – cultural (min. legal: 1800h)	Prática como componente curricular (min. legal: 400h)	Estágio curricular supervisionado (min.legal: 400 h)	Total de horas por período
1	Cálculo Diferencial e Integral I (6)	90 h			
	Geometria Anal. e Álgebra Linear (6)	90 h			
	Iniciação à Matemática (4)	60 h			
	Introdução à Física Experimental (3)	45 h			285 h
2	Cálculo Diferencial. e Integra II (4)	60 h			
	Fundamentos de Mecânica (4)	60 h			
	Álgebra Linear I (4)	60 h			
	Introdução à Informática (4)	60 h			
	Resolução de Problemas (4)	60 h			300 h
3	Calculo Diferencial e Integral III (4)	60 h			
	Equações Diferenciais C (4)	60 h			
	Estatística e Probabilidade (4)	60 h			
	Fundamentos de Eletromagnetismo4	60 h			240 h
4	Fundamentos de Álgebra (6)	90 h			
	Fundamentos de Oscilações Ondas e Óptica (4)	60 h			

	Cálculo Numérico (4)	60 h			
	Análise Combinatória (4)	60 h			270 h
5	Carga Optativa da Prática de Ensino (4)		60 h		
	Variável Complexa (4)	60 h			
	Política educacional (4)	60 h			
	Psicologia da Educação (4)	60 h			240 h
6	Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico (6)	90 h			
	Fundamentos de Analise (6)	90 h			
	Carga Optativa (4)	60 h			
	Números na Educação Básica (4)		60 h		300 h
7	Analise da Prática Pedagógica I (4)		60 h		
	Estágio I (8)			200 h	
	Álgebra e Funções na Ed. Básica (4)		60h		
	Geometria espacial (4)	60 h			380 h
8	Carga Optativa (4)	60 h			
	Geometria na Educação Básica (4)		60 h		
	Analise da Prática Pedagógica II (4)		60 h		
	Estágio II (8)			200 h	380 h
9	Historia da Matemática (4)	60 h			
	Carga Optativa (8)	120 h			
	Carga Optativa da Prática de Ensino (4)		60 h		240 h
	Total	**1815h**	**420 h**	**400 h**	**2635 h**
Atividades acadêmico- científico- culturais (encontros, extensão, conferências, etc) mínimo de **200 h**					
Total 2835 h					

Tabela 3. Grade Curricular do curso noturno de Licenciatura em Matemática UFMG

O currículo da UFMG excede em 35 horas a carga horária mínima de 2800 h determinada pela Resolução CNE/CP de 19 de fevereiro de 2002. As exigências de carga horária para cada grupo de disciplinas também são cumpridas. De acordo com a mesma Resolução, são componentes obrigatórias do Curso de Licenciatura Plena:

I - 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso;

II - 400 (quatrocentas) horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso;

III - 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos curriculares de natureza científico- cultural;

IV - 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, parecer CNE/CES 1.302/2001, ditam alguns conteúdos que devem fazer parte dos currículos dos cursos de Matemática de todo o território nacional brasileiro.

Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Licenciatura, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

- *Cálculo Diferencial e Integral*
- *Álgebra Linear*
- *Fundamentos de Análise*
- *Fundamentos de Álgebra*
- *Fundamentos de Geometria*
- *Geometria Analítica*

A parte comum deve ainda incluir:
a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise;

b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;

c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Para a licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio.

A grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG será examinada a seguir, no que concerne especificamente a preparação do professor da escola para o trabalho com a álgebra.

CAPÍTULO 4

OS CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS DA FORMAÇÃO

No curso de Licenciatura em Matemática da UFMG, em quase todas as disciplinas, os alunos utilizam conhecimentos algébricos em situações específicas, com diferentes finalidades. Por exemplo, num curso de geometria, o licenciando seguramente precisará resolver alguma equação do segundo grau (conhecimento algébrico) para determinar a medida do lado de um triângulo, num dado problema. Entretanto, aqui interessa-nos analisar as ementas das disciplinas que se propõem (ou que nos pareceram se propor, numa primeira avaliação) especificamente ao desenvolvimento de uma formação para o trabalho docente escolar com a álgebra, ou seja, disciplinas que visam preparar o futuro professor em termos dos conhecimentos relevantes para a educação algébrica escolar. A análise toma como base as ementas das disciplinas, tal como constam no Projeto Político Pedagógico do curso de Matemática da UFMG (modalidade Licenciatura). A partir deste critério, as disciplinas selecionadas para exame de suas ementas e programas, foram as seguintes:

a) Cálculo Diferencial e Integral I
b) Geometria Analítica e Álgebra Linear
c) Iniciação à Matemática
d) Resolução de Problemas
e) Fundamentos de Álgebra
f) Álgebra e Funções na Educação Básica

Apresentamos a seguir os dados relativos aos conhecimentos algébricos tratados em cada uma dessas disciplinas, acompanhados de comentários que consideramos pertinentes, no sentido de esclarecer o que conseguimos extrair desses dados para construir uma resposta à nossa primeira questão de pesquisa (***Quais são os conhecimentos matemáticos sobre álgebra trabalhados nas disciplinas obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais?)***.

a) A disciplina de Cálculo I é ofertada no 1º período do curso de matemática, pelo Departamento de Matemática. Essa disciplina é integrante do conhecido Ciclo Básico dos cursos da área de exatas, assim sendo, é obrigatória para os cursos de matemática (bacharelado e licenciatura), física, química, engenharias, entre outros. A obrigatoriedade dessa disciplina é decidida pelos colegiados dos respectivos cursos, o que sugere que necessidades específicas relacionadas à profissão para a qual cada curso prepara devem orientar as decisões de cada um dos colegiados. No entanto, o Departamento de

Matemática oferece a disciplina com o máximo de uniformidade possível para todos os cursos. Desta maneira, numa mesma turma de Cálculo I, podem estar matriculados alunos interessados, em princípio, em diferentes formações acadêmicas. O programa e a ementa da disciplina Cálculo I são apresentados abaixo (ver PPP do curso de Matemática):

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Código: MAT001

Carga horária: 90 h. de aulas teóricas

Créditos: 6

Pré-requisitos: --

Tipo da atividade: aula teórica

Forma de desenvolvimento: presencial

Natureza: Bacharelado: Obrigatória. Licenciatura: Obrigatória

Departamento: Matemática

Registro de desempenho: Nota de 0 a 100

Participação docente: 60 h

Período: Bacharelado: 1º. Licenciatura diurna: 1º. Licenciatura noturna: 1º.

Duração: 18 semanas

Objetivos:

Ementa: Funções de R em R. Derivadas. Integrais. Aplicações.

Programa:

1. Números Reais, Valor Absoluto, Desigualdades.
2. Plano coordenado, Retas no Plano, Perpendicularidade e Paralelismo.
3. Funções Reais, Equações e Gráficos.
4. Funções Trigonométricas.
5. Limite e Continuidade: conceito, definição e propriedades.
6. Derivadas: retas tangentes, coeficiente angular, definição de derivada, diferenciais.
7. Aplicações da Derivada : velocidade, taxa de variação.
8. Regras de Derivação, Regra da Cadeia, Funções Implícitas, Derivação Implícita.
9. Teorema do Valor Médio , Regra de L'Hôspital.
10. Funções crescentes e decrescentes , máximos e mínimos, convexidade, esboço de

gráficos de funções.

11.Problemas de máximos e mínimos.

12.Funções Exponenciais e Logarítmicas.

13.Funções Trigonométricas Inversas e Funções Hiperbólicas.

14.Integrais Indefinidas, Integrais Definidas e Propriedades.

15.Teorema do Valor Médio para Integrais e Teorema Fundamental do Cálculo.

16.Métodos de Integração e Aplicações: área , volume.

17.Integrais Impróprias.

Bibliografia

1. LEITHOLD, L. - O Cálculo com Geometria Analítica . Editora Harbra - SP.
2. ÁVILA, G.S.S. - Cálculo I. Livros Técnicos e Científicos S.A. e Ed. Universidade de Brasília.
3. APOSTOL, T.M. - Cálculo - Ed. Reverté Ltda - Volume 1
4. LEWIS, K. - Cálculo e Álgebra Linear - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda Volumes 1 e 2.
5. PENNEY,E. D., EDWARDS, JR.C.H. - Cálculo com Geometria Analítica - Prentice Hall do Brasil - Volumes 1 e 2.
6. SWOKOWSKI, E. W. - Cálculo com Geometria Analítica - Ed. McGraw-Hill Ltda. - SP Volume I

Tabela 4. Ementa da Disciplina Cálculo I

O foco do Cálculo I é o estudo das funções reais, suas propriedades de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos locais e globais, a construção dos gráficos usando a noção de derivada, limites, continuidade, assim como a integral de Riemann e aplicações. De acordo com o programa da disciplina, pode-se observar que alguns tópicos listados estão presentes no currículo da escola básica. São eles: 1. Números Reais, Valor Absoluto e Desigualdades; 2. Plano Coordenado, Retas no Plano, Perpendicularismo e Paralelismo; 3. Funções Reais, Equações e Gráficos; 4. Funções Trigonométricas; 10. Funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos, convexidade, esboço do gráfico de funções; 11. Problemas de máximos e mínimos; 12. Funções Exponencial e Logarítmica. Estes assuntos estão presentes, em sua grande maioria na proposta curricular do Ensino Médio, mas a partir de outro foco, inclusive porque, as noções de limites e derivadas não fazem parte dessa proposta. É claro que o tratamento usando a noção de derivada é totalmente diferente de uma abordagem em que esse recurso não pode ser usado. Além

disso, de acordo com a bibliografia, os itens de 1 a 4 do programa de Cálculo I são basicamente revisões rápidas para que se possa desenvolver adequadamente a noção de derivada, não visa uma preparação em termos de conhecimentos matemáticos, didáticos e pedagógicos necessários para o trabalho com as funções, tal como é feito no Ensino Médio.

b) A disciplina GAAL (Geometria Analítica e Álgebra Linear) é ofertada no 1º período do curso de matemática pelo Departamento de Matemática, no mesmo período em que é oferecida a disciplina Cálculo I. GAAL também é integrante do Ciclo Básico, ou seja, em uma mesma turma podemos encontrar alunos de diferentes cursos. Assim como o Cálculo I, esta disciplina é trabalhada da mesma forma, independente do curso a que estão vinculados os alunos matriculados. O programa e a ementa da disciplina são assim descritos no PPP do curso de Matemática:

Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear

Código: MAT105

Carga horária: 90 h. de aulas teóricas

Créditos: 6

Pré-requisitos:

Tipo da atividade: aula teórica

Forma de desenvolvimento: presencial

Natureza: Bacharelado: Obrigatória. Licenciatura: Obrigatória.

Departamento: Matemática

Registro de desempenho: Nota de 0 a 100

Participação docente: 90 h

Período:: Bacharelado: 1º. Licenciatura diurna: 1º. Licenciatura noturna: 1º.

Duração: 18 semanas

Objetivos:

Ementa: Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Álgebra Vetorial. Plano-equação (sic). A Reta no Plano e no Espaço

Programa:

1. Álgebra Vetorial: O conceito de Vetor . Operações com Vetores: adição,

multiplicação por escalar, produto escalar, produto vetorial, produto misto. Dependência e Independência Linear. Bases ortogonais e ortonormais.

2. Retas e Planos: Coordenadas Cartesianas. Equações do Plano. Ângulo entre Dois Planos. Equações de uma Reta no Espaço. Ângulo entre Duas Retas. Distâncias: de um ponto a um plano, de um ponto a uma reta, entre duas retas. Interseção de planos.
3. Matrizes: Definição. Operações Matriciais: adição, multiplicação, multiplicação por escalar, transposta. Propriedades das Operações Matriciais. Sistemas de Equação Lineares: Matrizes Escalonadas. O processo de Eliminação de Gauss - Jordan. Sistemas Homogêneos. Inversa de uma matriz: definição e cálculo.
4. Determinantes: Definição por cofatores. Propriedades. Regra de Cramer.
5. O Espaço Vetorial R^n: Definição. Propriedades. Produto interno em R^n. Desigualdades de Cauchy-Schwarz. Subespaços. Dependência e Independência Linear. Base e Dimensão. Bases Ortonormais. O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.
6. Autovalores e Autovetores de Matrizes: Definição. Polinômio Característico. Diagonalização. Diagonalização de Matrizes Simétricas. Aplicações: Cônicas.

Bibliografia:

KOLMAN, B. - *Álgebra Linear*. Ed. Guanabara - 1987.

NATHAN, M. S. - *Vetores e Matrizes*. Livros Técnicos e Científicos - Editora S.A.- 1988.

LIPSCHUTZ, S. - *Álgebra Linear*. Editora Mc Graw-Hill - 1971

BOLDRINI, J. L / COSTA, S. I. R ./ RIBEIRO, V. L. F. F / WETZLER, H. G. - *Álgebra Linear*. - Ed. Harbra 1980.

ANTON, H. - *Álgebra Linear* - Ed. Campus - 3ª edição

Tabela 5. Ementa da Disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear

A disciplina de GAAL, apresenta dois tópicos que são tratados na escola básica (itens 3 e 4). Observa-se, no entanto, que também, como o Cálculo I, é trabalhada indistintamente com alunos de vários cursos, sem nenhuma especificidade para a formação de professores de matemática da Educação Básica.

c) A Iniciação à Matemática é uma disciplina própria do curso de Matemática oferecida (e obrigatória) para as modalidades bacharelado e licenciatura. O objetivo está na apresentação, ao ingressante no curso, das particularidades da Matemática de nível

superior, sua organização axiomática com as demonstrações, postulados, conceitos primitivos etc., além de proporcionar uma visão mais operacional (em termos da matemática universitária) dos conjuntos numéricos e das funções. Em razão dessas finalidades, é oferecida no 1º semestre do curso. A ementa e o programa da disciplina são assim descritos no PPP do curso de Matemática:

Disciplina: Iniciação à Matemática
Código: MAT211
Carga horária: 60 h. de aulas teóricas
Créditos: 4
Pré-requisitos: --
Tipo da atividade: aula teórica
Forma de desenvolvimento: presencial
Natureza: Bacharelado: Obrigatória. Licenciatura: Obrigatória.
Departamento: Matemática
Registro de desempenho: Nota de 0 a 100
Participação docente: 60 h
Período: Bacharelado: 1º. Licenciatura diurna: 1º. Licenciatura noturna: 1º.
Duração: 18 semanas

Objetivos: estabelecer o contato do estudante recém-ingresso no curso com a matemática de nível superior, esclarecendo a utilização da lógica formal dedutiva como linguagem básica. Apresentar ao estudante a natureza e a necessidade das hipóteses, dos sistemas axiomáticos e das demonstrações em matemática.

Ementa: Conjuntos, Funções e Números Inteiros. Enumerabilidade, Números Racionais, Irracionais e Reais.

Programa:

1- Conjuntos e operações.
2- Funções. Domínio, contradomínio e imagem; funções injetivas e sobrejetivas; composição de funções.
3- Construção axiomática dos Números Naturais. Axiomas de Peano; boa ordenação; segundo princípio da indução.

4- Enumerabilidade
5- Números Racionais e Irracionais.

Bibliografia:

Figueiredo, Djairo Guedes de - *Números Irracionais e Transcendentes,* Editora: SBM. 2002

Lima, Elon Lages - *Curso de Análise vol. 1* , (capítulo I) - Décima Edição, Projeto Euclides – IMPA – 2000

Niven, I. *Números*: *Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

Ripoll, Jaime; Ripoll, Cydara; Porto da Silveira, José Francisco - *Números Racionais, Reais e Complexos* - UFRGS Editora. 2006

Tabela 6. Ementa da Disciplina Iniciação à Matemática

Alguns conteúdos tratados nesta disciplina estão presentes na escola básica principalmente no que diz respeito ao estudo dos números, mas observe-se que o foco é aquilo que é necessário para o trabalho nas demais disciplinas universitárias. A ideia enfatizada nos objetivos e no programa da disciplina é trabalhar esses elementos de um ponto de vista axiomático (axiomas de Peano, enumerabilidade, a lógica formal dedutiva como linguagem básica). No que diz respeito à álgebra, temos apenas o item 2 do programa: Funções. Domínio, contradomínio e imagem; funções injetivas e sobrejetivas; composições de funções.

d) A disciplina Resolução de Problemas tem como finalidade desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos sobre conteúdos da Educação Básica, proporcionando a oportunidade de argumentar e justificar em matemática, tanto oralmente como por escrito (ver objetivos, no quadro abaixo). Esta disciplina é própria do curso de matemática, faz parte do currículo da licenciatura e do bacharelado, sendo ofertada no primeiro semestre do curso diurno e no segundo semestre do noturno. O PPP do curso de Matemática apresenta a ementa e o programa da disciplina Resolução de Problemas da seguinte forma:

Disciplina: Resolução de Problemas

Código: MATXXX

Carga horária: 60 h. de aulas teóricas

Créditos: 4

Pré-requisitos: --

Tipo da atividade: aula teórica

Forma de desenvolvimento: presencial

Natureza: Bacharelado: Obrigatória. Licenciatura: Obrigatória

Departamento: Matemática

Registro de desempenho: Nota de 0 a 100

Participação docente: 60 h

Período: Bacharelado: 1º. Licenciatura diurna: 1º. Licenciatura noturna: 2º.

Duração: 18 semanas

Objetivos: propiciar aos alunos tempo em sala de aula para que eles resolvam problemas selecionados dentre tópicos de matemática do ensino básico. Com essa metodologia, os alunos obtêm uma melhor compreensão da linguagem característica da Matemática, aprimorando também sua comunicação oral e escrita, além de conquistar autonomia para resolver as situações-problema propostas.

Ementa: Problemas sobre tópicos da matemática do ensino básico, como Números, Álgebra elementar e Geometria.

Programa:

Resolução de Problemas que envolvam:

1- Números naturais.
2- Raízes de funções polinomiais.
3- Números complexos de um ponto de vista geométrico.
4- Funções trigonométricas.
5- Triângulos: congruência; semelhança; relações métricas e trigonométricas; construções geométricas.
6- Áreas de figuras planas.

Bibliografia:

Iezzi, G. et alli, Coleção *Fundamentos da Matemática Elementar*. Volumes 3, 5, 6 e 9. Editora Atual.

Wagner, Eduardo – *Construções Geométricas* – Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Morgado, A. C. O., Lima, E. L., Carvalho, P. C. P. e Wagner, E. - *Temas e Problemas*

– Coleção do Professor de Matemática – SBM.
Morgado, A. C. O., Lima, E. L., Carvalho, P. C. P. e Wagner, E. - *Temas e Problemas Elementares* – Coleção do Professor de Matemática – SBM.
Revista do Professor de Matemática (RPM) – SBM.

Tabela 7. Ementa da Disciplina Resolução de Problemas

Como descrito nos objetivos, a disciplina visa a que os alunos discutam e resolvam problemas matemáticos envolvendo os tópicos citados no programa. As questões que supõem conhecimentos de álgebra elementar se referem ao itens 3- Raízes de funções polinomiais e 5- Funções Trigonométricas (ver programa). Observamos que a disciplina não visa propriamente trabalhar conhecimentos específicos de álgebra ou questões relativas ao ensino na Educação Básica, mas expor o licenciando a problemas que demandam apenas conhecimentos matemáticos escolares, a fim de que desenvolva a sua capacidade de resolução de problemas. Não visa, pelo menos de maneira imediata, uma preparação do licenciando para o trabalho com a resolução de problemas na escola, nesse sentido não é um curso sobre Resolução de Problemas, como método de ensino escolar. É claro que se o licenciando desenvolve sua capacidade de resolver problemas matemáticos está, indiretamente, preparando-se para trabalhar essa habilidade junto aos seus futuros alunos na escola, mas há que se observar que existe uma ampla literatura específica sobre o trabalho com resolução de problemas na escola que não é discutida na disciplina. A bibliografia é basicamente constituída de livros de matemática, não há praticamente nada sobre a questão metodológica do uso de resolução de problemas para se aprender e ensinar matemática. Os problemas a serem trabalhados na disciplina envolvem conhecimentos matemáticos da Educação Básica porque a ideia é que se usem esses conhecimentos, supostamente já ensinados e aprendidos, para a resolução de problemas e não, inversamente, que se use a resolução de problemas para o ensino e a aprendizagem matemática na Educação Básica (o que seria o foco principal do trabalho com essa vertente metodológica na escola). Assim, tanto especificamente no caso do nosso interesse neste trabalho, que é a álgebra, como no caso dos demais itens do programa desta disciplina, não se pode contabilizar totalmente o que é trabalhado nela, como uma real e efetiva preparação para o trabalho docente com a educação algébrica escolar. Uma leitura atenta dos objetivos da disciplina deixa claro que não se trata de uma preparação específica para o trabalho na escola básica, embora possa eventualmente haver algum impacto na formação profissional do futuro professor da escola (muito difícil de avaliar, todavia – e não faz parte do objetivo desta pesquisa).

e) A disciplina *Fundamentos de Álgebra* é ofertada apenas para o curso de Matemática, mas é obrigatória para a licenciatura e para o bacharelado. O programa da disciplina cobre as propriedades dos inteiros, o estudo dos polinômios sobre um corpo, os anéis euclidianos entre outros assuntos descritos na ementa e no programa, tal como apresentados abaixo (ver PPP do curso):

Disciplina: Fundamentos de Álgebra
Código: MAT028
Carga horária: 90 h. de aulas teóricas
Créditos: 6
Pré-requisitos: --
Tipo da atividade: aula teórica
Forma de desenvolvimento: presencial
Natureza: Bacharelado: Obrigatória. Licenciatura: Obrigatória.
Departamento: Matemática
Registro de desempenho: Nota de 0 a 100
Participação docente: 90 h
Período: Bacharelado: 2º. Licenciatura diurna: 4º. Licenciatura noturna: 2º.
Duração: 18 semanas

Objetivos: O programa proposto endereça-se ao estudo das propriedades elementares de inteiros e de polinômios, com ênfase na teoria de divisibilidade, bem como à <u>introdução da teoria de anéis como linguagem unificadora dos conceitos estudados anteriormente</u> (sublinhado nosso).

Ementa: Indução e o princípio da boa ordenação, divisibilidade, o teorema fundamental da Aritmética, polinômios, congruências, anéis

Programa:

1- Números inteiros: os princípios de boa ordenação e indução, o algoritmo de divisão, critérios de divisibilidade, representação de inteiros em bases, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, o mdc como combinação

linear, equações diofantinas lineares, números primos, fatoração, o teorema fundamental da Aritmética.

2- Congruências: definição e propriedades elementares, congruências lineares, a função de Euler, os teoremas de Fermat, Euler, Wilson e do resto chinês.

3- Polinômios sobre um corpo: divisibilidade, o algoritmo de divisão, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, raízes, fórmulas para raízes, irredutibilidade e fatoração sobre Q, R e C, o algoritmo de Briot-Ruffini

4- Anéis: definição e exemplos, ideais, domínios de integridade, divisores de zero, anéis euclidianos

Bibliografia:

A. Vidigal, D. Avritzer, E. F. Soares, H. P. Bueno, M. C. C. Ferreira e M. C. Faria: Fundamentos de Álgebra, Ed. UFMG

S. C. Coutinho: Teoria de números e criptografia RSA, IMPA-SBM

F. C. P. Milies e S. P. Coelho: Números: uma introdução à Matemática, Ed. USP

A. Hefez: Curso de Álgebra (vol 1), IMPA

L. S. Childs: A concrete introduction to higher algebra, UTM, Springer-Verlag.

Tabela 8. Ementa da disciplina Fundamentos de Álgebra

No corpo do programa da disciplina encontramos diversos assuntos que sugerem vínculos imediatos com a matemática trabalhada na Educação Básica. Além do conjunto dos números inteiros em si, como uma expansão dos naturais, incluindo os negativos, podemos citar propriedades e aspectos relacionais dos números como o algoritmo da divisão, múltiplos e divisores (m.d.c., m.m.c., fatoração em primos etc.), conhecimentos básicos sobre os quais se desenvolve uma parte importante do conhecimento algébrico na escola. Além disso, consta do programa o estudo dos polinômios, raízes, fatoração, Briot-Ruffini, também parte do programa de educação algébrica escolar. Entretanto, a ideia fundamental parece não ser a de oferecer uma preparação direta para o trabalho com esses itens do conhecimento algébrico escolar, a não ser como uma consequência eventual do que se pode chamar de uma visão "de cima" daquilo que vai ser tratado na escola. Como destacado no objetivo da disciplina (ver quadro acima), a ideia é proporcionar uma visão *unificada* do conjunto dos polinômios sobre um corpo e do conjunto dos inteiros, através da noção de anel euclidiano. Isto significa projetar uma visão desses dois conjuntos como essencialmente o mesmo, em termos da estrutura algébrica associada e, portanto,

compartilhando todas as propriedades comuns a essa estrutura. Não consta no programa, de acordo com a bibliografia sugerida, uma discussão sobre a lógica do algoritmo da divisão (nem nos inteiros, nem nos polinômios com coeficientes reais), ou seja, por que razão os algoritmos nos garantem resultados corretos. O que consta é uma discussão sobre a existência e unicidade do quociente e do resto, assim como suas consequências estruturais: daí deduz-se que vale a decomposição única em fatores primos, a possibilidade de se escrever o m.d.c. de dois elementos como combinação linear deles etc. Em suma, o exposto no objetivo da disciplina indica que não se trata de "olhar para trás", para o que acontece anteriormente à formação universitária, ou seja, olhar para os problemas do ensino escolar dos inteiros negativos etc., mas de "olhar para a frente", ou seja, de valorizar a percepção de que a natureza dos elementos que constituem uma estrutura algébrica não importa tanto, frente à própria estrutura. Esse é o ponto por trás da ideia da visão "unificada" (do conjunto dos inteiros e do conjunto dos polinômios sobre um corpo) que essa disciplina procura projetar. O papel dessa visão no desenvolvimento da formação do bacharel não é difícil de se perceber ou imaginar, mas, na formação do professor de álgebra da escola básica, esse papel já nos parece mais nebuloso e indireto. Não deixa de ser uma aposta razoável esperar que a internalização dessa visão acadêmica da matemática escolar tenha efeitos benéficos sobre a futura prática docente na escola básica, mas, no contexto de uma pesquisa como esta que desenvolvemos, caberia perguntar: o processo de formação do professor na licenciatura, no que diz respeito ao tema álgebra, deve apostar nisso? A resposta a essa pergunta precisa ser elaborada considerando que pesquisas científicas fundamentadas indicam uma variedade de aspectos relevantes na estruturação dos conhecimentos profissionais do professor de matemática da Educação Básica e que o tempo de formação é limitado, como é o caso de todos os cursos de licenciatura em matemática do Brasil.

f) A disciplina *Álgebra e Funções na Educação Básica* tem como objetivo explícito preparar o professor para o ensino de álgebra através do contato com textos científicos que abordem o tema (ver Objetivos, no quadro abaixo). Os textos indicados podem ser utilizados para fomentar discussões acerca de situações de sala de aula escolar no trabalho com a álgebra, métodos possíveis e validados de trabalho docente com tópicos desta temática, entre outros elementos do saber profissional do professor. A bibliografia apresentada no PPP do curso de matemática é bastante extensa, sugerindo que o professor opere de modo seletivo, uma vez que a disciplina é de 4 créditos (60 horas-aula). A ementa e o programa da disciplina são assim apresentados:

Disciplina: Álgebra e Funções na Educação Básica

Código: MATXXX

Carga horária: 60 h. de aulas teóricas

Créditos: 4

Pré-requisitos: --

Tipo da atividade: aula teórica

Forma de desenvolvimento: presencial

Natureza: Licenciatura: Obrigatória

Departamento: Matemática

Registro de desempenho: Nota de 0 a 100

Participação docente: 60 h

Período: Licenciatura diurna: 7º. Licenciatura noturna: 7º.

Duração: 18 semanas

Objetivos:

1) Aprofundar o conhecimento que o futuro professor já tem de suas vivências anteriores sobre álgebra e funções, visando a preparação para a docência na escola básica.

2) Abordar os conceitos, métodos e técnicas matemáticos referentes à álgebra e às funções, do ponto de vista das questões do ensino e aprendizagem escolares.

3) Analisar propostas curriculares e recursos didáticos para a escola básica no que se refere aos conteúdos sobre álgebra e funções.

Ementa: Álgebra e funções do ponto de vista da matemática escolar trabalhada nos Ensinos Fundamental e Médio.

Programa

1) A linguagem algébrica e a compreensão matemática.
2) Concepções de álgebra e o papel das variáveis.
3) Demonstração e justificação em álgebra.
4) A ideia de função. Representação analítica, gráfica e verbal de funções. A definição formal de função.
5) Questões do ensino-aprendizagem de funções (lineares, quadráticas,

polinomiais, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas) como modelos matemáticos de alguns fenômenos.

6) Propostas curriculares atuais e recursos didáticos para a abordagem da álgebra e das funções na escola básica.

Bibliografia

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Matemática. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.* Brasília: SEMTEC/MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Curriculares complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: SEMTEC/MEC, 2002.

CARAÇA, B.J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *Que es la matemática?* Madrid: Aguilar, 1994.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A.P. (Org.) *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

DINIZ, M. I. S; REAME, E. *Álgebra: das variáveis às equações e funções.* São Paulo: CAEM-IME-USP, 1994.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. *Pro-Posições*, v. 4, n.1 (10), p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. (org.) *Por trás da porta, que matemática acontece?* Campinas: Editora Graf. FE/UNICAMP – CEMPEM, 2001.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (orgs.). *Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática.* São Paulo: Ática, 1997.

KIERAN, C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In: GROUWS, D. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 390-419. New York: Macmillan.

KIERAN, C. (1996) The changing face of school algebra. In: ALSINA, C. et al. *8th*

International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures, p. 271-289. Sevilla: S. A. E. M. THALES

KÜCHEMAN, D. Algebra. In: HART, K. (Ed.). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* p. 102-119. London: John Murray, 1981.

LINS, R. & GIMENEZ, J. (1997) *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus.

LOCHHEAD, J; MESTRE, J.P. (1995) Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual.

MACHADO, A. C. *A aquisição do conceito de função: perfil das imagens produzidas pelos alunos.* Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, 1998. Dissertação de Mestrado.

NASSER, Lilian e TINOCO, Lúcia. (Coord.) *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática/UFRJ, 2001.

SOCAS, M. et al. *Iniciacion al Algebra*. Madrid: Editorial Síntesis,1996.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Educação Matemática em Revista.*

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática.*

TALL, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TINOCO, L. Construindo o conceito de função. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/Instituto de Matemática/UFRJ, 20

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A.P. (Org.) *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

VINNER, S. - *The Role of definitions in the teaching and learning of Mathematics.* In: TALL, D. (ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991.

Tabela 9. Ementa da disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica

Essa é a única disciplina do currículo que visa trabalhar conhecimentos algébricos que se vinculam diretamente às questões que o professor de matemática enfrenta em sua prática docente. Todos os pontos contidos no programa fazem parte do que Ball denomina conhecimento matemático para o ensino, em seus vários domínios. A bibliografia indicada inclui textos que são referências usuais quando se discute o ensino e a aprendizagem de

álgebra na escola básica. Entretanto, como já observamos, a disciplina usa apenas 60 horas das 2.835 que compõem o total do curso e, portanto, não é possível abarcar o que está proposto na ementa e no programa com a amplitude desejável. Mesmo a bibliografia a ser efetivamente utilizada ainda deve passar por algum processo de escolha por parte do professor que leciona a disciplina, pois entre os 24 textos indicados, muitos são livros inteiros, tratando de variados aspectos e saberes associados, alguns gerais, outros particulares e específicos do trabalho docente na educação algébrica escolar.

Resposta à primeira questão de pesquisa

As disciplinas cujas ementas e programas foram aqui apresentadas e comentadas são as fontes de dados que utilizamos para a construção da nossa resposta à primeira questão de pesquisa. O que consta nas ementas dessas disciplinas e que compõe o que é considerado relevante para a formação do professor de matemática, no que concerne o trabalho com a educação algébrica na escola básica, pode ser sintetizado nos seguintes termos, como nossa resposta à primeira questão de pesquisa:

1. Num primeiro grupo de disciplinas da Licenciatura em Matemática da UFMG (Cálculo I, Iniciação à Matemática, Resolução de Problemas) apresentam-se os seguintes tópicos que consideramos relacionados com a proposta de formação do curso para a docência escolar em álgebra:

   1.1 Números Reais, Valor Absoluto, Desigualdades (CÁLCULO I)
   1.2 Plano coordenado, Retas no Plano, Perpendicularidade e Paralelismo (CÁLCULO I)
   1.3 Funções Reais, Equações e Gráficos. Funções Trigonométricas (CÁLCULO I)
   1.4 Funções. Domínio, contradomínio e imagem; funções injetivas e sobrejetivas; composição de funções (INICIAÇÃO À MATEMÁTICA)
   1.5 Raízes de funções polinomiais (RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS)
   1.6 Números complexos de um ponto de vista geométrico (RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS)
   1.7 Funções trigonométricas (RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS)

   Entretanto, como observado na apresentação das ementas e programas dessas disciplinas, no caso do *Cálculo I* esses tópicos constituem uma revisão da matemática da escola básica, logo no início do trabalho na disciplina, uma vez que funcionam como pré-requisitos para o que vem a seguir. A revisão envolvendo o conjunto dos números reais, valor absoluto e desigualdades, as equações de retas no plano, identificando quando duas equações representam retas paralelas ou perpendiculares, os conceitos básicos relacionados com o estudo das funções reais, incluindo as trigonométricas, tem a finalidade de preparar os alunos para o estudo

das derivadas e suas aplicações, a ser desenvolvido logo em seguida na própria disciplina Cálculo I (que, lembramos, é trabalhada indistintamente com alunos de vários cursos como Física, Química, as engenharias etc.).

Com relação aos tópicos da disciplina *Iniciação à Matemática* (1.4) a ideia é introduzir o estudante no uso de uma linguagem precisa e formalizada, de modo a facilitar o enfoque dedutivo formal que será, em tese, importante na sequência dos estudos matemáticos universitários (isso está explicitamente colocado nos Objetivos apresentados na ementa da disciplina). Em outras palavras, trata-se de preparar o licenciando para desenvolver uma visão acadêmica da matemática (Moreira, 2005), ou seja, uma visão internalista que não está necessariamente voltada para o processo de educação matemática escolar.

No que se refere à disciplina *Resolução de Problemas* (1.5, 1.6 e 1.7) o que temos de matemática escolar é apenas uma lista de tópicos que servem de base para os problemas propostos aos alunos ao longo do semestre letivo (primeiro período no turno diurno e segundo período no noturno). De acordo com os Objetivos expostos na ementa da disciplina, não se trata de conteúdos a serem discutidos na disciplina ou de questões ligadas ao ensino e à aprendizagem desses tópicos a serem trabalhadas pelo futuro professor em sala de aula da Educação Básica. A disciplina tem como um dos objetivos desenvolver autonomia para a resolução de problemas matemáticos. Isso pode ter impacto positivo na formação algébrica do professor, mas é preciso observar que não se trata de uma preparação direta para o trabalho com a álgebra na escola básica.

2. Noutro grupo de disciplinas (*Fundamentos de Álgebra* e *GAAL*) temos, em grande parte de seus programas, tópicos cujos nomes sugerem um vínculo estreito com o currículo da Educação Básica.

   2.1 Números inteiros: os princípios de boa ordenação e indução, o algoritmo de divisão, critérios de divisibilidade, representação de inteiros em bases, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, o mdc como combinação linear, equações diofantinas lineares, números primos, fatoração, o teorema fundamental da Aritmética (FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA)

   2.2 Congruências: definição e propriedades elementares, congruências lineares, a função de Euler, os teoremas de Fermat, Euler, Wilson e do resto chinês (FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA)

   2.3 Polinômios sobre um corpo: divisibilidade, o algoritmo de divisão, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, raízes, fórmulas para raízes, irredutibilidade e fatoração sobre Q, R e C, o algoritmo de Briot-Ruffini (FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA)

2.4 Matrizes: Definição. Operações Matriciais: adição, multiplicação, multiplicação por escalar, transposta. Propriedades das Operações Matriciais. Sistemas de Equação Lineares: Matrizes Escalonadas. O processo de Eliminação de Gauss - Jordan. Sistemas Homogêneos. Inversa de uma matriz: definição e cálculo (GAAL)

2.5 Determinantes: Definição por cofatores. Propriedades. Regra de Cramer (GAAL)

De acordo com os objetivos da disciplina *Fundamentos de Álgebra* e observando atentamente as referências bibliográficas relacionadas na ementa, concluímos que a ideia básica, no caso desta disciplina, é proporcionar uma visão avançada da matemática escolar. Os itens 2.1, 2.2 e 2.3 se integram de forma a que o conjunto dos inteiros e o dos polinômios com coeficientes reais possam ser vistos como exemplos concretos de uma mesma estrutura abstrata, denominada anel euclidiano. Embora a abordagem observada nos textos recomendados nas referências bibliográficas não seja extremamente formal (axiomática), o que se sobrepõe é o aspecto dedutivo e as relações privilegiadas são aquelas que favorecem a construção da visão unificada das duas estruturas, como observado acima. Assim, por exemplo, a bibliografia indicada deixa claro que as demonstrações dos resultados enunciados para os números inteiros são aquelas que poderão se repetir, mutatis mutandis, na justificativa dos resultados correspondentes para os polinômios.

No que diz respeito aos tópicos da disciplina *GAAL* (itens 2.4 e 2.5), são efetivamente elementos que preparam para a docência no Ensino Médio, embora apenas parcialmente, uma vez que se restringem, a nosso ver, a uma parte de um dos quatro domínios do MKT (Ball, Thames e Phelps, 2008), qual seja, o Conhecimento Comum do Conteúdo (refere-se àquilo que o professor vai ensinar diretamente aos alunos e, portanto, precisa saber).

3. Por fim, os tópicos do programa da disciplina *Álgebra e Função na Educação Básica*:

3.1 A linguagem algébrica e a compreensão matemática
3.2 Concepções de álgebra e o papel das variáveis
3.3 Demonstração e justificação em álgebra
3.4 A ideia de função. Representação analítica, gráfica e verbal de funções. A definição formal de função
3.5 Questões do ensino-aprendizagem de funções (lineares, quadráticas, polinomiais, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas) como modelos matemáticos de alguns fenômenos.

3.6 Propostas curriculares atuais e recursos didáticos para a abordagem da álgebra e das funções na escola básica.

A disciplina tem o objetivo de formar o professor quanto a demandas do ensino e da aprendizagem de álgebra na escola básica. Os próprios tópicos do programa expressam a ideia de uma abordagem específica para o ensino escolar. Todo o programa desta disciplina visa a discussão de questões relacionadas com a educação algébrica escolar e a bibliografia é composta de textos que constituem importante contribuição para a área.

No entanto um importante senão que pode ser levantado em relação ao trabalho nessa disciplina é o seguinte: a bibliografia indicada é demasiado ampla, assim como os tópicos do programa, portanto, supõe-se que será feita uma seleção, visto que a disciplina é de apenas 60 horas. Deste modo, não se deve tomar como efetivamente trabalhados (e com a devida profundidade) todos os tópicos do programa. Evidentemente, não cabe a nós, como pesquisadores, fazer essa seleção. Por isso incluímos todos os tópicos na nossa resposta à primeira questão de pesquisa, mas com essa ressalva.

No próximo capítulo discutiremos as relações entre o que foi descrito acima e as demandas de conhecimento da prática, nos termos da segunda questão de pesquisa. Isso nos conduzirá à construção de um paralelo entre o que a literatura especializada indica como demanda de conhecimento profissional docente para o trabalho de educação algébrica na escola e o que o currículo da UFMG considera como relevante na formação inicial do licenciado em matemática.

CAPÍTULO 5

AS DEMANDAS DA PRÁTICA ESCOLAR

5.1 Sobre concepções de álgebra e os significados das letras na simbologia algébrica

Uma das primeiras questões que envolvem o ensino de álgebra na escola são as possíveis compreensões que se podem atribuir ao termo álgebra. Como observado no Capítulo 1, Usiskin (1994) discorre sobre o que se entende por álgebra da educação básica e as relações entre os diversos entendimentos com correspondente papel que se associa ao uso das letras para representar objetos matemáticos. No início de seu estudo, escreve sobre as diferenças entre a matemática acadêmica e a escolar dizendo que a "álgebra ensinada na escola tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores" (p.9). A álgebra na escola tem a ver, essencialmente, com a compreensão do papel das "letras" como valores desconhecidos ou como variáveis. Elas possuem diferentes significados, de acordo com o contexto em que se apresentam (Kuchemann, 1981). A noção de variável não é única e independente da situação didática. A ideia de que as letras representam sempre números desconhecidos, por exemplo, cai por terra quando as utilizamos para representar a posição dos elementos de uma matriz ou, na geometria, para representar pontos, retas ou planos e ainda, na lógica, para representar uma determinada proposição. Usiskin chega à seguinte conclusão:

> Em suma, as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra. (Usiskin, 1994, p.12)

Boa parte das discussões acerca do ensino de álgebra na escola, hoje, ainda se concentra no trabalho com as técnicas de manipulação dos símbolos, combatendo-se com veemência uma educação algébrica centrada nos procedimentos, ressaltando a importância do significado dos símbolos e no entendimento da lógica que permite manipulá-los corretamente, de acordo com regras que são construídas a partir desse entendimento. Isso põe em relevo a demanda, para o professor, de trabalhar o que se tem chamado de *desenvolvimento do pensamento algébrico*, um processo longo e gradativo que, para muitos autores, deve começar nos anos iniciais de escolarização e prosseguir por todo o ensino básico. Ao que parece, a questão não passa por "ensinar os significados" dos símbolos algébricos dentro de uma linguagem (algébrica) pré-determinada, já estabelecida como padrão e pronta para uso nos estágios finais do Ensino Fundamental e no Ensino

Médio. É preciso levar o aluno, desde cedo a perceber a necessidade do uso de símbolos, a criar esses símbolos, na forma que lhe for possível e lhe fizer sentido a cada momento do seu desenvolvimento cognitivo, até que, gradativamente, vá percebendo as vantagens do uso de uma linguagem mais universal e dela se aproprie, desde seus fundamentos (Radford, 2011; Blanton, 2008; Fiorentini, Fernandes e Cristóvão, 2005; Canavarro, 2009).

Alguns dos saberes profissionais docentes necessários ou úteis na produção de uma competência profissional relacionada com a condução do trabalho de desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica passam ao largo do processo de formação, no caso do currículo prescrito do curso que examinamos. Como vimos, apenas uma disciplina de 60 horas menciona, em sua ementa e/ou programa, algo relacionado com essas questões (dois tópicos 3.1 e 3.2, entre seis que compõem o programa da disciplina *Álgebra e Funções na Educação Básica*). As referências bibliográficas dessa disciplina são bastante amplas nos assuntos de que tratam, além de numerosas. Como já observamos, o tempo reduzido (60 horas) e a bibliografia e programa muito abrangentes sugerem que serão realizadas escolhas no tópicos a serem efetivamente tratados. De todo modo, não consta na bibliografia nenhum trabalho específico que trate de forma mais profunda e concreta (sugerindo tipos de tarefas e atividades, por exemplo) que possam levar os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Aliás, é interessante observar que o licenciado não passa por esse processo de desenvolvimento do próprio pensamento algébrico na formação profissional (e muito provavelmente não passou por um - bem conduzido - em sua formação escolar). Isso exigiria o engajamento do estudante em atividades específicas (ver, por exemplo, Blanton, 2008; Radford, 2011; Veloso, 2012) e a passagem por diversos estágios de generalização que vão desde a criação de recursos semióticos e significados personalizados e situados, num primeiro momento, até o domínio efetivo da linguagem algébrica padrão, universal e mais funcional nos estágios mais avançados do processo (Radford, 2011). Assim, um professor que não vivenciou (nem refletiu sobre) esse processo na sua prática de formação, provavelmente terá dificuldade de conduzí-lo adequadamente com seus 35 (ou mais) alunos em sala de aula da escola. A tendência geral, nesses casos, é "pular" essa etapa do processo e iniciar direto o trabalho com a linguagem padrão, o que as pesquisas têm mostrado que quando "funciona" é de forma bastante limitada (para uma minoria muito restrita). Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Usiskin (1994) categoriza as concepções sobre a álgebra em quatro grupos, que podem eventualmente se intersectarem. A primeira concepção de álgebra refere-se à generalização: as letras, substituindo os números, permitem expressar certas propriedades

de um dado objeto matemático (operações, por exemplo) de uma maneira mais geral e ampla. Por exemplo, podemos expressar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição utilizando a forma a. (b + c) = a.b + a.c. A segunda concepção é fundamentalmente procedimental: refere-se ao uso das letras para traduzir certos tipos de problemas para a linguagem algébrica, sendo, então, resolvidos através dos procedimentos e manipulações algorítmicas anteriormente estabelecidos e justificados. A terceira concepção refere-se ao aspecto da dependência funcional entre variáveis: as letras são utilizadas para expressar relações matemáticas entre as medidas de grandezas que dependem uma da outra. Aqui se pode citar o estudo das funções. A quarta concepção de álgebra refere-se ao estudo das estruturas abstratas, não apenas no sentido da matemática do ensino superior, quando se trata de estruturas gerais como anéis, grupos e corpos, por exemplo, mas também na Educação Básica, quando se estudam as propriedades dos números (inteiros, racionais, reais). O quadro a seguir resume as quatro concepções:

Concepção de álgebra	Uso das letras
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Estudo de procedimentos para resolver problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações entre grandezas	variáveis, parâmetros (relacionar, fazer gráficos)
Estudo de estruturas abstratas	Sinais "arbitrários" no papel (manipular, justificar, deduzir)

Tabela 10. Concepções de álgebra e o uso das letras (Usiskin, 1994, p.20)

Ao concluir, Usiskin comenta a importância de se considerar, especialmente no trabalho docente escolar, todas as concepções sobre a álgebra como relativamente diferenciadas, a serem evocadas e utilizadas, cada uma na situação didática particular em que se mostra mais eficiente e funcional. Mas, ao mesmo tempo, defende a ideia de que essas concepções, em seu conjunto, compõem uma totalidade, em termos de construção de uma visão do papel da álgebra na articulação de parte significativa da matemática escolar.

Kuchemann (1981), por sua vez, num estudo de natureza cognitiva, estabelece seis situações em que as variáveis desempenham papéis essencialmente diferentes, do ponto de vista da aprendizagem. São elas:

1. Situações em que a letra possui um valor numérico específico e é preciso "descobrir" qual é esse valor, como, por exemplo, na pergunta: que número somado

com 3 dá como resultado 9? Usando uma letra para formular a pergunta numa linguagem simbólica, poderíamos colocá-la nos seguintes termos: para que valor de *b, teremos* $b+3 = 9$? Neste caso, não é estritamente necessário fazer nenhuma operação com a letra, basta "experimentar" (talvez mentalmente) valores numéricos possíveis até encontrar a resposta (que, nesse caso, é, evidentemente, única).

2. Situações em que uma letra (ou mais de uma) aparece numa expressão algébrica, à qual é atribuído determinado valor. Pode-se pedir, então, que o aluno faça alguma operação "aritmética" com o valor da expressão, como no seguinte exemplo: se $a+b = 4$, quanto vale $5(a+b)$? Nesta categoria, também não é necessário operar com as letras, mas o nível de complexidade da compreensão da simbologia algébrica aumenta, segundo o autor.
3. Situações em que a letra é utilizada para identificar um objeto, como, por exemplo, no seguinte caso: "a medida do lado de um quadrado é *l*. Calcule o perímetro deste quadrado". Aqui é preciso operar com a letra em situações simples, além de "aceitar" que uma expressão que indica uma operação possa servir como resposta a um problema proposto, ou seja, $4l$ não significa apenas uma instrução que precisa ser cumprida (multiplicar 4 pelo valor de *l*), mas pode significar um número.
4. Situações em que a letra assume o papel de uma incógnita, ou seja, um valor (ou mais de um) desconhecido, mas determinado, fixo, a ser encontrado. Exemplo: achar o valor de x que satisfaz a igualdade $x^2 + 3x + 4 = 0$. Situações como essa demandam habilidade de manipulação algébrica envolvendo uma diversidade de operações com a letra, como se ela fosse um número conhecido.
5. Situações em que a letra é vista como um representante genérico dos elementos de um dado conjunto, podendo então, assumir diversos valores pré-fixados. Por exemplo: a soma dos n primeiros números naturais é dada por $n(n+1)/2$. Neste caso, n pode tomar valores específicos dependendo de quantos números naturais se queira somar, não se trata de um valor desconhecido que precisa ser determinado.
6. Situações em que a letra é entendida como uma variável num sentido funcional, isto é, a letra pode percorrer diferentes valores dentro de um determinado domínio numérico, provocando, desta forma, variações potenciais nos valores de uma expressão algébrica que depende dela. Como exemplo, temos a seguinte tarefa: sendo n um número natural, qual é maior, 2n ou n+2?

5.2 Sobre os erros e dificuldades na álgebra

De acordo com a pesquisa de Kuchemann (1981) ao não compreender claramente os diferentes significados que as letras assumem em diferentes contextos, os alunos acabam por cometer diversos tipos de erros. Estes erros são objetos de estudos que analisam, por exemplo, como os alunos resolvem certos tipos de questões envolvendo a linguagem algébrica ou qual o tipo de conhecimento algébrico que evocam numa determinada situação de resolução de problemas matemáticos. Assim, os estudos de Kuchemann nos apontam pelo menos duas demandas importantes de conhecimento profissional relacionado diretamente com a prática docente: a) o conhecimento profundo das diferentes possibilidades de interpretação do significado das letras em diferentes situações didáticas; b) os possíveis vínculos entre o desconhecimento dessas interpretações, por parte dos alunos e os erros cometidos por eles na leitura, interpretação e resolução de problemas que envolvem o lidar com os símbolos da linguagem algébrica padrão .

Avançando um pouco mais nessa questão dos erros dos alunos, nos reportamos a uma pesquisa de Booth (1994), que analisa as principais dificuldades dos estudantes em álgebra nas escolas da Inglaterra, no início dos anos 90. Para isso, o autor identifica e interpreta os erros mais comuns cometidos em atividades realizadas por alunos da oitava e da décima série. Os alunos mais jovens (oitava série) tinham pouca experiência em álgebra, enquanto os mais velhos (décima) já haviam adquirido certas habilidades algébricas, porém, de modo geral, os mesmo erros foram cometidos pelos dois grupos de alunos, ou seja, alguns erros parecem se perpetuar ao longo da formação escolar. Em entrevistas com os alunos, o pesquisador foi capaz de detectar e descrever as origens desses erros. Segundo o autor, uma das causas dos erros é que os estudantes, de modo geral, têm dificuldade de aceitar como resposta a um problema uma expressão algébrica, mesmo em situações em que se exige uma resposta genérica. Vejamos um exemplo, apresentado no relato de Booth:

O que você seria capaz de escrever sobre
o perímetro desta figura:
Parte da figura está escondida.
Ao todo são n lados, cada um de comprimento 5.

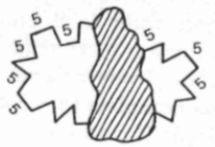


Fig. 3.3

Marie: n vezes 5. É o número de lados vezes quanto mede cada lado, só que não se sabe quantos lados são, de modo que só dá para fazer n vezes 5.
E: Então a resposta é n vezes 5?
M: Bem, não se pode dar uma resposta propriamente dita, porque não se sabe o que é n. Se eu conhecesse n, poderia dar o resultado, mas, desse jeito, só dá para colocar $5n$.

(Booth, 1984, p. 35)

Figura 1. Exemplo de atividade sobre generalizações (Booth, 1994, p.26)

Mesmo quando os alunos conseguem pensar na forma correta de fazer o cálculo em qualquer caso, mostram dificuldades em dar como resposta uma expressão que possua mais de um termo, o que pode ser derivado, segundo o autor, da sensação de incompletude, de não se ter chegado a uma resposta final (definitiva e única). Na forma algébrica, especialmente com mais de um "termo", a resposta parece "aberta", depende de valores que não são dados, portanto não seria considerada uma resposta matemática "correta". Se uma atividade requer que a resposta seja dada por uma expressão do tipo $x + 7$, ela seria inadmissível pelos fatos descritos anteriormente, uma vez que $x + 7$ não é visto como um objeto, mas uma operação a ser feita (ver também Gray e Tall, 1993). Outra dificuldade associada a essa é detectada por Booth e tem origem, segundo ele, no fato de que os símbolos usados em álgebra são os mesmos que usamos na aritmética. Os símbolos + (mais) e = (igual) , por exemplo, quando aplicados a expressões numéricas normalmente indicam uma ação a ser feita (somar) seguida da expressão do resultado (igual a tanto). Mas em expressões algébricas esses sinais podem ter significados variados, como por exemplo, na igualdade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ou na equação $3x + 5 = 2$. O aluno precisa desenvolver o pensamento algébrico a partir da exposição a (e reflexão sobre) uma série de situações didáticas específicas para que venha a superar essas dificuldades. O estudo de Booth é um dos muitos exemplos que mostram que não basta dizer ao aluno o que significam esses sinais, é preciso que ele desenvolva sua própria capacidade de interpretá-los nas diferentes situações em que aparecem. A ideia de que devem sempre processar a operação indicada, sem uma avaliação correta da situação e dos diferentes significados dos símbolos, pode levar o aluno a se ver forçado a inventar interpretações mais ou menos arbitrárias (ou a partir de uma lógica matematicamente incorreta) como achar um "resultado" para $2b + 5c$ na forma $7bc$.

Ainda ligado ao exemplo acima, outro aspecto que pode gerar certa confusão para o aluno, no desenvolvimento de sua educação algébrica escolar, está relacionado com o entendimento da lógica do sistema posicional numérico transferida incorretamente para o registro de algumas expressões algébricas. Como o aluno está acostumado a realizar operações aritméticas considerando a posição dos algarismos nos números, ele acaba transferindo esse procedimento para as expressões algébricas. Ocorrem então coisas do tipo: quanto é $5y$, onde $y = 4$, por exemplo, deixa de ser 5 vezes 4 (20), para ser 54, ou seja, o 4 é visto como o algarismo que ocupa a posição das unidades no número e não como um fator da multiplicação por 5.

Booth identifica também uma dificuldade no uso das letras como rótulo, perdendo assim o referencial numérico que normalmente apresentam. Por exemplo, na expressão 3m, o m pode representar a unidade (metros) e não um número, como em 3m + 5p. Esta dificuldade pode ser resolvida quando se escreve por extenso o rótulo, até que fique superado o problema de identificar o significado em determinadas situações. Mas é importante que o professor conheça e reconheça essas dificuldades entre os alunos. Ainda no uso das letras, é bastante comum que muitos alunos não percebam que uma mesma letra pode assumir valores numéricos distintos em determinadas situações, como no estudo das funções, por exemplo. Como a introdução à álgebra na escola tem um caminho voltado normalmente para a resolução de equações a uma incógnita, ou seja, procura-se um valor determinado para a letra, de modo a satisfazer a igualdade proposta (na forma de uma equação) a ideia de trabalhar com uma expressão como função (e não como um membro de uma equação) pode gerar grandes problemas. A dificuldade de lidar com esse tipo de questão é bastante frequente até nos cursos universitários: a função $y= x^2 +3x + 2$ é vista, muito frequentemente como uma equação ($x^2 +3x + 2 = 0$), o que torna difícil acompanhar o processo de estudo do sinal da função para cada conjunto de valores que a variável independente x pode tomar, dependendo da situação didática. Mesmo entre alunos do curso de licenciatura em matemática, uma das grandes dificuldades no estudo das inequações é essa (cf. Magalhães, 2013, por exemplo).

No trabalho com o cálculo e simplificação de expressões algébricas, especialmente aquelas que envolvem o uso de parênteses, colchetes e chaves, muitos alunos transferem mecanicamente da aritmética para a álgebra certos procedimentos que não fazem sentido na situação em que os símbolos substituem os números. Por exemplo, a regra "efetuar primeiro o que está dentro do parêntesis", nem sempre é possível ou conveniente: na situação 5c[35(a+b) + 17(a+b)] não se pode efetuar a operação indicada dentro do parêntesis, talvez o melhor seja somar as parcelas dentro do colchete e obter 5c[52(a+b)] e finalmente chegar a 260c(a+b), ou seja, o que está dentro do parêntesis permaneceria intacto até o final, uma contradição com a "regra".

Em outras situações algébricas, o problema não é exatamente a questão da rigidez das regras transferidas da aritmética, mas o fato de que as propriedades das operações tomam uma importância que não têm, necessariamente, enquanto se está lidando com a aritmética dos números naturais ou mesmo dos racionais. Em muitos desses casos, não é essencial utilizar as propriedades (associativa ou distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração, por exemplo), pois podemos fazer as operações indicadas com os

números e chegar a resultados numéricos, com os quais fazemos as operações indicadas na sequência da expressão a ser simplificada ou calculada e assim por diante. Entretanto, ao lidar com as letras, em determinados momentos é imprescindível o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, por exemplo. Ao resolver uma equação do tipo $2x(x+1)/3 + (2x-1)/5 = x+2$, por exemplo, é preciso usar essa propriedade de uma forma que não tem paralelo na aritmética dos naturais, embora seja essa aritmética dos naturais a referência fundamental em que se fundamenta a justificativa do procedimento de "distribuir" o produto de a pelas parcelas b e c, no caso de $a(b+c) = ab + ac$. Entretanto, como não se tem a familiaridade adequada com "fazer operações com letras", nem com o uso da distributividade da multiplicação em relação à adição e à subtração, nos cálculos aritméticos (muitas vezes são apenas regras a serem seguidas, sem a contrapartida lógica segundo a qual as regras "funcionam"), o aluno tende a distribuir de forma inconsistente qualquer conjunto de operações a ser feito sobre uma soma, por exemplo. Assim, se tiver que multiplicar $2x(x+1)$ por 5, poderá chegar a $5.2x(5x+5)$. Ou, no caso de $x/(x+1)$ chegar a $x/x + x/1$ e finalmente $1+x$ como resultado final (ver Ferreira, 2014, cap.4). Booth detecta outros erros cuja origem ele identifica com uma relação inadequada construída pelo aluno entre procedimentos aprendidos no trato com números e sua transferência para situações de natureza algébrica:

> Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. Neste caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas problemas com a aritmética que não foram devidamente corrigidos (Booth, 1994, p.33).

Na conclusão de seu estudo Booth (1994) reforça a necessidade de se estudar os erros dos alunos e suas possíveis origens, considerando esse tipo de saber como fundamental para o professor em sua prática escolar, devendo, portanto, integrar, de modo intensivo e detalhado, a sua formação como docente. Ele conclui:

> Esta lista de possíveis causas das dificuldades das crianças no aprendizado de álgebra não é, de modo algum, exaustiva. No entanto, poderá servir para lançar alguma luz sobre os tipos de dificuldades que as crianças provavelmente experimentarão quando começarem a estudar álgebra. Como o valor dessas observações deve provir do uso que delas se possa fazer para tomar decisões referentes ao ensino e aprendizado de álgebra, devemos indagar o que o professor pode fazer para ajudar as crianças a evitar ou corrigir esses problemas. Espera-se que as sugestões feitas aqui possam ir, de alguma maneira, ao encontro dessas necessidades. Além disso, as ilustrações aqui apresentadas podem servir para nos lembrar

> que algumas ideias aparentemente simples nem sempre são tão simples como podem parecer aos adultos. Um levantamento contínuo do que envolve exatamente o aprendizado de novos tópicos de matemática, acompanhado por uma análise dos erros cometidos pelos alunos e de suas causas, pode nos proporcionar instrumentos extremamente úteis para decidir sobre os meios de ajudar as crianças a melhorarem sua compreensão da matemática. Cabe aos professores e pesquisadores darem os passos que puderem para implementar esses esforços (Booth, 1994, p. 35-36)

Este é um ponto que pode ser crucial para o desenvolvimento da formação do profissional que ensina matemática, pois compreender onde se encontram as dificuldades dos alunos, auxilia o professor em sala de aula a escolher exemplos que causem menos desgastes e evitem sentimentos negativos a respeito de sua própria capacidade, além de criar argumentos que possam auxiliar na (difícil) empreitada de corrigir concepções errôneas já internalizadas.

Observamos, mais uma vez, que a discussão desse assunto (os erros dos alunos em álgebra e suas possíveis origens) não consta explicitamente nas ementas ou programas de nenhuma disciplina do curso examinado. Constata-se, assim, mais uma vez, a relação de distanciamento entre as demandas de conhecimento (sobre álgebra) da prática docente escolar e os saberes da formação inicial do professor de matemática da Educação Básica no curso examinado.

Lochhead e Mestre (1994) estudaram as questões referentes à tradução do enunciado de um problema da linguagem natural para a linguagem matemática, através do uso dos símbolos algébricos. De acordo com os autores, "*Em problemas em que se pede aos alunos para ler uma sentença relacionando duas variáveis e escrever uma equação que expresse essa relação, frequentemente eles escrevem o contrário do que pretendem*" (p.145). Segundo os autores, os erros cometidos na tradução de problemas para a linguagem algébrica, em sua grande parte, não advêm de uma compreensão inadequada dos enunciados, tampouco de uma manipulação simbólica incorreta, em termos de procedimentos matemáticos inválidos. Eles parecem ter origem basicamente em diferenças nas estruturas das duas linguagens. Lochhead e Mestre (1994) se concentraram na discussão de dois tipos de erros:

1. Os alunos mostram forte tendência a fazer uma associação com a ordem das palavras, da esquerda para a direita, ao traduzirem (...)
2. Os alunos muitas vezes confundem variáveis com rótulos.

Como exemplo do primeiro tipo, temos a tradução do seguinte enunciado para a linguagem algébrica: há quatro vezes mais coelhos que macacos. Os alunos traduzem assim: 4.C = M,

ao invés de C = 4.M (onde C e M indicam respectivamente o número de coelhos e macacos). Com o mesmo enunciado, podemos encontrar também o segundo tipo de erro: o aluno, ao invés de interpretar o C como o número de coelhos, associa a variável apenas ao rótulo "coelho". Assim, C não seria um número, mas "coelhos". É claro que isso vai gerar dificuldades na realização da tarefa. Na figura a seguir apresentamos algumas questões que foram aplicadas aos alunos, o índice de erros cometidos e algumas das respostas erradas típicas:

Questões da prova (n = 150)	*Resposta correta*	*% de acertos*	*Resposta errada típica*
1. Resolva para x: $\frac{6}{4} = \frac{30}{x}$	$x = 20$	95%	
2. Jones às vezes vai visitar seu amigo Lubboft de carro, rodando 60 milhas e gastando 3 galões de gasolina. Quando visita seu amigo Schwartz, ele roda 90 milhas e gasta ? galões de gasolina. (Assuma as mesmas condições de consumo nos dois casos.)	4 1/2	93%	
3. Escreva uma equação usando as variáveis A e P para representar a seguinte afirmação: "Há seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade." Use A para indicar o número de alunos e P para indicar o número de professores.	$A = 6P$	63%	$6A = P$
4. Escreva uma equação usando as variáveis Q e T para representar a seguinte afirmação: "Na confeitaria da Mindy, para cada quatro pessoas que pedem queijada, cinco pedem torta de maçã." Use Q para indicar o número de queijadas e T para representar o número de tortas de maçã.	$5Q = 4T$	27%	$4Q = 5T$

Figura 2. Questões e seus índices de acerto, resposta correta e reposta típica (Lochhead e Mestre, 1994, p. 146)

Observe-se que esses dados se referem a alunos universitários e não a alunos iniciantes em álgebra escolar. Isso vem reforçar a ideia de que os próprios licenciandos precisam passar pelo menos por testes diagnósticos, a fim de que as discussões sobre questões como o desenvolvimento do pensamento algébrico na escola, os erros e suas origens etc. seja conduzida adequadamente com eles na formação inicial. Lochhead e Mestre comentam:

> O terrível a respeito desses dados é que os alunos da amostra faziam graduação em matemática, ciências e engenharia, em universidades bastante prestigiosas do país. Gostaríamos de acreditar que as pessoas que no futuro construirão nossas pontes, nossos computadores e aviões fossem capazes ao menos de resolver com segurança os problemas algébricos simples da figura 13.1 (o quadro apresentado logo acima, adendo nosso). O mais lamentável é que nosso sistema educacional não parece dirigido às questões conceituais que ajudariam os alunos a superar tais concepções erradas.
>
> (...) Os alunos não aprendem a ler e a escrever em matemática! Essa omissão não só limita o desempenho na resolução de problemas, como também os coloca em séria desvantagem

> quando se trata de aprender a manipulação simbólica segundo as regras da álgebra. Sem a capacidade de interpretar o que leem ou escrevem, os alunos não dispõem de mecanismos para verificar se um dado procedimento é correto. Assim, muitas vezes eles têm de recorrer a lembranças de procedimentos automatizados para resolver problemas (Lochead e Mestre, 1994, p. 148)

É necessário um trabalho árduo e incessante por parte de alunos e professores para diminuir a frequência desses erros. Há uma literatura ampla (Cury, 1995, 2010; Graeber, 1993; Hart, 1981; Igliori e Silva, 1998; Monaghan, 2001; Moren, David, Machado, 1992; Radatz, 1980, entre outros) que estuda os erros cometidos pelos alunos da escola, que analisa as "*misconceptions*" na Educação Matemática e as dificuldades de ultrapassar essas concepções que, muitas vezes, levam aos erros. Não basta "explicar" ao aluno o que é considerado matematicamente correto. Isso, em princípio, todo professor já faz. A questão mais complicada é compreender os mecanismos que levam os alunos a validar um procedimento ou uma forma conceitual incorreta, expor o aluno a situações que potencialmente colocam esses mecanismos em ação e levar o próprio aluno a perceber o erro e identificar o que o levou a esse erro. Uma proposta de sequência de ensino, resumida na pesquisa de Lochhead e Mestre, indica que o trabalho com os alunos nessa direção costuma ter bons resultados quando os leva a percorrer os seguintes passos, antes de ater-se à resolução propriamente dita de um problema: uma compreensão qualitativa, quantitativa e conceitual das relações entre as grandezas envolvidas no problema. O professor desempenharia então um papel mediador, propondo questões de modo a promover o debate entre os estudantes e levar cada um deles, a partir dessas discussões, a se confrontar com seus próprios erros de compreensão da situação-problema, identificando as fontes desses erros, numa espécie de meta-análise do problema. Esse tipo de ação docente em sala de aula da escola demanda conhecimentos específicos que precisam ser trabalhados na formação. Mas, como vimos no capítulo anterior, a questão voltada para a compreensão dos erros dos alunos e suas origens não consta do currículo da preparação do professor para a prática de educação algébrica escolar. Identificamos, assim, mais um aspecto do distanciamento entre os saberes da formação e as demandas da prática docente escolar em álgebra.

Os professores, como mediadores do conhecimento, ao já conhecerem as dificuldades mais comuns enfrentadas pelos alunos no que tange à álgebra (conhecimento do conteúdo e do estudante - KCS, nos termos de Ball, Thames e Phelps, 2008) podem, desde as primeiras aulas em que o assunto é abordado, tentar evitar que tais dificuldades

venham a se fixar entre os alunos e, mais grave, permanecerem ao longo dos anos de escolarização, como foi constatado na pesquisa de Booth (1994). Mas, nesse caso, a questão que se coloca é: quando se dá a introdução à álgebra na escola?

5.3 Sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico

Para Blanton (2008), citando Kaput (2008), o pensamento algébrico refere-se basicamente aos processos de generalização em matemática e é coisa que se aprende. Para essa autora "toda criança pode aprender a pensar algebricamente" (Blanton, 2008, p.7). Radford (2011) diz que "o simbolismo alfanumérico não é uma condição necessária nem suficiente para a construção do pensamento algébrico. O que caracteriza o pensamento como algébrico é que ele lida com quantidades indeterminadas numa forma analítica, isto é, consideradas como se fossem conhecidas [...]" (RADFORD, 2011, p.310). O pensamento algébrico pode ser desenvolvido e aguçado desde muito cedo entre as crianças. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009) "existe, também, um movimento no sentido de promover uma iniciação ao pensamento algébrico desde os 1º e 2º ciclos (primeiro ao quinto ano, no caso do Brasil – esclarecimento nosso), preparando o terreno para as aprendizagens posteriores." (p.13).

Para esses estudiosos, o grau de desenvolvimento do pensamento algébrico depende da fase cognitiva em que a criança se encontra, de forma que, em cada fase, ela consegue expressar de maneira diferente as relações que percebe entre as grandezas envolvidas em determinada situação. Em particular, Radford (2011) considera que o pensamento algébrico pode se manifestar usando diferentes recursos de linguagem e formas de generalização. Segundo esse autor, teríamos pelo menos três níveis em que se expressam as generalizações:

- *FACTUAL* ─ nesse nível, as generalizações algébricas são expressas em ações, gestos e outras formas não discursivas.
- *CONTEXTUAL* ─ utilizam-se formas reduzidas de expressão, mas com recurso a termos dêiticos (símbolos criados a partir da intuição, não universais, compreensíveis apenas em um contexto específico).
- *PADRÃO* ─ nesse nível utiliza-se a linguagem algébrica compacta já sistematizada, incluindo as letras e fórmulas.

Magalhães (2013, p.18), citando Veloso (2012) observa o seguinte: "a presença de letras em uma expressão matemática criada por um aluno não garante, segundo Radford, que ele esteja num nível de pensamento algébrico padrão. A utilização de letras numa

suposta fórmula pode ter origem na experiência vivenciada pelo aluno, funcionando como parte da narrativa desta experiência, ainda presa a aspectos contextuais".

Ponte, Branco e Matos (2009) concordam que o foco do desenvolvimento do pensamento algébrico não deve ser posto, num primeiro momento, no uso das letras, mas na compreensão das relações existentes entre os objetos estudados. O quadro a seguir mostra os fundamentos do pensamento algébrico, segundo Ponte, Branco e Matos (2009):

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Figura 3. Quadro sobre as Vertentes do Pensamento Algébrico (Ponte, Branco e Matos, 2009, p.12)

Ao longo do tempo as abordagens didáticas sugeridas para o trabalho com a álgebra escolar foram se modificando, em relação àquelas que focavam as reproduções de procedimentos. Atualmente, os estudos sugerem uma abordagem voltada para a formação e o desenvolvimento do pensamento algébrico, passando pelos vários níveis e formas semióticas de expressão de generalizações, culminando com a apropriação e domínio da linguagem algébrica padrão. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), procura-se, hoje, "valorizar-se a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas" (p. 14). Para isso, as crianças dos anos iniciais da escola podem ser incentivadas, através do uso de sequências numéricas ou pictóricas, a procurar e expressar, com os recursos simbólicos adequados à faixa de idade, regularidades e padrões de formação dessas sequências, por exemplo. Os

alunos então usarão, num primeiro momento, a linguagem natural, incluindo desenhos, gestos, palavras ou quaisquer outras formas semióticas a seu alcance. Ao longo do desenvolvimento escolar, o uso das sequências e outras formas de expressar generalizações e de lidar com a ideia de variáveis e valores indeterminados deve continuar e ir se aprofundando, no sentido de produzir um amadurecimento gradativo do pensamento algébrico. Assim, alunos do quinto e sexto anos, por exemplo, seriam levados, a partir de atividades apropriadas, a encontrar outras formas, cada vez mais compactas e universais, mas sempre de modo gradativo, de expressar suas ideias ligadas à álgebra, até que se chegue a um grau de abstração correspondente ao uso recorrente da simbologia padronizada. Reproduzimos aqui, a título de ilustração, algumas das propostas de Ponte, Branco e Matos (2009) para uma abordagem desse tipo no primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Fundamental. Ver também Blanton (2008), que inclui atividades similares para a Educação Infantil e Veloso (2012), que relata uma experiência de trabalho nessa direção com alunos de sexto ano do EF.

☾★★☾☾★★☾☾★★☾☾★★☾…

A 1 1 A 1 1 A 1 1 A 1 1 …

vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, …

Figura 4. Atividade sobre generalizações (Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 42).

O uso deste tipo de atividade na escola básica pode ser norteado pelos seguintes pontos, segundo os autores:

(i) Continuar a representação da sequência (representando os termos imediatamente a seguir aos dados);

(ii) Identificar a unidade que se repete ciclicamente;

(iii) Descrever uma relação entre os termos da sequência e a sua ordem (com base no comprimento da unidade que se repete);

(iv) Usar a relação entre o termo e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma ordem (geralmente mais distante) e para indicar a ordem de um termo dado;

(v) Expressar essa relação em linguagem natural e simbólica (generalizar).

(Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 47-48)

Vários pesquisadores indicam o trabalho com padrões e regularidades para a introdução à álgebra nos anos iniciais do EF (Blanton, 2008; Radford, 2011; Ponte, Branco e Matos, 2009; Blanton e Kaput, 2011, entre outros). Esse trabalho parte do concreto (normalmente

manipulável ou na forma de desenhos) para em seguida chegar a etapas mais abstratas, em que, especialmente nos anos intermediários do EF, aparecem conceitos como o de simetria, problemas em que se deve imaginar situações ou possibilidades (por exemplo: se há 50 pessoas em uma festa, quantos cumprimentos de mão serão realizados se todas essas pessoas se cumprimentarem uma única vez?), perguntas em que certas operações realizadas precisam ser revertidas, para se chegar à resposta etc. Todas essas considerações sobre o trabalho com padrões e regularidades na iniciação à álgebra e no desenvolvimento do pensamento algébrico e funcional mostram que há saberes profissionais importantes e fundamentais associados à construção das atividades apropriadas e à condução desse tipo de trabalho em salas de aula da Educação Básica.

5.4 Sobre a conquista da linguagem e dos significados dos símbolos algébricos

Olhando para a matemática a partir de sua função como linguagem, Granell (1997) utiliza o termo *sintático*, para classificar as manipulações algorítmicas, ou seja, a parte que trata das regras de procedimentos relacionadas com a execução das operações e, em geral, do trabalho mecânico com o simbolismo; e o termo *semântico* para se referir aos significados dos símbolos e das operações envolvidas na situação em estudo, à pertinência ou legitimidade da lógica subjacente às regras, o por quê dessas regras serem válidas (ou não) em diferentes contextos. Segundo a autora, alguns alunos são "treinados" na utilização dos recursos sintáticos, tendo, aparentemente, um grau maior de destreza para resolver problemas algébricos de um tipo específico, em que não se demanda a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. Porém, na resolução de problemas que exigem essa tradução, podem encontrar grande dificuldade, tendo em vista que não desenvolveram, muitas vezes, a parte semântica associada aos significados dos símbolos. Segundo Granell (1997), é fundamental que "*os alunos entendam ou construam o significado dos conceitos matemáticos. Isto é, trata-se de entender, o significado das operações básicas [...], do número fracionário ou decimal, da proporcionalidade, das relações geométricas, das transformações algébricas etc*." (p.267).

Na resolução de problemas matemáticos complexos, os alunos utilizam diferentes formas de raciocínio para compreender o contexto e a estrutura semântica da linguagem matemática que traduz a situação em exame. Assim, eles não apenas realizam operações matemáticas previamente explicitadas. Essa dinâmica de idas e vindas do pensamento matemático até o entendimento da situação-problema, proposta na linguagem corrente, confirma a ideia de que os alunos constroem e validam seus conhecimentos ao mesmo tempo em que os mobilizam e testam nos múltiplos contextos em que fazem sentido. O

aprendizado estritamente reduzido à forma sintática torna difícil (se não impossível) associar os símbolos aos significados referenciais. Assim, na educação algébrica escolar é importante observar os dois aspectos, sintático e semântico. Granell conclui:

> A meu ver, saber matemática implica dominar os símbolos formais independentemente das situações específicas e, ao mesmo tempo, poder devolver a tais símbolos o seu significado referencial e então usá-los nas situações e problemas que assim o requeiram [...] Finalmente, não se pode esquecer que aprender uma linguagem não é aprender uma série de regras e sim adquirir um grau de competência comunicativa que permita usar tal linguagem adequadamente (Granell, 1997, p.274).

Thompson (1994) observa que a evolução dos estudos e pesquisas sobre ensino escolar da matemática indica que as crianças seguem ritmos de aprendizagem diferentes e que esta (aprendizagem) normalmente ocorre de forma processual, com idas e vindas, em oposição a uma forma frequentemente idealizada pelos professores, instantânea e definitiva. Thompson desenvolveu em pesquisas com crianças do terceiro ao sexto ano (USA), sequências didáticas que respeitam estes aspectos cognitivos, indo do concreto ao abstrato, de maneira a introduzir determinados conceitos algébricos. No desenvolvimento do estudo dos inteiros negativos, por exemplo, em cada sequência de atividades introduziu-se um conceito, primeiro usando material manipulável e depois fazendo uma recapitulação com modelos pictóricos representando os objetos originais. À medida que os alunos iam completando cada passo, a ação era registrada no quadro-negro ou nos cadernos, por meio de uma notação abstrata. As sequências propostas utilizaram fichas que, se unidas, podiam se cancelar mutuamente ou se somar, de acordo com as cores. O trabalho inicial foi de manipulação das fichas, de modo que aparecessem operações com os inteiros negativos, fazendo com que o aluno percebesse os opostos e as subtrações com resultados negativos. As fichas possuíam cores diferentes (vermelhas e azuis) para indicar, quando se anulavam, uma ideia inicial de simétricos (ou opostos).

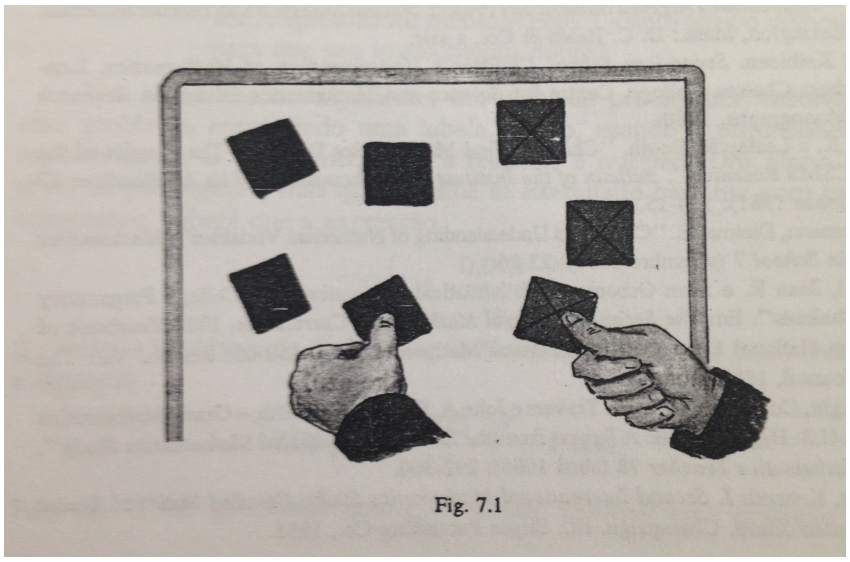


Figura 5. Operações utilizando material concreto (Thompson, 1994, p. 81)

Depois de determinado tempo de operação com estes objetos, o trabalho passa a ser pictórico em desenhos que simulam os objetos concretos e mais adiante, de acordo com o tempo de cada criança, são trabalhados os símbolos abstratos.

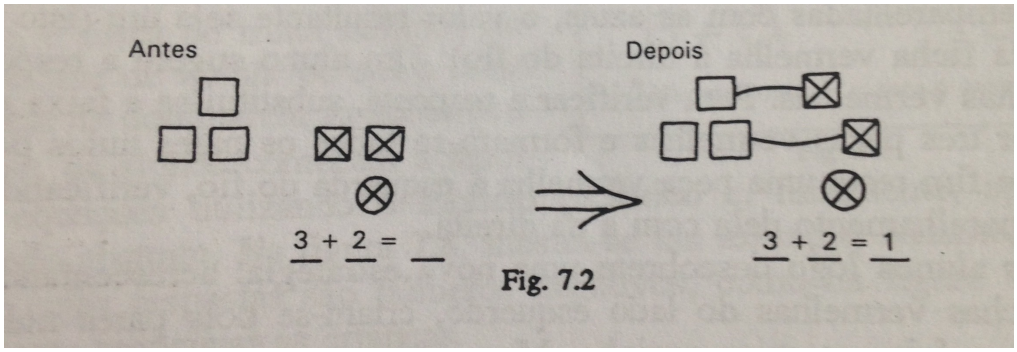


Figura 6. Operações utilizando elementos pictóricos (Thompson, 1994, p.82)

Além do desenvolvimento do conceito de número negativo e de opostos, o pesquisador também propõe uma sequência para o aprendizado das equações do primeiro grau, onde na parte concreta, no uso de fichas, algumas são escondidas e quer se determinar quantas são. Os passos da sequência seguem a orientação anterior, caminhando no sentido de formas cada vez mais abstratas de registro e respeitando o tempo das crianças. As crianças que já haviam sido iniciadas em álgebra relutaram um pouco em aceitar o trabalho de forma concreta, com os objetos, mas depois de não conseguirem justificar certos procedimentos algébricos que já conheciam, aceitaram o auxílio dos mesmos. Thompson conclui que

> O amplo uso da técnica de ensino descrita anteriormente revela que os alunos da terceira à sexta série conseguem aprender conceitos algébricos simples e têm vontade de fazê-lo, quando lhes é permitido operar com o material concreto. Os únicos pré-requisitos são as

> quatro operações básicas com números naturais. É emocionante pensar em toda a matemática que as crianças pequenas serão capazes de aprender se forem ensinadas através de uma sequência que esteja em consonância com suas próprias necessidades de desenvolvimento (Thompson, 1994, p.88)

De acordo com Simon e Stimpson (1994) o uso de diagramas pode facilitar processos como a compreensão de transformações equivalentes em equações. Um exemplo de como os diagramas poderiam ser utilizados na solução de uma situação-problema pode ser visto na figura a seguir:

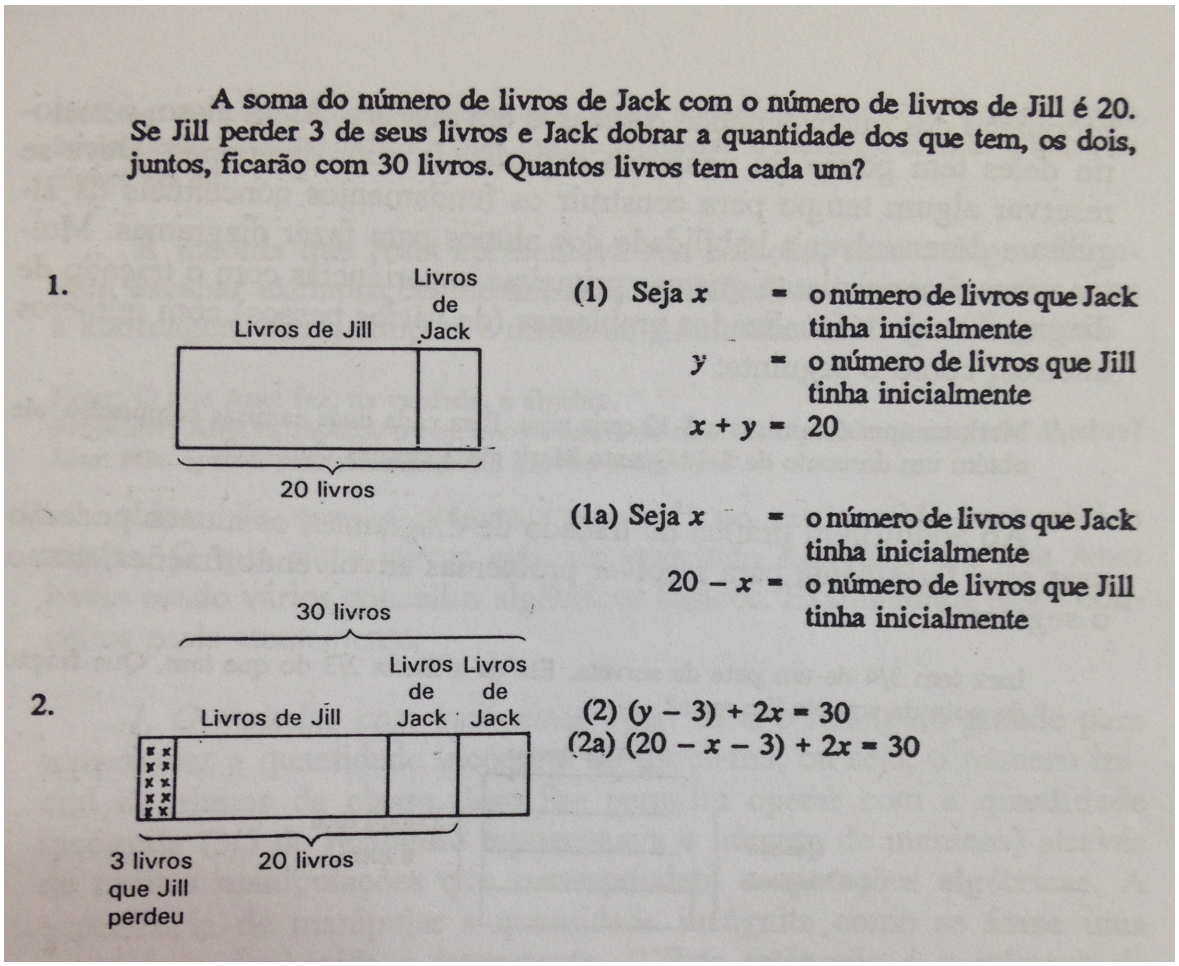


Figura 7. Expressando problemas através de diagramas (Simon e Stimpson, 1994, p. 160)

O trabalho com os diagramas torna (literalmente) visível os principais pontos dos problemas a serem trabalhados, o aluno tem uma visão concreta do que está acontecendo, pois precisa pensar em alguma maneira de representar o enunciado com os diagramas, ou seja, ele se dedica à compreensão do problema e não apenas à sua solução. Segundo os autores, uma classe iniciante em álgebra, acostumada a trabalhar com os diagramas, ao passar a utilizar as letras como incógnitas ou como variáveis perceberá o poder dessa

linguagem algébrica, em comparação com o método dos diagramas, mas, por outro lado, o uso dos diagramas vai dar mais visibilidade e compreensão futura do processo mais eficiente. Desta forma, concluem Simon e Stimpson, os alunos sentem que é mais produtivo utilizar a linguagem algébrica padrão, ao mesmo tempo que compreendem o significado dos símbolos utilizados.

5.5 Sobre as relações entre álgebra e aritmética

Demana e Leitzel (1994) defendem a ideia de que as crianças podem apresentar uma melhor compreensão de conceitos algébricos se forem introduzidas no assunto ainda quando estão no trabalho com a aritmética, ou seja, através dos números e não através de formalizações que acabam por gerar a reprodução de procedimentos, em lugar de aprendizagem efetiva. Propõem uma abordagem da aritmética embasada no uso da calculadora e na resolução de problemas, visando a preparação para os estudos de natureza algébrica.

Segundo a proposta desses autores, antes de entrar propriamente no conteúdo algébrico, o aluno passaria por um curso de pré-álgebra onde os conceitos aritméticos seriam reforçados, dando uma base para que o aluno desenvolva raciocínios análogos em álgebra. Os exercícios visam, por exemplo, a que o aluno reforce a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição como mostrado a seguir:

Para alguns retângulos, a base tem quatro centímetros mais que a altura. Complete a seguinte tabela:

Base (cm)	Altura (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
1	5	12	5
5	9	28	45
8,4	12,4	41,6	104,16
w	$w+4$	$4w+8$	w^2+4w

Fig. 6.2

Figura 8. Da passagem da aritmética para a álgebra. (Demana e Leitzel ,1994, p. 75)

Outro exemplo seria reforçar os estudos aritméticos através de expressões, o que valorizaria a ordem das operações e o uso de parênteses, causas frequentes de dificuldades em álgebra. Esse trabalho pode ser facilitado com o uso da calculadora, na identificação de que a ordem das operações pode fazer diferença no resultado final. Segundo os autores, trabalhar com os números negativos também seria essencial para o desenvolvimento da capacidade de manipulação algébrica e nessa proposta de trabalho com os negativos a calculadora também desempenha um papel importante.

O estudo de diferentes casos com a ajuda da calculadora pode aguçar o "faro" dos estudantes para o processo de generalização, já que esse instrumento potencializa a realização de testes de forma rápida e eficaz. Segundo o relato dos autores, no início, a generalização acontece verbalmente e depois passa a ocorrer com o uso das letras e fórmulas da linguagem algébrica padrão. Esses valores testados pelos alunos podem ser escritos em tabelas e depois expressos graficamente, valorizando a visualização e a multiplicidade de formas de representação de uma dependência funcional, antes mesmo do aluno ser apresentado a esse conceito, em termos mais gerais. A introdução da noção de variável, através de situações concretas e da construção de tabelas, anteriormente ao trabalho direto com as fórmulas da linguagem algébrica padrão, é, segundo os autores, fundamental no desenvolvimento do pensamento funcional e no domínio dos conceitos ligados ao estudo das funções.

Demana e Leitzel concluem, em acordo com ampla literatura que veio a se desenvolver nos anos seguintes (e comentada, em parte, neste trabalho) que é possível introduzir conceitos algébricos ainda no aprendizado da aritmética. Com a vantagem de fortalecer o pensamento algébrico dos alunos, criando as bases para o domínio da simbologia e das técnicas algébricas, o que será usado fortemente na resolução de problemas, na argumentação e na aprendizagem matemática em geral ao longo de todo o processo de formação escolar. Mas, como já observado, há situações que não são compatíveis com esses comentários. Nem sempre as questões do ensino da aritmética podem ser transferidas para a educação algébrica.

5.6 Sobre o trabalho com as equações

Muitos problemas encontrados nos livros didáticos escolares e mesmo do cotidiano dos alunos podem ser descritos matematicamente através de equações. Este é um tema de pesquisa frequentemente revisitado, no campo da Educação Matemática. As equações já são abordadas, de algum modo, desde os primeiros anos do ensino básico, mas não como são vistas nos anos posteriores. As primeiras ideias envolvidas no ensino e na aprendizagem do tema referem-se a uma compreensão dos diferentes significados do sinal de igual, o uso de determinadas propriedades das operações e da reflexão sobre a relação de cada operação com a sua inversa (Ponte, Branco e Matos, 2009). Nos anos subsequentes, a abordagem das equações vai tomando outros contornos e um maior nível de complexidade. De acordo com esses autores, as primeiras equações que aparecem na escola básica são aquelas que envolvem apenas um tipo de operação. Neste caso, a

"incógnita" é representada por um "lugar" onde deve ser escrito o número que dá sentido à igualdade, como nos exemplos a seguir:

$___ + 2 = 14$	$13 + ___ = 20$	$12 = ___ + 3$	$16 = 7 + ___$
$___ - 2 = 14$	$13 - ___ = 10$	$15 = ___ - 6$	$20 = 27 - ___$
$2 \times ___ = 20$	$___ \times 3 = 18$	$25 = ___ \times 5$	$40 = 2 \times ___$
$\frac{___}{2} = 20$	$\frac{18}{___} = 6$	$40 = \frac{___}{10}$	$9 = \frac{27}{___}$

Figura 9. Introduzindo as equações (Ponte, Branco e Matos, 2009, p.94)

Ao longo da trajetória escolar, os espaços vão sendo substituídos por outros símbolos até se chegar às letras, na medida em que se desenvolve uma familiaridade com a simbologia padrão. Os alunos passam então a tomar contato com a nomenclatura padrão, incluindo em seu vocabulário termos como membros de uma equação, equações equivalentes e aprendendo técnicas de solução. Segundo os autores, os exemplos iniciais devem conter poucas operações, de modo a que os alunos se concentrem em apreender a lógica dos procedimentos de resolução. No início pode se valorizar meios de resolução que não utilizam o princípio da equivalência, mas ao longo do tempo, os procedimentos deverão se tornar cada vez mais formais, inclusive porque alguns desses processos alternativos normalmente não funcionam bem em casos de maior complexidade. Um modelo bastante sugerido para o ensino dos princípios de equivalência e das regras práticas de resolução de equações é o da balança de dois pratos. O uso deste modelo facilita a compreensão da operação de eliminar o mesmo termo de ambos os membros da equação e também a operação de multiplicar ambos os membros por um número inteiro positivo. Esse modelo, no entanto, também apresenta problemas para a aprendizagem. Se um aluno não tem conhecimento de como seja uma balança de dois pratos (hoje em dia quase tudo é digital), terá dificuldades. Além disso, o modelo não se adapta a qualquer tipo de equação, mesmo do primeiro grau.

Há várias pesquisas no campo da matemática que vêm jogar luz sobre o tema das equações e o correspondente trabalho docente na educação matemática escolar. Kieran (1994) estudou as diferentes abordagens que estudantes da 6ª série (Canadá), ainda não iniciados em álgebra, apresentam quando realizam atividades envolvendo equações do primeiro grau. Inicialmente as dificuldades detectadas estavam relacionadas com a

aceitação da ideia de que os símbolos operacionais tinham conotações diferentes quando aparecem em equações e quando aparecem nas operações com números conhecidos (onde se pode fazer a conta e chegar a um resultado numérico). A visão de que um (+) sinal aditivo, por exemplo, indica apenas uma soma, mas que muitas vezes não se pode efetuar a soma indicada, causou desconforto. Os alunos participantes da pesquisa, após um trabalho de discussão sobre o significado das letras numa equação, foram classificados em dois grupos. O grupo de estudantes que percebiam o papel das operações inversas daquelas que estavam indicadas na equação para a busca de solução foi classificado como "grupo da álgebra" e os que usavam técnicas aritméticas (tentativa e erro, refinamento da tentativa em função dos resultados obtidos etc.) foram classificados como "grupo de aritmética". Assim, alguns alunos do grupo da álgebra, cometeram erros do tipo generalização incorreta dos procedimentos de mudança de membro de termos, não conseguindo fazer essas mudanças corretamente quando a equação envolvia uma cadeia grande de operações. O grupo de aritmética, em contraponto, também esbarrava nas limitações dadas pelas técnicas de tentativa e erro. Após uma sessão de estudos com os grupos, separadamente, os erros diminuíram. A abordagem utilizada para a resolução de equações não era baseada no uso das operações inversas, mas a de realizar, nos dois membros da equação, uma mesma operação, o que fica favorecido pelo entendimento da equação como uma balança de dois pratos que deve estar em equilíbrio. Segundo Kieran, essa forma de abordagem trouxe ganhos na compreensão geral do processo, possibilitando um controle maior dos alunos sobre os passos a serem efetuados para a busca da solução (tanto em relação ao grupo de álgebra como em relação ao de aritmética). A autora sugere, no final de sua pesquisa, que os alunos na pré-escola já podem ter sua curiosidade aguçada e podem ser levados a desenvolver certas ideias iniciais envolvendo as noções de equação e de incógnita, o que facilitará posteriormente a aprendizagem na resolução algébrica de equações.

Como se viu no Capítulo 4, esse tipo de discussão, sobre o trabalho preliminar com as ideias envolvendo o tema "equações" e os conhecimentos associados à criação e condução de atividades escolares que favoreçam a eficiência desse trabalho, em termos de aprendizagem e educação algébrica, não é referido em ementa ou programa de nenhuma disciplina do curso de licenciatura examinado.

Bernard e Cohen (1994) concordam que o tópico de resolução de equações merece atenção dentro dos estudos algébricos na escola, devido à sua importância na matemática e suas aplicações. Eles explicam os objetivos de seu estudo:

> Nossa preocupação principal é o modo como os professores poderiam, através de uma compreensão dos processos de pensamento dos alunos e da percepção que eles têm da tarefa de resolver equações, apresentar uma sequência de experiências adequadas de aprendizado destinada a ajudar os alunos a formular e aperfeiçoar seus conhecimentos e habilidades (Bernard e Cohen, 1994, p. 111).

Os autores comentam que é importante especificar para o aluno o que significa achar solução para uma equação: encontrar, dentro de um domínio especificado, um conjunto de números que, substituídos na equação, a tornem uma sentença matemática verdadeira. A partir daí, segundo os autores, o aluno estaria em condições de compreender a lógica dos procedimentos para a resolução. Eles então sugerem o uso de diferentes métodos, descritos brevemente a seguir.

1) O método de tentativa e erro (gerar uma possível resposta e avaliar). Essa técnica consiste em testar alguns valores, substituindo-os na equação e avaliando se o valor é o procurado. Não sendo, refina-se a tentativa e o procedimento é realizado sucessivamente até que se encontre uma solução. É claro que pode ser que nunca se encontre ou que a equação tenha várias soluções e seja encontrada apenas uma.

2) O método de esconder. Essa técnica, assim como as outras, possui suas limitações. A proposta é trabalhar com equações simples, que permita, com apenas um ou dois cálculos, encontrar uma solução. O método recebe este nome porque, mentalmente, se "esconde" a incógnita e se pensa na resposta. Por exemplo, na equação $12 + x = 15$, se "esconde" o x e se pergunta, quanto mais doze dá quinze?

3) O método de desfazer. Esta técnica consiste em pensar a equação como um conjunto de operações com um número desconhecido e para determiná-lo, bastaria, em princípio, realizar as operações no sentido contrário ao que aparece na equação.

4) O método das equações equivalentes. Essa técnica, a mais comumente usada, pode ser desenvolvida de várias maneiras, dependendo do estágio mais ou menos avançado de familiaridade com as manipulações algébricas e a lógica que as suporta. A ideia é transformar a equação dada em uma equação mais simples que lhe é equivalente (ou seja, tem as mesmas soluções). Um dos recursos pode ser a balança de dois pratos comentada acima no trabalho de Kieran. Eventualmente (e com um controle do aluno sobre a lógica que justifica esses procedimentos), é importante que se faça uso de recursos mais técnicos até se chegar a formas algorítmicas, em alguns casos (até segundo grau, no caso de equações polinomiais).

Os métodos estão descritos numa ordem que, segundo os autores, pode constituir uma sequência a ser seguida no trabalho com as equações. Todos eles possuem suas vantagens e limitações, o que acarreta em determinado momento, um salto quase natural de um para o outro até se chegar no processo mais formal das equivalências (em se tratando de equações do primeiro grau).

Os estudos apresentados até aqui sobre o tema equações convergem essencialmente no que diz respeito à forma de se iniciar o trabalho com as equações e desenvolvê-lo ao longo da formação escolar. Outro olhar igualmente importante para o professor que ensina álgebra na escola se volta para as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando aprendem sobre equações. Essas dificuldades muitas vezes se mostram através dos erros, daí a importância de se estudar esses erros. Um dos mais frequentes, comentado por Ponte, Branco e Matos (2009) refere-se às operações com termos que envolvem a incógnita: por exemplo, na equação $-5x + 7x = 6$, eles reduzem a $-12x = 6$ ao invés de $2x = 6$, talvez em função de uma memorização de regra de forma imprecisa e sem controle sobre a lógica que a sustenta (menos com mais dá menos).

Ainda sobre o tema das equações, visto que elas podem se apresentar como modelos matemáticos na resolução de problemas, Ponte, Branco e Matos (2009) sugerem alguns tipos de problemas que serviriam à aprendizagem escolar do tema:

- Problemas envolvendo determinadas relações entre quantidades (entre os quais os conhecidos problemas de idades);
- Problemas envolvendo a partição de um todo num certo número de partes desiguais (por exemplo, os conhecidos problemas das heranças);
- Problemas envolvendo relação entre distância, tempo e velocidade (em que dois dos valores são conhecidos e um é desconhecido);
- Problemas envolvendo uma relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas (em que são conhecidos dois valores e se pede a constante de proporcionalidade, ou se conhece esta constante e um dos valores e se pede o outro valor);
- Problemas envolvendo a verificação se um dado valor é ou não termo de uma certa sequência cujo termo geral é um polinómio do 1.o grau;
- Problemas envolvendo a transformação (simplificação, em alguns casos) de expressões do primeiro grau.

5.7 Sobre o trabalho com a noção de proporcionalidade

Outro tema importante na matemática escolar é a proporcionalidade. Para Post, Behr e Lesh (1994), a proporcionalidade envolve um raciocínio qualitativo e quantitativo, o que, de certa forma, pode gerar dificuldades nos alunos principiantes, os quais tendem a ir direto para as contas, sem antes analisar qualitativamente o que acontece. Os problemas de proporcionalidade não se resumem ao uso dos algoritmos que geralmente são empacotados sob o rótulo "regra de três", mas envolve vários procedimentos analíticos, muitos deles utilizados ou com reflexos diretos na vida social mais ampla dos alunos. A proporcionalidade é importante em álgebra, além disso, porque se associa ao estudo das funções lineares, que servem de modelo matemático para as relações de proporcionalidade entre grandezas e englobam, assim, muitas ocorrências físicas. Segundo os autores, a ideia de proporcionalidade pode estar implícita nos gráficos e tabelas, além das fórmulas do modelo linear, o que requer, em qualquer caso, alguma forma de conhecimento algébrico.

De acordo com Post, Behr e Lesh (1994), o algoritmo padrão para se resolver um problema de proporcionalidade (essencialmente a "multiplicação cruzada") não faz muito sentido no "mundo real" e sua introdução formal, sem o devido cuidado com as ideias qualitativas associadas, pode gerar dificuldades na aprendizagem. O processo de multiplicação cruzada é sustentado por uma lógica nada evidente e, por isso, não gera uma compreensão imediata da razão pela qual o algoritmo realmente funciona. Os autores sugerem sequências de ensino alternativas e também complementares à regra de três, no trabalho com a noção de proporcionalidade. Segundo eles, para introduzir a proporcionalidade, podemos começar com problemas de cálculo de taxas unitárias. As taxas unitárias nos informam sobre um valor determinado por uma divisão. A partir daí pode-se facilmente calcular o valor correspondente a k unidades, através da multiplicação por k. O problema a seguir exemplifica uma questão de proporção que se encontra no estudo de Post, Behr e Lesh (1994): *Sally pagou R$ 4,50 por 5 disquetes. Quanto ela pagaria por uma dúzia?* (p.95). Os autores chamam atenção que, para a resolução, neste caso, não é necessário, evidentemente, montar o algoritmo da regra de três, como é usualmente trabalhado esse tipo de problema. Basta, num raciocínio que pode ficar facilmente sob controle do estudante, encontrar o preço unitário e multiplicá-lo por 12. Observe-se que as contas são praticamente as mesmas, mas evita-se um algoritmo que se sustenta em uma lógica nem sempre (de fato, quase nunca) transparente para o aluno.

Existem várias formas de resolução de problemas de proporcionalidade que podem ser trabalhadas com os alunos, sempre levando em conta as iniciativas deles, mas o importante é que se chegue ao algoritmo da regra de três (simples ou composta), com base

no entendimento. Todos esses métodos podem ajudar a compreensão da lógica do algoritmo de resolução dos problemas de proporcionalidade, ainda que cada um deles tenha suas limitações práticas, o que acaba por recomendar a eventual abordagem através do algoritmo. Os autores recomendam também a abordagem gráfica da proporcionalidade direta entre duas grandezas, descrita por uma função linear, cujo gráfico é uma reta no plano cartesiano, passando pela origem. A inclinação desta reta aponta o comportamento no "longo prazo" ao mesmo tempo em que dá a variação de uma das grandezas quando a outra aumenta de uma unidade.

Post, Behr e Lesh enfatizam a importância da compreensão em detrimento da simples reprodução de algoritmos. Mas, para enfatizar a compreensão em detrimento da simples reprodução dos algoritmos é necessário que o professor esteja preparado para oferecer diferentes abordagens e para criar e conduzir tarefas e atividades que levem a essa compreensão, ou seja, precisa deter conhecimentos profissionais docentes associados a essa demanda da prática escolar. Eis as palavras dos autores sobre esse ponto:

> O tipo de análise realizado aqui sempre pode ser utilizado para reinterpretar o algoritmo padrão ou a abordagem da multiplicação em cruz, seja como uma taxa unitária, seja como uma estratégia de fator. Isso o tornará mais compreensível para os alunos. Na realidade, quanto mais os alunos entenderem, mais perceberão a matemática como uma teia intrincada, e sempre em expansão, de ideias aprendidas anteriormente e inter-relacionadas, e não como uma coleção de regras arbitrárias, aparentemente sem qualquer relação ou fundamento lógico (Post, Behr e Lesh, 1994, p.101)

Isso parece repetitivo, mas é importante destacar que não adianta apenas recomendar a abordagem pela compreensão, é preciso estar suficientemente preparado (isto é deter conhecimentos específicos) para executá-la efetivamente em sala de aula. São esses saberes que se espera que o futuro docente incorpore num curso de formação inicial. São saberes que vão além do que se costuma chamar de "conteúdo matemático", mas que não se reduzem, por outro lado, a um "como ensinar" genérico. Seria uma preparação que envolve simultaneamente o trabalho docente escolar com determinado tópico matemático, o que implica uma unidade funcional entre diversos tipos de saberes todos vinculados entre si e vinculados com a disciplina escolar "matemática", o que tem sido condensado na forma de alguns nomes como Mathematical Knowledge for Teaching, MKT (Ball), conhecimento matemático específico para o ensino escolar (ver Ferreira, 2014) e ainda matemática do professor, como tem sido referido por Romulo Lins em alguns de seus trabalhos. É preciso deter conhecimentos importantes e fundamentais para ser capaz de levar os alunos a analisar, conjecturar, testar, avaliar etc., como partes da produção do

saber matemático na escola. Não basta estar aberto às recomendações curriculares ou ter "boa vontade".

Assim vemos que o trabalho com a noção de proporcionalidade, de acordo com as demandas da prática expressas pela literatura especializada, não é contemplado no currículo de formação inicial do professor de matemática da UFMG.

5.8 Funções

As funções ocupam um lugar de destaque nos estudos algébricos, pois se encaixam em diferentes situações do cotidiano dos alunos, o que permite que o seu ensino em sala de aula seja contextualizado, de acordo com os PCN de Matemática:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (Brasil, 2000, p.121).

O estudo das funções, como vimos ao comentar a questão do desenvolvimento do pensamento algébrico e em outros lugares deste capítulo, poderia (ou deveria) se iniciar nos primeiros ciclos dos anos inicias do EF. Neste primeiro contato, as relações que se estabelecem podem ter que se restringir aos números naturais e objetos de uma dada sequência a ser melhor compreendida, mas a noção fundamental de dependência funcional já aparece aí. No prosseguimento dos estudos, nos ciclos posteriores do EF, a função pode assumir o caráter de modelo para situações de proporcionalidade, mas talvez (ainda) sem ser denotada formalmente (linguagem algébrica padrão). Quando os alunos se encontram num estágio cognitivo mais avançado o conceito geral de função, como uma relação particular entre valores assumidos por duas determinadas variáveis, é introduzido e explorado em suas várias possibilidades. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009) um objetivo importante do estudo das funções na prática escolar seria o desenvolvimento da capacidade de usar este conceito na resolução de problemas (p. 117). Não podemos deixar de destacar que, como observado várias vezes, o estudos das funções é também um dos instrumentos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico das crianças. Os estudos de Ponte, Branco e Matos (2009) apontam a importância das diferentes representações das funções no aprendizado do conceito. De acordo com esses autores temos quatro tipos de representações:

(i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural;

(ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos;

(iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados;

(iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências (Ponte, Branco e Matos, p.118)

Segundo os autores, as diferentes representações beneficiam os estudos das funções já que algumas delas podem ser mais facilmente compreendidas quando representadas, por exemplo, através de diagramas, enquanto outras quando representadas por gráficos ou tabelas.

Esses pesquisadores também discutem algumas dificuldades recorrentemente manifestadas pelos alunos no estudo das funções. Uma delas se refere à simbologia algébrica: um aluno pode ser capaz de expressar verbalmente que, para uma dada função, 3 é imagem de 4, mas não compreender esse fato quando comunicado através da linguagem f(4) = 3. Segundo os autores, uma forma que pode amenizar algumas dificuldades seria utilizar os chamados problemas contextualizados. Apresentamos a seguir um dos exemplos apresentados por Ponte, Branco e Matos:

Considera a seguinte situação:

Um agricultor estava a esvaziar um dos tanques da sua propriedade. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque.

Qual dos seguintes gráficos traduz a situação descrita?

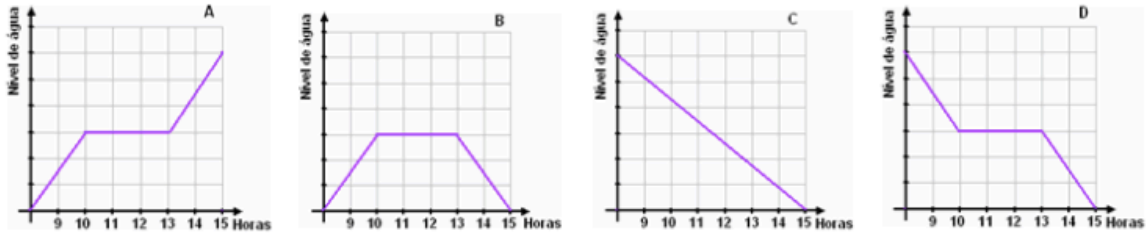
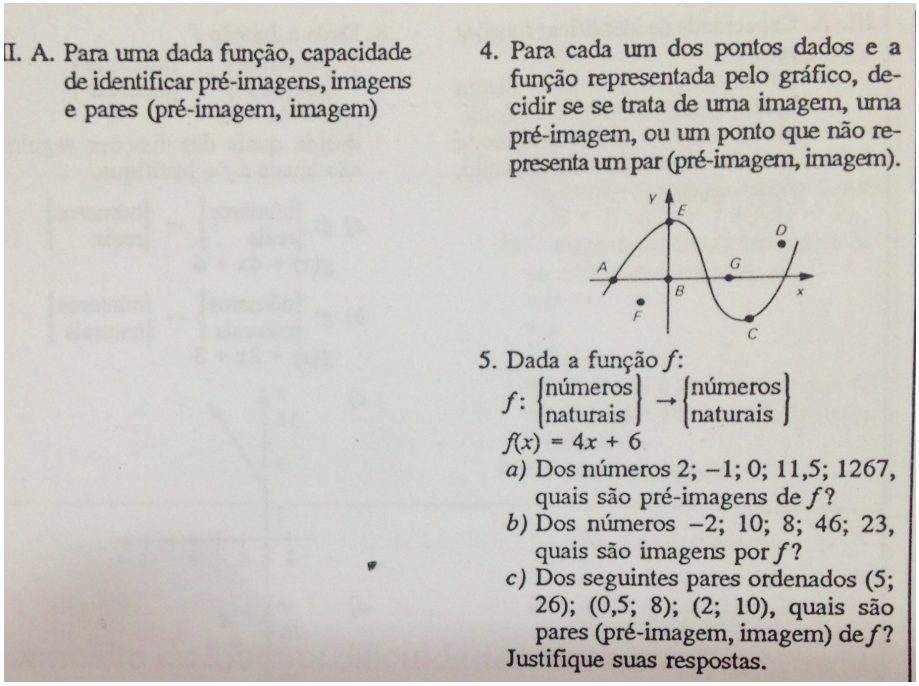


Figura 10. Questão contextualizada sobre funções (Ponte, Branco e Matos, 2009, p. 128)

Este problema tem a finalidade de levar os alunos a compreender relações entre variáveis e como essas relações são representadas graficamente. Neste caso, os alunos devem ser capazes de interpretar duas representações (linguagem natural e gráfico) para uma mesma função e fazer a associação adequada entre elas.

É relativamente grande o número de estudos sobre o ensino e a aprendizagem de funções na escola. Markovits, Eylon e Bruckheimer (1994) estudaram os erros cometidos

por crianças que já foram introduzidas ao conceito de função (do nono e decimo ano de Israel, correspondentes, no Brasil, ao nono do EF e primeiro do EM), além de tentar entender suas origens. A coleta de dados se deu através da resolução de atividades pelos alunos da amostra selecionada. As atividades se concentraram na compreensão dos diversos conceitos que envolvem o estudo do tema funções e foram utilizadas várias representações. Apresentamos a seguir um exemplo: do lado esquerdo está o objetivo da questão e, do lado direito, a própria questão:



I. A. Para uma dada função, capacidade de identificar pré-imagens, imagens e pares (pré-imagem, imagem)

4. Para cada um dos pontos dados e a função representada pelo gráfico, decidir se se trata de uma imagem, uma pré-imagem, ou um ponto que não representa um par (pré-imagem, imagem).

5. Dada a função f:

$$f: \begin{Bmatrix}\text{números}\\ \text{naturais}\end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix}\text{números}\\ \text{naturais}\end{Bmatrix}$$

$f(x) = 4x + 6$

a) Dos números 2; −1; 0; 11,5; 1267, quais são pré-imagens de f?

b) Dos números −2; 10; 8; 46; 23, quais são imagens por f?

c) Dos seguintes pares ordenados (5; 26); (0,5; 8); (2; 10), quais são pares (pré-imagem, imagem) de f?

Justifique suas respostas.

Figura 11. Questões sobre funções e seus objetivos (Markovits, Eylon e Bruckheimer, 1994, p. 51)

As primeiras dificuldades que se apresentam são as conceituais, acerca dos significados dos termos imagem, domínio e contra domínio, o que acaba acarretando dificuldades mais extensas, como, por exemplo, na identificação do domínio e do contra domínio de uma função através do gráfico. Segundo os autores, essa dificuldade não é comumente encontrada quando são usadas outras representações e recomendam trabalhar especialmente com a identificação dos pares ordenados que se encontram sobre os eixos, normalmente os que geram mais dúvidas. Outra dificuldade está em distinguir o conjunto imagem do contra domínio. Para atacar essa dificuldade, os autores sugerem que os alunos sejam levados a representar em diagramas de conjuntos, o conjunto imagem e o contra domínio de uma determinada função. De modo geral, a proposta de superação das dificuldades utiliza a passagem a uma representação diferente daquela em que ocorre a dificuldade, voltando à original com o objetivo de facilitar o trânsito entre as

representações e indicar para o aluno uma possível estratégia que pode passar a ser uma iniciativa do próprio aluno em outras ocasiões.

Em problemas nos quais, para encontrar a solução, é preciso realizar manipulações algébricas em muitos "passos", os alunos tendem a pular ou ignorar alguns deles e acabam errando. No estudo das funções, por exemplo, o erro costuma ocorrer na determinação dos conjuntos imagem e domínio quando se conhece a lei da função. Os alunos têm uma tendência de associar a ideia de função com a função particular do primeiro grau (talvez por ser a primeira função trabalhada mais formalmente na escola). Por exemplo, fixados dois pontos num plano cartesiano, é comum os alunos pensarem que existe apenas uma função cujo gráfico passa por esses dois pontos, no caso a reta que os contém. O ideal seria, segundo esses autores, que se apresentem graficamente, não apenas as funções mais usuais como as lineares, afins ou quadráticas, mas que outras funções também apareçam logo na introdução ao tema, em atividades posteriores para fixar certos elementos conceituais gerais, mesmo que posteriormente essas funções não sejam estudadas de forma mais profunda. Há dificuldades para entender a função constante e também encontramos problemas no trato com as funções cujos gráficos são desconexos (formados por dois ou mais "pedaços" de curvas). Dificuldades em assuntos dos anos escolares anteriores também são causa de erros no estudo das funções. Um exemplo seria uma função em cuja lei geral apareçam frações. Se os alunos não sabem lidar com frações num contexto apenas aritmético, quando tiverem que trabalhar com tal função seguramente encontrarão dificuldades.

Ao final do estudo, Markovits, Eylon e Bruckheimer reafirmam a importância do trabalho com as diversas representações da função e do desenvolvimento da capacidade de transitar de uma para outra na resolução de problemas envolvendo o tema. Há também a proposta de se trabalhar com problemas contextualizados, o que normalmente exige a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica e o trânsito entre diferentes representações na busca da solução.

5.9 Sobre o trabalho com Resolução de Problemas

O termo Resolução de Problemas, no campo da Educação Matemática, tem ocupado um lugar de destaque com inúmeras pesquisas sobre suas finalidades (Onuchic 1999; Allevato e Onuchic, 2009; Lamonato e Passos, 2012; Ponte e Canavarro, 1994, entre outros). Há várias visões a respeito do desenvolvimento do trabalho com a Resolução de Problemas no ambiente de educação matemática escolar. A resolução de problemas pode ser, por exemplo, um ponto de partida para a introdução de algum conceito ou conjunto de

conceitos numa sala de aula da escola básica. Pode-se propor também atividades de investigação em que se demanda o uso de conhecimentos já estudados, com o objetivo, não apenas de revisar o entendimento do que foi ensinado, mas principalmente de desenvolver habilidades como conjecturar, argumentar, justificar, avaliar caminhos de soluções, comunicar resultados etc. De acordo com Abrantes (1989), "*a resolução de problemas consiste numa larga variedade de processos, atividades e experiências, e o Ensino de Matemática deveria refletir essa diversidade*" (p. 10). Onuchic, por sua vez, trabalha com a resolução de problemas para ensinar matemática, invertendo o caminho usual da formação universitária, em que se aprende matemática para resolver problemas (aplicações).

Os problemas podem ser um ponto de partida e um meio para garantir a aprendizagem de álgebra. Há vários tipos de problemas que podem ser traduzidos da linguagem natural para a linguagem algébrica recaindo em expressões que deverão ser manipuladas e simplificadas, equações e sistemas de equações que deverão ser resolvidos, funções que deverão ser mais profundamente analisadas e entendidas. Schoen (1994) mostra que é possível e estrategicamente funcional desenvolver o pensamento algébrico e iniciar os alunos em álgebra através da resolução de problemas. No seu trabalho, propõe um encaminhamento das atividades de resolução de problemas que contraria a rotina do uso das habilidades algorítmicas, valorizando problemas "contextualizados" e/ou que envolvam o reconhecimento de padrões e regularidades.

Fatores já conhecidos que afetam a aprendizagem e o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos em sala de aula, como por exemplo, interação aluno-professor, tempo proposto para resolução de exercícios em sala etc. não são discutidos no estudo. O foco está voltado para o ensino através da resolução de problemas, como descrito anteriormente. As recomendações extraídas da experiência e das referências teóricas utilizadas estão resumidas a seguir:

Recomendação 1 Basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já tem.

(Schoen,1994, p. 137)

O aluno não é uma tábula rasa, mas já carrega em si pré conhecimentos que podem lhe auxiliar (ou funcionarem como obstáculos) na aprendizagem de álgebra e da matemática em geral, pode-se dizer. A geometria, por exemplo, pode ajudar na aprendizagem da álgebra através da resolução de problemas, na percepção visual de recorrências, as quais,

em seguida, poderão ser generalizadas. Conhecimentos que envolvem a ideia de variação proporcional também podem ajudar nesse mesmo sentido.

Recomendação 2 Levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico.

(Schoen,1994, p. 138)

Aqui há (desenvolvida pelo menos uma década depois) toda uma teoria da objetificação de Radford (2011), já comentada, que reforça teórica e praticamente essa recomendação de um trabalho de 1994. As propriedades das operações, por exemplo, podem ser expressas, num primeiro momento, em linguagem natural, sendo posteriormente traduzidas para a linguagem simbólica. Os próprios símbolos, podem, primeiro, serem desenhos, gestos, descrições orais, cujos significados estão ao alcance de quem os criou e gradativamente, mantendo-se os significados sob controle do aluno, se transformarem em formas mais universais, se aproximando e eventualmente chegando à simbologia padrão.

Recomendação 3 Introduzir tópicos de álgebra com aplicações.

(Schoen,1994, p. 139)

A introdução de conteúdos através de aplicações pode facilitar a assimilação posterior de conceitos pelos alunos, que entendem a prática e a necessidade de tais conhecimentos.

Recomendação 4 Ensinar os tópicos de álgebra a partir da perspectiva de como eles podem ser aplicados.

(Schoen,1994, p. 139)

As aplicações, como instrumentos de ensino, podem servir para concretizar os conceitos aprendidos. Pode-se usar a proposição de problemas, por exemplo, na conceituação das ideias associadas ao estudo das funções, e assim facilitar a aprendizagem sobre domínio e contra domínio, em situações em que faz sentido excluir valores fora do domínio.

Recomendação 5 Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas.

(Schoen,1994, p. 141)

Os processos heurísticos devem ser valorizados na resolução de problemas, mas ao longo do tempo, os alunos com a sua própria prática devem ser motivados a generalizar

processos que sejam práticos, como por exemplo, de um problema retirar uma equação ou um sistema ao invés de criar tabelas ou testar e verificar.

Recomendação 6 Comprometer os alunos com a resolução de problemas.

(Schoen,1994, p. 141)

A resolução de problemas deve, segundo esse autor, ser valorizada durante todo o processo de ensino, para que o aluno não volte seu interesse apenas para a manipulação algébrica, o que aconteceria inevitavelmente se ela estivesse mais presente nas avaliações do que os próprios problemas. Ou seja, um professor que trabalha com a resolução de problemas em sala de aula, nos termos propostos por Schoen, deveria, coerentemente, valorizar esse tipo de trabalho nas avaliações.

A ênfase do trabalho em sala de aula com a resolução de problemas pode gerar bons frutos, mas pode exigir algumas mudanças de postura, tanto dos alunos, quanto do professor. É necessário, em primeiro lugar, utilizar "bons" problemas, isto é, que sejam ao mesmo tempo interessantes para os alunos e adequados aos objetivos específicos do trabalho. Além disso, é preciso saber lidar com o entendimento (de muitos alunos) de que o papel do professor é ensinar (explicar como se faz) e o do aluno aprender (saber reproduzir). No trabalho de ensino através da resolução de problemas, esse tipo de postura pode levar a uma paralisia total e cabe ao professor conduzir a atividade de modo a questionar profundamente esses entendimentos sobre aprender e ensinar. Os alunos terão que passar de uma condição de passividade à de construtores ativos de seu próprio conhecimento, e isso não é o que tradicionalmente acontece na sala de aula da escola. Em terceiro lugar, o professor tem que estar disposto a "correr riscos", a deixar de ter o controle do que acontece na sala de aula o tempo todo. Se os alunos se engajam numa atividade desse tipo, podem surgir situações imprevisíveis, fora do alcance de saberes do professor e ele precisa desenvolver uma atitude de lidar com isso de forma a não passar a impressão de que está tentando ensinar o que não sabe. Aqui, mais uma vez, cabe a observação de que é preciso estar preparado (incluindo deter conhecimentos específicos acerca do desenvolvimento da atividade de ensino através da resolução de problemas) para conduzir um processo como esse em sala de aula de matemática da escola. Repetindo: não basta dizer ao professor que deve trabalhar com a resolução de problemas e listar as vantagens teóricas desse tipo de atividade. É preciso munir o professor de saberes a serem mobilizados na prática. E isso deveria fazer parte do processo de formação inicial.

No currículo do curso examinado, há uma disciplina (obrigatória) com o nome Resolução de Problemas, em cuja ementa está explícito o objetivo de fazer com que o futuro professor desenvolva sua capacidade de resolver problemas, juntamente com o desenvolvimento do uso correto da linguagem, da argumentação etc., ou seja, a ideia é a de que o professor passe pela situação em que estará seu aluno, caso ele venha a trabalhar esse tipo de atividade na sua prática docente. Isso, é claro, prepara, em certa medida, o professor para essa prática, pois seria muito difícil, se não impossível, que ele viesse a executar um bom trabalho com a resolução de problemas na escola sem saber resolver problemas. Entretanto, o que se pode notar é que, para o trabalho docente com a resolução de problemas na escola, não basta saber resolver problemas, é preciso, como vimos acima, desenvolver uma série de conhecimentos que permitam superar, na prática, as dificuldades que surgem no desenvolvimento das atividades. Assim, nossa análise nos leva a dizer que, embora essa disciplina tenha um papel importante na formação para o trabalho docente escolar com a resolução de problemas, sua ementa, programa e referências bibliográficas não contemplam os aspectos que se referem a conhecimentos SOBRE a resolução de problemas. Em suma, neste caso, constatamos uma relação de distanciamento parcial entre os conhecimentos da formação e as demandas da prática escolar.

5.10 Sobre as relações entre álgebra escolar e raciocínio lógico

Pereira e Ponte (2011) estudam os raciocínios matemáticos de alunos do 9º ano em atividades algébricas em sala de aula. Segundo os autores, para uma aprendizagem efetiva de matemática, os alunos devem desenvolver seu raciocínio lógico, o que não é consequência da simples aprendizagem de conceitos ou algoritmos. De acordo com Pereira e Ponte, há vários autores que descrevem o que vem a ser o raciocínio, dando ênfase nos processos lógicos (indutivos, dedutivos): trata-se, em poucas palavras, de uma forma de pensar que se associa à criação e encadeamento de estratégias e de ideias, das quais se extraem conclusões.

Para compreender o raciocínio feito pelo aluno numa dada situação, o professor precisa conhecer as diferentes representações que o aluno pode utilizar para demonstrar seu conhecimento matemático. "Deste modo, as representações constituem um elemento central no ensino-aprendizagem da Matemática e, consequentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático dos alunos" (Pereira e Ponte, 2011, p.349). Os autores utilizam os estudos de Duval sobre a teoria dos registros de representações semióticas. Explicam que, para Duval (2006), os objetos matemáticos não são a mesma coisa que suas representações (por exemplo, o número racional ½ pode ter

diferentes representações, como 0,5; 5/10 etc. As representações são diferentes, mas o objeto é o mesmo). De acordo com Duval, essa distinção é crucial no trabalho com a matemática, uma vez que não é possível ter acesso a um objeto matemático a não ser através de suas representações (Pereira e Ponte, 2011). A teoria de Duval trata dos registros semióticos (representações) dos objetos matemáticos e as transformações que se operam sobre esses registros. As transformações são divididas em dois grupos: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações dentro de um mesmo sistema de registro semiótico, por exemplo, quando resolvemos uma equação, transformando-a em outras equivalentes, sem mudar o sistema de representação que utiliza a linguagem dos símbolos algébricos: uma transformação do tipo $4.(x + 3) = 10 \Leftrightarrow 4x + 12 = 10$ é um tratamento. As conversões são transformações entre sistemas de registros semióticos diferentes. Por exemplo, dado o gráfico de uma função afim no plano cartesiano, escrever a lei da função, a partir desse gráfico, é uma conversão. Segundo Duval, a apreensão efetiva do objeto matemático só ocorre se o estudante é capaz de reconhecer que o objeto não muda a partir de um tratamento e também consegue reconhecer o mesmo objeto em diferentes sistemas de registro de representações semióticas.

Segundo Pereira e Ponte, o raciocínio matemático passa por quatro tipos: [6] a) indutivo b) dedutivo c) abdutivo d) transformacional. Nos programas de matemática os tipos de raciocínio que mais aparecem são o indutivo e dedutivo. Essas formas de raciocínio estão presentes em quase todas as atividades matemáticas, na resolução de problemas, nas demonstrações, nas justificativas, que devem ser desenvolvidas desde cedo com as crianças, para que, com o passar do tempo, sejam capazes de julgar e usar argumentos válidos matematicamente.

A coleta de dados da pesquisa relatada em Pereira e Ponte (2011) foi realizada via vídeo-gravações num cenário em que duas crianças trabalhavam em atividades de álgebra. Para analisar os procedimentos e raciocínios desenvolvidos pelas crianças, utilizou-se o seguinte quadro (Pereira e Ponte, 2011):

---

[6] Dedução: (do geral para o particular) encadear premissas para chegar a uma conclusão.
Indução: (do particular para o geral) identificação de características comuns a diversos casos
Abdução: formular uma generalização a partir de diversos aspectos de uma situação, que se ajustam como num quebra cabeça.
Transformação : tratamentos e conversões (ver Duval, 2006)

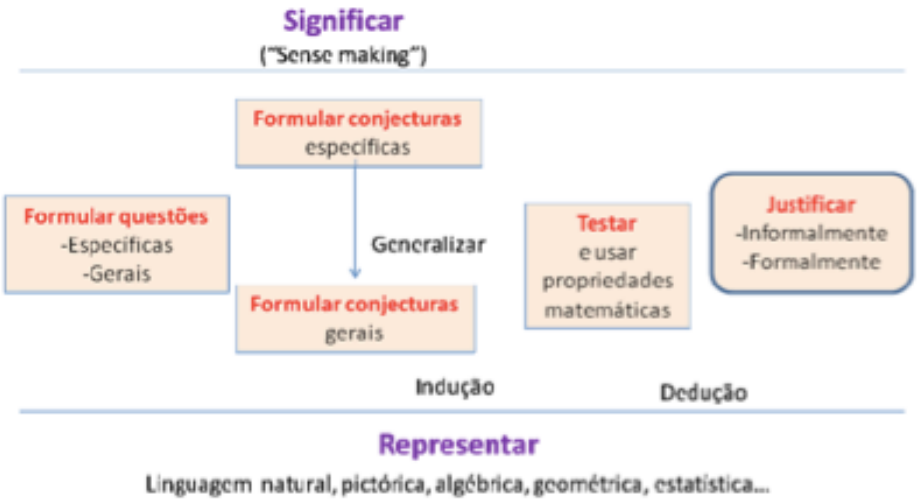


Figura 12. Quadro conceitual para análise do Raciocínio (Pereira e Ponte, 2011)

Uma das questões algébricas propostas na atividade consistia no seguinte problema:

Tarefa 1: *Que valores pode ter k para que k + 5 seja um múltiplo de 5?*

Os autores chamam atenção para a dificuldade em justificar. Observam também que os alunos, de modo geral, não sentiam necessidade de produzir justificativas. Um deles, Duarte, mostrou dificuldades no uso dos conhecimentos algébricos e isso o fez usar mais o raciocínio indutivo, porém consegue realizar transformações, especialmente tratamentos, dentro da linguagem algébrica. As conversões são mais complicadas para este aluno, percebe-se isso na dificuldade da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. A outra aluna, Maria, consegue apresentar justificativas de maneira mais consistente, utilizando a linguagem algébrica e o raciocínio dedutivo.

Pereira e Ponte concluem que os programas de matemática e os de formação de professores deveriam dar mais atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático:

> Para que isso possa acontecer, não basta que exista um novo programa de Matemática, valorizando o raciocínio. Será necessário que os professores conheçam os processos de raciocínio dos seus alunos e reflitam sobre eles. Se esta análise revelar lacunas no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mesmo aqueles que mostram bom desempenho, será necessário colmatar essas lacunas para que esses sejam mais críticos e desenvolvam uma Matemática com compreensão. Tudo isto requer, certamente, um trabalho mais significativo no âmbito do desenvolvimento curricular e das práticas profissionais na sala de aula (Pereira e Ponte, 2011, p.363).

Em outro trabalho, Pereira e Ponte (2013), utilizando o mesmo quadro teórico, propuseram uma atividade sobre inequações para alguns alunos. Na análise da realização dessa atividade, buscou-se identificar os processos de raciocínio e significação utilizados.

Os alunos, que nunca haviam trabalhado com inequações algébricas, realizaram a atividade proposta pelos pesquisadores com certo grau de dificuldade. Dentre as justificativas apresentadas para o processo de resolução das inequações, algumas não eram plausíveis matematicamente, e um dos alunos recorre a uma autoridade indefinida (visto em algum livro ou dito por alguma pessoa) para validar sua resposta. Após a análise dos procedimentos dos alunos em todo o processo de resolução das tarefas, os autores chegaram aos seguintes resultados: nas generalizações os alunos utilizam uma abordagem indutiva; para a justificação, os alunos têm dificuldades em utilizar argumentos que tenham validade matemática, se remetendo a conhecimentos prévios (conceitos e propriedades) ou ao que alguém já lhes disse ser verdadeiro ou válido (no caso um professor das séries anteriores ou da atual). Quando a pesquisadora ou o professor indicam uma direção, os alunos aparentam desenvolver uma maior compreensão dos processos de significação. Pereira e Ponte concluem:

> Deste modo, os processos de significação surgem intrinsecamente ligados às generalizações ou justificativas apresentadas, na medida em que, quando há dificuldades nas conexões entre os conceitos e propriedades necessários à consecução da tarefa, parece igualmente existir uma dificuldade na generalização ou na justificação (Pereira e Ponte, 2013, p.29).

5.11 Sobre conhecimentos matemáticos específicos para o ensino escolar

Llinares (2013) descreve a "mirada profissional docente", uma competência que pode ser entendida basicamente como o uso do conhecimento matemático de forma pertinente ao desenvolvimento das tarefas profissionais do professor. O olhar profissional para a sala de aula da escola busca identificar as condições e situações de ensino e de aprendizagem matemáticas, de modo a que se possa tomar decisões e delinear ações adequadas para alcançar o objetivo vislumbrado para o momento e o contexto em que estão se desenvolvendo esses processos. O conhecimento matemático específico para o ensino escolar abarca saberes que se referem ao contexto/momento em que as práticas (de ensino e de aprendizagem) acontecem. Em particular, ainda de acordo com esse autor, o conhecimento matemático específico para o ensino está intrinsecamente ligado à prática de sala de aula, ao desenho e implementação de tarefas visando a aprendizagem de tópicos específicos, ao desenvolvimento de discussões adequadas sobre a matemática escolar e à analise, do ponto de vista do ensino e da aprendizagem escolar, da matemática produzida pelos alunos. Llinares sintetiza um conjunto de atividades da prática do professor, para as quais chama a atenção dos processos de formação: a seleção e preparação de tarefas

adequadas ao trabalho com cada tópico específico, interpretação e analise do pensamento matemático dos estudantes, iniciação e condução das discussões sobre matemática em sala de aula. Por fim, Llinares diz que se aproxima das ideias de Ball sobre o MKT e seus quatro domínios (CCK, SCK, KCS, KCT). Outros estudos (Llinares e Valls, 2009; Cyrino e Oliveira, 2011) reafirmam a necessidade de uma preparação e até mesmo de uma tomada de consciência do professor a respeito da questão de lidar com interpretações das respostas dos alunos, pois esta não é uma tarefa simples. Segundo esses autores, os cursos de formação precisam passar por uma reformulação, de modo a integrar conhecimentos matemáticos específicos para o ensino escolar, fazendo com que o licenciado não só reconheça como importante, mas se sinta preparado para realizar essa tarefa profissional, entre as que se apresentam necessariamente em sua prática docente.

Finalizamos comentando um estudo de Resende e Machado (2012), no qual afirmam o seguinte:

> Dentre os princípios norteadores para um curso de formação, presentes nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, destacamos um, que julgamos ser fundamental – a necessidade de coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do professor. (...) Deste modo, investigar as disciplinas que compõem o currículo dos cursos de licenciatura, tendo como foco a formação do professor para a escola básica, é algo necessário e fundamental na conjuntura atual, ainda de questionamentos com relação à qualidade da formação inicial (p.260-261).

A partir dessa posição, que vem reforçar a relevância do nosso estudo, a pesquisa relatada por Resende e Machado trata do papel de uma disciplina, referida com o nome "Teoria dos Números" (que seria correspondente a Fundamentos de Álgebra, do curso da UFMG) nos currículos das licenciaturas em matemática, procurando entender os objetivos, os tópicos que compõem o programa e a importância da disciplina na formação do professor, tendo como referência a prática docente escolar. Professores universitários (autores de livros sobre o assunto, matemáticos e educadores matemáticos) foram entrevistados e perguntados sobre o papel da disciplina no curso de Licenciatura em Matemática. As respostas foram bastantes diferenciadas. Dentre as justificativas para a presença da disciplina no currículo de formação inicial do professor estão as seguintes: a) a de que os números estão nos fundamentos da matemática; b) a questão histórica, pois os números inteiros têm importante destaque na evolução da civilização humana; c) aplicações como a criptografia e outras; d) a necessidade de formalização da matemática, provocando um modo de pensar científico (provar e argumentar); e) a questão estética: a beleza e elegância de que se reveste o conhecimento tratado na disciplina. No entanto, alguns dos

entrevistados rejeitam a abordagem excessivamente axiomática dada à disciplina na licenciatura. Uma justificativa (não unânime), foi ainda a de que, na escola, o estudo dos números é intenso e por isso deve ter lugar de destaque na formação dos professores, porém dando ênfase à coerência entre a formação e a prática.

Resende e Machado discutem as visões dos entrevistados sobre a disciplina Teoria dos Números e suas relações com a aritmética e a álgebra. Nas conclusões dessa discussão, as autoras apontam a necessidade de mudanças nos currículos das licenciaturas:

> [...] consideramos importantes as observações de Avelar e de Elias [nomes fictícios de dois dos entrevistados, esclarecimento nosso] de que a educação algébrica e a aritmética devem coexistir, e acrescentamos: não, apenas, nas séries iniciais da escolaridade, mas durante toda a escola básica, devendo influenciar a formação de professores.
>
> Destacamos, contudo, que, ao se definirem as disciplinas acadêmicas nos currículos da Licenciatura em Matemática, ainda que concordemos com os pressupostos da não-fragmentação do conhecimento matemático, com as inter-relações entre Álgebra, Aritmética e Teoria dos Números, julgamos que é necessário garantir que os elementos caracterizadores dos inteiros, presentes inclusive na escola básica, sejam trabalhados. (Resende e Machado, 2012, p.273- 274)

Nas conclusões do estudo, as autoras discorrem sobre a importância de se ir além da costumeira apresentação das estruturas algébricas nos cursos de Teoria dos Números e explorar mais conhecimentos (especialmente sobre os inteiros) que são diretamente relevantes para o trabalho docente na escola básica, como "*a ideia de recorrência através da qual se definem muitas noções; a indução matemática; a questão da divisibilidade; questões relativas aos números primos e à estrutura multiplicativa dos inteiros.*" (Resende e Machado, 2012, p.274). Além de manifestar tais preocupações, as pesquisadoras discutem outros aspectos da disciplina que podem contribuir com a formação do professor, os tópicos que deveriam compor a disciplina e de que forma esses tópicos seriam tratados, explicitando as divergências dos entrevistados quanto à abordagem adequada para os tópicos dentro da disciplina.

Resposta à segunda questão de pesquisa

As contribuições da literatura sobre a formação do professor de matemática em álgebra são extensas. O que se procurou realizar neste estudo foi explicitar algumas formas de conhecimento matemático específico para o ensino de álgebra na Educação Básica, sem evidentemente, a pretensão de esgotar a literatura, o que, de resto, seria impossível. Utilizamos uma parte a que pudemos ter acesso e exploramos essa parte até o ponto que entendemos suficiente para uma análise rica e razoavelmente diversificada dos

conhecimentos considerados úteis na prática docente escolar, de acordo com a literatura examinada. Muito sinteticamente, poderíamos classificar as pesquisas utilizadas para produzir a resposta à segunda questão de pesquisa de acordo com as informações que elas nos ofereceram sobre cada um dos temas relacionados nos títulos das seções deste capítulo. Observamos, no entanto, que esses temas se intersectam em vários pontos, já que os conhecimentos profissionais do professor são, ao mesmo tempo, amplos e interligados. Observamos, por outro lado, que é impossível, em qualquer trabalho acadêmico, lidar com todas as demandas que o professor encontra na sala de aula. Sabemos que cada aluno, cada escola, cada ambiente em que a escola esta inserida possuem suas especificidades, são, em certo sentido, únicos. Entretanto, tentamos buscar alguma unidade que pudesse atravessar os diferentes aspectos que extraímos da literatura consultada e que identificamos, a partir das pesquisas relatadas, como conhecimentos relevantes para a generalidade das práticas docentes escolares, em termos da promoção de uma educação algébrica de qualidade.

Assim, concluímos que a literatura indica, como relevantes para a prática docente escolar, conhecimentos associados ao trabalho de desenvolvimento do pensamento algébrico, conhecimentos que se referem às diferentes concepções de álgebra e aos significados das letras na simbologia algébrica, conhecimentos relativos aos erros dos alunos e suas origens, conhecimentos ligados à questão dos processos de construção de significados para a simbologia algébrica pelos alunos, conhecimentos relativos ao trabalho com a aritmética de modo a favorecer a formação em álgebra e vice-versa (trabalhar os elementos de iniciação ao conhecimento algébrico de modo a reforçar aspectos dos saberes aritméticos), conhecimentos relacionados com o trabalho com equações nos diferentes níveis da educação matemática escolar, conhecimentos relativos ao trabalho com a noção de variação proporcional na escola, conhecimentos relativos ao desenvolvimento de trabalhos na linha da Resolução de Problemas com alunos de todas as idades escolares, conhecimentos associados à competência docente ao lidar com interpretações dos procedimentos e das estratégias dos alunos na realização de tarefas relacionadas com a álgebra e à compreensão do raciocínio matemático dos alunos e, finalmente, alguns conhecimentos sobre a especificidade do conhecimento matemático para o ensino escolar, em relação ao conhecimento matemático voltado para a realização de outras tarefas profissionais.

Ao estabelecermos o paralelo com o que é indicado no currículo de formação da UFMG, verificamos que essas duas fontes de dados se intersectam basicamente no que diz respeito a certas partes dos conhecimentos matemáticos “estritos”, isto é, na linguagem dos

domínios do MKT (Ball, Thames e Phelps, 2008) aquilo que pertence ao CCK, conhecimento comum do conteúdo (ver a descrição dos domínios do MKT neste trabalho, p.15).

Finalmente, ressalvamos que a disciplina Álgebra e Função na Educação Básica apresenta em seu programa uma série de 6 tópicos que possuem interseção com o que identificamos como conhecimento relevante para a prática, de acordo com a literatura examinada. Entretanto, a carga horaria é de apenas 60 horas (em quase 2.900 do total do currículo) trabalhadas em um único semestre letivo. Isso nos levou a considerar a dificuldade de cobrir, com um mínimo de profundidade e amplitude, a parte de interseção potencial a que nos referimos no início desta ressalva.

Assim, concluímos que as relações por nós detectadas entre os saberes relevantes para a prática e os saberes da formação, são de um relativo distanciamento, praticamente intersectando-se apenas no trabalho desenvolvido na disciplina Álgebra e Funções na Educação Básica e no trabalho de revisão da matemática chamada elementar, que se opera nas demais disciplinas do currículo, visando o trabalho futuro na própria disciplina ou em disciplinas dos períodos posteriores, ou seja, aquilo que nos referimos, nos termos de Ball, Thames e Phelps (2008) como Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A álgebra está presente, de uma forma ou de outra, em grande parte da trajetória dos estudantes da Educação Básica. Como vimos, desde os primeiros ciclos da escola básica é possível trabalhar no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, aprofundar esse desenvolvimento nos ciclos intermediários do EF até alcançar plena familiaridade com a linguagem algébrica padrão, com os métodos e técnicas da álgebra escolar no Ensino Médio. Fato é que os benefícios de se introduzir as crianças, desde a pré-escola, em formas apropriadas de pensar algebricamente se refletirão nos estudos escolares futuros e na formação matemática escolar, em geral. Os professores exercem um papel importante de mediadores no desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, respeitando o tempo e a maturidade cognitiva de cada um deles, incentivando-os através de atividades interessantes e que são próprias de cada estágio do desenvolvimento dessa forma fundamental de pensamento matemático.

Ao longo dos anos escolares os estudos algébricos vão se tornando mais abstratos e o uso das letras para representar variáveis ou valores indeterminados em geral é introduzido. Essa passagem para a álgebra com uma simbologia mais universal e mais complexa nem sempre acontece de maneira satisfatória, se levarmos em conta que os alunos, de modo geral, não trabalham, na prática escolar concreta, segundo essas etapas sugeridas pelas pesquisas especializadas. Com o que há que se lidar então são diversas dificuldades enfrentadas pelos alunos ao trabalharem com a linguagem algébrica, dificuldades essas provenientes de diferentes fontes, mas que precisam da atenção do professor. É claro que, para realizar esse trabalho importante e necessário na educação algébrica escolar, é preciso que o professor tenha uma preparação adequada. Isso implica passar por um processo de formação que antecipe, na medida do possível, essas dificuldades e discuta com os futuros professores os saberes demandados por uma prática docente que aborde todos esses aspectos da educação algébrica escolar.

Voltando nosso olhar para os saberes que são importantes para o professor na sua prática profissional, desenvolvemos este estudo através da produção de respostas para duas perguntas de investigação:

Questão 1: Quais são os conhecimentos matemáticos sobre álgebra trabalhados nas disciplinas obrigatórias do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais?

Questão 2: Como esses conhecimentos (identificados na Questão 1) se relacionam com as demandas de conhecimento da prática docente em matemática na Educação Básica?

Para responder a estas perguntas nos detivemos em determinados pontos que permitiram dar viabilidade, credibilidade e confiabilidade ao estudo. Para embasar quais são os conhecimentos do professor de matemática para o ensino de álgebra, recorremos à literatura já existente sobre o assunto, de modo que nossos dados vieram de fontes já devidamente autorizadas pela comunidade científica. Como não poderíamos esgotar essa literatura, demarcamos a delimitação que consideramos adequada e suficiente para uma análise rica e pertinente.

Por outro lado, buscamos a referência concreta e efetiva da prática de formação de professores de matemática para a Educação Básica no currículo do curso de licenciatura em Matemática da UFMG. Haveria, seguramente, para a produção de dados, outras formas de acessar essa prática concreta de formação (com atenção especial para a formação em álgebra), diferente da análise do currículo da licenciatura em matemática da UFMG, mas entendemos que nossa opção por essa via foi adequada aos propósitos do estudo porque, ainda que tenha suas limitações, como teriam as todas as outras vias, , é um parâmetro importante na concepção do processo de formação do professor e na própria execução. Os professores de cada disciplina podem mudar a cada semestre, acarretando mudanças nas ênfases e nos focos de trabalho na disciplina correspondente, mas em qualquer circunstância, o que baliza a radicalidade das mudanças, a nosso ver, fica demarcado pelas ementas das disciplinas, pelos respectivos programas e referências bibliográficas. Esses elementos podem ser vistos como referências das quais não se afastam demasiadamente os professores formadores, ainda que mantenham, inevitavelmente, valores próprios e particulares no desenvolvimento da disciplina pela qual se responsabilizam a cada semestre letivo. Além disso, essa via nos fornece dados que podem ser confirmados facilmente, ainda que, no processo de análise, sejam, evidentemente, objeto de interpretação do pesquisador. O currículo também é uma fonte viável para nossa pesquisa porque expressa, ao fim e ao cabo, a visão curricular hegemônica, na instituição, em termos das disputas em torno de sua concepção, formulação e implementação.

De forma bastante sintética, podemos dizer que os resultados da pesquisa mostram que o processo de formação valoriza, de modo geral, um tipo de conhecimento algébrico voltado para a construção de uma visão avançada da matemática escolar e, ao lado disso, um conhecimento algébrico voltado para o que "vem a seguir", seja na mesma disciplina, seja nas demais, a serem cursadas segundo a estrutura da grade curricular. Na literatura examinada, e que se referia ao ensino e aprendizagem escolar dos temas correspondentes, vimos que os conhecimentos demandados na prática escolar ou focavam aspectos distintos,

em termos da abordagem adequada para a educação algébrica escolar ou simplesmente não eram objeto de estudo nas disciplinas do currículo examinado, de acordo com as ementas, programas e referências bibliográficas.

Assim, o que constamos é essencialmente um distanciamento relativo entre os conhecimentos da formação e os demandados pela prática docente escolar. O relativo aqui se refere ao fato de que o professor talvez possa utilizar o conhecimento que a formação oferece no sentido de contribuição para seu trabalho efetivo na sala de aula, mas esse conhecimento está muito longe de abranger uma série de aspectos importantes das demandas da prática da educação algébrica escolar, como esperamos ter deixado claro no Capítulo 5.

É preciso abrir uma exceção, nesta síntese geral feita acima, para a disciplina Álgebra e Função na Educação Básica, que, embora com apenas 60 horas na grade curricular, propõe-se a abordar alguns dos conhecimentos indicados pela literatura especializada como demandas da prática docente escolar em álgebra. Entretanto, um exame mais detalhado de sua ementa e programa apontam as limitações dessa abordagem proposta para a disciplina: os temas que compõem o programa da disciplina são muitos e muito amplos. As referências bibliográficas básicas são compostas de 17 textos, muitos deles livros que tratam diversos tópicos, sendo impossível, a nosso ver, que o programa seja totalmente coberto em 60 horas, a menos que se façam seleções bastante restritas, para garantir um mínimo de profundidade. Isso nos levou a manter, como resultado da pesquisa, a síntese apresentada acima.

Nosso estudo vem corroborar ideias de outras pesquisas que apontam o distanciamento entre a formação do professor e as questões que se apresentam a esse profissional na prática docente escolar. Isso vem sendo apontado, com diferentes níveis de especificidade e de profundidade, desde a formulação dos primeiros currículos das licenciaturas no Brasil, baseado no sistema 3+1 ou licenciatura = bacharelado + didática. Essa forma de conceber a formação do professor parece estar de tal modo impregnada na cultura acadêmica que funciona até hoje, no entender de muitos estudiosos, como um desafio a ser vencido na reestruturação da formação inicial de professores no Brasil (para uma discussão mais detalhada, ver Moreira, 2012). Em relação às consequências dessa dicotomia teoria-prática que o esquema 3+1 acaba engendrando, Fiorentini (2002) comenta que

> De fato, tanto os estudos de Araújo (1979, 1990) como os de Tancredi (1995), Camargo (1998), Freitas (2001) e Tomelin (2001) constataram a existência: de dicotomias entre

> teoria e práticas e entre disciplinas específicas e pedagógicas; de distanciamento entre o que os futuros professores aprendem na licenciatura e o que realmente necessitam na prática escolar; de pouca articulação entre as disciplinas e entre docentes do curso; de predominância de práticas de ensino e avaliações tradicionais, sobretudo por parte dos professores da área específica; de ausência de uma formação histórica, filosófica e epistemológica do saber matemático; (...) (Fiorentini, 2002, p. 144)

Mesmo com os avanços nos cursos de licenciatura através da incorporação de disciplinas como Resolução de Problemas e o uso mais extensivo de novas tecnologias, permanecem as disparidades entre a prática de formação e a prática docente escolar. No meio disso tudo, vale a pena retomarmos o que está escrito no PPP do curso de matemática da UFMG: "*A Licenciatura em Matemática da UFMG tem como objetivo a formação de professores de Matemática da 5ª a 8ª series do Ensino Fundamental e do Ensino Médio*" (PPP do curso de Matemática, p.7). Esperamos, com esse trabalho, contribuir, de alguma forma, para a construção de uma formação que atinja realmente esse objetivo, entendido a partir de uma base de pesquisas científicas sobre as necessidades da prática docente escolar e não apenas em opiniões vencedoras nas disputas em torno da concepção curricular a ser implementada na formação inicial do professor.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só). **Educação e Matemática**, v. 8, p. 7-10, 1989. O NOME ESTÁ COMPLETO?

ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim Gepem**, v. 55, p. 133-154, 2009.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BERNARD, J. E.; COHEN, M. P. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequencia evolutiva de aprendizado. In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.) As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p. 111- 126, 1994

BLANTON, M.L.; KAPUT, J.J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, p. 5-23, 2011.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. *As ideias da álgebra. Coxford, A. F.; Shulte, A.P. (org.).* São Paulo: Atual, 1995.

BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Media e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. Quadrante 16(2), 81-118, 2009.

COSTA, R. C. A formação de professores de Matemática para uso das tecnologias da informação e comunicação: uma abordagem baseada no ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo grau. 2010, 119p. Dissertação de Mestrado Profissional. PUC/SP - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1994.

CYRINO, M.T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. Bolema, v.24, n.38, p.97-126, abril 2011.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As Ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, p.70- 78, 1994

DOERR, H. M. Teacher's knowledge and the teaching of algebra. In: STACEY, K.; CHICH, H.; KENDAL, M. (ed.). The Future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 267-290, 2004

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

FERREIRA, M. C. C. Conhecimento Matemático específico para o ensino na Educação Básica: a álgebra na escola e na formação do professor. Tese de Doutorado. UFMG/ FAE. EDUCAÇÃO. 2014

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. Revista de Educação PUC-Campinas. Campinas: Editora Beccari. n.18, p.107-115, 2005

FIORENTINI, D. ; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D; CASTRO F. C. de. Tornando-se professor de matemática: o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. IN: IN: FIORENTINI, D. (org.). Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras: 121-156, 2003.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor**, 2005.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org.). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

GRANELL, C. G. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHIRISKY, L. Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Ática, 1997.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como. In: As Ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, p. 1-8, 1994.

GRAY, E.; TALL, D. Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching,* n. 142, p.6-10, 1993.

KEN, M. Fostering algebraic thinking in children. The Australian Mathematics Teacher, v. 4, n. 45, pp. 14-16, 1989.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: **Coxford**, AF; **Shulte**, AP (Org.). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p.104-110. 1994

KIERAN, C. Overall commentary on early algebraization: perspectives for research and teaching. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, p. 579-593, 2011.

KUCHEMANN, D. E. Álgebra. In: HART, K. Children's understanding of mathematics. London: Murray, p.102 - 119, 1981.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática p.(51-74). Zetetiké: v.19, n.36, p.51 – 74, 2012

LLINARES, S. El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educ. rev.* [online], n.50, pp. 117-133. 2013.

LINARES, S.; VALLS, J. The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. Instructional Science, Springer, New York, v. 37, n. 3, p. 247-271, 2009.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. Campinas, SP, Papirus. 1997.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As Ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, p.144-154, 1994.

MAGALHÃES, A.F. Estudo das inequações: contribuições para a formação do professor de matemática na licenciatura. Dissertação de Mestrado Profissional. Educação Matemática, UFOP, 2013.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p.49-68, 1994

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? Pró-posições, vol.3, n°1, Campinas, SP, 1992.

MINAS GERAIS. Currículo Básico Comum–CBC–Matemática. Belo Horizonte: SEE-MG, 2007.

MONDINI, F. Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática. 2009, 168p. Dissertação de Mestrado. UNESP/RIO CLARO, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009.

MOREIRA, P.C. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez. 2012.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M.M.M.S. A formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M.M.M.S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. Journal of Mathematics Teacher Education, 11, 23–40, 2008.

MOREIRA, P.C.; FERREIRA, B.E., JORDANE, A., NÓBRIGA, J.C.C., FISCHER, M.C.B., SILVEIRA, E., BORBA, M.C. Quem quer ser professor de matemática? Zetetiké, v. 20, n. 37, p.11-36, jan/jun 2012.

ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 199-218, 1999.

PONTE, J.P.; CANAVARRO, A.P. A resolução de problemas nas concepções e práticas dos professores. Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular. p. 197-211. 1994

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no ensino básico. 2009.

POST, T. R; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré- algebra. In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As Ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, p.89- 103. 1994.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer, p. 303-322, 2011.

RESENDE, M. R.; MACHADO, S. D. A. O ensino de matemática na licenciatura: a disciplina Teoria Elementar dos Números. **Educação Matemática Pesquisa,** v. 14, n. 2, p. 257-278, 2012.

SANTOS, L. G. Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007, 231p. Dissertação de Mestrado. UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO – EDUCAÇÃO. Vitória, 2007.

SCHOEN, H. L. "Ensinar álgebra elementar focalizando problemas." In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p.135 – 143, 1994

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

SIMON, M. A; STIMPSON, V. C; "Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas". In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p.155- 161, 1994

SOUSA, M. C. O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004, 250p. Dissertação de Doutorado. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS – EDUCAÇÃO. Campinas, 2004.

THOMPSON, F. M. O ensino de álgebra para a criança mais nova In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p 79- 88, 1994

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **Coxford**, A.F.; **Shulte**, A.P. (Org.). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, p.9- 22, 1994.

VELOSO, D. S. O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano. Dissertação de Mestrado Profissional. Educação Matemática. UFOP, 2012.