

MODELAGEM E ESCOLHA ENTRE EMBALAGENS USANDO TÉCNICAS DE CONFIABILIDADE E ANÁLISE DE SOBREVIVÊNCIA

Helinton André Lopes Barbosa¹, Fernando Luiz Pereira de Oliveira²

Resumo: *Este trabalho visa identificar qual, entre dois tipos de embalagens, prolonga o tempo de vida de um derivado do leite, no caso requeijão em barra, vendido à temperatura ambiente e sem conservantes. Para cada embalagem, procura-se ajustar um modelo paramétrico, estimar tempos médio e mediano de vida, além do tempo no qual 10% e 90% dos produtos perecem. No estudo, são usados métodos de modelagem, análises gráficas comparativas entre as distribuições candidatas e estimativas não paramétricas de Kaplan-Meier, além da linearização das funções confiabilidade paramétricas e análise inferencial, por testes de hipóteses, para verificação da adequação do modelo. Também se deseja comparar os dois tipos de embalagem e indicar qual é a melhor, ou seja, qual mantém o produto em condições de consumo por mais tempo. As estimativas e resultados encontrados apresentam-se satisfatórios, respondendo bem aos questionamentos iniciais do produtor.*

Palavras-chave: Confiabilidade, Ajustes de Modelos, Kaplan-Meier.

Introdução

Um fabricante de derivados do leite quer saber qual, entre dois tipos de embalagens, faz com que seu requeijão em barra esteja por mais tempo em condições de consumo. Entre as opções comumente utilizadas por ele, existe a embalagem A, plástica, transparente, do tipo pacote que mantém ar dentro do produto. Há também a B, um filme plástico transparente e aderente ao produto, que diminui a quantidade de ar internamente. O fabricante usa as duas embalagens livremente, não havendo preferência.

Inicialmente, técnicas não paramétricas, como o estimador de Kaplan-Meier [1], permitem que sejam calculadas algumas características de interesse para o fabricante, como percentis, tempo médio e mediano de falha, além de permitir uma comparação introdutória de embalagens. Porém, o ajuste de um modelo paramétrico específico aos dados [2] faz com que as estimativas paramétricas sejam mais eficientes que as não paramétricas, promovendo um ganho significativo no planejamento da qualidade do produto.

Para o acurado ajuste de uma distribuição, são necessários inúmeros procedimentos analíticos, sejam estes gráficos, estatísticos ou inferenciais [3]. Desta forma, as conclusões obtidas têm forte respaldo científico e matemático, fazendo com que os modelos ajustados para cada embalagem e suas comparações, atendam suas funções de modelagem com eficácia.

¹Departamento de Estatística, UFMG,
helinton@ufmg.br

²Departamento de Matemática, UFOP,
fernandoest@ig.com.br

Objetivos

Neste estudo deseja-se identificar qual, entre as duas embalagens, prolonga o tempo de vida, em horas, do requeijão em barra, vendido à temperatura ambiente e sem uso de conservantes. Além disso, para cada embalagem, busca-se ajustar um modelo paramétrico, através da análise individual de dados, objetivando estimar os tempos médios e medianos de vida, além dos tempos no qual 10% e 90% dos produtos falham. Também se deseja comparar os dois tipos de embalagem, através uma análise pareada dos dados, identificando qual é a melhor.

Metodologia

Para se realizar a análise, foi tomada uma amostra de tamanho 40, sendo 20 na embalagem A e 20 para B, e colocada em teste à temperatura ambiente de 27° Celsius, temperatura similar ao ponto de venda. O evento de interesse é o aparecimento de algum tipo de fungo no produto. Para verificação, as amostras eram observadas no início do experimento a cada 1 hora e, ao fim, a cada 10 minutos. O teste se encerrava quando 80% das amostras falharam por embalagem, ou seja, 16 unidades em A e 16 em B. Veja na Tabela 1 os dados coletados. O símbolo + indica censura [1].

Tabela 1: Dados coletados para o teste

Embalagem	Tempos de falhas (em horas)																
A	31,42	40,21	43,31	43,54	46,01	46,35	47,34	48,15	48,31	49,11	49,55	49,57	60,00	60,05	60,05	60,2	60,20+(4)
B	48,10	48,50	49,15	49,35	49,49	49,50	49,59	50,10	50,11	50,15	52,59	53,03	53,59	54,01	54,41	55,0	55,00+(4)

Foi realizada nos dados uma análise gráfica inicial e, em seguida, para cada tipo de embalagem, calculadas estimativas de confiabilidade de Kaplan-Meier. Esse cálculo serviu como referencia para que fosse feita a comparação entre as distribuições candidatas a modelar dos dados. As distribuições paramétricas testadas foram a Exponencial, a Weibull e a Lognormal, muito usadas em tempo até a falha. O ajuste de cada distribuição foi verificado por técnicas gráficas e testes de hipóteses.

As técnicas gráficas, além de gráficos de probabilidade de modelos, consistiam também em 2 métodos, sendo o primeiro uma comparação direta da função de confiabilidade do modelo proposto com as estimativas de Kaplan-Meier, e o segundo consistindo em linearizar a função candidata através de transformações, cujo melhor modelo seria aquele em que os pontos no gráfico se apresentarem alinhados em torno de uma reta.

Finalmente, a análise de adequação final foi dada via teste de hipóteses, em que se trabalha a presença de censuras [2]. Tal procedimento consistia em calcular uma estatística de teste, sob a hipótese de que o modelo era adequado, e obtida uma probabilidade que refletia a plausibilidade dessa hipótese. Se essa probabilidade fosse usualmente menor que 0,05, se rejeitava o modelo como adequado aos dados. Nesse estudo, usou-se o teste proposto em [3].

Resultados

Análise Descritiva Inicial

Pode-se observar no gráfico de comparação entre tempos de falhas das embalagens A e B, representado na Figura 1, que os tempos de B (em vermelho) têm menor amplitude que os tempos de A. Isso pode indicar que B possui maior regularidade de falhas. Nota-se também que o tempo inicial de falha em B (48,10 horas) é aproximadamente 17 horas maior que o tempo inicial em A (31,42 horas) e o segundo tempo de falha em B (48,50 horas) é 8 horas maior que

o segundo tempo em A (40,21 horas), porém o tempo final em B (55,00 horas) é em torno de 5 horas menor que em A (60,20 horas), nos dando indícios que B aumenta o tempo inicial de falha, mas não possui tempo final tão grande quanto A.

Ajuste de Modelo: Embalagem A

Na Figura 1, são vistas algumas estatísticas (em horas) do estimador de Kaplan-Meier para os dados. Isto é, o tempo médio de vida (51,19) e sua estimativa intervalar com 95% de confiança (47,46 ; 54,94); o tempo mediano de vida (49,11) e o tempo no qual 10% dos produtos falham ($t_{10} = 40,21$). Por fim, note na Figura 2, uma queda acentuada no gráfico de confiabilidade Kaplan-Meier de A.

Na tentativa de ajustar um modelo paramétrico para os dados [2], os gráficos de probabilidades de modelos, nas Figuras 3 e 4, mostram que os possíveis candidatos a modelos paramétricos são o Lognormal e Weibull, pois possuem um melhor gráfico de probabilidade (Figura 3) e melhores tendências à reta quando plotadas estimativas de Kaplan-Meier versus estimativas dos modelos Weibull, Lognormal e Exponencial (Figura 4). Analisando os dois primeiros modelos, vê-se na Figura 5, que o Lognormal tem uma aproximação um pouco melhor para as estimativas de Kaplan-Meier. Já na Figura 6, nota-se que ambos os modelos, após linearização, possuem uma constituição semelhante, não havendo uma tendência linear clara. Para escolha de alguma distribuição, foi feita a análise via teste de hipóteses.

Teste de Hipóteses: Embalagem A

Para testar o modelo Lognormal o teste (Hipóteses do teste: H_0 : Os dados provêm da distribuição candidata. H_1 : Os dados não provêm da distribuição candidata) de Hollander e Proschan [3] foi usado. Esse teste é uma adaptação de um teste não paramétrico aos dados não censurados [2]. Através de se calcula uma estatística na qual a soma é feita somente para os tempos de falha ($k \leq n$ é o número de falhas), sendo $\hat{R}_0(t_i)$ as estimativas da função de confiabilidade do modelo candidato e $\hat{g}(t_i)$ as alturas dos saltos da estimativa de Kaplan-Meier entre as observações não censuradas.

$$C = \sum_{i=1}^k \hat{R}_0(t_i) \hat{g}(t_i) \quad (1)$$

Calcula-se ainda a estatística de teste, que sob hipótese nula de que os dados seguem a distribuição $R_0(t)$, possui uma distribuição normal padrão (média zero e variância 1), com σ^2 dado por e sendo $t_{(i)}$ o tempo de ordem i , ou seja, depois de colocarmos os tempos observados em ordem crescente.

$$C^* = \frac{n^{\frac{1}{2}}(C - 0,5)}{\hat{\sigma}} \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{n}{n-i+1} \left[\hat{R}_0^4(t_{(i-1)}) - \hat{R}_0^4(t_{(i)}) \right] \right\} \quad (3)$$

Após calcular $C, C * e\hat{\sigma}^2$, calcula-se γ , onde $\gamma = P(|C^*| > x) = P(C^* > x) + P(C^* < -x) = 2P(C^* > x)$. Se o valor encontrado para $\gamma < 0,05$ se rejeita H_0 , caso contrário, se $\gamma > 0,05$, não se rejeita H_0 , isto é os dados provêm da distribuição candidata.

Nesse teste obteve-se como estatísticas $C = 0,476439$, $\hat{\sigma}^2 = 0,0831203$ e $C^* = -0,365480$. Passando ao cálculo de γ , em que $\gamma = P(|C^*| > 0,365480) = 0,746336$, indicando que o modelo é adequado, pois o valor γ é maior que 0,05. Em relação ao modelo Weibull, obteve-se

$C^* = -0,179007$. Calculando $\gamma = P(|C^*| > 0,179007) = 0,785203$, há indícios de que o modelo Weibull também é adequado aos dados.

```

Variable: Tempos - Uncensored value: Count 16
Right censored value: Count 4 - Censoring value: Censuras = 0

Nonparametric Estimates - Characteristics of Variable

Mean(MTTF)   Std. Error   Lower (95,0% Normal CI) Upper
51,1985      1,90774     47,4594                               54,9376

Median = 49,11 - IQR = 14,04  Q1 = 46,01  Q3 = 60,05

Kaplan-Meier Estimates

      Number at   Number   Survival   Standard   95,0% Normal CI
      Time      Risk  Failed  Probability   Error        Lower   Upper
31,42      20      1       0,95  0,048734  0,854483  1,00000
40,21      19      1       0,90  0,067082  0,768522  1,00000
    
```

Figura 1: Estimativas de sobrevivência de Kaplan-Meier para A.

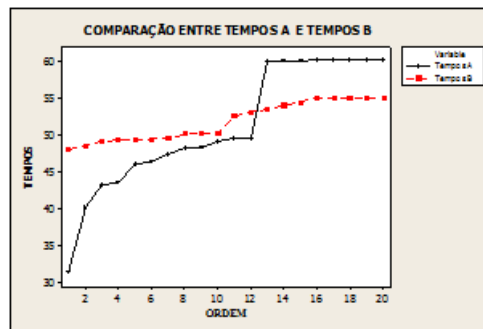


Figura 2: Comparação das embalagens A e B.

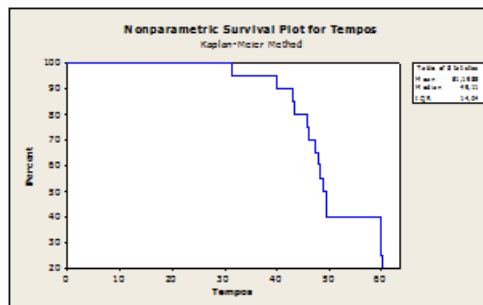


Figura 3: Estimativas Kaplan-Meier em A.

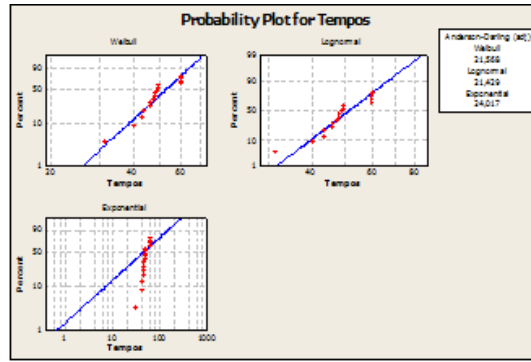


Figura 4: Probabilidade de modelos.

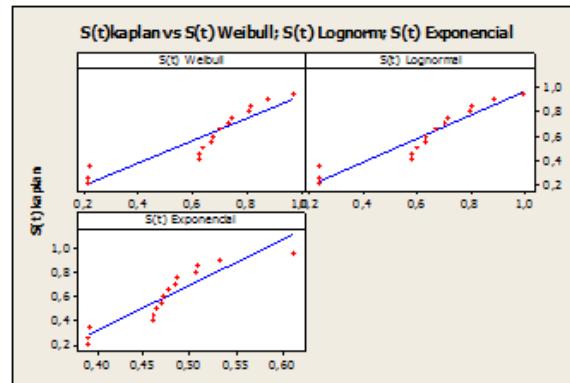


Figura 5: Análise pelo método 1.

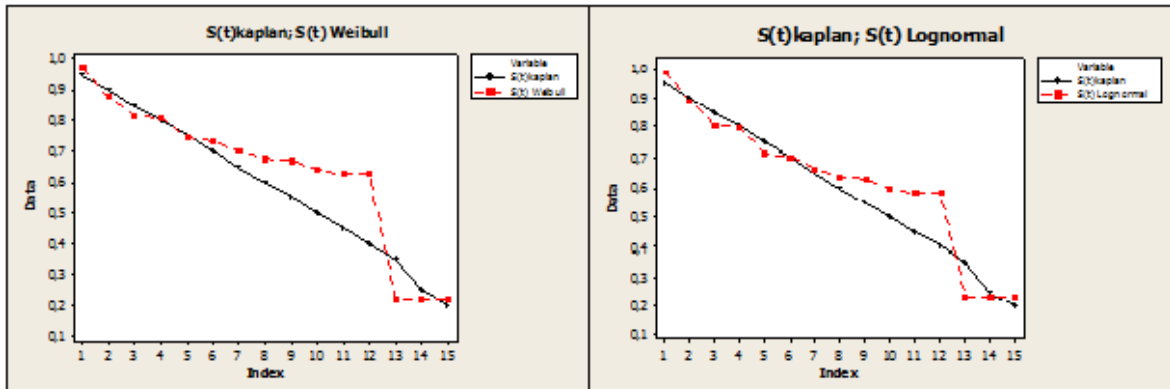


Figura 6: Weibull e Lognormal versus estimativas de Kaplan-Meier.

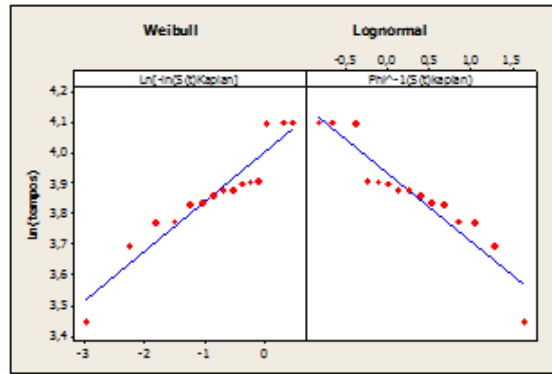


Figura 7: Análise método 2 (linearização) os modelos Weibull e Lognormal.

Os testes revelaram que ambos os modelos podem ajustar os dados, o que não estava claro com a análise gráfica. Foi escolhido o modelo Lognormal para a análise, devido sua melhor aproximação às estimativas de Kaplan-Meier (Figura 7). A Figura 8 apresenta as estatísticas do modelo Lognormal.

Distribution: Lognormal - Parameter Estimates				
Parameter	Estimate	Standard Error	95,0% Normal CI	
			Lower	Upper
Location	3,94548	0,0474787	3,85242	4,03854
Scale	0,205676	0,0380001	0,143192	0,295427
i) Tempo médio de vida:			Mean(MTTF)=52,8063 horas	
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:			(47,9630 ; 58,1387) horas	
ii) Tempo mediano de vida:			Mediana = 51,7011 horas	
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:			(47,1071 a 56,7432) horas	
iii) Tempo em que 10% dos produtos falham:			$t_{10} = 39,7216$ horas	
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:			(35,0683 ; 44,9923) horas	
iv) Tempo em que 90% dos produtos falham (tempo crítico):			$t_{90} = 67,2935$ horas	
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:			(58,4159 ; 77,5203) horas	

Figura 8: Estatísticas do modelo Lognormal para a Embalagem A.

Ajuste de Modelo: Embalagem B

As estimativas de Kaplan-Meier para B têm o tempo médio de vida de 51,83 horas (50,68 ; 52,98); tempo mediano de 50,15 horas e tempo no qual 10% dos produtos falham igual a 48,50 horas. Na Figura 9, note uma queda bem acentuada no gráfico de sobrevivência de B, além de pequena amplitude. O ajuste para a embalagem B, nos gráficos de probabilidade da Figura 10, mostra que os modelos Weibull e Lognormal podem ser adequados. Veja na Figura 11 que a análise pelo método 1 não indica qual é o melhor modelo para os dados, pois os gráficos estão muito parecidos. Na Figura 12, observa-se que ambos os modelos, após linearização, têm uma constituição bem semelhante, que dificulta a escolha do melhor. Por fim, veja na Figura 13 que o modelo Lognormal tem uma aproximação um pouco melhor, mas sutil, para as estimativas de Kaplan-Meier que o modelo Weibull. Devido essa falta de clareza gráfica, a decisão pela rejeição de algum modelo será feita via teste de hipóteses.

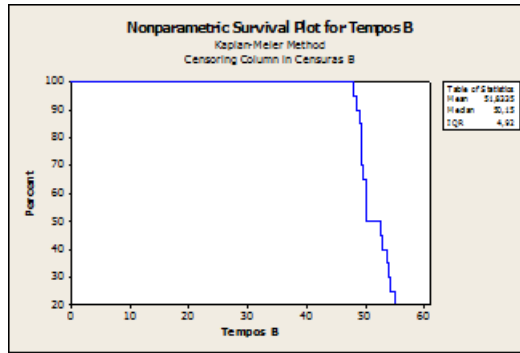


Figura 9: Gráfico com estimativas Kaplan-Meier para a embalagem B.

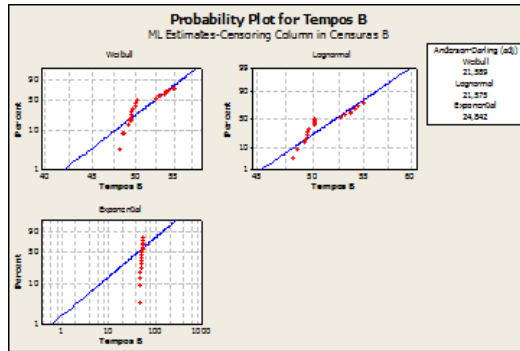


Figura 10: Probabilidade de alguns modelos.

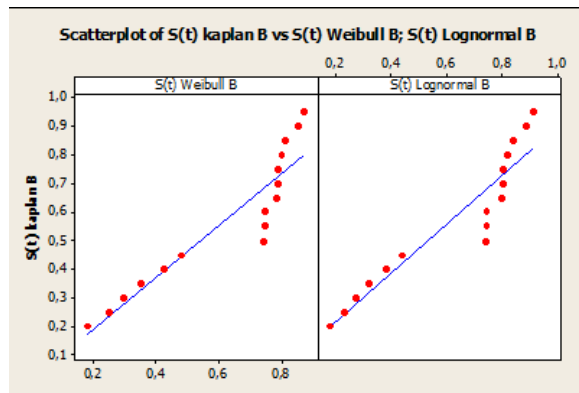


Figura 11: Análise pelo método 1.

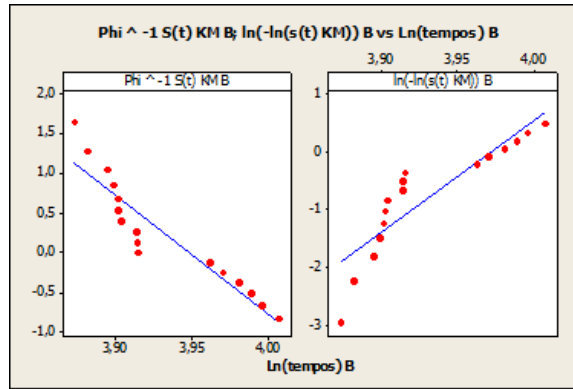


Figura 12: Método 2 (linearizaçãodos modelos Lognormal e Weibull).

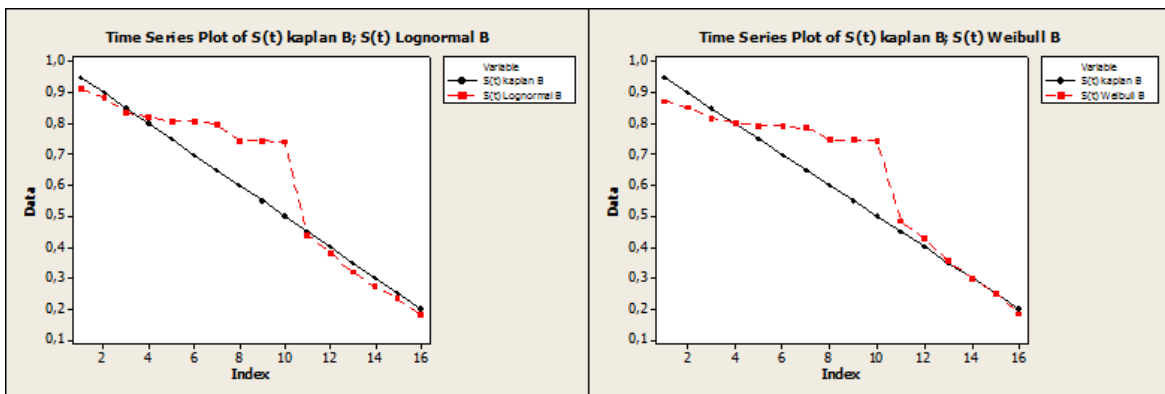


Figura 13: Comparação modelos Weibull e Lognormal com estimativas de Kaplan- Meier.

Teste de Hipóteses: Embalagem B

Novamente, usando o teste proposto em [3], os valores da estatística de teste para o modelo Lognormal é $C^* = -0,0558626$, com $\gamma = P(|C^*| > 0,0558626) = 0,796641$, indicando que o modelo adequado, pois o valor de γ é superior a 0,05. Em relação ao Weibull, com $C^* = -0,0278594$, há um $\gamma = 0,797575$, que mostra que o modelo Weibull também se adequa aos dados.

Conclui-se então, que ambos os modelos podem ser usados para os dados, o que não estava bem definido na análise gráfica. Optou-se pelo modelo Lognormal, por achar que ele tem uma melhor linearização pelo método 2 (Figura 12) e pela sua comparação com as estimativas de Kaplan-Meier (Figura 13). Com o modelo definido, são respondidos os questionamentos iniciais, veja a Figura 14.

Discussões e Conclusões Finais

Comparação entre embalagens

Pode ser visto nas Figuras 15 e 16 que o modelo para B tem uma maior queda na sua curva de sobrevivência, tanto nas estimativas de Kaplan-Meier quanto no gráfico do modelo

Distribution: Lognormal - Parameter Estimates				
Parameter	Estimate	Standard Error	95,0% Normal CI	
			Lower	Upper
Location	3,95326	0,0136283	3,92654	3,97997
Scale	0,0591972	0,0110179	0,0411030	0,0852567

i) Tempo médio de vida:	Mean(MTTF) = 52,1961 horas
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:	(50,8108 ; 53,6192) horas
ii) Tempo mediano de vida:	Mediana = 52,1047 horas
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:	(50,7314 ; 53,5152) horas
iii) Tempo em que 10% dos produtos falham	$t_{10} = 48,2981$ horas
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:	(46,5901 ; 50,0686) horas
iv) Tempo em que 90% dos produtos falham (tempo crítico)	$t_{90} = 56,2114$ horas
Estimativa Intervalar de 95% de confiança:	(53,9655 ; 58,5508) horas

Figura 14: Estatísticas do modelo Lognormal para a Embalagem A.

Lognormal. Nota-se também, tanto para A quanto para B, que os tempos médios e medianos são bem parecidos, seja nas estimativas de Kaplan-Meier quanto no modelo Lognormal, mas na comparação dos tempos onde 10% dos produtos falham, observa-se uma diferença importante entre as embalagens A e B.

A embalagem B possui um tempo de falha aproximadamente 8 horas maior que A, ou seja, B é mais eficiente que A nesse quesito. Porém, analisando o tempo crítico t_{90} , na embalagem A vemos que ele é 11 horas maior que em B, indicando a maior eficiência de A. Na Tabela 2 podem ser vistas estatísticas de Kaplan-Meier e do modelo Lognormal para as embalagens. Note que as estimativas são próximas dos cálculos do modelo, não havendo diferenças maiores que 2 unidades, as quais são consistentes com as estimativas intervalares mostradas anteriormente.

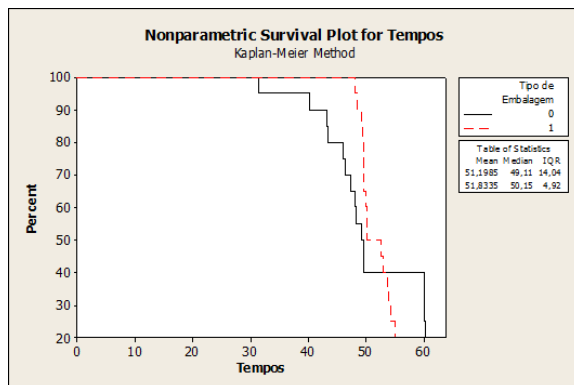


Figura 15: Método 2 (linearizaçãodos modelos Lognormal e Weibull).

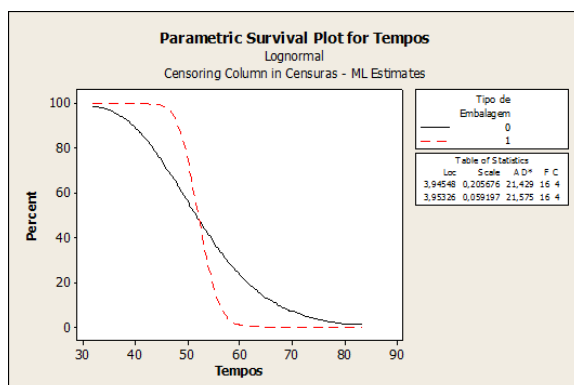


Figura 16: Comparação modelos Weibull e Lognormal com estimativas de Kaplan- Meier.

Tabela 2: Estimativas de Kaplan-Meier e do modelo Lognormal ajustado para embalagens A, B

Estimador	Embalagem	Estatísticas			
		Tempo Médio	Mediana	Percentil 10	Percentil 90
Kaplan-Meier	A	51,20	49,11	40,21	—
	B	51,83	50,15	48,50	—
Log-Normal	A	52,81	51,70	39,72	67,29
	B	52,20	52,10	48,30	56,21

Conclusões Finais

O objetivo deste estudo era descobrir qual das duas embalagens mantinha o produto em condições de consumo por mais tempo. Observamos que a embalagem B retarda o aparecimento de falhas iniciais, mas não é eficiente quando se trata de tempo de falha final. A embalagem A, ao contrário da B, deixa a desejar quando se trata de tempo de falhas iniciais, porém é superior em tempos finais. Caso o produto tenha uma data de validade máxima de 48 horas, indicamos fortemente o uso da embalagem B, pois o uso desta embalagem retarda o aparecimento de falhas iniciais. Ou seja, no tempo 48 horas, aproximadamente 8% falharam em B, enquanto em A, falharam 35,89% das unidades.

Em resumo, para tempos acima de 48 horas, pode-se usar a embalagem A, mas para um período de até 48 horas, claramente, deve-se usar a embalagem B.

Referências

- [1] COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R., *Análise de Sobrevivência Aplicada*, 1ª ed., São Paulo: Edgar Blücher, 2005.
- [2] FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A., *Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados*. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, 1997.
- [3] HOLLANDER, M.; PROSCHAN, F., Testing to determine the underlying distribution using randomly censored data, *Biometrics*, **35**, 349-401, 1979.