FORMAÇÃO MATEMÁTICA NA LICENCIATURA E PRÁTICA DOCENTE NA ESCOLA: O CASO DA UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM PRIMOS

PROSPECTIVE TEACHER EDUCATION AND SCHOOL TEACHING PRACTICE: THE CASE OF THE UNIQUENESS OF PRIME DECOMPOSITION

MOREIRA, Plinio Cavalcanti[1,2]

RESUMO

Neste texto discutimos o Teorema Fundamental da Aritmética, tomando como referência as formas como o tema é trabalhado na Educação Básica e nos cursos de Licenciatura em Matemática. Defendemos uma discussão desse tópico, situada no contexto específico do ensino escolar, em ambas as instâncias de trabalho de educação matemática, mas principalmente nos processos de formação inicial do professor. Como contribuição nesse sentido, apresentamos uma demonstração "escolar" da unicidade da decomposição em primos, contrastando a viabilidade de seu ajustamento ao trabalho docente sobre o tema no sexto ano do Ensino Fundamental, com as (im)possibilidades de adaptação de duas demonstrações acadêmicas desse mesmo fato, as quais aparecem frequentemente em livros-texto utilizados em cursos de formação de professores de matemática para a Educação Básica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Prática docente escolar. Formação de professores. Saber docente. Teorema Fundamental da Aritmética.

ABSTRACT

We discuss the way the Fundamental Theorem of Arithmetic is dealt with in school teaching as compared to the correspondent way this topic is examined in (Brazilian) Math Teacher Education. We argue that it is viable, as well as manageable, to develop a situated (in the school teaching context) discussion of the uniqueness of prime decomposition of natural numbers, both in Mathematics Teacher Education Programs and in the school itself, where this issue is essentially ignored. As a contribution, we present a "school" proof of the uniqueness of prime decomposition in the set of natural numbers, contrasting the possibilities of adapting it to the teaching of mathematics in sixth-grade classes, with the (im)possibilities of adjusting two academic proofs, often presented in textbooks used in Math Teacher Education courses in Brazil.

Keywords: Mathematics Education. School teaching practice. Teacher education. Teachers' Mathematical Knowledge. Fundamental Theorem of Arithmetic.

1 INTRODUÇÃO

O leitor encontrará, neste texto, uma discussão sobre o ensino do Teorema Fundamental da Aritmética na escola e nos cursos de Licenciatura em Matemática, bem como três formas de justificar a unicidade da decomposição em primos de números naturais. Duas delas, embora corretas do ponto de vista matemático, muito dificilmente, a nosso ver, se prestariam a adaptações pedagogicamente viáveis ao trabalho escolar com o assunto no sexto ano do Ensino Fundamental (o leitor com alguma experiência docente com o sexto ano poderá avaliar por si mesmo). A terceira

---

[1]Doutorado em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, MG, Brasil. Endereço eletrônico: pliniocavalcantim@gmail.com.

[2]Agradeço aos professores que são ou foram meus alunos de Fundamentos de Álgebra no curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, pelas trocas de ideias sobre esse assunto, ao longo dos vários anos em que lecionei essa disciplina.

demonstração busca seus fundamentos em valores e objetivos próprios do contexto em que se desenvolve a educação matemática escolar.

Em outras palavras, mostramos duas possibilidades de justificativa da unicidade da fatoração em primos que, embora matematicamente corretas, podem ser vistas como não pedagogicamente adequadas para a prática docente escolar; e uma terceira justificativa que, ainda correta do ponto de vista matemático, contorna as questões de natureza lógica, psicológica, cognitiva e semiótica que se colocam diante de uma eventual tentativa de adaptação das duas primeiras ao trabalho docente no sexto ano de escolaridade.

2 A UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM PRIMOS PRECISA SER IGNORADA NA PRÁTICA DOCENTE ESCOLAR?

Dado um número natural maior que 1, ou ele é primo ou é composto. O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) afirma que se for composto, pode ser escrito de maneira única como produto de primos. Vamos separar esse teorema em duas afirmações:

- todo número composto pode ser escrito como produto de primos;
- não existem duas formas diferentes de escrever o número composto como produto de primos, a não ser pela ordem dos fatores.

A primeira afirmação, acima, é relativamente simples de se justificar, usando, basicamente, de forma iterada, o entendimento do que significa número composto e número primo. A questão mais relevante para a formação do professor é aquela normalmente ignorada nos livros didáticos escolares: será que um mesmo número composto pode ser escrito como produto de fatores primos de duas maneiras diferentes? O TFA diz que não, mas é preciso refletir um pouco sobre isso para que se possa entender o sentido que essa unicidade alcança.

O número 80 pode ser escrito como produto de outros números de várias maneiras (por exemplo: 4x20; 2x2x2x10; 2x40; 2x2x2x2x5, entre outras). A segunda afirmação do TFA garante que o único produto de primos que resulta em 80 é 2x2x2x2x5, não há outro (o que pode mudar é a ordem dos fatores). No caso do 80, é possível escrever todos os produtos possíveis e conferir que só há um em que os fatores são todos primos. Mas e um número com 23 dígitos, por exemplo? Como podemos ter certeza de que só há uma maneira de escrever tal número como produto de primos?

É claro que se fatorarmos o número dado, utilizando o algoritmo usualmente ensinado na escola, chegaremos sempre a um mesmo resultado, o que pode induzir a ideia de que não é necessário discutir a questão da unicidade. O problema desse raciocínio é que o algoritmo escolar fornece sempre a mesma fatoração em primos para um dado número, simplesmente porque, em N, a fatoração em primos é única. Se não fosse, o algoritmo daria apenas *uma* fatoração em primos (maiores detalhes na seção 5).

Outro argumento, que também funde, incorretamente, as duas afirmações do TFA em apenas uma, pode ser encontrado em textos publicados na internet sobre o tema, e repete o mesmo tipo de falha lógica apontada anteriormente. A ideia seria, basicamente, a seguinte: escrevemos o número composto a ser fatorado em primos, como produto de dois naturais maiores que 1. Decompomos novamente cada um desses dois fatores do produto em dois novos fatores maiores que 1, caso sejam ambos compostos (os que forem primos permanecem fixados até o final do processo). Isso dá origem a uma árvore de possibilidades. No caso do composto dado ser 36, teríamos, por exemplo, as duas "árvores" a seguir, dentre outras possíveis:

36
2 | 18
2 | 3 | 6
2 | 3 | 2 | 3

36
6 | 6
2 | 3 | 2 | 3

Segundo essa argumentação, o que garantiria a unicidade da decomposição em primos seria o "critério de parada", ou seja, o processo é finalizado quando todos os fatores da horizontal se tornam primos (etapa, aliás, em que nem há mais a possibilidade de continuação).

De fato, todos que fatorarem um número natural composto, utilizando esse esquema de árvore descrito acima, chegarão à mesma fatoração final. Isso é verdadeiro, mas não pode ser usado para garantir a unicidade. Por quê? Porque a unicidade, ou melhor, um fato logicamente equivalente a ela, está embutido na própria concepção dessa forma de obter a fatoração em primos. Esse fato, utilizado iteradamente nesse esquema de decomposição em primos descrito anteriormente, é o seguinte: pressupõe-se que *todos* os divisores primos de um número composto estejam entre aqueles que aparecem na justaposição dos fatores primos dos (dois) números cujo produto resulta no composto a ser fatorado. No entanto, isso só "funciona" porque a decomposição em primos é única no conjunto dos naturais, ou seja, já se supõe a unicidade embutida no próprio processo de fatorar em primos.

Como no caso do algoritmo usual, se não valesse a unicidade, esse processo forneceria, no final, apenas *uma* fatoração possível do número composto dado. Extrapolando, por um momento, a questão escolar que queremos discutir aqui, podemos examinar o seguinte exemplo, para comprovar o que acabamos de dizer acima: no conjunto Z[$\sqrt{-5}$] = {a+b$\sqrt{-5}$, a,b inteiros}, munido da adição e multiplicação usuais dos complexos ($\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$), o elemento 6 poderia ser substituído por dois produtos diferentes, pois, em tal conjunto, 6 = 2x3 e 6 = (1+$\sqrt{-5}$)(1-$\sqrt{-5}$). Assim, poderíamos chegar, no final da fatoração de 36 em Z[$\sqrt{-5}$], a pelo menos duas formas distintas de produto de elementos que são análogos aos que chamamos de primos em N (ou seja, não são divisíveis por nenhum outro, exceto 1 e eles mesmos).

Os fatos que acabamos de comentar acima mostram que a questão da unicidade no TFA não é tão simples, sugerindo a relevância pedagógica de se colocar a seguinte questão aos alunos da escola, quando se trabalha esse assunto: será que, usando outra maneira de fatorar, não seria possível chegar a uma fatoração de algum número, na qual aparecesse um primo diferente daqueles encontrados quando se usa o algoritmo usual? Como se sabe, a resposta é não, mas é preciso argumentar para convencer. Parece simples, mas não é. Em *Gowers's Weblog*, encontra-se um artigo tratando dessa questão, no qual o autor apresenta quatro possibilidades de resposta para a pergunta "Por que o Teorema Fundamental da Aritmética não é óbvio?"[3]

Por outro lado, até onde pudemos observar através do exame de alguns livros universitários usados nas licenciaturas e também de uma busca na internet, as justificativas para a unicidade da decomposição em primos usualmente conhecidas lidam com pré-requisitos que ultrapassam aqueles esperados de um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental, ano em que o assunto é trabalhado na Educação Básica. Esta última afirmação (de que o assunto é trabalhado no sexto ano da escola) tem como suporte a análise que fizemos de livros didáticos escolares para o sexto ano, pois a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não se refere, em nenhum momento, à decomposição de números em fatores primos. Quando lista as unidades temáticas, os objetos de

[3] Para acessar, dê um Google em Gowers's Weblog Why isn't the Fundamental Theorem of Arithmetic obvious?

conhecimento e as habilidades correspondentes à matemática para o sexto ano, a BNCC apenas faz menção a "*Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor*" (BNCC, p.301).

No entanto, é a unicidade da decomposição em fatores primos que dá suporte lógico a alguns dos procedimentos e resultados mais utilizados por alunos e professores de matemática, não apenas no sexto ano, mas ao longo de todo o ensino básico (Fundamental e Médio). Os exemplos são vários, mas destacamos dois:

a) como já mencionado, o próprio algoritmo para se encontrar a decomposição de um número em seus fatores primos;
b) o cálculo do m.d.c. e do m.m.c. através da fatoração em primos, selecionando os fatores comuns com os menores expoentes, no caso do m.d.c., e os fatores comuns e não comuns com os maiores expoentes, no caso do m.m.c. Tal procedimento não seria correto se um mesmo número composto pudesse ser fatorado (em primos) de maneiras distintas.

Assim, a maneira como se estrutura o currículo escolar, na prática, coloca o professor do sexto ano diante de uma escolha difícil: supor verdadeira a unicidade da decomposição em primos, sem nenhuma justificativa, ou apresentar uma justificativa praticamente impossível de ser acompanhada pelos alunos do sexto ano. Até onde pudemos perceber nos cerca de 20 livros didáticos escolares que examinamos, o que se faz usualmente é admitir a unicidade, sem apresentar nenhuma justificativa. Muitas vezes nem se fala dessa parte do Teorema Fundamental da Aritmética, apenas ensina-se como fatorar pelo algoritmo, assumindo-se implicitamente que a fatoração é única. É uma possibilidade, que poderia ser defendida pelo fato de não se ter acesso a uma justificativa adequada ao estágio de desenvolvimento do conhecimento e das habilidades do pensamento matemático de alunos do sexto ano. Mas será que essa é a abordagem mais adequada, do ponto de vista didático e pedagógico? Existe alguma alternativa escolar de argumentação para validar a unicidade da fatoração em primos no conjunto dos números naturais? Como dissemos na Introdução, nossa resposta para a segunda pergunta é *sim*, o que ajuda a justificar, juntamente com tudo que dissemos nesta seção 2, nossa resposta negativa para a primeira. A não ser que a decisão do professor de não discutir essa questão no sexto ano tenha sido tomada em decorrência de uma análise cuidadosa das circunstâncias, no pleno exercício de sua autonomia docente (ver final da próxima seção).

3 A UNICIDADE DA FATORAÇÃO EM PRIMOS E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Apesar de ser compreensível a atitude de professores e de autores de livros didáticos escolares, que evitam discutir a unicidade da fatoração em primos, queremos comentar dois aspectos importantes em relação a essa questão.

Em primeiro lugar, nossa experiência de trabalho com professores da Educação Básica (e com alunos da Licenciatura em Matemática) nos indica que esses profissionais (e futuros profissionais), de modo geral, não têm uma percepção clara do que está sendo deixado sem justificativa e, em consequência, porque certas justificativas não estão sendo trabalhadas na escola, quando se trata do Teorema Fundamental da Aritmética. Isso nos parece um problema sério que pode afetar negativamente a prática docente escolar.

Um elemento que atua a favor da não percepção (por parte do professor) daquilo que está sendo deixado sem justificativa (e porque está sendo deixado sem justificativa), ao lidar com a decomposição em primos nas salas de aula da Educação Básica, tem seu lastro numa ideia proveniente do senso comum a respeito do ensino de matemática na escola: grosso modo, seria suficiente se ater aos procedimentos, ao “como fazer corretamente”. E como tal forma de entender o ensino de matemática é extensivamente disseminada na sociedade, os alunos que entram na escola, mesmo que inicialmente tenham alguma curiosidade em relação a algo além dos procedimentos, acabam por perdê-la, incorporando, em conformidade com o que vivenciam rotineiramente, a concepção de que aprender matemática se reduz a saber realizar os procedimentos “explicados” pelo professor. Fecha-se, então, um círculo vicioso, proporcionando a muitos professores um argumento para justificar a ausência dos porquês em suas aulas de matemática: os alunos não estão em condições de acompanhar as justificativas e/ou não estão interessados. Sem querer diminuir a complexidade da questão, é possível encaixar aqui o velho dito popular: “não se sabe o que nasce primeiro, o ovo ou a galinha”.

Por outro lado, o processo de formação matemática do professor nas licenciaturas brasileiras costuma priorizar a matemática acadêmica sobre outras formas de conhecimento matemático mais próximas das demandas da prática docente escolar e, por isso, mais relevantes para a atuação profissional do professor (MOREIRA; DAVID, 2016). Uma busca na internet por vídeos, livros e outras publicações referentes ao TFA mostra que a unicidade da decomposição em primos, por exemplo, nunca (até onde pudemos constatar) é discutida e analisada como parte de um conhecimento matemático que se situa na prática efetiva de ensino no sexto ano da escola, tendo em conta as condições e as demandas profissionais que se colocam ao professor nesse estágio específico da educação escolar. Isso nos levou a inferir que o mesmo deve acontecer, como norma geral, nos cursos de Licenciatura em Matemática, pois não é fácil encontrar referências para esse tipo de abordagem do tema. Nas publicações a que tivemos acesso, como já comentamos, ignora-se a condição de que o tema da fatoração em primos é objeto de trabalho docente no sexto ano do Ensino Fundamental e/ou simplesmente não se aborda a questão da unicidade de forma próxima das condições de aprendizagem nesse estágio do desenvolvimento da educação matemática escolar.

Há que se considerar, dentro dessas condições de aprendizagem referidas acima, que o aluno do sexto ano não tem, ainda, o domínio de uma linguagem simbólica que permita utilizar, com certa fluência, letras (e, algumas vezes, letras com índices numéricos) representando números naturais genéricos (e as posições desses números numa dada sequência). Sem falar na maturidade exigida para acompanhar um processo de demonstração que contém várias etapas recorrentes (por exemplo, nos moldes apresentados em 4.1.1 adiante). Outro problema das demonstrações acadêmicas da unicidade da decomposição em primos, quando as analisamos tendo em vista o processo de formação do professor para o trabalho docente na Educação Básica, refere-se à prova por absurdo. Um aluno genérico do sexto ano não desenvolveu ainda (embora espere-se que aconteça ao longo dos estágios posteriores) uma familiaridade suficiente com provas por redução ao absurdo, um dos elementos utilizados no desenvolvimento de justificativas universitárias para a unicidade da decomposição em primos (ver, para um exemplo, a seção 4.2, adiante), o que dificulta sobremaneira qualquer tentativa de adaptação desse tipo de justificativa à prática docente escolar.

Por fim, queremos destacar que o licenciado passa, de um modo geral, cerca de dois anos de sua formação matemática estudando Cálculo Diferencial e Integral, Funções de Variável Complexa, Equações Diferenciais, Análise Real, Álgebra Abstrata etc., e acaba não “sobrando” tempo para discutir, com o foco requerido pela prática docente escolar, o papel da unicidade da decomposição em primos na estruturação da matemática que irá trabalhar com seus futuros alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Por exemplo, como já mencionado, não se discutem os vínculos entre a unicidade da decomposição em primos e os fundamentos lógicos do algoritmo usado para fatorar na escola; entre essa unicidade e os modos de encontrar o m.d.c. e o m.m.c. de vários números, através da fatoração em primos, como trabalhado na escola; entre ela (a unicidade) e o uso da fatoração em primos para achar quantos e quais são os divisores de um número dado; os vínculos da unicidade da decomposição em primos com a "regra" que afirma que se um número é divisível por dois primos distintos será divisível pelo produto deles, entre outras questões relevantes para a prática docente escolar. Resumindo, pode-se dizer que, de modo geral, o licenciado termina o curso de formação universitária para a docência escolar em matemática sem conhecer aspectos fundamentais do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), relativos ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Nesse sentido, destacamos que a questão tratada neste artigo (a unicidade da decomposição em primos) representa apenas um dos vários tópicos cujas abordagens usuais nas licenciaturas atestam o distanciamento existente entre a formação matemática que se desenvolve nesses cursos e as demandas de conhecimento matemático postas pela prática docente na Educação Básica[4].

No entanto, é importante destacar que, com esses comentários, não estamos defendendo que o professor de matemática, em todos os níveis da Educação Básica, se veja na obrigação de justificar tudo e sempre, ou seja, mostrar as razões pelas quais são válidos todos os resultados matemáticos referidos em suas aulas e discutir, necessariamente, os fundamentos de todos os procedimentos ensinados. Isso seria uma receita fácil de prescrever, mas difícil de cumprir. Temos claro que a decisão última sempre cabe ao professor, dentro da autonomia que rege o trabalho docente. Assim, no exercício da sua autonomia, o professor desenha ou escolhe as estratégias de abordagem para cada tópico, de acordo com o que considere mais adequado a cada turma e em acordo também com as diretrizes e orientações próprias de cada escola. O que defendemos firmemente, contudo, é que os cursos universitários de formação do professor de matemática têm a obrigação de oferecer aos profissionais que certificam para o exercício da profissão docente escolar as condições básicas para exercer essa autonomia. Entre tais condições básicas, destacamos o conhecimento matemático relevante para o ensino escolar, que inclui certamente, entre outros elementos, as justificativas da validade dos resultados matemáticos que são objeto desse ensino, bem como os fundamentos que sustentam a legitimidade dos procedimentos matemáticos a serem utilizados pelos alunos e professores, tudo devidamente ajustado às situações de ensino e de aprendizagem da prática docente escolar em matemática.

É evidente que o professor só pode decidir, com autonomia, se justifica ou não procedimentos e resultados matemáticos, quando conhece as justificativas possíveis de serem apresentadas e discutidas com seus alunos. Assim, o conhecimento matemático relevante para o ensino em cada ano de escolaridade constitui parte importante do exercício real da autonomia docente. Por isso, defendemos a ideia de que a formação inicial tem obrigação de prover ao licenciando as justificativas adequadas dos procedimentos e resultados matemáticos a serem trabalhados na escola ou, se for o caso, discutir a eventual inviabilidade de oferecer tais justificativas. Em suma: o profissional licenciado como professor de matemática da Educação

[4] cf. Moreira e David, 2016, cap. 3, para a discussão de outros exemplos

Básica tem o direito de conhecer justificativas escolares dos fatos e procedimentos matemáticos que ensina e de ter claras as razões pelas quais está deixando de justificar, quando for o caso.

Entretanto, na realidade da escola e da formação docente universitária, os professores de matemática do sexto ano parecem predestinados a ter que escolher, como já mencionado, entre impor a unicidade da decomposição em primos como uma verdade "divina" ou apresentar uma justificativa que não pode ser acompanhada por seus alunos, em função dos pré-requisitos exigidos. A escolha da primeira opção, reforçada pela ideia de que o importante no ensino de matemática são os procedimentos, acaba parecendo a mais razoável e segura. É claro que a autonomia aí aparece mais como falta de alternativa do que como efetivo exercício de competência docente.

O segundo aspecto que queremos destacar refere-se ao fato de que é possível contornar essa situação problemática posta ao professor do sexto ano, no que concerne ao trabalho com a fatoração em primos. A solução emerge quando submetemos a questão lógica (subjacente à construção de uma justificativa escolar para a unicidade da decomposição em primos) a uma premissa de natureza didático-pedagógica, que se refere às condições curriculares relativamente restritivas, próprias do trabalho docente no sexto ano. Tal ponto de vista nos permitiu produzir uma argumentação que garante a validade da unicidade da decomposição em primos, sem ferir os preceitos constituintes de uma justificativa escolar válida para um fato matemático. A argumentação que desenvolvemos se apoia, de modo fundamental, em um fato amplamente aceito pelos alunos da escola, desde os primeiros estudos sobre as frações, estudos esses que acontecem nos anos iniciais da escolaridade. Conhecendo essa possibilidade de argumentação, que apresentamos na seção 5 deste texto, o professor poderá decidir, com real autonomia, se apresenta ou não a seus alunos as adaptações que, no nosso entendimento, podem ser construídas, de acordo com suas concepções e sua experiência, para cada classe de sexto ano do Ensino Fundamental.

4 DUAS DEMONSTRAÇÕES ACADÊMICAS DA UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM PRIMOS

4.1 Operações com negativos, simbologia sofisticada e procedimentos recursivos: um dos caminhos acadêmicos para provar a unicidade da fatoração em primos

Vamos apresentar, abaixo, uma primeira demonstração da unicidade da decomposição em primos, para que o leitor possa confirmar (ou, talvez, contestar) nossa visão de que uma adaptação desse tipo de argumento ao trabalho no sexto ano do Ensino Fundamental é, no mínimo, difícil de ser elaborada.

4.1.1 Primeira etapa: se um primo divide o produto a.b, então divide necessariamente um dos fatores

Um raciocínio aparentemente simples para justificar a veracidade desse fato seria o seguinte: se p divide ab devemos ser capazes de simplificar todos os fatores primos de p com alguns dos fatores do produto ab até que p seja reduzido ao número 1. Mas como p é primo, seu único fator primo é ele mesmo. Então, para que possamos efetuar tal simplificação, o próprio p deve estar entre os fatores do produto ab, ou seja, entre os fatores primos de a ou de b (ou de ambos). Concluímos, então, que p é um divisor de a ou de b (ou de ambos).

Entretanto, essa argumentação usa o fato de que a fatoração em primos de ab é dada sempre pelo produto dos fatores primos de a pelos fatores primos de b. Tal fato é verdadeiro, no caso dos números naturais, mas é equivalente à unicidade da decomposição em primos. Assim, como essa é a primeira etapa do processo de demonstração da unicidade, estaríamos usando, já na primeira etapa, o que queremos provar na etapa final do processo. Por isso, vamos tomar outro caminho, de modo a evitar essa circularidade lógica.

Já sabemos (Lema de Euclides) que quando dividimos um número natural D (dividendo) por outro natural d (divisor, diferente de zero), obtemos sempre um quociente q e um resto r, que satisfazem as seguintes relações:

a) $D = q.d + r$
b) $0 \leq r < d$

Imaginemos a seguinte sequência de divisões: comece com um número $a > 0$ dividido por um número $b > 1$ e primo com a (isto é, sem divisor em comum com a, exceto o 1), obtendo-se um quociente q_1 e um resto r_1. Chegamos então à igualdade $a = q_1.b + r_1$, o que também pode ser escrita na forma $r_1 = a - q_1.b$. Observe-se, de passagem, que esta última igualdade traduz o seguinte procedimento subtrativo associado à divisão de naturais: para achar quantas vezes o divisor "cabe" no dividendo, subtraímos o divisor do dividendo e obtemos o resultado $a - b$; se $a - b$ for maior ou igual a b, podemos subtrair mais uma vez o valor b e o resultado será $a - 2b$; prosseguimos subtraindo b do resultado da subtração anterior até que o (último) resultado seja menor que b. A quantidade de vezes que subtrairmos será o quociente, e o resultado final da última subtração será o resto. Neste sentido, a divisão pode ser vista como uma espécie de subtração iterada, analogamente ao caso da soma iterada, que traduz o significado usual da multiplicação de naturais. Tais procedimentos aditivos (e subtrativos) associados, respectivamente, à multiplicação e à divisão de naturais permitem desenvolver uma argumentação geométrica para concluir que o último resto não nulo da cadeia de divisões (que continuaremos a descrever logo abaixo) é necessariamente divisor comum de a e b, independentemente de a e b serem primos entre si. De fato, pode-se mostrar que esse último resto não nulo é o m.d.c. de a e b. Entretanto, não entraremos nos detalhes dessa argumentação geométrica e seguiremos com a descrição da sequência de divisões e a prova da proposição enunciada nesta subseção.

Como a e b são primos entre si, r_1 não é zero. Então, podemos dividir b por r_1 e obter um quociente q_2 e um resto $r_2 < r_1$. Então, caso r_2 não seja zero, podemos prosseguir, dividindo agora r_1 por r_2, obtendo um quociente q_3 e um resto $r_3 < r_2$. Prosseguimos dividindo sempre o divisor da divisão anterior pelo resto dessa mesma divisão, obtendo novos quocientes e novos restos, até que cheguemos a um resto zero. Mostramos, então, que só se chega a um resto zero quando o resto da divisão anterior tiver sido 1, o que nos diz que, de fato, sempre se passa pelo resto 1 antes de chegar ao resto zero. Por que se pode garantir isso? Para responder, retomemos a sequência de divisões e as igualdades a elas associadas, supondo que a última divisão (n) deixe resto zero. Temos:

(1) $a = q_1.b + r_1$
(2) $b = q_2.r_1 + r_2$
(3) $r_1 = q_3.r_2 + r_3$

....

....

$(n-3) \quad r_{n-5} = q_{n-3}.r_{n-4} + r_{n-3}$

$$(n-2) \quad r_{n-4} = q_{n-2}.r_{n-3} + r_{n-2}$$
$$(n-1) \quad r_{n-3} = q_{n-1}.r_{n-2} + r_{n-1}$$
$$(n) \quad r_{n-2} = q_n.r_{n-1} \ (r_n = 0)$$

Mostremos que $r_{n-1} = 1$ e que existem x e y inteiros (positivos ou negativos) tais que $ax + by = 1$. Da última igualdade (n), percebemos que r_{n-1} divide r_{n-2}. Observando a igualdade anterior $(n-1)$, concluímos que r_{n-1} divide r_{n-3} (pois divide a si mesmo e divide igualmente r_{n-2}). Observando a igualdade anterior $(n-2)$, vemos que r_{n-1} divide r_{n-4}, pois já divide r_{n-2} e r_{n-3}. Continuando nessa volta às igualdades anteriores, uma por uma, observamos que r_{n-1} divide todos os restos anteriores e, consequentemente, divide b e, portanto, a. Como a e b são primos entre si, segue que r_{n-1} = 1, como queríamos.

Prosseguindo, verifiquemos que existem x e y inteiros tais que $ax + by = 1$. Para isso, vamos usar novamente as igualdades $(n), (n-1), (n-2) \dots. (3), (2), (1)$ acima. A igualdade $(n-1)$ nos dá $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1}r_{n-2}$(*). Substituindo o valor de r_{n-2}, dado pela igualdade $(n-2)$, na igualdade (*), vem: $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1}(r_{n-4} - q_{n-2}r_{n-3}) = r_{n-3}(1 + q_n.q_{n-2}) + r_{n-4}.(-q_{n-1}) = Kr_{n-3} + Lr_{n-4}$, com K e L inteiros. Então, lembrando que $r_{n-1} = 1$, já temos $1 = Kr_{n-3} + Lr_{n-4}$, ou seja, conseguimos escrever 1 como a soma de múltiplos inteiros de r_{n-3} e de r_{n-4}. Vamos substituir nesta última igualdade, o valor de r_{n-3} dado pela igualdade $(n-3)$ e obteremos o seguinte: $1 = K(r_{n-5} - q_{n-3}.r_{n-4}) + Lr_{n-4} = Kr_{n-5} + Mr_{n-4}, com\ K\ e\ M$ inteiros. Observe, agora, que já conseguimos expressar o 1 como uma soma de múltiplos de r_{n-5} e de r_{n-4} . Na etapa seguinte, obteríamos 1 como soma de múltiplos inteiros de r_{n-6} e de r_{n-5}. Fica claro então que, se prosseguirmos desse modo até a igualdade (1), obteremos $1 = ax + by$ como queríamos.

Sumarizando, temos o seguinte: dados dois números naturais a e b, maiores que 1 e primos entre si, podemos sempre encontrar números x e y inteiros (positivos ou negativos) de modo a valer a seguinte igualdade: $ax + by = 1$.

Agora temos todos os elementos para justificar a afirmação de que se um primo p divide o produto $a.b$, então divide necessariamente um dos fatores**.** O argumento segue assim: se p divide a, então divide um dos fatores de $a.b$, e não há o que provar. Se p não divide a, então p e a são primos entre si e maiores que 1, portanto existem x e y tais que $ax + py = 1$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por b vem: $abx + pby = b$. Como p divide $a.b$ (portanto divide abx) e também divide pby, p tem que dividir a soma $abx + pby$, que é b. Logo p divide b. Assim, ou p divide a ou p divide b, como queríamos mostrar.

4.1.2 Segunda etapa: Generalizando para qualquer quantidade de fatores

O resultado que acabamos de provar vale também para qualquer número finito de fatores, isto é, se p primo divide o produto $a_1.a_2.\dots.a_n$, então p divide pelo menos um dos fatores. Basta aplicar reiteradamente o que mostramos para dois fatores, escrevendo o produto $a_1.a_2.\dots.a_n$ como $a_1.(a_2.\dots.a_n)$. Se p não divide a_1 tem que dividir o produto dentro dos parênteses. Prosseguindo assim sucessivamente, chegamos ao seguinte: se p não dividir nenhum dos fatores anteriores, então tem que dividir o produto $a_{n-1}.a_n$ e, portanto, tem que dividir um desses dois fatores.

4.1.3 Terceira etapa: a unicidade da fatoração em primos

Seja $p_1.p_2.\dots.p_k$ uma fatoração em primos para o número m. Seja $q_1.q_2\dots q_t$ outra possível fatoração em primos para m. Então q_1 divide $p_1.p_2.\dots.p_k$, logo divide um dos p's. Mas todos os p's são primos, portanto, um deles só pode ser divisível pelo primo q_1 se for igual ao próprio q_1. Assim, q_1 é um dos p's. Raciocinando da mesma maneira com $q_1.q_2\dots q_t$, concluímos que cada um dos q's deve ser igual a algum p.

Do mesmo modo, podemos argumentar para garantir que cada um dos p's é algum q, ou seja, os fatores primos são os mesmos nas duas fatorações. Segue facilmente daí que a quantidade de vezes que um mesmo fator primo aparece nas duas fatorações também é a mesma[5].

4.2 Uma demonstração mais simples, mas ainda difícil de ser adaptada para uma sala de aula de sexto ano

Reproduzimos, a seguir, uma segunda prova acadêmica da unicidade, apresentada em Vieira (2012, p. 50). Ver também Avritzer *et al.* (2004) para uma demonstração semelhante.

> Para provar a unicidade, devemos garantir que um natural $n \geq 2$ não admite mais de uma fatoração em produto de fatores primos. Esta demonstração também será feita usando a segunda forma do PIM[6]. Claro que $n = 2$ possui uma única fatoração. Vamos considerar $k > 2$ e assumir que qualquer natural m tal que $2 \leq m \leq k$ tem uma fatoração única como produto de primos. Agora suponhamos que k+1 tenha duas fatorações distintas como produto de primos (os primos não são necessariamente distintos): $k + 1 = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ (6.1). Reordenando os primos, se necessário, podemos supor que $p_1 \leq \cdots \leq p_r$ e $q_1 \leq \cdots \leq q_s$. Note que $p_1 \neq q_1$ pois se tivéssemos $p_1 = q_1$ então o natural $(k+1) \div p_1 \leq k$ teria duas fatorações distintas como produto de primos, contrariando a hipótese de indução. Se assumimos, sem perda de generalidade, que $p_1 < q_1$ e considerarmos o inteiro $m = (k + 1) - (p_1 q_2 \cdots q_s)$, então $m < k + 1$ e a partir de (6.1) temos que m se escreve como $m = p_1 p_2 \cdots p_r - p_1 q_2 \cdots q_s$ e também como $m = q_1 q_2 \cdots q_s - p_1 q_2 \cdots q_s$. Deste modo, $m = p_1(p_2 \cdots p_r - q_2 \cdots q_s)$ (6.2) e $m = (q_1 - p_1)(q_2 \dots q_s)$ (6.3). Por (6.2), temos $m \geq 2$, pois $p_1 \mid m$ e assim já que $2 \leq m \leq k$, por hipótese de indução, m tem fatoração única em primos. Deste modo, o primo p_1 deve estar presente no produto em (6.3) (pois está presente em (6.2)) e como $p_1 < q_1 \leq \cdots \leq q_s$, devemos ter p_1 como fator de $q_1 - p_1$, ou seja, $p_1 \mid (q - p_1)$. Portanto, existe $c \in Z$ tal que $q_1 - p_1 = cp_1$ e, com isso, $q_1 = (c + 1)p_1$, o que é absurdo, pois p_1 e q_1 são primos distintos. Com esta contradição, concluímos que k + 1 não possui duas fatorações distintas como produto de primos, o que mostra que qualquer natural $n \geq 2$ tem uma fatoração única como produto de primos, de acordo com a segunda forma do PIM.

De novo, o leitor poderá avaliar de acordo com suas concepções e experiência, mas acreditamos ser difícil a adaptação, ao trabalho no sexto ano, dessa forma de justificar a unicidade. E pensamos assim por várias razões, sendo a principal delas a presença incontornável, no argumento, do raciocínio por absurdo. Razões secundárias, talvez evitáveis através de algum subterfúgio didático, seriam: a) o uso da segunda forma do Princípio da Indução, o PIM (que, neste caso específico, pode ser facilmente trocado pelo Princípio da Boa Ordenação, possivelmente mais palatável para o sexto ano); b) o engenhoso artifício de definir o número $m = (k + 1) - (p_1 q_2 \cdots q_s)$ para em seguida mostrar que esse número possui duas fatorações distintas em primos e chegar ao absurdo. Um artifício como esse sempre corre o risco de parecer "mágico" a um aluno que acaba

---

[5] O leitor pode encontrar em vários livros universitários (SANTOS, 1998; HEFEZ, sem data; MILIES; COELHO, 2001; BERTONE, 2014, entre outros) demonstrações que reproduzem, essencialmente, o modelo dessas três etapas.
[6] Princípio da Indução Matemática.

de sair dos anos iniciais, especialmente no contexto de uma prova por absurdo. Associar, simultaneamente, a matemática, logo no sexto ano, a conotações como "absurdo" e "mágico" talvez não seja muito interessante nesta etapa da escolarização; c) por fim, a notação usada também nos parece pesada para alunos que ainda não dominam completamente os recursos da linguagem algébrica padrão, como o uso de letras para representar valores numéricos genéricos.

5 UM ARGUMENTO ESCOLAR PARA A UNICIDADE DA FATORAÇÃO EM PRIMOS

5.1 O fato básico

Por todas as razões já expostas, construímos uma demonstração escolar do fato básico que dá sustentação à validade da unicidade da decomposição em primos. Como vimos na seção 4.1.1, tal fato básico é o seguinte: se p é primo e divide o produto $a.b$, então divide pelo menos um dos fatores. Para mostrar isso de uma forma acessível ao aluno do sexto ano, suponha que p divide $a.b$ e não divide a. Então existe um número natural m tal que $a.b = m.p$. Isso nos permite dizer que as frações a/p e m/b são equivalentes. Como a/p é irredutível (pois p é primo e não divide a), temos que m e b são múltiplos, respectivamente, de a e de p, ou seja, p divide b, como queríamos.

Observamos que esse resultado pode ser facilmente estendido para mais de dois fatores. Assim, se um primo divide um produto de (um número finito de) fatores, tem que dividir um desses fatores. Podemos ainda destacar que, se um primo divide um produto de primos, deve ser igual a um desses fatores do produto. Isso poderia fazer parte de uma bateria de exercícios e atividades de sala de aula, com o objetivo de preparar o aluno para o argumento que será usado na seção 5.4, adiante.

Estamos cientes de que a simbologia usada precisaria ser adaptada ao estágio de desenvolvimento da formação matemática escolar dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Mais à frente, comentaremos essa questão da adaptação geral da linguagem simbólica e de certos argumentos ao trabalho docente no sexto ano da escola básica. No momento, queremos apenas enfatizar que a base fundamental de sustentação do argumento exposto nesta seção é um fato conhecido dos alunos da escola desde os anos iniciais e, portanto, pode ser usado de forma a tornar completamente acessível a esses alunos uma justificativa para o fato básico aqui provado. A partir daí, estamos em condições de justificar a unicidade da fatoração em primos (seção 5.4 adiante).

5.2 Situando a questão lógica associada ao argumento utilizado em 5.1

Embora possa parecer assim a algum leitor, não há circularidade lógica nessa forma de argumentar desenvolvida na seção 5.1, porque a demonstração de que "se uma fração é equivalente a uma irredutível, seu numerador e denominador são múltiplos do numerador e do denominador da irredutível" pode ser feita independentemente do resultado "se p é primo e divide $a.b$, então p divide a ou p divide b". Para isso, podemos usar apenas o Lema da Divisão de Euclides, nos moldes do que foi apresentado na seção 4.1.1.

Usamos o seguinte esquema para situar logicamente nosso argumento, em termos da estruturação e sequenciamento de certos resultados a ele relacionados. Consideremos as afirmações abaixo:

(1) Se p é primo e divide $a.b$, então p divide pelo menos um dos fatores.

(2) Se uma fração é equivalente a uma irredutível, então seu numerador e seu denominador são múltiplos, respectivamente, do numerador e do denominador da irredutível que lhe é equivalente.
(3) Se a e b são primos entre si, existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$.
(4) Lema da Divisão de Euclides.

Temos a seguinte cadeia lógica: (4) implica (3) que implica (2) que implica (1). E (4) é logicamente independente de todas as três afirmações anteriores (ou seja, na demonstração de (4) não é necessário usar nenhum dos três resultados anteriores).

Assim, do ponto de vista lógico, o que foi feito na seção 5.1 é apenas o seguinte: em lugar de provar a unicidade da decomposição em primos usando a cadeia (4) implica (3) que implica (1) que implica a unicidade (como é feito por alguns autores de livros universitários, inclusive na demonstração apresentada em 4.1), está sendo usada, a seguinte cadeia: (4) implica (3) que implica (2) que implica (1) que implica a unicidade.

Por que usar essa última cadeia e não a primeira? Porque, nela, não é necessário fazer as demonstrações dos dois primeiros passos - (4) implica (3) e (3) implica (2) - uma vez que os alunos do sexto ano já acreditam, desde os anos iniciais, que (2) é verdadeiro. Então, aquilo em que os alunos acreditam é tomado como postulado. E, convenhamos, do ponto de vista didático-pedagógico não há melhor escolha de postulado do que aquela em que se toma como verdade, sem necessidade de demonstração, um fato de cuja veracidade o aluno está inteiramente convencido desde os anos iniciais.

A esta altura, talvez possa ocorrer a algum leitor a seguinte pergunta: “se podemos escolher o postulado a partir do qual desenvolveremos a prova, por que não, no limite, tomar logo a própria unicidade como postulado?” Vamos comentar brevemente essa questão, explicitando nosso ponto de vista geral em relação a provas escolares de resultados matemáticos.

Enfatizamos aqui o aspecto didático e pedagógico, não os valores típicos de uma abordagem axiomática rígida (o mínimo de postulados, a elegância da organização lógico-dedutiva da teoria, o nível atual do rigor, sempre sob escrutínio dos pares etc.). Tais valores são considerados, por exemplo, na construção dos naturais, quando se parte dos Axiomas de Peano, o que conduz a provas acadêmicas semelhantes às que apresentamos nas seções anteriores e que nos colocaram, por isso mesmo, diante da necessidade de construir uma nova prova, adaptável ao ensino escolar, para a unicidade da decomposição em primos.

Assim, do nosso ponto de vista, o que interessa neste texto é construir uma possibilidade de convencer um aluno do sexto ano da validade da unicidade da decomposição em primos, sem ferir a lógica (i.e., sem cair numa circularidade, por exemplo) e, ao mesmo tempo, totalmente apoiado em conhecimentos prévios, já consolidados em estágios anteriores do Ensino Fundamental. Isso significa tomar, como fundamento do raciocínio, fatos que o aluno já aceite como verdadeiros, o que faz grande diferença em relação a simplesmente tomar como postulado a própria afirmação que se quer justificar. Para dar um exemplo ilustrativo, dentro de uma abordagem puramente axiomática deparamo-nos com a necessidade de provar que entre 1 e 2 não há número natural, uma vez que tal afirmação não figura entre os axiomas de base da teoria. Mas, na escola, é claro que tal fato pode ser tomado como um postulado, pois nenhum aluno tem alguma dúvida de que seja verdadeiro. Mas, daí a tomar o Teorema de Pitágoras, por exemplo, como postulado, ou seja, como uma afirmação que não precisa ser justificada, vai uma grande distância. No limite, a prevalecer esse tipo de visão do ensino, estaríamos estimulando a ideia, já bastante disseminada na cultura escolar, de que a matemática ensinada na escola é um conjunto de regras, fórmulas e procedimentos mais ou menos arbitrários e desconexos, que precisamos decorar e evocar em cada situação que se apresenta nos trabalhos e avaliações de sala de aula.

Em suma, nossa visão *não* é a de que, ao se priorizar o didático e o pedagógico nas argumentações matemáticas na escola, fica eliminada a necessidade de desenvolver um raciocínio lógico consistente para justificar a validade de um fato matemático não reconhecido como verdadeiro pelos alunos. Muito pelo contrário, gastamos um espaço razoável neste texto para defender a ideia de que a unicidade da fatoração em primos não é nada evidente e, por isso mesmo, apresentamos (na seção 5.1, anterior, e nas duas próximas) uma justificativa de sua validade que é logicamente consistente e, a nosso ver, compatível com o ensino escolar do tema no sexto ano.

5.3 O algoritmo escolar clássico para a fatoração em primos

Discutiremos, nesta seção, a validade do algoritmo usualmente ensinado na escola para decompor um número composto em fatores primos (sem, ainda, penetrar na questão da unicidade. Esta será discutida na seção 5.4, a seguir).

Primeiro procederemos a uma descrição rápida do conhecido processo: testamos se o número dado é divisível pelo menor primo, que é 2. Se for, fazemos a divisão e obtemos um primeiro quociente. Testamos se esse quociente é divisível por 2 de novo. Se for, fazemos a divisão e obtemos um novo quociente. Repetimos esse procedimento até achar um quociente que não seja mais divisível por 2. Testamos se esse último quociente é divisível pelo próximo primo, que é 3. Prosseguimos do mesmo jeito como fizemos com o 2, até encontrar um quociente que não seja mais divisível por 3. Assim, seguimos testando com o 5, 7, 11, 13 etc. até que obtenhamos o quociente 1. Uma fatoração do número dado inicialmente será, então, o produto dos números primos (alguns deles repetidos algumas vezes) que aparecem como divisores dos quocientes obtidos no processo descrito anteriormente.

A pergunta a que nos propomos responder é a seguinte: como se pode ter certeza de que esse produto expressa uma fatoração correta (do número dado inicialmente) em fatores primos? Vamos raciocinar através de um exemplo com um número particular, mas é importante destacar o fato de que a argumentação é válida de modo geral, não dependendo das particularidades do exemplo selecionado. Mudando-se o número dado, mudam-se os números envolvidos nas contas (e seus resultados), mas o argumento permanece o mesmo. Escolhemos trabalhar com o desenvolvimento detalhado de um exemplo numérico, visando evitar uma notação que, assim entendemos, seria inadequada para esse estágio de formação escolar em matemática (alunos do sexto ano).

Então vamos lá. Queremos encontrar uma fatoração de 15.400 em primos. De acordo com o algoritmo, testamos se esse número é divisível por 2. É. Então fazemos a divisão e obtemos um primeiro quociente igual a 7.700. Isso significa que 15.400 = 2x7.700. Como 7.700 é ainda divisível por 2, fazemos a divisão e obtemos um novo quociente (3.850). Podemos escrever que 15.400 = 2x2x3.850, já que 7.700 = 2x3.850. Isso nos diz que 15.400 é divisível por 2 "duas vezes", ou seja, é divisível por 2x2. Como 3.850 ainda é divisível por 2, podemos efetuar a divisão e obter o quociente 1.925. Escrevemos: 15.400=2x2x2x1.925, já que 3.850 = 2x1.925. Isso significa, como já comentamos, que 15.400 é divisível por 2x2x2.

Observamos que 1.925 não é mais divisível por 2. Então temos: 15.400 = (2x2x2)x(1.925). Podemos procurar o próximo fator primo de 15.400 entre aqueles que dividem o 1.925. Testamos o primo seguinte ao 2, ou seja, 3. Como 1.925 não é divisível por 3, passamos ao primo seguinte, 5.

Fazemos a divisão e obtemos o quociente 385. Então temos 15.400 = (2x2x2) x 5 x 385, já que 1.925 = 5x385. Constatamos que 385 ainda é divisível por 5, então fazemos a divisão e obtemos o quociente 77. Obtemos então o seguinte: 15.400 = (2x2x2x5x5) x 77. E 5 não divide 77.

De novo, podemos procurar o próximo fator primo de 15.400 entre os que dividem 77. Vemos que 7 divide 77 e o quociente é 11. Então, 15.400 = (2x2x2x5x5x7) x 11. Finalmente, como 11 já é primo, está terminado o processo de fatoração de 15.400 em primos. Eis, portanto, *uma* decomposição em primos para o número 15.400: 2x2x2x5x5x7x11.

A estratégia de trabalhar com exemplos particulares para mostrar a validade geral de um processo matemático (ou de uma afirmação) precisa ser muito bem entendida pelo professor, porque se, por um lado, tem a grande vantagem de evitar o uso de uma notação carregada, que pode até impossibilitar o acompanhamento da argumentação por parte do aluno, por outro, não deve induzir o entendimento de que basta verificar que o processo funcione (ou que a afirmação seja válida) em um determinado número de casos particulares para se poder concluir que vale sempre. O aluno precisa entender que, mesmo que o teste dê certo em um milhão de casos, nada garante que dará certo sempre, a não ser que se faça uso de um argumento geral, que não dependa das particularidades dos números presentes nos exemplos testados.

5.4 A unicidade da fatoração em primos

A questão agora é: será que a decomposição em primos, obtida através do algoritmo escolar, é a única que existe, para um dado número composto? Ou seja: será que um aluno poderia encontrar, por algum outro processo, uma decomposição do número 15.400 em fatores primos, de tal modo que, nessa nova fatoração, figurasse algum fator diferente do 2, do 5, do 7 ou do 11? Afirmamos que isso não é possível nem para 15.400 nem para qualquer outro número natural maior que 1 e vamos justificar, referenciando-nos no mesmo exemplo numérico (15.400), mas observando que o argumento usado é geral.

Suponhamos que alguém alegasse ser possível encontrar uma fatoração em primos de 15.400, na qual figurasse, por exemplo, o fator primo 3. Ora, neste caso sabemos que 3 seria um divisor (primo) de 15.400 = 2x7.700. Então, pelo que mostramos em 5.1, 3 deveria dividir 7.700 (já que não pode dividir o 2, por ser maior que 2). No entanto, como 7.700 = 2x3.850, o 3 deveria, pelas mesmas razões, dividir 3.850. Prosseguindo do mesmo modo, podemos concluir que 3 teria que dividir 1.925, o que não acontece, uma vez que para chegar à fatoração de 15.400 na seção anterior, testamos a divisibilidade de 1.925 por 3 antes de passarmos ao fator 5. Então podemos concluir que 3 não pode aparecer em nenhuma fatoração de 15.400.

Mas, e algum outro fator, o 19, por exemplo? Poderia aparecer em alguma fatoração de 15.400? Também não, pois se aparecesse seria um divisor de 15.400, que é igual a 2x7.700. Logo 19 teria que dividir 7.700, que é igual a 2x3.850. Daí, 19 teria que dividir 3.850, que é igual a 2x1.925. Logo, teria que dividir 1.925, que é igual a 5x385. Então, como 19 não divide 5, teria que dividir 385, que é igual a 5x77. Pelas mesmas razões, teria que dividir 77, que é igual a 7x11, o que é impossível, porque tanto o 7 como o 11 são primos (e menores que 19). Podemos concluir, então, que nenhum fator diferente de 2, 5, 7 e 11 pode aparecer na fatoração em primos de 15.400, pois eliminaríamos tal possibilidade raciocinando do mesmo modo que fizemos para o 3 e para o 19.

Resta considerar a possibilidade de que exista uma fatoração de 15.400 em primos que não contenha 2 ou 5 ou 7 ou 11. Tomemos o 11, por exemplo. Como 11 divide 15.400 tem que dividir um dos fatores da outra fatoração, ou seja, tem que coincidir com esse fator (já que ambos são primos). Assim, tal fatoração diferente não existe.

Por fim, fica ainda a possibilidade de um dos fatores primos aparecer na fatoração de 15.400 com expoente diferente daquele em que esse mesmo primo aparece nesta nossa fatoração, obtida pelo algoritmo. Deixamos como um exercício para o leitor mostrar que isso também não pode acontecer.

Vemos, assim, que o algoritmo para encontrar *uma* decomposição em primos não pode, *a priori,* garantir a unicidade desta decomposição. Desse algoritmo resultam decomposições idênticas de um mesmo número, porque vale o fato básico mostrado na seção 5.1, não porque o algoritmo, por si, garanta a unicidade, como observamos na seção 2. No entanto, tal discussão parece ser ignorada nos processos de formação de professores de matemática e não é desenvolvida em nenhum dos vários livros universitários que examinamos. Acreditamos que isso acontece em função dos conflitos existentes entre os valores vigentes na prática universitária de ensino da matemática acadêmica e aqueles subjacentes às demandas de conhecimento matemático postas à prática docente na escola básica (MOREIRA; DAVID, 2008)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto foi pensado e escrito com o objetivo de contribuir para a reflexão sobre a formação de professores de matemática da Educação Básica e não necessariamente para uso como texto didático em salas de aula do sexto ano. Nesse sentido, contrastamos duas possibilidades de abordagem do tema, uma acadêmica e outra escolar, tendo como referência de fundo o processo de formação do professor e as demandas da prática docente efetiva na escola básica.

A ausência, na formação matemática do professor, de uma discussão do tema, com o foco na prática docente escolar, nos parece um fato no mínimo estranho, já que fica ignorada uma forma de conhecimento matemático diretamente vinculado a demandas claras da profissão, para o exercício da qual é concebido e se desenvolve o referido processo de formação.

Na verdade, acreditamos que os cursos de formação inicial deveriam ir além dessa discussão aqui apresentada, pois o professor que se interesse em trabalhar a unicidade da fatoração em primos com seus alunos do sexto ano, seguramente terá que desenvolver adaptações e rearranjos na forma de argumentação aqui exposta, de modo a tornar os argumentos utilizados nas seções 5.1, 5.3 e 5.4 acessíveis a cada uma de suas turmas. Diferentes alternativas e orientações gerais para a concepção de tais adaptações poderiam ser discutidas, por exemplo, ao longo da elaboração de um conjunto adequado de atividades de sala de aula, visando antecipar algumas das reflexões pertinentes a respeito das ideias essenciais contidas nos argumentos a serem trabalhados. Embora a elaboração dessas atividades, neste caso específico, possa não ser uma tarefa difícil para um profissional experiente, talvez o seja para o professor iniciante, caso não se desenvolva uma discussão adequada no processo de formação inicial. Enfim, em termos gerais, é preciso ter claro que tais adaptações demandam a identificação e mobilização de um conjunto relativamente amplo de conhecimentos matemáticos específicos para o ensino do tópico no sexto ano da Educação Básica e que tais conhecimentos não brotam espontaneamente (e necessariamente) do simples exercício da prática.

REFERÊNCIAS

AVRITZER, D.; BUENO, H. P.; FARIA, M. C.; FERNANDES, A. M. V.; FERREIRA, M. C. C.; SOARES, E. F. **Fundamentos de Álgebra**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p.389-407, 2008.

BERTONE, A. M. A. **Introdução à Teoria dos Números**. Uberlândia: UFU, 2014.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, sem data. Disponível em:

https://kupdf.net/download/elementos-de-aritm-eacute-tica-abramo-hefez_58fa44dfdc0d608c50959eea_pdf

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números**: uma introdução à matemática (3ª ed.) São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2016 (2ª edição).

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in the school teaching practice: some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v.11, n.1, p.23–40, 2008. DOI 10.1007/s10857-007-9057-5.

VIEIRA, A. C. **Fundamentos de Álgebra I**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012.

SANTOS, J. P.O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

Submetido em julho de 2020.
Aprovado em agosto de 2020.