
Uma breve introdução ao Conjunto de Cantor

Elder Cesar de Almeida

elderufop@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Thiago Fontes Santos

santostf@iceb.ufop.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Neste trabalho falaremos sobre o interessante conjunto de Cantor, que desperta a curiosidade de muitos por seu modo de construção. Veremos também algumas propriedades e suas demonstrações, tais como é não vazio, não contém intervalo, é perfeito, é desconexo, é não enumerável e tem um vínculo intrínseco na base ternária. Dentre esses e outros assuntos teremos também exemplos para que o leitor entenda de forma clara o conteúdo desta apresentação.

Palavras-chave

Cantor, Análise, Base Ternária.

1 Introdução

George Cantor (1845-1918) foi o criador da teoria dos conjuntos, que foi uma grande contribuição para matemática moderna. Seu trabalho tinha o foco de entender as diferentes maneiras da infinitude dos conjuntos. Um de seus trabalhos é o conjunto que iremos abordar, que doravante denotaremos por \mathcal{C} .

Considere o intervalo $I_0 = [0, 1]$, dividiremos este intervalo em três partes iguais e na sequência removeremos o terço médio aberto. Os conjuntos que restam são dois intervalos fechados, a saber, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Denotaremos por I_1 a união destes intervalos. Note que o comprimento de cada intervalo de I_1 é $\frac{1}{3}$ e $I_1 \subset I_0$.

A seguir, dividiremos cada intervalo que compõe I_1 em três partes iguais e removeremos o terço médio aberto de cada um deles. Agora restaram quatro intervalos fechados, que denotaremos por I_2 a união destes intervalos, ou seja,

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Observe que cada intervalo que compõe I_2 tem comprimento $\frac{1}{3^2}$ e $I_2 \subset I_1$

Repetindo esse processo sucessivamente, obteremos intervalos I_n que são união de 2^n intervalos fechados, onde cada um deles tem comprimento $\frac{1}{3^n}$. Além disso temos que $I_{n+1} \subset I_n \forall n \in \mathbb{N}$. A figura (1) ilustra alguns passos que fizemos acima.

Definição 1. O conjunto de Cantor \mathcal{C} é a interseção infinita dos intervalos $I_n, n \in \mathbb{N}$ que foram obtidos acima, ou seja,

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

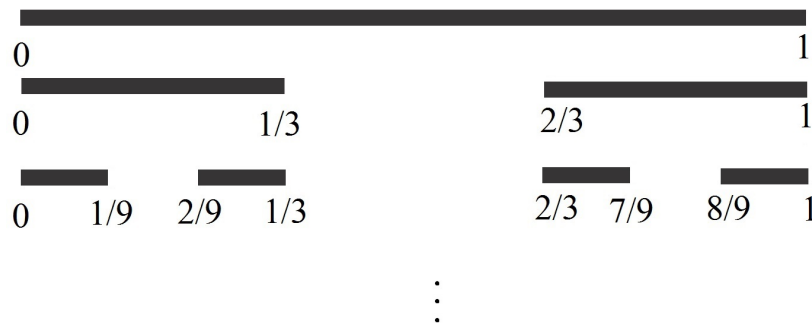


Figura 1: Construção do Conjunto de Cantor

2 Algumas propriedades de \mathcal{C} .

A próxima proposição trata de mostrar que dentro do conjunto de cantor (\mathcal{C}) existem pontos chamados pontos de fronteira, nos informando que o Conjunto é não vazio.

Proposição 1. O Conjunto \mathcal{C} é não vazio.

Demonstração. Com efeito, observe que cada I_n é um intervalo fechado pois é uma união finita de intervalos fechados não vazios. Como $I_{n+1} \subset I_n \subset [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, usando o teorema dos intervalos encaixados(Cf. [2, 1]) , podemos

afirmar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Esta interseção infinita é justamente o conjunto \mathcal{C} definido acima. □

A próxima proposição nos mostra que não existem intervalos dentro do conjunto de Cantor através do conceito aplicado pela propriedade arquimediana, ou seja \mathcal{C} é totalmente desconexo.

Proposição 2. *O Conjunto \mathcal{C} não contém intervalos.*

Demonstração. Seja $I = (a, b) \subseteq [0, 1]$, assumamos $b > a$. Considere o seguinte conjunto :

$$M = \{n \in \mathbb{N} : -\log_3(b - a) < n\}.$$

Vamos mostrar que $M \neq \emptyset$. Note que, como $I \subset [0, 1]$ então $b - a < 1$. Daí, $-\log_3(b - a) > 0$ e assim pela propriedade arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $-\log_3(b - a) < m$ portanto $M \neq \emptyset$.

Pelo princípio da boa ordenação (Cf.[2]) M possui um elemento mínimo, ou seja, $\exists k \in M$ tal que $k \leq x, \forall x \in M$. Deste modo, temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} -\log_3(b - a) &< k \\ \log_3(b - a) &> -k \\ b - a &> 3^{-k} \end{aligned}$$

Mas I_k é a união de intervalos de $[0, 1]$ com comprimento $\frac{1}{3^k}$, logo $I \not\subseteq I_k$ e portanto $I \not\subseteq \mathcal{C}$. □

Na próxima proposição mostraremos que \mathcal{C} é perfeito ou seja, dados $p \in \mathcal{C}$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, toda vizinhança aberta $V_\epsilon(p)$ contém pontos de \mathcal{C} diferente de p .

Proposição 3. *O Conjunto \mathcal{C} é perfeito.*

Demonstração. Fixe qualquer $\epsilon > 0$ e um ponto $p \in \mathcal{C}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$. Então p é garantido em um dos intervalos I_n , para algum $n \in \mathbb{N}$, que compõe \mathcal{C} , de tamanho $\frac{1}{3^n}$. Existem infinitos pontos de fronteira do conjunto \mathcal{C} contidos neste intervalo e além disso estão todos contidos no intervalo aberto $(p - \epsilon, p + \epsilon)$. Assim, p é um ponto de acumulação do conjunto \mathcal{C} . Como estamos considerando qualquer ponto $p \in \mathcal{C}$ então \mathcal{C} é perfeito. □

3 Descrição na base Ternária

Dado um $x \in [0, 1]$, sempre podemos reescrevê-lo da seguinte maneira na base ternária:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

onde $a_n \in \{0, 1, 2\}$.

A representação na base ternária é considerada útil para descrever os elementos do conjunto de Cantor. A construção clássica \mathcal{C} é via triseção dos intervalos envolvidos e posterior remoção dos terços médios abertos. Em cada etapa dividiremos os intervalos em três partes iguais, e a seguir faremos um vínculo com os símbolos da base 3:

- representaremos com 0 os elementos que ficam no terço esquerdo da triseção.
- representaremos com 1 os elementos que ficam no terço médio da triseção.
- representaremos com 2 os elementos que ficam no terço direito da triseção.

Vamos verificar que a representação estabelecida acima faz sentido para a triseção de $[0, 1]$, os demais passos seguem o mesmo processo.

Lema 1. *Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in [0, 1]$. Então:*

1. *Se $a_1 = 0$ então $x \in [0, \frac{1}{3}]$.*
2. *Se $a_1 = 1$ então $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.*
3. *Se $a_1 = 2$ então $x \in [\frac{2}{3}, 1]$.*

Demonstração. Provaremos o item 1. Com efeito, como $a_1 = 0$ e $a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \\
 &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\
 &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= 2 \left(\frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

A prova dos demais itens é feita de maneira inteiramente análoga. □

Pela representação feita acima, vemos que os elementos de \mathcal{C} são os pontos de $[0, 1]$ cuja a expansão na base 3 tem símbolos 0 ou 2, com exceção dos pontos de fronteira que têm dupla representação uma delas contendo o dígito 1, por exemplo $1/3 = (0, 10000\dots)_3 = (0, 02222\dots)_3$.

Exemplo 1. $1/4 \in \mathcal{C}$.

De fato, a representação de $\frac{1}{4}$ na base 3 é $(0, 0202\dots)_3$ sendo assim, $\frac{1}{4} \in \mathcal{C}$. Além disso $1/4$ não é ponto de fronteira de Cantor.

Proposição 4. *O Conjunto \mathcal{C} é não enumerável.*

Demonstração. Definiremos uma função $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ como segue:

$$\varphi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n/2)}{2^n}$$

Iremos mostrar que φ é sobrejetiva. Dado $y \in [0, 1]$, podemos escrevê-lo da forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, sua representação na base 2 (onde $a_n \in [0, 1]$). Tomemos,

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$. Observe que $x \in \mathcal{C}$, pois $b_n = 2a_n \in \{0, 2\}$. Além disso

$$\varphi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{2^n} = y.$$

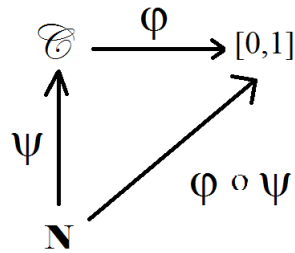


Figura 2: Composição das funções, com φ e ψ sobrejetivas e $\varphi \circ \psi$.

Portanto φ é a sobrejeção de \mathcal{C} em $[0, 1]$.

Se \mathcal{C} fosse enumerável então existiria uma sobrejeção de $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ de modo que $\varphi \circ \psi$ é uma sobrejeção de \mathbb{N} em $[0, 1]$, uma contradição. Logo \mathcal{C} é não enumerável. \square

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me proporcionar uma oportunidade de realizar uma etapa muito importante na minha carreira acadêmica, à Pró-Reitoria de Graduação da UFOP e ao PET Matemática pelo apoio e incentivo para a realização deste trabalho, ao meu tutor e orientador Thiago Fontes Santos e aos meus colegas Petianos.

Referências

- [1] Robert G. Bartle. *Introduction to Real Analysis*. Eastern Michigan University, Ypsilanti, 2000.
- [2] Elon Lages Lima. *Análise Real*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [3] Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2004.