ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS COM O GEOGEBRA 3D

Márcio Antônio Cometti

Frederico da Silva Reis

Edson Crisostomo dos Santos

AS COM O GEOGEBRA 3D

Atividades Exploratórias de Integrais Múltiplas com o Geogebra 3D

EDITORA UFOP

Ouro Preto | 2018

© 2018

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitora da UFOP | Profa. Dra. Cláudia Aparecida Marliére de Lima
Vice-Reitor | Prof. Hermínio Arias Nalini Júnior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS
Drietor | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva
Vice-Drietor | Prof. Dr. Rodrigo Fernando Bianchi

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Prof. Dr. Sérgio Francisco de Aquino
Drietora-Adjunto | Profa. Dra. Vanessa Carla Furtado Mosqueira

Coordenação | Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu

MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira
Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes
Prof. Dr. Daniel Clark Orey
Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos
Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Prof. Dr. Milton Rosa
Prof. Dr. Plinio Cavalcanti Moreira

C734a Cometti, Márcio Antônio.
Atividades exploratórias de integrais múltiplas com o GeoGebra 3D [manuscrito] / Márcio Antônio Cometti. - 2018.
68f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.
Coorientador: Prof. Dr. Edson dos Santos Crisostomo.

Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Variáveis (Matemática). 2. Integrais Múltiplas. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Reis, Frederico da Silva. II. Crisostomo, Edson dos Santos. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 51:378

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

O que é matematicamente essencial em uma representação semiótica são as transformações que se podem fazer, e não a própria representação (RAYMOND DUVAL)

Expediente Técnico

Organização | Márcio Antônio Cometti | Frederico da Silva Reis

Pesquisa e Redação | Márcio Antônio Cometti

Revisão | Márcio Antônio Cometti | Frederico da Silva Reis

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Ilustração | Márcio Antônio Cometti

Ao Professor de Cálculo de Várias Variáveis

Caro(a) colega Professor(a) de Cálculo,

Este material contém uma sugestão de atividades exploratórias utilizando o *software* GeoGebra 3D para o ensino de Integrais Múltiplas em disciplinas de Cálculo de Várias Variáveis.

Ele se constitui num Produto Educacional gerado a partir de nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática, dentro do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada "Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem", sob a orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis e co-orientação do Prof. Dr. Edson Crisostomo dos Santos.

As atividades exploratórias aqui apresentadas foram aplicadas e avaliadas por estudantes de Engenharia Elétrica de uma universidade particular no estado de Minas Gerais, matriculados na disciplina Cálculo III, ministrada pelo autor deste produto educacional.

Nosso objetivo aqui é oferecer a você, Professor de Cálculo de Várias Variáveis, um material que apresenta atividades de exploração e conjecturação relacionadas aos conceitos de Superfícies Quádricas, Integrais Duplas e Integrais Triplas. Tais atividades utilizam as Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática – TICEM como uma possibilidade metodológica riquíssima para a construção dos conceitos trabalhados tradicionalmente na sala de aula.

Inicialmente, apresentamos uma breve discussão sobre o papel da visualização proporcionada pelos *software*s na aprendizagem do Cálculo. A seguir, apresentamos 3 (três) Atividades Exploratórias relacionadas a Integrais Múltiplas que podem ser implementadas utilizando o GeoGebra 3D ou outros *software*s gráficos.

Esperamos que esse produto possa contribuir para sua prática pedagógica de Cálculo de Várias Variáveis e para motivar a utilização das TICEM nos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo.

Prof. Ms. Márcio Antonio Cometti

Índice

1. Uma breve história do Cálculo

Para realizar um estudo completo sobre as origens e desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, necessitaríamos de uma pesquisa muito extensa, o que fugiria do nosso propósito deste projeto. Dessa forma, vamos descrever sucintamente as origens e desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral para situarmos o projeto em desenvolvimento.

O século XVII foi marcado por enormes avanços da Matemática, mas o que ganhou maior destaque, aconteceu na sua segunda metade. Foi a descoberta / criação do Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo infinitesimal, por Issac Newton e Gottfried Wilhem Leibniz, de maneira independente um do outro.

As origens do Cálculo remontam a mais de dois mil anos, bem antes dos estudos realizados por Newton e Leibniz. Entre a Grécia Antiga e os meados do século XVII, muita Matemática foi desenvolvida na busca de respostas. Foi diante de problemas de quadraduras que surgiram os primeiros vestígios da história do Cálculo. Os antigos geômetras buscavam encontrar a medida das áreas de figuras planas, relacionando-as com áreas de quadrados, por serem figuras mais simples de manipular. Por volta de 430 aC, Antífon na tentativa de encontrar a quadratura do círculo, utilizou uma sequência finita de polígonos regulares inscritos (iniciando com um quadrado, octógono, etc), dando origem ao chamado "método da exaustão", inicialmente creditado a Eudoxo (370 aC) mas que, posteriormente, ficou conhecido como método de Arquimedes, como afirma Boyer (2003):

> Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem fortaleceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método da exaustão, o equivalente grego de cálculo integral. [...] Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura, o que parece que o método da Exaustão vem de Eudoxo (BOYER, 2003, p.61).

Os trabalhos de Arquimedes chegaram por volta de 1540 na Europa Ocidental, através de uma cópia feita no século IX, achada em Constantinopla. Com essa tradução disponível e com contribuições de outros matemáticos, o Cálculo Diferencial e Integral se desenvolveu.

Dessa forma, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral não pode ser considerado um acontecimento isolado, pois muitos matemáticos deram sua contribuição. Grande (2013, p.113), diante dessa perspectiva, ressalta em sua fala que o Cálculo não foi "atribuído a apenas uma pessoa, mas o resultado de estudos, métodos e teoremas que foram ao longo do tempo se aperfeiçoando e trazendo contribuições significativas".

Eves (2004) pontua que foi a partir do século XVII que a Matemática Elementar deu lugar à Matemática Superior e as suas implicações possibilitaram grandes desenvolvimento em outras áreas da Matemática. Antes, os matemáticos ficavam presos a questões de contar, medir e descrever formas e, a partir desse momento, podiam se aventurar em uma Matemática cada vez mais dinâmica. Na realidade, o grande feito de Newton e Leibniz foi elucidar que a Matemática, além de lidar com grandezas, é capaz de lidar com variações das mesmas.

É importante ressaltarmos que o desenvolvimento do Cálculo se deu em ordem inversa à aquela que estamos acostumados no meio acadêmico: o Cálculo Integral veio bem antes do Cálculo Diferencial, como destaca Eves (2004):

> A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2004, p.417).

A Física inicialmente se apoderou dos desenvolvimentos do Cálculo, pois grande parte dos matemáticos desse período também eram físicos. Mas, à medida que se entendeu o enorme poder do Cálculo, vários matemáticos começaram a dar suas contribuições para seu aprimoramento. Muitos problemas que antes aparentemente não apresentavam solução, tornaram-se possíveis de serem resolvidos.

Contudo, com o passar do tempo, o Cálculo Diferencial e Integral passou a ser disciplina obrigatória em diversas universidades ao redor do mundo. Segundo Eves (2004, p.417), os conceitos principais do Cálculo "têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que, talvez seja correto dizer que, sem algum conhecimento deles, dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta".

2. A questão das dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo

As disciplinas de Cálculo estão presentes em diversos cursos superiores. Muitas vezes, elas demonstram ser uma pedra no sapato de muitos estudantes que ingressam nessa modalidade de ensino, como por exemplo, nos cursos de Matemática, Engenharias e demais cursos que possuem essas disciplinas em suas grades curriculares. Lachini (2001) confirma esse fato, ainda que considere o Cálculo como a linguagem do paradigma científico e como instrumento primordial de pensamento para as mais variadas áreas do conhecimento, sendo dessa forma colocado como matéria de grande importância e obrigatória em variados cursos de graduação.

Esse status de importância que as disciplinas de Cálculo possuem dentro dos cursos onde estão inseridas, condiciona muitas vezes certo temor por parte dos estudantes, pois são essas disciplinas que irão dar a eles, as ferramentas necessárias para seu desenvolvimento durante o desenrolar do curso. Dessa forma, podemos citar dois objetivos principais nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo: "habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade; [...] estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do Cálculo como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas" (LACHINI, 2001, p.147).

Recorrentemente, diversos autores (BARUFI, 1999; LACHINI, 2001; REZENDE, 2003; NASSER, 2007; LAUDARES, 2007; REIS, 2009; BARBOSA, 2009; IGLIORI, 2009) da comunidade da Educação Matemática no Ensino Superior têm se mostrados preocupados com os problemas de ensino e aprendizagem nas disciplinas de Cálculo; e muito se têm pensado e discutido sobre esse objeto de estudo, a partir de várias perspectivas teóricas, gerando contribuições significativas para tentar sanar tais problemas. Essa preocupação se justifica segundo Igliori (2009, p.13), "pelo fato do Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quando pela sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática".

Os índices de reprovação e evasão dos estudantes matriculados nas disciplinas de Cálculo são enormes, nos cursos em que elas estão presentes, tanto em universidades privadas como públicas. Barufi (1999) e Rezende (2003) são pesquisadores que se preocuparam com o baixo aproveitamento dos estudantes nas disciplinas de Cálculo, mas apontam que não é um problema somente das Instituições de Ensino Superior do Brasil. Essa perspectiva tal qual o Cálculo é colocada, leva-nos a pensar no que acarreta tal insucesso dos estudantes nessa disciplina; e indo um pouco mais além, remete-nos a pensar também o que fazer para acabar ou atenuar as dificuldades existentes nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo.

Um movimento intitulado *Calculus Reform*, na década de 1980, mostrou uma preocupação mundial com o fracasso em Cálculo e também com a dificuldade de fazer com que os estudantes compreendam os procedimentos e conceitos dessa disciplina. Esse movimento procurou reformar o ensino de Cálculo, principalmente em direção ao uso de tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem:

> Uma das características básicas desse movimento é o uso da tecnologia, aqui entendida como programas computacionais específicos e calculadora gráfica, tanto para o aprendizado de conceitos quanto para resoluções de problemas. Todas as atividades são baseadas na chamada "Regra dos Três", isto é, todos os problemas devem ser abordados numericamente, geometricamente e analiticamente, estimulando a interlocução das várias representações matemáticas (LUZ, 2011, p.7).

Dessa maneira, muitos pesquisadores buscaram entender o insucesso dos estudantes em Cálculo. As causas levantadas são as mais variadas possíveis. Segundo Fonseca (2012):

> É fato que, apesar da reconhecida importância da disciplina de Cálculo nos currículos, muitos são os problemas com o seu ensino: aulas extremamente expositivas e formais; apresentação de uma Matemática pronta, levando os alunos à memorização de fórmulas; resolução de múltiplos exercícios, resultando em um processo mecânico de aprendizagem; alunos com defasagem na aprendizagem dos ensinos fundamental e médio, comprometendo a habilidade de abstração; dificuldade de operações com o infinito; pouco entendimento do conceito de limite e de convergência (FONSECA, 2012, p.43).

Esses problemas levantados pela pesquisadora são comumente identificados por professores de Cálculo dentro da sala de aula e também por outros pesquisadores em seus relatos de pesquisas. Frota (2006, p.2) relata ainda que "a sala de aula de Cálculo tem sido afetada por fatores decorrentes, em parte, de um ensino universitário de massa: excessivo número de alunos, grande parte desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica".

Levantamos até o momento problemas apenas relacionados ao perfil dos alunos, mas não podemos deixar de descartar outros condicionantes que agravam tal situação, como "a forma tradicional de ministrar a disciplina até a falta de motivação por parte de professores" (CATAPANI, 2009, p.49). Podemos ainda destacar Rezende (2003) que aponta um conflito pedagógico existente entre o que o professor pede para o aluno e o que o professor de fato faz em sala de aula: "Se nas aulas propriamente ditas o que prevalece são as demonstrações, nas avaliações o que se pede em geral é a técnica, os cálculos de limites, de derivadas, de antiderivadas e integrais" (REZENDE, 2003, p.13).

Oportunamente, Reis (2001) defende que muitas dificuldades na disciplina de Cálculo estão relacionadas à prática pedagógica, a qual é um ponto crucial e que deve ser levado em consideração. Muitos professores abordam o conteúdo dessa disciplina praticamente de forma igual em diferentes cursos, não levando em conta os anseios profissionais dos estudantes:

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver (REIS, 2001, p.23).

Diante desses inúmeros problemas relatados, é evidente que alternativas para saná-los também são apontadas por diversos autores que, como já dissemos, mostram-se preocupados com a problemática que se apresenta no âmbito do Ensino Superior. Rocha (2010, p.31) identificou algumas possibilidades de contribuições para o ensino de Cálculo, tais como: "a modelagem matemática, o uso da história e a informática como algumas dessas perspectivas / possibilidades de abordagem do Cálculo. Alertam também, para as rotinas das aulas e a relação professor-aluno como pontos que precisam ser revistos para a efetivação da proposta".

Dentre essas alternativas propostas, uma tendência que vem ganhado força e apresentando inúmeras contribuições significativas para os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de Cálculo, é o uso das tecnologias. Cada vez mais se tem discutido as práticas de ensino voltadas para o uso de tecnologias para auxiliar a aprendizagem.

3. A questão do uso de Tecnologias no Ensino de Cálculo

É evidente que a sociedade na qual estamos inseridos está cada dia mais dependente dos recursos tecnológicos. Dessa forma, é inevitável que a Educação sofra a influência desses recursos. Silva (2010, p.267) aponta que as mais variadas formas de tecnologias destinadas à informação e à comunicação são um ponto importante de transformação, "fazendo com que sejam alteradas as mais diversas culturas sociais, as maneiras de viver de cada um, relacionamentos, aprendizagem e principalmente o ato de ensinar".

Diante desse fato, cada vez mais se tem observado inúmeras pesquisas envolvendo as Tecnologias de Informação e Comunicação especificamente em Educação Matemática. São as chamadas TICEM – Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação Matemática. A tendência é que as essas tecnologias se tornem uma realidade no meio escolar. Villarreal (1999) explicita que, diante da necessidade de novas atividades, a introdução de tecnologias no meio escolar é evidente; e, consequentemente, a constante evolução e crescimento dessas ferramentas tecnológicas possibilitam aos professores, novas perspectivas de ensino. Marim (2011) destaca que:

> A capacidade técnica das máquinas possibilita planejar atividades de ensino antes impensáveis com o uso de lousa e giz. Para o ensino de Matemática, por exemplo, há vários *softwares* que permitem explorar os conceitos de Matemática de uma forma mais dinâmica e detalhada (MARIN, 2011, p.527).

Por outro lado, Zhuchi (2009) destaca que essa integração das TICEM com o ambiente escolar não é um trabalho fácil, apontando a complexidade dessa interação, principalmente em encontrar e organizar sequências didáticas que auxiliem o professor em sala de aula, diante da constante modernização desses recursos.

Nas disciplinas específicas de Cálculo, essas tecnologias disponíveis podem se tornar ferramentas potencializadoras nos processos de ensino e aprendizagem. Cunha (2014, p.55) relata que "o uso da tecnologia no ensino de Cálculo amplia as possibilidades de trabalhar atividades por diferentes representações, tais como tabelas, gráficos, expressões algébricas de forma rápida e articulada". Dessa forma, a presença de tecnologias oferece a oportunidade de observar processos de construção de conhecimento que não são vistos em outros ambientes de aprendizagem (VILLAREAL, 1999). Ainda se observa que muitas questões são levantadas pela comunidade de Educação Matemática quanto à sua utilização: Como essas tecnologias podem contribuir de forma positiva para o ensino e a aprendizagem de Matemática? E especificamente para o ensino de Cálculo? Como deve ser a utilização desses recursos? Qual é o melhor caminho pedagógico para utilizar essas ferramentas?

Essas questões fomentam inúmeros debates no meio acadêmico. Recorrentemente, muitas opiniões são apresentadas sobre o uso desses recursos tecnológicos em prol de uma aprendizagem realmente significativa. Dessas discussões, observa-se que cabe a comunidade acadêmica repensar suas práticas de ensino, incorporando esses instrumentos tecnológicos, mirando o professor como alvo central para uma mudança de atitude perante as TICEM e fazendo com que essas sejam parte integrante dos processos de ensino e aprendizagem.

Os *softwares* disponíveis para auxiliar o ensino de Cálculo despertam interesses tanto de professores quanto de alunos, pois são objetos de ensino que potencialmente podem romper a barreira existente entre as práticas tradicionais de ensinar Cálculo e o uso da tecnologia. Observa-se que esses recursos tecnológicos objetivam investigar e construir conceitos, fazer Matemática e, principalmente, compreender as soluções numéricas. Ricaldoni (2014) levanta aspectos importantes em relação ao uso de *softwares* e a prática do professor:

> O computador, em particular, deve ser utilizado como uma ferramenta na construção do conhecimento matemático, um facilitador no entendimento e construção de conceitos. Então, cabe ao professor, a sua própria formação na área e, certamente, o desenvolvimento de novas habilidades, além do conhecimento de *softwares* que possibilitem uma boa utilização das TICEM (RICALDONI, 2014, p.45).

Assim, acredita-se que as tecnologias disponíveis, principalmente para o ensino de Cálculo, ajudam na transformação do modo de pensar, pois reorganizam os processos de ensino e aprendizagem. Os estudantes, quando direcionados de maneira correta diante do uso de tecnologias em práticas educativas, atuam de forma consistente, possibilitando novos desafios cognitivos estabelecidos por processos de investigação. Borba e Penteado (2012) destacam:

> Os computadores [...] reorganizam o pensamento. A visão de pensamento aqui adotada inclui a formulação e resolução de problemas e o julgamento de valor de como se usa um dado conhecimento. Entendemos que não há apenas uma justaposição de técnica e seres humanos, como se a primeira apenas se

juntasse aos últimos. Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra (BORBA e PENTEADO, 2012, p.49).

Os *softwares* disponíveis para utilização nas disciplinas de Cálculo são muitos e cada um possibilita atingir objetivos variados nos processos de ensino e aprendizagem. Um deles é o GeoGebra, sobre o qual discutiremos suas potencialidades a seguir.

O GeoGebra é um *software* gratuito, com premiações internacionais pela sua contribuição no estudo da Matemática. Criado pelo Prof. Dr. Markus Hohenwarter da *Florida Atlantic University*, em 2001, o GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica para ser utilizado em escolas de Educação Básica e no Ensino Superior, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Segundo Hohenwarter (2007), idealizador do software, "a característica mais destacável do GeoGebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na zona de gráficos e vice-versa".

Especificamente em disciplinas de Cálculo, o GeoGebra tem sido objeto de muitas pesquisas em vários conteúdos. Podemos verificar esse fato em pesquisas envolvendo Limites e Continuidades (ROCHA, 2010; ALVES, 2010; MOURA, 2014), Séries e Sequências (FONSECA, 2012), Derivadas (GONÇALVES, 2012; GRANDE, 2013; PINTO, 2014; CUNHA, 2014; MARTINS JUNIOR, 2014; RICALDONI, 2014; ALVES, 2014; LOPES, 2015), Integrais (VOGADO, 2014; NASSARELA, 2014; REIS, 2015; BEZERRA, 2015).

Assim, o GeoGebra 3D se credencia como uma ferramenta tecnológica com enormes potencialidades para os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo.

Assim, em nossa pesquisa (COMETTI, 2018), assumimos como hipótese de trabalho que a utilização de *softwares* matemáticos pode contribuir para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a partir da visualização de regiões de integração, de superfícies e de sólidos relacionados a Integrais Múltiplas e buscamos identificar e analisar as possíveis contribuições de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis.

4. A questão da visualização proporcionada pelas TICEM no ensino de Cálculo de Várias Variáveis

As TICEM, principalmente o uso de *softwares* no ensino de Cálculo em geral, têm proporcionado inúmeros aspectos benéficos nos processos de ensino e aprendizagem. A visualização talvez seja um aspecto de grande relevância e, por isso, achamos importante tecer algumas considerações e discutir tal assunto ao abordar o ensino de Cálculo de Várias Variáveis. Outro fato que nos propulsiona é a constante evidência da visualização na literatura existente sobre o ensino de Cálculo.

O conceito de visualização abrange várias áreas do conhecimento, como por exemplo a Psicologia, a Pedagogia e a Matemática. Com essa perspectiva, podemos definir visualização de uma maneira mais abrangente, segundo Flores et al (2012, p.32) como "habilidades visuais que os indivíduos possuem e podem desenvolver para interpretar imagens".

No campo da Educação Matemática, o conceito de visualização só começou a ser explorado por volta dos anos 1990. Presmeg (2006) aponta que a ênfase no meio social e cultural e as ideias construtivistas incorporadas na Educação deram importância aos aspectos visuais, levando ao reconhecimento das suas manifestações e transformações diante dos conhecimentos matemáticos. Dessa forma, Flores et al (2012) afirmam que:

> [...] somente nos anos 1990, com o reconhecimento da visualização na Educação Matemática, as pesquisas passam a problematizar aspectos antes não considerados, tais como, o desenvolvimento curricular; a eficácia da visualização para a aprendizagem matemática; a imagem e a representação (FLORES et al, 2012, p.36).

Assim, podemos definir visualização dentro do campo da Educação Matemática, de acordo com Presmeg (1986), como sendo um processo de construção e transformação de imagens mentais ou qualquer tipo de apontamento de natureza espacial, ambos usados na Matemática. Flores (2012) apresenta uma definição que vai ao encontro das ideias de Presmeg, definindo visualização como a capacidade do indivíduo para lidar com aspectos visuais para que o entendimento matemático seja alcançado.

O interesse pelos conceitos ligados à visualização para a construção do conhecimento matemático ultrapassou a margem do simples entendimento e atingiu o campo dos processos de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, muitas pesquisas ligadas à Educação Matemática, apoiadas aos conceitos de visualização, surgiram nos últimos anos. Uma linha que nos interessa nessa discussão está relacionada ao uso de tecnologias e *softwares* aliada aos processos de visualização.

Alguns autores (NEMIROWSKY & NOBLE, 1997; BORBA & VILLAREAL, 2005) defendem que esses recursos digitais possuem papel fundamental nesse contexto de visualização e, consequentemente, contribuem amplamente para o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos.

Arcavi (2003) apresenta uma definição para a visualização que abrange aspectos desse contexto. O autor aponta o uso de tecnologias como uma possibilidade de potencialização do processo de visualização:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados[1] (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

O Cálculo de Várias Variáveis é um conteúdo que se apoia demasiadamente em estruturas gráficas, geralmente no sistema tridimensional, para apresentar conceitos importantes relativos à sua natureza. Já dissemos em outros momentos e voltamos a frisar que, caminhar por essas representações gráficas nem sempre é

[1] Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

tarefa fácil para o professor e muito menos para o aluno. A utilização de recursos computacionais para os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos do Cálculo de Várias Variáveis, principalmente os *softwares* de maneira exploratória, são ferramentas que possibilitam um rápido *feedback* quanto se tratam de aspectos relativos à visualização (BORBA & VILLARREAL, 2005).

É claro que as representações gráficas podem ser feitas à mão, desde que se tenha habilidades necessárias, utilizando lápis e papel, mas a capacidade que os *softwares* possuem para agilizar e fornecer componentes visuais são muito maiores. Esse fato possibilita alcançar uma nova dimensão para os processos de ensino e aprendizagem, alavancando os softwares como um objeto de aprendizagem importante. (BORBA, 2010, p.3) argumenta que "é possível dizer que o *software* torna-se ator no processo de fazer Matemática". Dessa forma, muitas possibilidades podem ser criadas a partir desses recursos tecnológicos que enfatizam os processos de visualização:

- Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
- Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas. Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.
- Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança [...] (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.96).

Mesmo nas concepções iniciais do Cálculo, como por exemplo, conceitos de funções, limites, continuidades e outros conceitos relacionados, a visualização se mostra de suma importância, destacando-se como um componente crucial para o desenvolvimento dessas ideias (TALL, 1991). Dessa forma, não seria diferente para os conceitos do Cálculo de Várias Variáveis. É nítido que a utilização de *softwares* pode melhorar e agilizar as representações gráficas existentes no Cálculo de Várias

Variáveis, o que pode proporcionar ganhos consideráveis. Villarreal (1999) enfatiza a importância do uso dos computadores como um fator que privilegia os aspectos visuais relativos aos conceitos do Cálculo:

> Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador comum nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLARREAL, 1999, p.43).

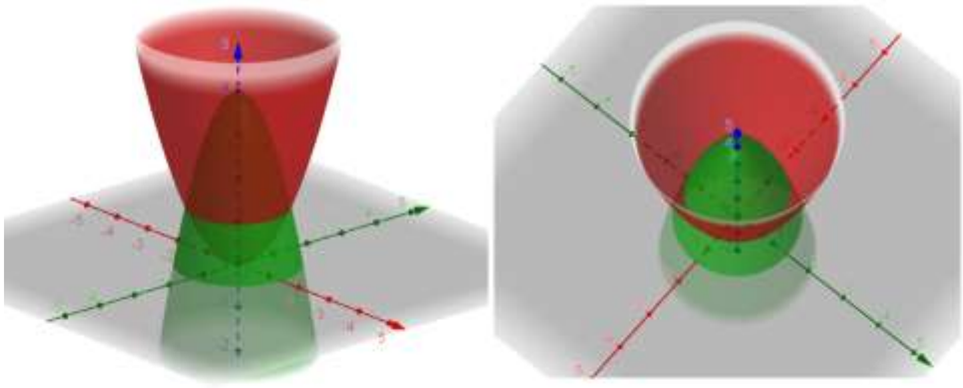
Podemos, de maneira conveniente, explorar um exemplo específico dentro do Cálculo de Várias Variáveis, o caso das Integrais Múltiplas. Quando estamos abordando questões que envolvem esse tipo de integral, tanto em integrais duplas quanto em integrais triplas, a questão da visualização é primordial. Problemas envolvendo cálculos de áreas, de volumes, centro de massa e outros, requerem o uso desses tipos de integrais. Assim, o uso de representações geométricas se faz necessário para o seu desenvolvimento, no que se refere às chamadas regiões de integração. Essas regiões nem sempre são tão simples de se esboçar e a utilização de recursos computacionais se apresenta como uma boa solução, já que a questão da visualização e, consequentemente, interpretação dessas regiões são o ponto principal no que tange às Integrais Múltiplas. Alves (2011) salienta que o uso de recursos como *softwares* podem permitir um controle sobre as variáveis visuais na interpretação geral das propriedades geométricas.

Sem dúvida, o uso de softwares potencializa a capacidade de visualização. Podemos observar esse fato no seguinte exemplo:

- Calcular o volume do sólido limitado pelos paraboloides $x^2 + y^2 = z$ e $-2x^2 - 2y^2 + 4 = z$ usando integrais triplas.

Podemos visualizar o sólido limitado e a região de integração a partir das superfícies dadas utilizando-se o *software* GeoGebra 3D, como vemos na figura a seguir:

Figura 1 – Região de integração



Fonte: Dados do pesquisador.

A construção da região de integração acima com o auxílio do *software* GeoGebra evidencia como os aspectos visuais facilitam a construção da integral tripla para o cálculo do volume do sólido compreendido entre os paraboloides. Notamos também que essa região de integração não é tão fácil de ser esboçada com os recursos que temos a nossa disposição costumeiramente, como papel e lápis. O *software* proporcionou o esboço de forma simples e com a possibilidade de mover a região no espaço tridimensional, explorando a visualização do objeto em várias posições diferentes. Segundo Borba (2010, p.4) tudo isso leva os estudantes a "criarem conjecturas, a descoberta de resultados matemáticos desconhecidos, a possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados e a chance de proporcionar novos experimentos".

É claro que existem muitos aspectos ligados à Educação Matemática que estão presentes em um simples problema, como o levantado no exemplo dado acima. A questão da visualização e o uso de *softwares* são apenas a ponta do *iceberg* dos assuntos relativos aos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo.

5. As Atividades Exploratórias a partir de Sequências Didáticas

Dentro das perspectivas levantadas anteriormente, acreditamos no potencial didático-pedagógico das atividades exploratórias, ou seja, de atividades a partir de sequências didáticas envolvendo os conteúdos de Integrais Múltiplas. Embora as atividades tenham uma sequência e sejam guiadas, o termo exploratório remete à possibilidade de conjecturar situações matemáticas que podem apresentar processos de ensino e aprendizagem não convencionais.

Já as sequências didáticas, segundo Zaballa (1999), devem se apresentar estruturadas, organizadas e com uma ordem lógica a fim de articular conhecimentos para um determinado conteúdo:

> O conjunto ordenado de atividades estruturadas e articuladas para a consecução de um objetivo educacional em relação a um conteúdo concreto. Esta unidade de análise, como as sequências didáticas, está inserida num contexto em que se deverá identificar, além dos objetos didáticos e do conteúdo objeto da sequência, as outras variáveis metodológicas: relações interativas, organização social, materiais curriculares, etc (ZABALA, 1999, p. 78).

As sequencias didáticas são ferramentas que se mostram de grande importância para auxiliar o trabalho do professor. Elas permitem que os conhecimentos que se apresentam em fase de construção sejam muitas vezes consolidados quando abordados por sequências didáticas, pois a disposição organizacional das atividades privilegia uma progressão em fases, a partir do levantamento do conhecimento do que os alunos já possuem.

Para isso, o professor deve ter um domínio pedagógico do conteúdo aguçado e não somente um simples domínio do conteúdo, que obviamente, também não deixa de ser importante. O conhecimento desses dois aspectos pode levar o professor a perceber que uma lista de estratégia conecta os alunos a uma melhor compreensão do conteúdo e à construção do conhecimento (SCHULMAN, 1986).

Diante dessa perspectiva, as atividades caracterizadas como sequências didáticas visam buscar de forma ordenada e organizada articular conceitos dos Calculo de Várias Variáveis, como por exemplo, os gráficos de funções de uma e duas variáveis, para explorar o conteúdo de Integrais Múltiplas.

Utilizamos o software GeoGebra 3D para facilitar a construção e visualização desses gráficos gerados por tais funções. Durante o processo de exploração desse conteúdo através das sequencias didáticas podemos levar os participantes da pesquisa a fazer conjecturas, considerações, rever conceitos e propriedades. Para Zaballa (1988, p.20), "as sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir".

6. Apresentando as Atividades Exploratórias

A seguir, apresentamos as 3 (três) Atividades Exploratórias, elaboradas com os seguintes temas:

Atividade 1: **Construindo & Explorando as "Quádricas" no GeoGebra 3D**

Atividade 2: **Explorando e Construindo Integrais Duplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra**

Atividade 3. **Explorando e Construindo Integrais Triplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra**

6.1 ATIVIDADE 1: Construindo & Explorando as "Quadricas" no GeaGebra 3D

1.1. Construindo Paraboloides

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o Paraboloide, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

Sequência Didática:

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o Paraboloide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$ no GeoGebra. Digite no campo de entrada:

x^2/4+y^2/9=z

3) Vamos criar planos paralelos aos planos coordenados. Clique na janela 3D e no campo de entrada crie o plano $x = K$, $y = L$, $z = M$. Automaticamente, na janela 2D controles deslizantes serão criados. Clique em OK.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram suas interseções com o Paraboloide.

5) Use a ferramenta **Interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário, clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor na opção propriedades. Isso o deixará mais visível). Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente:

a) Interseções do Paraboloide com o plano $x = K$:________________________

b) Interseções do Paraboloide com o plano $y = L$: ________________________

c) Interseções do Paraboloide com o plano $z = M$: ________________________

1.2. Construindo Elipsoides

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o Elipsoide, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o Elipsoide $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2/16+y^2/4+z^2/25=1

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique na janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D controle deslizantes são criados. Clique em OK.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com o Elipsoide.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente.

a) Interseção do Elipsoide com o plano $x = D$:______________________________

b) Interseção do Elipsoide com o plano $y = E$:_____________________________

c) Interseção do Elipsoide com o plano $z = F$:_____________________________

1.3. Construindo Hiperboloides

Ojetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o hiperboloides, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o Hiperboloide $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2/4+y^2-z^2=1

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique a janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D **controles deslizantes** são criados. Clique em OK.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com o hiperboloide criado.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente.

a) Interseção do Elipsoide com o plano $x = D$:______________________________

b) Interseção do Elipsoide com o plano $y = E$:______________________________

c) Interseção do Elipsoide com o plano $z = F$:______________________________

1.4. Construindo Cones

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o Cone, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o cone $x^2 + y^2 = z^2$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2+y^2=z^2

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique a janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D controle deslizantes são criados.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com o cone.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente;

a) Interseção do cone com o plano $x = D$:________________________________

b) Interseção do cone com o plano $x = 0$:________________________________

c) Interseção do cone com o plano $y = E$:________________________________

d) Interseção do cone com o plano $x = o$:________________________________

e) Interseção do cone com o plano $z = F$:________________________________

1.5. Construindo Esferas

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e a esfera, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione Janela de Visualização 3D.

2) Vamos plotar o cone $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2+y^2+z^2=4

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique a janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D controle deslizantes são criados.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com a esfera.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente.

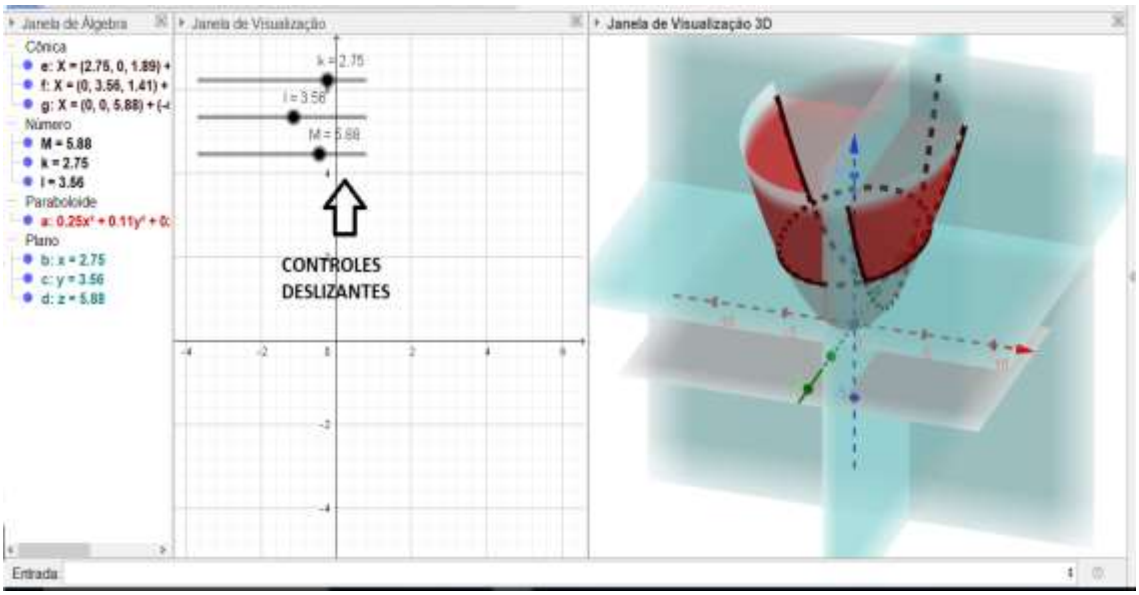
a) Interseção da esfera com o plano $x = D$:______________________________

b) Interseção da esfera com o plano $y = E$: ______________________________

c) Interseção da esfera com o plano $z = F$: ______________________________

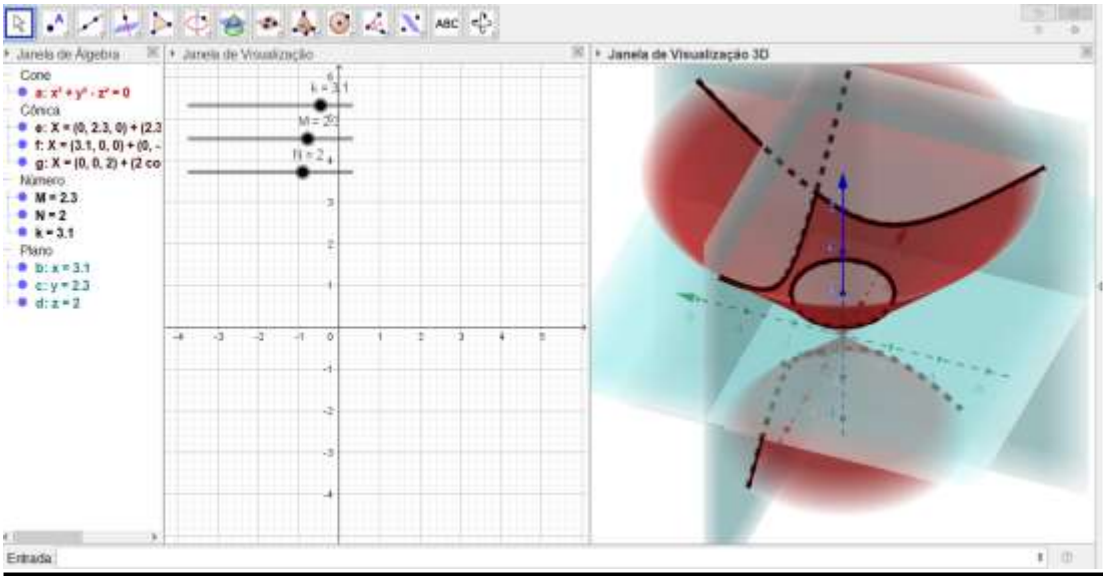
6.1.1. Algumas figuras relacionadas à Atividade 1

Figura 2 – Construção de um Paraboloide e planos paralelos aos planos coordenados



Fonte: Dados de pesquisa (2017)

Figura 3 – Construção de um cone e planos paralelos aos planos coordenados



Fonte: Dados de pesquisa (2017)

6.2. <u> ATIVIDADE 2:</u> Explorando e Construindo Integrais Duplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra

2.1. Construindo Integrais duplas sobre regiões no plano (IR^2)

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais duplas sobre regiões no plano, tanto para regiões de integração do tipo I ($dydx$) quanto do tipo II ($dxdy$).

Sequência Didática:

1) Vamos plotar a região R limitada pela curva $x = y^2$ e pela reta $x = 4$ no GeoGebra e faça um esboço abaixo.

2) Vamos agora, encontrar os pontos de interseção entre a parábola e a reta. Vá até o ícone **Ponto** (segundo ícone na barra de ferramentas) e procure a ferramenta **Interseção de dois Objetos**. Clique sobre a parábola e sobre a reta, automaticamente os pontos de interseção entre eles serão criados. Na janela de visualização, os mesmos estão representados algebricamente. Quais são esses pontos? Justifique algebricamente sua resposta.

3) A região R limitada pela parábola e pela reta pode ter sua área calculada por uma integral dupla. Para isso responda as perguntas abaixo:

   3.1. Observando a região R, qual curva limita essa região superiormente?

   ____

   ____

   ____

3.2. E qual curva limita a região R inferiormente?

___

___

___

3.3. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

___

___

___

3.4. Essa região admite uma integral dupla do tipo I ($dydx$)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região.

4) Agora vamos analisar se a região R admite uma integral dupla do tipo II ($dxdy$). Para isso vamos manipular as funções que limitam essa região. Na área de entrada digite o comando **Girar**. Irá aparecer algumas opções, escolha **Girar [<objeto>, <ângulo>]**. Digite no campo objeto $x = y^2$ e no campo ângulo $pi/2$. Observe que a parábola irá girar 90 graus no sentido anti-horário. Faça o mesmo para a reta $y = 4$. Faça um esboço dessa região.

5) Observando essa região R, responda:

5.1. Quais os pontos de interseção entre a reta e a parábola. Repita o procedimento do **Item 2** dessa atividade para encontra-los. Justifique algebricamente a sua resposta.

5.2. Qual curva limita essa região R superiormente? Justifique algebricamente.

5.3. E qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

5.4. Em relação ao eixo y, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

5.5. Essa região admite uma integral dupla do tipo II ($dxdy$)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Determine o valor da área da região R.

2.2. Construindo integrais para cálculo de volumes

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais duplas para cálculo de volumes de sólidos em R^3.

Sequência Didática:

1) Abra a janela 3D (clique em **Exibir** e **Janela de Visualização 3D**)

2) Considere um sólido S formado por uma superfície cilíndrica, por planos perpendiculares ao plano xy e o próprio plano xy cujas equações são: $z = -x^2 + 3$, $y = 2$ e $y = -2$.

3) Por meio do GeoGebra, você plotou todas as superfícies do sólido S. Abaixo, faça um esboço desse sólido S.

4) Determine as interseções das superfícies com o plano xy. Para isso vá até a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies** e clique sobre as superfícies que você deseja encontrar a interseção. Na janela 2D (plano xy) as interseções serão determinadas. Faça isso para todas as interseções

possíveis. (Superfície cilíndrica e plano xy, plano $y = 2$ e plano xy e plano $y = -2$ e o plano xy.). Faça um esboço para essa região R.

5) Agora observando o sólido S e a região R. Construa uma integral para o cálculo do volume do sólido. Resolva essa integral.

2.3. Construindo regiões de integração através de Integrais duplas

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de regiões de integração através de integrais duplas.

Sequência Didática:

Dada a integral dupla abaixo:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-x^2 - y^2 + 4) \quad dydx$$

Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxílio do GeoGebra.

1) Qual função da integral dada, limita o sólido S superiormente?

   ____

   ____

   ____

   O que essa superfície representa?

   ____

   ____

   Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta.

2) Com relação a região de integração no plano xy, o que representa essa região?

   ____

   ____

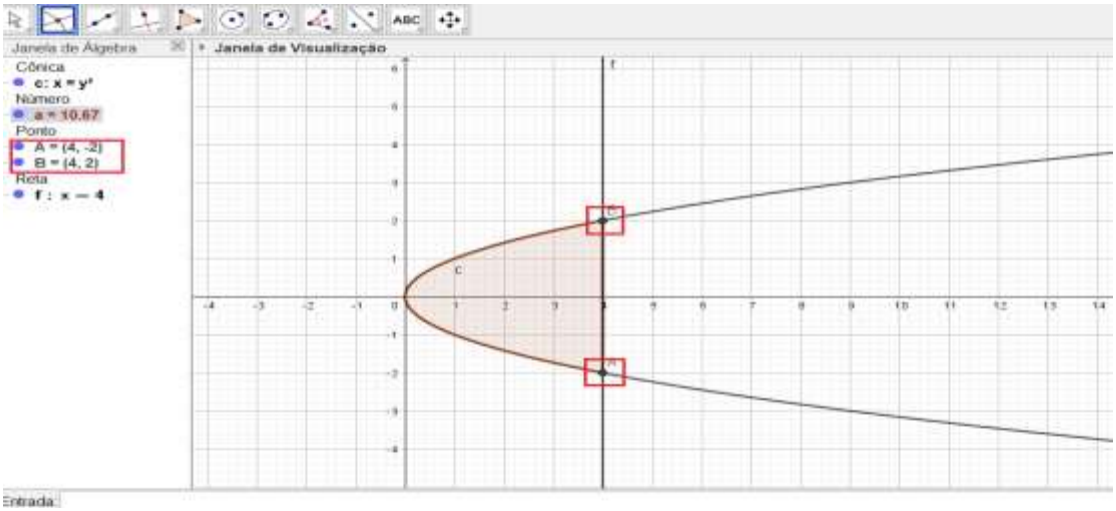
   Justifique sua reposta algebricamente.

Agora, use a ferramenta **Interseção entre Duas Superfícies,** para verificar sua resposta.

3) Faça um esboço do sólido S e diga o que a integral dupla acima pode representar.

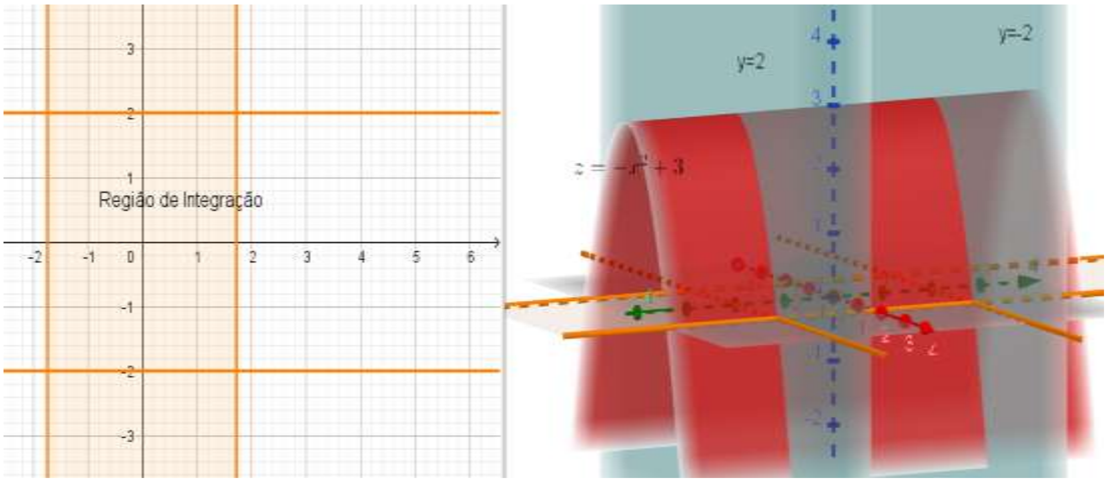
6.2.1. Algumas figuras relacionadas à Atividade 2

Figura 4 - Região de integração e pontos de interseção



Fonte: Dados de Pesquisa (2017)

Figura 5 - Região de integração na janela de visualização 2D



Fonte: Dados de Pesquisa (2017)

6.3. <u>ATIVIDADE 3:</u> Explorando e Construindo Integrais Triplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra

3.1. Construindo Integrais Triplas sobre regiões no plano (IR^3)

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais triplas sobre superfícies em R^3.

Sequência Didática:

1) Vamos plotar na janela 3D as seguintes superfícies:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$z + x^2 + y^2 = 4$$
$$z = 6$$

Essas superfícies formam em R^3 um sólido que iremos denominá-lo de S. Se a escala dos eixos coordenados não estiver compatível com o sólido S, clique com o botão direito na janela 3D e clique em **exibir todos os objetos**.

2) Vamos agora, montar uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S. Para isso, responda as seguintes perguntas:

2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.

____

____

____

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.

____

____

____

Use a ferramenta **interseção de duas superfícies** entre o plano xy e o cilindro ou entre o plano xy e o paraboloide, para encontrarmos a região R de integração no plano xy. Observando a região R na janela 2D, responda:

2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Clique na janela de visualização 2D e use a ferramenta **interseção de dois objetos**. Clique sobre o eixo x e o curva. Justifique algebricamente.

____

____

____

____

____

2.6. Agora, com todas essas informações obtidas, monte uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S.

3.2. Construindo Integrais Triplas sobre regiões no plano (IR^3)

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais triplas sobre superfícies em R^3.

Sequência Didática:

1) Vamos plotar na janela 3D as seguintes superfícies:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z^2 + x^2 + y^2 = 8$$

Essas superfícies formam em R^3 um sólido que iremos denominá-lo de S. Se a escala dos eixos coordenados não estiver compatível com o sólido S, clique com o botão direito na janela 3D e clique em exibir todos os objetos.

2) Vamos agora, montar uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S. Para isso responda as perguntas abaixo:

2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.

____

____

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.

____

____

Use a ferramenta **interseção de duas superfícies** entre o cone e a esfera, para encontrarmos a região de integração no plano xy.

2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

____

2.6. Agora, com todas essas informações obtidas, monte uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S.

3.3. Construindo regiões de integração através de Integrais Triplas

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de regiões de integração através de integrais triplas.

Sequência Didática:

Dada a integral tripla abaixo:

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{x-4} \quad dzdydx$$

1) Qual função da integral tripla acima limita o sólido S superiormente? ____

   O que essa superfície representa? ____

   Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta.

2) Qual função da integral tripla acima limita o sólido S inferiormente? ____

   O que essa superfície representa? ____

   Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta.

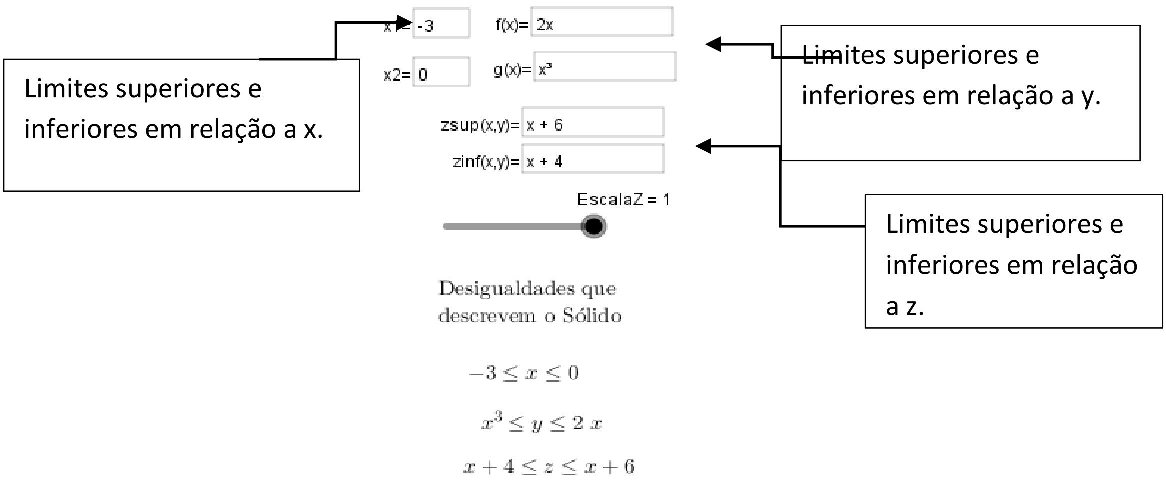
3) Com relação a região R no plano xy, quais são as funções que limitam essa região superiormente e inferiormente em relação a y? e onde a região começa e termina em relação ao eixo x? Faça um esboço dessa região.

   Agora, plote as superfícies no GeoGebra. Se necessário use a ferramenta **Interseção entre Duas Superfícies,** para verificar sua resposta.

4) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

5) Vamos usar o arquivo **Integraltripla.ggb** que está na área de trabalho do seu computador para verificar se suas respostas e se seu sólido está correto. Nesse arquivo, você irá entrar com as funções que limitam a integral tripla

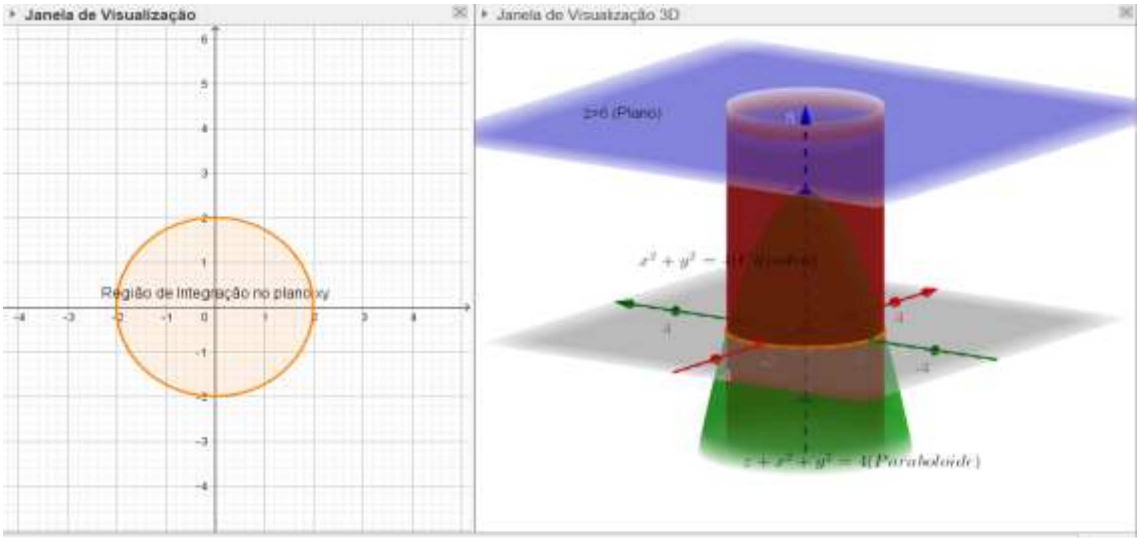
dada e automaticamente o sólido S, será plotado na janela 3D. Veja as informações abaixo:



5.1. O sólido que você desenhou no item 4 é o mesmo que foi plotado no item 5.2. Em caso de algo diferente, o que de diferente existe entre os sólidos?

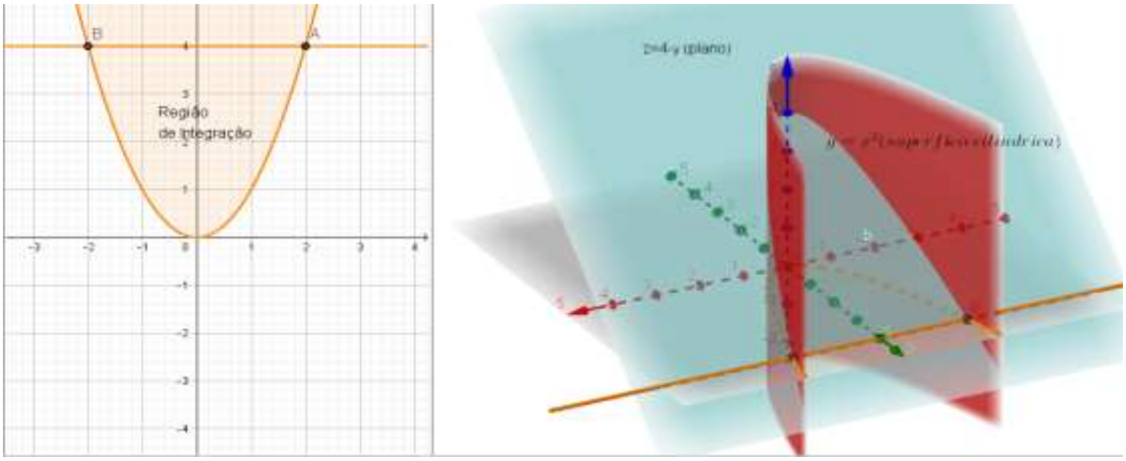
6.3.1. Algumas figuras relacionadas à Atividade 2

Figura 6 – Sólido S e região de integração no plano xy



Fonte: dados de pesquisa (2017)

Figura 7 - Solido e região no plano xy obtido através da Integral Tripla



Fonte: dados de pesquisa (2017)

7. Considerações para Professores de Cálculo de Várias Variáveis

A partir de nossa pesquisa (COMETTI, 2018) e das atividades exploratórias aqui apresentadas, que foram aplicadas para estudantes de Cálculo III de um curso de Engenharia Elétrica, tecemos algumas considerações que achamos relevantes e que gostaríamos de compartilhar com Professores de Cálculo de Várias Variáveis.

7.1. O papel da visualização com o auxílio do GeoGebra na aprendizagem de Integrais Múltiplas

Em nossa pesquisa, a visualização proporcionada pelo GeoGebra se mostrou um componente indispensável para os processos de construção dos principais conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas. Ficou evidente que as propriedades que o GeoGebra possui, como a facilidade de manuseio e as suas inúmeras ferramentas, ajudaram muito para que pudéssemos observar e explorar conceitos visuais. Possibilitaram também que aspectos contidos na construção de gráficos no plano e no espaço pudessem ser melhor compreendidos. As chamadas regiões de integração essenciais na construção de Integrais Múltiplas ganharam dinamicidade, o que acarretou na possibilidade de explorar características visuais inacessíveis em desenhos feitos por meio de papel e lápis. Diante desse fato, acenamos para a perspectiva de explorar regiões de integração muito mais complexas do que as que abordamos na pesquisa.

Observamos durante a aplicação das Atividades Exploratórias e também durante a análise dos dados colhidos, que aspectos ligados à visualização favoreceram a aprendizagem de Integrais Múltiplas, pois viabilizaram o processo de criação, interpretação e reflexão sobre os gráficos criados no GeoGebra, permitindo descrever e analisar informações e ideias antes desconhecidas. É importante frisar que tal concepção não garante uma aprendizagem em sua totalidade, mas acreditamos que potencializa os processos, tanto de ensino como de aprendizagem.

Outro aspecto importante foi que as atividades ligadas à exploração de características visuais são melhor aproveitadas e adquirem maiores potencialidades quando guiadas pelo professor ou por uma sequência didática. Em nosso caso, usamos sequências didáticas para construir e interpretar regiões gráficas usadas em Integrais Múltiplas. Dessa forma, foi possível guiar os estudantes durante as atividades, levando-os a explorar recursos do *software*, destacando as especificidades visuais dos gráficos criados.

Contudo, o uso do GeoGebra nessa pesquisa oportunizou momentos relevantes aos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, apoiados em aspectos ligados à visualização. Defendemos que essa experiência possa se tornar uma opção pedagógica frente às práticas tradicionais dos professores de Cálculo, principalmente, no ensino de Cálculo de Várias Variáveis.

7.2. Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Nossa pesquisa apresentou a possibilidade de aliar o uso do *software* GeoGebra à construção de registros de representação semiótica, principalmente registros gráficos, indispensáveis na construção das Integrais Múltiplas. Novamente o GeoGebra se mostrou eficiente na criação desses gráficos, exibindo características importantes e bastante usuais, que viabilizaram o processo de construção desses registros.

Muitas representações gráficas usadas para desenvolver Integrais Múltiplas podem ser feitas a mão no papel, sem perder especificidades e informações importantes; mas, entendemos que o GeoGebra, exibindo as mesmas representações feitas no papel para uma compreensão visual, permitiu exibi-las com maior facilidade e com maior clareza de detalhes. O recurso computacional utilizado possibilitou sair de uma representação estática (papel e lápis) para um tipo de representação dinâmica o que, em nosso caso, permitiu explorar as representações de outras maneiras, apresentando bons resultados em termos de aprendizagem.

Salientamos também a capacidade do GeoGebra de proporcionar uma desconstrução dimensional, muitas vezes necessária para o entendimento de Integrais Múltiplas. Essa desconstrução dimensional leva a uma mobilização de informações contidas nas regiões de integração, importantes para a construção das Integrais Múltiplas. Verificamos que as ferramentas do GeoGebra possibilitaram plotar registros, tanto nas janelas 2D como 3D e, o mais interessante, poder transitar entre essas janelas. Acreditamos que tal fato proporciona explorar aspectos cognitivos importantes para o processo de aprendizagem.

Nossa pesquisa explorou conceitos importantes da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, como as operações de tratamento e conversão. Em nossas Atividades Exploratórias, destacaram-se o intenso uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto no âmbito gráfico. Observamos que as atividades, em forma de sequência didática, e também o próprio conteúdo de Integrais Múltiplas favoreceram a mobilização de representações dentro de um mesmo tipo de registro, além do *software* que utilizamos, que permitiu o trabalho com esse tipo de operação. Evidenciamos a capacidade do GeoGebra em produzir inúmeros registros gráficos e uma potência de tratamentos ilimitada. Quanto ao uso de *softwares* e às operações de tratamento, compartilhamos os apontamentos de Duval (2011) ao argumentar que esses possuem a capacidade de acelerar estas operações. Acreditamos que a possibilidade de dinamizar as atividades de tratamento, principalmente para os registros gráficos, acarretou ganhos importantes na aprendizagem e também, possivelmente, para a prática de ensino.

Para o estudo de Integrais Múltiplas, consideramos que as transições entre as representações nos registros gráficos e os registros algébricos são primordiais. A tarefa de realização da conversão entre estes registros de representações nem sempre é fácil, principalmente da representação no registro gráfico para o algébrico (escrito analiticamente, e vice-versa. Este fato vai ao encontro das ideias de Duval (2009, p. 63) o qual assegura que “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. Assim, observamos que a atividade cognitiva de conversão, ligada às representações semióticas, pode ser mais explorada devido ao formato das atividades que aplicamos. As sequências didáticas, com seu passo a passo, propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão, atentando para os detalhes e informações contidas em cada registro usado. Isso possibilitou percorrer um caminho entre os registros (conversão) de modo que os estudantes tivessem a possibilidade de compreender os aspectos cognitivos gerados em cada tipo de representação.

Referências

ADLER P. A.; ADLER P. Obervational Techniques. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 1994. cap.23, p.377-392.

ALVES, D. O. **Ensino de funções, limites e continuidades em ambientes educacionais informatizados**: **Uma proposta para os cursos de introdução ao Cálculo.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALVES, F. R. V**. Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis**. Tese. (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNADJER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998, 203 p.

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics,** n. 52, p. 215-241, 2003. Disponível em: < http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.126.6579&rep=rep1&type=pdf >. Acesso em: 22 de fevereiro de 2017.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.** Tese (Doutorado em Educação) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BEZERRA, C. A. **Proposta de Abordagem para Técnicas de Integração usando o Software GeoGebra.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. In: **Pro-Posições**. Campinas, v. 04, nº 1, p. 18-23, março de 1993.

BITENCOURT, K. R. S.; SANTOS, S.K.S.L. A evolução da tecnologia no ambiente escolar e papel do professor tutor na atualidade. In: **XIX Congresso Internacional ABED de Educação a Distância**. Salvador, 2013. Disponível em: < www.abed.org.br/congresso2013/cd/284.doc >. Acesso em 19 de janeiro de 2017.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: Anais da 27º Reunião da ANPED. Caxambu, 2004. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf >. Acesso em 17 de junho de 2017.

BORBA, M. C. Softwares e Internet na sala de aula de informática. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010. Disponível em:< http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra6.pdf >. Acesso em 20 de janeiro de 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, 1974.

CALIL, A. M. **Caracterização da utilização das TIC pelos professores de Matemática e diretrizes para ampliação do seu uso**. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2011.

CATAPANI, E. C. **Cálculo em serviço: um estudo exploratório**. São Paulo: Bolema/Unesp, 2001, ano 14, nº 16. p.48 – 62.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T**. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências***.* Zetetiké, Campinas-SP, 16(29), p. 41-72, 2008.

COSTA, J. W.; OLIVEIRA, M. A. M**. Novas linguagens e nova tecnologias: educação e Sociabilidade**. 1º ed. Petrópolis: Vozes, 2004.

CUNHA, L. G. A.. **Estudo do comportamento de funções por meio da análise de suas derivadas, utilizando objeto de aprendizagem em ambientes educacionais informatizados**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

DALMOLIN, A. R.; MARONEZ, I. T. Audiolivro e história das tecnologias de gravação e reprodução sonora: um produto em construção. In: **Anais do X Encontro Nacional de História da Mídia**, Porto Alegre, 2015. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/alcar/encontros-nacionais-1/encontros-nacionais/10o-encontro-2015/gt-historia-da-midia-sonora-1/audiolivro-e-historia-das-tecnologias-de-gravacao-e-reproducao-sonora-um-produto-em-construcao/view >. Acesso em 20 de janeiro de 2017.

DAMM, R.F. Registros de Representação. In: MACHADO, S.D.A.(org). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, 2010, p.167-188.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: entering the field of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 1994. cap.1, p.1-17.

DIONIZIO, F. A. Q.; BANDT C. F. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática. In: **IX ANPED Sul. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul**, Caxias do Sul, 2012. Disponível em: < http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2012/Ensino_de_Matematica_e_ciencias/Trabalho/12_54_15_2866-6636-1-PB.pdf >. Acesso em 20 de fevereiro de 2017.

DUVAL, R. Registres de representation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Gognitives**. Strasbourg, IREM-ULP, França, v. 5, 1993, p. 37-64.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: **Revista eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n.2, p.266 – 297, 2012. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2012v7n2p266/23465 >. Acesso em 27 de fevereiro de 2017.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (L. F. Levy e M. R. A. Silveira, Trad.). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 7. ed. São Paulo: Papirus, 2010. p. 11-33.

ESCHER, M. A. **Dimensões teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas históricas e de ensino e aprendizagem**. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FILHO, A. B. Audioaula: o som como suporte pedagógico em sala de aula. In: **Revista Comunicação e Educação, revista do departamento de comunicação e artes da ECA/SP**, São Paulo: v.10, nº. 2, p. 175-172, 2005. Disponível em: < http://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/37524/40238 >. Acesso em 18 de janeiro de 2017.

FILHO, N. R. **Utilizando tecnologias informacionais e comunicacionais na educação matemática financeira; um estudo com alunos de graduação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

FIORENTINI, D. Learning and Professional Development of the Mathematics Teacher: In: **Research Communities. Sisyphu, Journal of Education**, v. 1, n. 3, p. 152-181, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar: ensaios sobre a representação em perspectiva**.2003. 188 f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FLORES, C. R.; WAGNER, D.R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização em Educação Matemática: Conceitos, tendências e perspectivas. In: **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.1, p.31-45, 2012. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/8008/6827 >. Acesso em 30 de janeiro de 2017.

FLORES, C.R. Registros de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **BOLEMA**, v.19, n.26, 2006, Unesp De Rio Claro. Disponível em < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853/161> Acesso em 20 maio. 2017.

FONSECA, D. S. S. M. **Convergência de sequências de séries numéricas no Cálculo. Um trabalho visando a corporificação dos conceitos**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, 2012.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. Descrições e conflitos teóricos computacionais: o caso da retidão local, In: **II Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática**, 2003, p. 1-10.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o Geogebra**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do teorema fundamental do cálculo voltado ao seu ensino***.* 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GUIMARÃES, A. M. et al. Produção e avalição de software educativo. In. **Educação e Revista**, nº 6, p.41-44. Belo Horizonte.

HENRIQUES, A. (2006). **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple.** Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Universite Joseph Fourier - UJF-Grenoble, Lab. Leibniz.

HENRIQUES, A.; ATTIE J. P.; FARIAS L. M. S. Referencias teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do *software* Maple. In: **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. V.09, nº 1, p. 51 - 81, 2007. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/585/436. Acesso em 25 de julho de 2016.

HENRIQUES A. Cálculo de integrais múltiplas com auxílio de técnicas instrumentais: o caso do crivo geométrico. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/MC/T9_MC2054.pdf. Acesso em 21 de janeiro de 2017.

HERINQUES A. Um estudo de superfícies e de integrais múltiplas em ambiente computacional. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/04/PO84824255449.pdf. Acesso em fevereiro de 2017.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C.R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recife: SBEM, 2009, p. 11-26.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis.** Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação**. 4. ed. Campinas: Papírus, 2008.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LAUDARES J. B.; LACHINI, J. (orgs.) **Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001, p. 146-189.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic inquiry**. Newbury Park: Sage, 1985. 416 p.

LOPES, V. R. **Aprendizagem em um ambiente construcionista: Explorando conhecimentos de cálculo I em espaços virtuais**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LUZ, V. M. **Introdução ao Cálculo: uma proposta associando pesquisa e intervenção**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MARIN, D. **Professores de matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estatual Paulista. Rio Claro, 2009.

MARTINS JUNIOR. J. C. **Ensino de Derivadas Em Cálculo I: Aprendizagem a partir da Visualização com o Uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

MESQUUITA, M.G.B.F; PAIXÃO, H. S.; GOMES, P. N. N. Crenças e concepções de professores de matemática interferindo nos processos de aprendizagem. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010. Disponível em: < http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T13_CC1675.pdf >. Acesso em 20 de janeiro de 2017.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. N. **Qualitative data analysis: na explanded sourcebook**. 2 ed. Thousand Oaks: Sage, 1994, 338 p.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do Cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MIRANDA, S. R. O artigo "Sobre o sentido e a referência" de Frege. Fundamento**: Revista de pesquisa em Filosofia**, v.1, n.3, maio-ago. 2011. Disponível em: < http://www.revistafundamento.ufop.br/Volume1/n3/vol1n3-2.pdf >. Acesso em: 25 de fevereiro 2017.

MOURA, D. A. S. **Perspectiva no estudo de limite: numa perspectiva figural e conceitual - foco em objetos de aprendizagem**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

NASSARELA, A. M. **Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi: o caso da integral imprópria**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9º, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Recife: SBEM, 2007, p. 1-10.

NEMIROVSKY, R. e NOBLE, T. **On mathematical visualization and the place where we live. Educational Studies in Mathematics**, v.33, pp.99-131, 1997.

NOTH, W. **A Semiótica no Século XX.** 3. Ed. São Paulo: Annablume, 2005.

NÖTH, W. **Panorama da semiótica:** de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OLIVEIRA, C. C.; COSTA, J. W.; MOREIRA, M. Ambientes informatizados de aprendizagem. In. COSTA, J. W.; OLIVEIRA, M. A. M. (Org.) **Novas linguagens e nova tecnologias: educação e Sociabilidade.** 1º ed. Petrópolis: Vozes, 2004. P. 111-138.

OLIVEIRA, J. L. **Utilização de softwares no ensino de análise real: um estudo sobre a construção do conceito de integral de Riemann**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

OLIVEIRA, L.O. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres humanos com mídias**. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

PAIVA, V. L. M. O. História do material didático. In DIAs, R.; CRISTOVÂO, V.L.L. O **Livro didático de língua estrangeiro: múltiplas perspectivas**. Cmapinas: Mercado de Letras, 2009, p. 17-56.

PINTO, Rieuse Lopes. **Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo**. 2014. Dissertação (Mestrado em Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, 2014.

PONTES, H. M. S.; DIONIZIO, F. A. Q. Concepções de Peirce, Frege, Suassure e Duval sobre semiótica: uma trajetória. In: BRANDT, C. F.; MORETTI M.T. (orgs). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: ed. Unijuí, 2014, p.209-225.

PRESMEG, N. Research on Visualization in Learning an Teaching Mathematics. In Gutierrez, A & Boero, P (eds). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, pp. 205-235. The Netherlands, Sense Publishers, 2006.

PRESMEG, N. Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46, 1986.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REIS, T. L. B. **Integral Definida: conteúdos e estratégias de aprendizagem**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

REZENDE, W.M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2003.

RICALDONI, M.A.G. **Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

SANTAELLA, L. O que é semiótica. São Paulo: Brasiliense, 2002. Disponível em: < https://pt.scribd.com/doc/7153850/O-Que-e-Semiotica-Lucia-Santaella >. Acesso em: 25 de fevereiro de 2017.

SANTOS, C. A. B.; CURI, E. Registros de Representações Semiótica e suas contribuições para o Ensino de Física. In. Revista Ensaio. Belo Horizonte, v.14, n.03, set-dez, 2012, p, 85-95.

SERFATI, M. **La constitution de l'écriture symbolique mathematique** 432 p. Thèse

SHULMAN, L. S. **Those who understand: the knowledge growths in teaching. Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, February, 1986.

Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1175860>. Acesso em: 03 de junho de 2017.

SILVA, L. C. A televisão e sua utilização na educação. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SILVA, P. S. A utilização dos recursos tecnológicos no ensino superior. **Revista Olhar Científico**. V.01, nº 2, p. 267 -285, agosto/dezembro 2010. Disponível em < http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/tics/14-151-1-PB.pdf> . Acesso em 30 de julho de 2016.

TALL, D. Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp. 121-126). Washington: MAA, 1991.

THOMPSON, J. B. (1995). Ideologia e cultura moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa (2a ed., Grupo de Estudos sobre Ideologia, Comunicação e Representações Sociais da Pós-Graduação do Instituto de Psicologia da PURCS, Trad.). Rio de Janeiro: Vozes. (Obra original publicada em 1990)

VALENTE, J. A. (org). O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1999.

VOGADO, G. E. R. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral por meio da resolução de problemas.** 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

WILGES, A. M. **Uma investigação acerca das práticas docentes no ensino superior de Matemática envolvendo o uso de softwares educacionais**.

Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

ZABALA, A. **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

ZUCHI, I. A integração de ambientes tecnológicos no ensino: uma perspectiva instrumental e colaborativa. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recide: SBEM, p. 239-252, 2009.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto,
em **junho** de **2018**
sobre papel 100% reciclato (miolo) $90g/m^2$ e (capa) $300\ g/m^2$