Márcio Antônio Cometti

DISCUTINDO O ENSINO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS NO CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS: CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA 3D PARA A APRENDIZAGEM

Ouro Preto - MG

2018

Márcio Antônio Cometti

DISCUTINDO O ENSINO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS NO CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS: CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA 3D PARA A APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis e coorientação do Prof. Dr. Edson Crisostomo dos Santos.

Ouro Preto - MG

2018

C734d Cometti, Márcio Antônio.

Discutindo o ensino de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis [manuscrito]: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem / Márcio Antônio Cometti. - 2018.

193f.: il.: color; grafs.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Coorientador: Prof. Dr. Edson dos Santos Crisostomo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Variáveis (Matemática) . 2. Integrais Múltiplas. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Reis, Frederico da Silva. II. Crisostomo, Edson dos Santos. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 51:378

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DISCUTINDO O ENSINO DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS NO CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS: CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA 3D PARA A APRENDIZAGEM

Autor: Márcio Antônio Cometti

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

CoOrientador: Prof. Dr. Edson Crisostomo dos Santos

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Márcio Antônio Cometti e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 26/04/2018

Frederico da Silva Reis
Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Frederico da Silva Reis
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis (UFOP)

Prof. Dr. Edson Crisostomo dos Santos (UNIMONTES - MG)

Nelson Borges Garcia
Prof. Dr. Nelson Antônio Borges Garcia (IME - RJ)

Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu (UFOP)

2018

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu pai, Inês e Karol!

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por iluminar meu caminho, me fortalecendo e me impulsionando a sempre seguir em frente.

A meu pai, Sr. Amadeu Cometti, que mesmo do seu jeito sempre me apoiou na minha formação pessoal e profissional.

À minha irmã, Maria Inês Cometti, por estar sempre perto e por me incentivar nas minhas caminhadas.

À Karoline Pedroso Vieira, por estar o tempo todo ao meu lado com o seu amor incondicional, incentivo e paciência.

Ao Amigo, Professor e Orientador Dr. Frederico da Silva Reis, pelos inúmeros momentos de aprendizado, conversas, disponibilidade e pela maneira impar que conduziu suas orientações contribuindo para meu amadurecimento como pesquisador e profissional. Muito obrigado!

Ao Professor e Coorientador Dr. Edson Crisostomo dos Santos, pela disponibilidade, colaboração e valiosas contribuições dadas ao longo dessa pesquisa.

Ao Professor Dr. Nelson Borges Garcia, por participar da Banca Examinadora com seus apontamentos enriquecedores para essa pesquisa.

Ao Professor Dr. Edmilson Minoru Torisu, que com suas aulas despertou-me o interesse pela teoria utilizada como referencial teórico nessa pesquisa. Além, das contribuições valiosas dadas como membro da Banca Examinadora.

A todos os Professores do Programa, que contribuíram diretamente para minha formação profissional e pessoal.

Aos meus amigos da turma do Mestrado, Andressa, Josias, Luan e Rogério, pela amizade, colaboração e disponibilidade de sempre.

Aos Colegas da turma de Mestrado pelos momentos de conversas, estudos e descontrações ao longo desta etapa.

Aos alunos participantes dessa pesquisa pela disponibilidade e dedicação.

A Faculdade Pitágoras (Betim) pela oportunidade de desenvolver a pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa objetiva investigar as possíveis contribuições de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D para os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. Especificamente, buscou-se identificar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra 3D relacionando-as aos registros de representações semióticas que comumente surgem no processo de aprendizagem dessa disciplina. O trabalhou fundamenta-se, teoricamente, em pesquisas sobre o Ensino de Cálculo de Várias Variáveis, mais precisamente, o ensino de Integrais Múltiplas, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, apoiado no uso das tecnologias disponíveis e na Teoria dos Registros das Representações Semióticas. A pesquisa é de cunho qualitativo, tendo sido realizada com alunos da disciplina Cálculo III de uma universidade particular da região metropolitana de Belo Horizonte – MG. Integrando a metodologia da pesquisa, elaboramos, aplicamos e avaliamos sequências didáticas com o *software* GeoGebra 3D, relacionadas à construção de superfícies e sólidos para o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis, implementadas sob a forma de Atividades Exploratórias em laboratório de informática. Os resultados apontaram que a visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D se mostrou um componente indispensável para os processos de construção dos principais conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas, apresentaram a possibilidade de aliar o uso do *software* GeoGebra 3D à construção de registros de representação semiótica, principalmente registros gráficos, usados na construção das Integrais Múltiplas, destacaram o intenso uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto no âmbito gráfico e, finalmente, explicitaram que as sequências didáticas propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão, atentando para os detalhes e informações contidas em cada registro usado. Concluímos, buscando levantar reflexões importantes para professores-pesquisadores de Cálculo de Várias Variáveis, comprometidos com um ensino voltado para a aprendizagem.

Palavras-chave: GeoGebra 3D. Ensino de Cálculo de Várias Variáveis. Ensino de Integrais Múltiplas. Teoria dos Registros das Representações Semióticas. Educação Matemática no Ensino Superior.

ABSTRACT

This paper aims at investigating the possible contributions of didactic sequences while using GeoGebra 3D for teaching and learning Multiple Integrals in Multivariable Calculus. We sought to identify the possible contributions of the use of GeoGebra 3D, linking them to registers of semiotic representations which often come into view during the learning process. Whereas the study's theory is based on researches on teaching Multivariable Calculus, it is fundamentally based on teaching Multiple Integrals in Higher Education, while supported by both the available technology and the theory of Registers of Semiotic Representation. Inasmuch as this research is qualitative, it was carried out with Calculus III students of a private university in the metropolitan area of Belo Horizonte/MG. With respect to the study methodology, we created, carried out and analyzed didactic sequences via GeoGebra 3D, regarding the construction of surface areas and solids for teaching Multiple Integrals in Multivariable Calculus, put through by means of exploratory activities in a computer lab. Results signal that GeoGebra 3D's graph presents as invaluable component for the development of the key concepts and properties of Multiple Integrals. Furthermore, the software provides the possibility of constructing graphic registers of semiotic representation, used in the construction of Multiple Integrals. The results also emphasize the intense use of mathematical treatment operations, either in algebraic or in graphic scale, as well as explaining that the didactic sequences offered opportunity to explore the conversion, paying mind to details and information in each register used. We, thus, sought to raise relevant matters of discussion for teachers-researchers of Multivariable Calculus which are committed to a learning-focused teaching.

Keywords: GeoGebra 3D. Teaching Multivariable Calculus. Teaching Multiple Integrals. Theory of Registers of Semiotic Representation. Teaching Math in Higher Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Capítulo 1

INICIANDO A DISCUSSÃO

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos.
>
> Reis (2001)

1.1. A pedra no caminho

Quando terminei o Ensino Médio, em 1999, tinha certeza que cursaria Engenharia Mecânica, pois acabara de concluir o curso Técnico de Mecânica pelo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET/MG, localizado em Belo Horizonte. Estava muito empolgado, já que era uma ótima escola e também um excelente curso. Ao findar três anos de curso técnico, feitos concomitantemente com o Ensino Médio, fui selecionado para fazer estágio na Companhia Vale do Rio Doce. Diante desse fato, fui morar em Itabira, residindo na cidade por de um ano.

O período de estágio foi muito proveitoso. Desenvolvia atividades que estavam relacionadas às minhas expectativas e, assim, confirmavam meus anseios em tentar vestibular para Engenharia Mecânica quando regressasse a Belo Horizonte. Com esse pensamento, voltei e me preparei para prestar vestibular na Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, no final de 2001. O vestibular da UFMG era bastante concorrido e isso demandava bom preparo. Nessa mesma época fui contratado como técnico em Mecânica por uma empresa de manutenção de elevadores, restando-me somente a noite para os estudos. Diante do tempo escasso, matriculei-me em um curso pré-vestibular no período da noite.

Foi nesse período preparatório para o vestibular que uma centelha pela Matemática se acendeu em mim. Sempre gostei muito de Matemática e o Ensino Médio no CEFET/MG foi crucial para confirmar essa aptidão, pois lá a Matemática era trabalhada com muito aprofundamento dos conteúdos, incluindo estudo dos limites, derivadas e integrais. Dessa forma, a ideia de dar aulas de Matemática começou a passar pela minha cabeça, mas acho prudente confessar que, naquele momento, eu só pensava em fazer Matemática depois que terminasse o curso de Engenharia. A Matemática e as aulas seriam como uma espécie de *hobby*.

Com o tempo passando e o vestibular chegando, a dúvida sobre qual curso fazer começou a ficar mais aparente. O ambiente escolar e a possibilidade de ensinar eram fatores que me faziam tender para o lado da Matemática. Mas o lado econômico pesava quando pensava na Engenharia. Diante desse panorama, me inscrevi em dois vestibulares: Engenharia Mecânica na UFMG e Matemática na PUC-MG.

Passei na primeira etapa do vestibular da UFMG, mas a segunda etapa foi adiada devido à greve existente na instituição naquele ano. Assim, fiquei aguardando uma nova data. Por outro lado, o resultado do vestibular da PUC-MG já havia sido divulgado e eu havia sido aprovado. Confesso que fiquei muito feliz com a possibilidade de fazer o curso de Matemática e isso me levou a fazer a matrícula nesse curso até que a situação do vestibular na UFMG se resolvesse.

Durante o período que fiquei aguardando a segunda etapa do vestibular para Engenharia, pude refletir sobre o que eu realmente queria em relação à minha vida profissional, pois era uma escolha importante e direcionaria toda a minha vida daquele momento em diante. Percebi que fazer o curso de Matemática e, posteriormente, começar a lecionar, poderia me realizar profissional e pessoalmente. Ainda hoje, acredito que ser professor é uma profissão gratificante, mesmo com todas as dificuldades existentes em nosso país.

Assim, em fevereiro de 2002, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, em Betim – MG e deixei de lado a segunda etapa do vestibular de Engenharia. A cada dia de aula, a cada matéria que cursava, eu me interessava mais e sentia que tinha feito a escolha certa. Nesse passo, não demorou muito para começar a lecionar e, quando estava cursando o sexto período no ano de 2004, pedi demissão do meu emprego e comecei a lecionar na Rede Estadual de Educação de Minas Gerais, pelo regime de designação. Era minha primeira experiência em sala de aula e me senti extremamente à vontade e com a plena certeza de que era aquilo que eu queria. É claro que faltava experiência, mas, aos poucos, fui me ambientando com o cotidiano escolar.

Ainda em 2004, prestei concurso público para professor de Matemática da Rede Estadual de Minas Gerais. Fui aprovado e, por sorte, só fui convocado assim que terminei o curso de Licenciatura em Matemática, no final de 2005. Logo, no início de 2006, comecei a lecionar Matemática como professor efetivo na Escola Estadual Engenheiro Francisco Bicalho, em Belo Horizonte na qual trabalho até hoje.

Também dei aula em vários cursinhos preparatórios para vestibular em Belo Horizonte e Contagem e em uma escola particular por 4 (quatro) anos. Vale ressaltar que atuei como Vice-Diretor na escola estadual em que atuo por 7 (sete) anos, tendo tido a oportunidade de trabalhar com aspectos relacionados à gestão escolar. Essas experiências foram extremamente válidas para minha formação como profissional da educação, possibilitando-me começar a compreender as relações existentes dentro do âmbito escolar, tanto nas relações pessoais como nos processos de ensino e aprendizagem.

Nessa mesma época, fiz uma pós-graduação em Educação Tecnológica no CEFET/MG, que me possibilitou ampliar meus conhecimentos e ficar a par de um assunto que, ao começar a lecionar, me despertou o interesse: Tecnologia e Educação. As discussões durante as aulas eram bem motivadoras e pude refletir bastante sobre esse assunto durante essa especialização. Terminado esse curso, em maio de 2009, tive a oportunidade de substituir, por uma semana, uma professora na Faculdade Pitágoras, Unidade Betim. Fiquei bastante empolgado com essa possibilidade. A disciplina era Cálculo Diferencial e Integral II e, diante do meu desempenho, fui convidado para participar de um processo seletivo, tendo sido aprovado. Comecei, então, a lecionar Geometria Analítica para alunos de Engenharias. Foi um início um pouco complicado, pois tive que revisar todo o conteúdo do Cálculo e da Geometria Analítica, para me preparar bem para as aulas. Foram muitas horas de estudo e dedicação que, no final, valeram muito a pena.

O tempo foi passando e comecei a lecionar Álgebra Linear, Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III, Equações Diferenciais Ordinárias e Cálculo Avançado, sempre para cursos de Engenharias, principalmente Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação. Dentre essas disciplinas, o Cálculo III, no qual se aborda o Cálculo com Funções de Várias Variáveis dando ênfase nas Integrais Múltiplas é a disciplina que mais vezes lecionei na faculdade. São 12 semestres de muitas aulas, muitos alunos e inúmeras inquietações que surgiram durante todo esse tempo. Cálculo III foi a disciplina que mais me levou à reflexão, pois seu conteúdo é muito extenso, demandando um bom conhecimento prévio de Matemática básica, além de pré-requisitos oriundos dos conteúdos de Geometria Analítica, Cálculo I e Cálculo II. Sem contar que essa disciplina apresenta um número elevado de evasão e reprovação.

As inquietações eram (e ainda são) muitas, mas uma das questões centrais se dava em relação aos “conteúdos gráficos” presentes na abordagem de Integrais Múltiplas. Essa perturbação gerou um desconforto em relação a que caminho seguir. A cada semestre notava a enorme dificuldade apresentada pelos alunos com relação à representação gráfica, tanto no plano como no espaço. Existia ali um enorme problema que levava ao insucesso de muitos alunos. Inúmeras indagações relativas a esses problemas povoavam minha cabeça sempre que me deparava com tais dificuldades em sala de aula. Esse fato era, para mim, uma enorme pedra no meio do caminho. Qual prática de ensino seria capaz de melhorar a aprendizagem e, consequentemente, o desempenho dos alunos? Onde buscar alternativas que pudessem solucionar / amenizar as dificuldades? Como pensar em aulas mais dinâmicas, deixando de lado, nem que temporariamente, o tradicional quadro e giz, para melhorar os processos de ensino e aprendizagem? Será que o uso de recursos tecnológicos era uma boa saída? Mas como usá-los? Será que essas perturbações eram só minhas ou de muitos professores? Enfim, como retirar essa pedra do caminho?

Essas eram apenas algumas das perguntas que permeavam minha rotina como professor de Cálculo III. Posso dizer que, a partir dessas indagações e da reflexão da minha pratica de ensino, foi dado um pontapé inicial e motivador para essa pesquisa. Assim, optei por desenvolver a presente pesquisa na área da Educação Matemática no Ensino Superior.

1.2. Uma breve história do Cálculo

Para realizar um estudo completo sobre as origens e desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, necessitaríamos de uma pesquisa muito extensa, o que fugiria do nosso propósito deste projeto. Dessa forma, vamos descrever sucintamente as origens e desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral para situarmos o projeto em desenvolvimento.

O século XVII foi marcado por enormes avanços da Matemática, mas o que ganhou maior destaque, aconteceu na sua segunda metade. Foi a descoberta / criação do Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo infinitesimal, por Issac Newton e Gottfried Wilhem Leibniz, de maneira independente um do outro.

As origens do Cálculo remontam a mais de dois mil anos, bem antes dos estudos realizados por Newton e Leibniz. Entre a Grécia Antiga e os meados do século XVII, muita Matemática foi desenvolvida na busca de respostas. Foi diante de problemas de quadraduras que surgiram os primeiros vestígios da história do Cálculo. Os antigos geômetras buscavam encontrar a medida das áreas de figuras planas, relacionando-as com áreas de quadrados, por serem figuras mais simples de manipular. Por volta de 430 aC, Antífon na tentativa de encontrar a quadratura do círculo, utilizou uma sequência finita de polígonos regulares inscritos (iniciando com um quadrado, octógono, etc), dando origem ao chamado "método da exaustão", inicialmente creditado a Eudoxo (370 aC) mas que, posteriormente, ficou conhecido como método de Arquimedes, como afirma Boyer (2003):

> Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem fortaleceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método da exaustão, o equivalente grego de cálculo integral. [...] Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira prova satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura, o que parece que o método da Exaustão vem de Eudoxo (BOYER, 2003, p.61).

Os trabalhos de Arquimedes chegaram por volta de 1540 na Europa Ocidental, através de uma cópia feita no século IX, achada em Constantinopla. Com essa tradução disponível e com contribuições de outros matemáticos, o Cálculo Diferencial e Integral se desenvolveu.

Dessa forma, o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral não pode ser considerado um acontecimento isolado, pois muitos matemáticos deram sua contribuição. Grande (2013, p.113), diante dessa perspectiva, ressalta em sua fala que o Cálculo não foi “atribuído a apenas uma pessoa, mas o resultado de estudos, métodos e teoremas que foram ao longo do tempo se aperfeiçoando e trazendo contribuições significativas”.

Eves (2004) pontua que foi a partir do século XVII que a Matemática Elementar deu lugar à Matemática Superior e as suas implicações possibilitaram grandes desenvolvimento em outras áreas da Matemática. Antes, os matemáticos ficavam presos a questões de contar, medir e descrever formas e, a partir desse momento, podiam se aventurar em uma Matemática cada vez mais dinâmica. Na realidade, o grande feito de Newton e Leibniz foi elucidar que a Matemática, além de lidar com grandezas, é capaz de lidar com variações das mesmas.

É importante ressaltarmos que o desenvolvimento do Cálculo se deu em ordem inversa à aquela que estamos acostumados no meio acadêmico: o Cálculo Integral veio bem antes do Cálculo Diferencial, como destaca Eves (2004):

> A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2004, p.417).

A Física inicialmente se apoderou dos desenvolvimentos do Cálculo, pois grande parte dos matemáticos desse período também eram físicos. Mas, à medida que se entendeu o enorme poder do Cálculo, vários matemáticos começaram a dar suas contribuições para seu aprimoramento. Muitos problemas que antes aparentemente não apresentavam solução, tornaram-se possíveis de serem resolvidos.

Contudo, com o passar do tempo, o Cálculo Diferencial e Integral passou a ser disciplina obrigatória em diversas universidades ao redor do mundo. Segundo Eves (2004, p.417), os conceitos principais do Cálculo "têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que, talvez seja correto dizer que, sem algum conhecimento deles, dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta".

Na próxima seção, vamos lançar nosso olhar inicial sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, argumentando sobre algumas dificuldades no ensino e aprendizagem desse conteúdo.

1.3. A questão das dificuldades no ensino e aprendizagem de Cálculo

As disciplinas de Cálculo estão presentes em diversos cursos superiores. Muitas vezes, elas demonstram ser uma pedra no sapato de muitos estudantes que ingressam nessa modalidade de ensino, como por exemplo, nos cursos de Matemática, Engenharias e demais cursos que possuem essas disciplinas em suas grades curriculares. Lachini (2001) confirma esse fato, ainda que considere o Cálculo como a linguagem do paradigma científico e como instrumento primordial de pensamento para as mais variadas áreas do conhecimento, sendo dessa forma colocado como matéria de grande importância e obrigatória em variados cursos de graduação.

Esse status de importância que as disciplinas de Cálculo possuem dentro dos cursos onde estão inseridas, condiciona muitas vezes certo temor por parte dos estudantes, pois são essas disciplinas que irão dar a eles, as ferramentas necessárias para seu desenvolvimento durante o desenrolar do curso. Dessa forma, podemos citar dois objetivos principais nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo: "habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade; [...] estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do Cálculo como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas" (LACHINI, 2001, p.147).

Recorrentemente, diversos autores (BARUFI, 1999; LACHINI, 2001; REZENDE, 2003; NASSER, 2007; LAUDARES, 2001; REIS, 2009; BARBOSA, 2004; IGLIORI, 2009) da comunidade da Educação Matemática no Ensino Superior têm se mostrados preocupados com os problemas de ensino e aprendizagem nas disciplinas de Cálculo; e muito se têm pensado e discutido sobre esse objeto de estudo, a partir de várias perspectivas teóricas, gerando contribuições significativas para tentar sanar tais problemas. Essa preocupação se justifica segundo Igliori (2009, p.13), "pelo fato do Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quando pela sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática".

Os índices de reprovação e evasão dos estudantes matriculados nas disciplinas de Cálculo são enormes, nos cursos em que elas estão presentes, tanto em universidades privadas como públicas. Barufi (1999) e Rezende (2003) são pesquisadores que se preocuparam com o baixo aproveitamento dos estudantes nas disciplinas de Cálculo, mas apontam que não é um problema somente das Instituições de Ensino Superior do Brasil. Essa perspectiva tal qual o Cálculo é colocada, leva-nos a pensar no que acarreta tal insucesso dos estudantes nessa disciplina; e indo um pouco mais além, remete-nos a pensar também o que fazer para acabar ou atenuar as dificuldades existentes nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo.

Um movimento intitulado *Calculus Reform*, na década de 1980, mostrou uma preocupação mundial com o fracasso em Cálculo e também com a dificuldade de fazer com que os estudantes compreendam os procedimentos e conceitos dessa disciplina. Esse movimento procurou reformar o ensino de Cálculo, principalmente em direção ao uso de tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem:

> Uma das características básicas desse movimento é o uso da tecnologia, aqui entendida como programas computacionais específicos e calculadora gráfica, tanto para o aprendizado de conceitos quanto para resoluções de problemas. Todas as atividades são baseadas na chamada "Regra dos Três", isto é, todos os problemas devem ser abordados numericamente, geometricamente e analiticamente, estimulando a interlocução das várias representações matemáticas (LUZ, 2011, p.7).

Dessa maneira, muitos pesquisadores buscaram entender o insucesso dos estudantes em Cálculo. As causas levantadas são as mais variadas possíveis. Segundo Fonseca (2012):

> É fato que, apesar da reconhecida importância da disciplina de Cálculo nos currículos, muitos são os problemas com o seu ensino: aulas extremamente expositivas e formais; apresentação de uma Matemática pronta, levando os alunos à memorização de fórmulas; resolução de múltiplos exercícios, resultando em um processo mecânico de aprendizagem; alunos com defasagem na aprendizagem dos ensinos fundamental e médio, comprometendo a habilidade de abstração; dificuldade de operações com o infinito; pouco entendimento do conceito de limite e de convergência (FONSECA, 2012, p.43).

Esses problemas levantados pela pesquisadora são comumente identificados por professores de Cálculo dentro da sala de aula e também por outros pesquisadores em seus relatos de pesquisas. Frota (2006, p.2) relata ainda que "a sala de aula de Cálculo tem sido afetada por fatores decorrentes, em parte, de um ensino universitário de massa: excessivo número de alunos, grande parte desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica".

Levantamos até o momento problemas apenas relacionados ao perfil dos alunos, mas não podemos deixar de descartar outros condicionantes que agravam tal situação, como "a forma tradicional de ministrar a disciplina até a falta de motivação por parte de professores" (CATAPANI, 2001, p.49). Podemos ainda destacar Rezende (2003) que aponta um conflito pedagógico existente entre o que o professor pede para o aluno e o que o professor de fato faz em sala de aula: "Se nas aulas propriamente ditas o que prevalece são as demonstrações, nas avaliações o que se pede em geral é a técnica, os cálculos de limites, de derivadas, de antiderivadas e integrais" (REZENDE, 2003, p.13).

Oportunamente, Reis (2001) defende que muitas dificuldades na disciplina de Cálculo estão relacionadas à prática pedagógica, a qual é um ponto crucial e que deve ser levado em consideração. Muitos professores abordam o conteúdo dessa disciplina praticamente de forma igual em diferentes cursos, não levando em conta os anseios profissionais dos estudantes:

> A prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver (REIS, 2001, p.23).

Diante desses inúmeros problemas relatados, é evidente que alternativas para saná-los também são apontadas por diversos autores que, como já dissemos, mostram-se preocupados com a problemática que se apresenta no âmbito do Ensino Superior. Rocha (2010, p.31) identificou algumas possibilidades de contribuições para o ensino de Cálculo, tais como: "a modelagem matemática, o uso da história e a informática como algumas dessas perspectivas / possibilidades de abordagem do Cálculo. Alertam também, para as rotinas das aulas e a relação professor-aluno como pontos que precisam ser revistos para a efetivação da proposta".

Dentre essas alternativas propostas, uma tendência que vem ganhado força e apresentando inúmeras contribuições significativas para os problemas relacionados ao ensino e aprendizagem de Cálculo, é o uso das tecnologias. Cada vez mais se tem discutido as práticas de ensino voltadas para o uso de tecnologias para auxiliar a aprendizagem. Diante dessa perspectiva, faz-se importante analisarmos e compreendermos essa abordagem como uma possível tentativa de resolver alguns problemas.

1.4. A questão do uso de Tecnologias no Ensino de Cálculo

É evidente que a sociedade na qual estamos inseridos está cada dia mais dependente dos recursos tecnológicos. Dessa forma, é inevitável que a Educação sofra a influência desses recursos. Silva (2010, p.267) aponta que as mais variadas formas de tecnologias destinadas à informação e à comunicação são um ponto importante de transformação, “fazendo com que sejam alteradas as mais diversas culturas sociais, as maneiras de viver de cada um, relacionamentos, aprendizagem e principalmente o ato de ensinar”.

Diante desse fato, cada vez mais se tem observado inúmeras pesquisas envolvendo as Tecnologias de Informação e Comunicação especificamente em Educação Matemática. São as chamadas TICEM – Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação Matemática. A tendência é que as essas tecnologias se tornem uma realidade no meio escolar. Villarreal (1999) explicita que, diante da necessidade de novas atividades, a introdução de tecnologias no meio escolar é evidente; e, consequentemente, a constante evolução e crescimento dessas ferramentas tecnológicas possibilitam aos professores, novas perspectivas de ensino. Marim (2011) destaca que:

> A capacidade técnica das máquinas possibilita planejar atividades de ensino antes impensáveis com o uso de lousa e giz. Para o ensino de Matemática, por exemplo, há vários *softwares* que permitem explorar os conceitos de Matemática de uma forma mais dinâmica e detalhada (MARIN, 2011, p.527).

Por outro lado, Zhuchi (2009) destaca que essa integração das TICEM com o ambiente escolar não é um trabalho fácil, apontando a complexidade dessa interação, principalmente em encontrar e organizar sequências didáticas que auxiliem o professor em sala de aula, diante da constante modernização desses recursos.

Nas disciplinas específicas de Cálculo, essas tecnologias disponíveis podem se tornar ferramentas potencializadoras nos processos de ensino e aprendizagem. Cunha (2014, p.55) relata que “o uso da tecnologia no ensino de Cálculo amplia as possibilidades de trabalhar atividades por diferentes representações, tais como tabelas, gráficos, expressões algébricas de forma rápida e articulada". Dessa forma, a presença de tecnologias oferece a oportunidade de observar processos de construção de conhecimento que não são vistos em outros ambientes de aprendizagem (VILLAREAL, 1999). Ainda se observa que muitas questões são levantadas pela comunidade de Educação Matemática quanto à sua utilização: Como essas tecnologias podem contribuir de forma positiva para o ensino e a aprendizagem de Matemática? E especificamente para o ensino de Cálculo? Como deve ser a utilização desses recursos? Qual é o melhor caminho pedagógico para utilizar essas ferramentas?

Essas questões fomentam inúmeros debates no meio acadêmico. Recorrentemente, muitas opiniões são apresentadas sobre o uso desses recursos tecnológicos em prol de uma aprendizagem realmente significativa. Dessas discussões, observa-se que cabe a comunidade acadêmica repensar suas práticas de ensino, incorporando esses instrumentos tecnológicos, mirando o professor como alvo central para uma mudança de atitude perante as TICEM e fazendo com que essas sejam parte integrante dos processos de ensino e aprendizagem.

Os *softwares* disponíveis para auxiliar o ensino de Cálculo despertam interesses tanto de professores quanto de alunos, pois são objetos de ensino que potencialmente podem romper a barreira existente entre as práticas tradicionais de ensinar Cálculo e o uso da tecnologia. Observa-se que esses recursos tecnológicos objetivam investigar e construir conceitos, fazer Matemática e, principalmente, compreender as soluções numéricas. Ricaldoni (2014) levanta aspectos importantes em relação ao uso de *softwares* e a prática do professor:

> O computador, em particular, deve ser utilizado como uma ferramenta na construção do conhecimento matemático, um facilitador no entendimento e construção de conceitos. Então, cabe ao professor, a sua própria formação na área e, certamente, o desenvolvimento de novas habilidades, além do conhecimento de *softwares* que possibilitem uma boa utilização das TICEM (RICALDONI, 2014, p.45).

Assim, acredita-se que as tecnologias disponíveis, principalmente para o ensino de Cálculo, ajudam na transformação do modo de pensar, pois reorganizam os processos de ensino e aprendizagem. Os estudantes, quando direcionados de maneira correta diante do uso de tecnologias em práticas educativas, atuam de forma consistente, possibilitando novos desafios cognitivos estabelecidos por processos de investigação. Borba e Penteado (2012) destacam:

> Os computadores [...] reorganizam o pensamento. A visão de pensamento aqui adotada inclui a formulação e resolução de problemas e o julgamento de valor de como se usa um dado conhecimento. Entendemos que não há apenas uma justaposição de técnica e seres humanos, como se a primeira apenas se

> juntasse aos últimos. Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra (BORBA e PENTEADO, 2012, p.49).

Os *softwares* disponíveis para utilização nas disciplinas de Cálculo são muitos e cada um possibilita atingir objetivos variados nos processos de ensino e aprendizagem. Um deles é o GeoGebra, sobre o qual discutiremos suas potencialidades a seguir.

O GeoGebra é um *software* gratuito, com premiações internacionais pela sua contribuição no estudo da Matemática. Criado pelo Prof. Dr. Markus Hohenwarter da *Florida Atlantic University*, em 2001, o GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica para ser utilizado em escolas de Educação Básica e no Ensino Superior, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Segundo Hohenwarter (2007), idealizador do software, “a característica mais destacável do GeoGebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na zona de gráficos e vice-versa”.

Especificamente em disciplinas de Cálculo, o GeoGebra tem sido objeto de muitas pesquisas em vários conteúdos. Podemos verificar esse fato em pesquisas envolvendo Limites e Continuidades (ROCHA, 2010; ALVES, 2010; MOURA, 2014), Séries e Sequências (FONSECA, 2012), Derivadas (GONÇALVES, 2012; GRANDE, 2013; PINTO, 2014; CUNHA, 2014; MARTINS JUNIOR, 2014; RICALDONI, 2014; ALVES, 2014; LOPES, 2015), Integrais (VOGADO, 2014; NASSARELA, 2014; REIS, 2015; BEZERRA, 2015).

Assim, o GeoGebra 3D se credencia como uma ferramenta tecnológica com enormes potencialidades para os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo.

.

1.5. Apresentando nossa pesquisa

A pesquisa desenvolvida foi delineada da seguinte forma:

1.5.1. Questão de Investigação

A partir de nossas leituras e, principalmente, da motivação advinda de nossas experiências discente e docente, elaboramos a seguinte questão passível de investigação:

Quais são as possíveis contribuições de sequências didáticas com a utilização do *software* GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis?

Tal questão de investigação se enquadra na linha de pesquisa de Educação Matemática no Ensino Superior, desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – Linha de Pesquisa 1: Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática.

1.5.2. Objetivos

Em nossa pesquisa, assumiremos como hipótese de trabalho que a utilização de *softwares* matemáticos pode contribuir para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a partir da visualização de regiões de integração, de superfícies e de sólidos relacionados a Integrais Múltiplas.

Como objetivo geral, estabelecemos:

- Identificar e analisar as possíveis contribuições de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis.

Como objetivos específicos, estabelecemos:

- Investigar o Ensino de Cálculo de Várias Variáveis, mais precisamente, o ensino de Integrais Múltiplas, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, apoiado no uso das tecnologias disponíveis;

- Elaborar, aplicar e avaliar sequências didáticas com o *software* GeoGebra 3D, relacionadas a construção de superfícies e sólidos, para o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis;

- Apresentar um conjunto de sequências didáticas com o *software* GeoGebra 3D, sob a forma de Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática, que possa contribuir para a prática docente de professores de Cálculo Diferencial e Integral.

1.5.3. Metodologia de Pesquisa

A metodologia prevê a realização de uma Pesquisa Teórico-bibliográfica analisando livros, artigos publicados em congressos e em revistas da área de Educação Matemática, teses e dissertações do banco de dados da CAPES, relacionados à Educação Matemática no Ensino Superior, com foco nas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM no Ensino de Cálculo.

A metodologia também prevê a realização de uma Pesquisa de Campo, no 1º semestre letivo de 2017, com alunos de Engenharia Elétrica, matriculados na disciplina Cálculo III, em uma faculdade particular da região metropolitana de Belo Horizonte – MG, a partir da elaboração, implementação e avaliação de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D relacionadas a diversos conceitos de Integrais Múltiplas.

1.5.4. Tarefas de Pesquisa

A partir da metodologia de pesquisa delineada anteriormente, estabelecemos as seguintes tarefas:

- Elaboração de atividades de sequências didáticas relacionadas a conceitos de Integrais Múltiplas, com a utilização do *software* GeoGebra 3D;

- Desenvolvimento e avaliação das sequências didáticas com os alunos de Engenharia Elétrica de uma faculdade particular da região metropolitana de Belo Horizonte – MG.

1.6. Estrutura da Dissertação

Após este Capítulo 1, no qual apresentamos uma discussão inicial e também algumas das principais motivações de nosso trabalho, caminhamos para o Capítulo 2, no qual discutimos a utilização de TICEM e aprofundamos a discussão sobre seu papel na formação de conceitos matemáticos, em geral e, mais especificamente, conceitos do Cálculo de Várias Variáveis.

Construindo nosso referencial teórico-bibliográfico, no Capítulo 3 discutimos a Teoria das Representações Semióticas, concluindo com sua implicação no ensino de Integrais Múltiplas.

No Capítulo 4, retomamos a contextualização de nossa pesquisa, bem como fazemos um detalhamento da metodologia e dos instrumentos de pesquisa.

Já no Capítulo 5, descrevemos e analisamos os dados obtidos a partir dos instrumentos de pesquisa adotados.

Nas Considerações Finais, apresentamos um conjunto de respostas à questão de investigação que propulsionou essa pesquisa e algumas recomendações a Professores de Cálculo de Várias Variáveis.

Capítulo 2

SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

> Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma, continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...
>
> Rubem Alves

2.1. Um panorama histórico das Tecnologias no cenário da Educação

Quando pensamos em tecnologias, é inevitável não nos remetermos a pensar em algo relacionado a computadores ou algo ligado às inovações tecnológicas do nosso mundo contemporâneo. Quando o homem passou a utilizar a pedra ou um pedaço de madeira para melhorar seu trabalho, podemos dizer que aí teve início a tecnologia. Podemos definir tecnologia como qualquer instrumento ou processo usado para alcançar melhorias no resultado de algum trabalho ou também, segundo Kenski (2008, p. 24), como o “conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade”.

A partir do momento em que estamos nos referindo ao âmbito escolar, em qualquer nível de ensino, o uso das tecnologias está sempre presente e não há como ignorá-las. A tecnologia seja qual for, ao longo dos tempos, sempre esteve atrelada a processos educacionais e, assim, ditou os caminhos a serem seguidos por ela. Bitencourt e Santos (2013) afirmam que:

> É importante observar que, quando reconhecemos o lugar central das tecnologias na organização das sociedades contemporâneas, entendemos que são elas, por consequência, um dos principais agentes transformadores dessas mesmas sociedades. Em relação à utilização de recursos tecnológicos no ambiente escolar não é diferente, ela (tecnologia) evolui junto com as necessidades e mudanças da sociedade. Desta forma, por ser a tecnologia imprescindível à educação – principalmente se considerarmos que seu emaranhado é constituído, dentre outros elementos, de comunicação, informação, conhecimento e criatividade (BITENCOURT e SANTOS, 2013, p.2).

Embora seja prudente dizer que os progressos tecnológicos foram estimulantes e ajudaram de certa forma os processos pedagógicos ao longo do tempo, a velocidade na qual os dois caminharam não foi a mesma. Filho (2012) afirma que as relações educacionais nem sempre acompanham as transformações tecnológicas introduzidas em nossa sociedade. Isso acontece mesmo observando que existe uma necessidade no meio educacional de se apropriar das tecnologias disponíveis, principalmente as de comunicação e informação, dando um novo sentido às práticas pedagógicas. Dessa forma, seria conveniente traçarmos um caminho, associando Tecnologia e Educação historicamente ao longo do tempo, mas pensando no termo tecnologia como a definição que tecemos a priori no primeiro parágrafo e levando em conta as considerações feitas até o momento.

Antigamente, todo conhecimento era transmitido por narrativas orais e o advento da escrita talvez seja o primeiro passo tecnológico que veio auxiliar o ensino. Aquilo que geralmente necessitava da presença de um mestre e de um aprendiz, com a invenção da escrita, passou a proporcionar a possibilidade dos dois não estarem simultaneamente juntos, mas compartilharem do mesmo conhecimento. As placas de argilas feitas pelos Sumérios por volta de 4000 a.C. e quase que simultaneamente a escrita egípcia, muitas delas encontradas nas pirâmides, historicamente foram o pontapé inicial para o desenvolvimento da escrita. O *volumen* uma espécie de folhas de papiro coladas e enroladas em um cilindro de madeira e o *codex* feito também com várias folhas de papiro ou de pele de animal costuradas (parecido com o que conhecemos como os livros atuais) são os objetos que podemos classificar como precursores dos livros.

Sabemos que muitas cópias a mão de inúmeros documentos eram feitas e disseminadas mundo a fora e, com isso, grande quantidade de conhecimento era passado de geração para geração e, consequentemente, de culturas para outras culturas; mas foi somente no século XV, com a invenção da imprensa, que os livros puderam ser produzidos e distribuídos em larga escala:

> [...] é no século 15, com a invenção da imprensa com os tipos móveis de Gutenberg que a produção de livros se estabeleceu criando uma nova dimensão para a humanidade: a cultura letrada. Os livros deixam de ser copiados à mão e passam a ser produzidos em série (PAIVA, 2009, p.17).

Esses acontecimentos revolucionaram os processos de informação e comunicação e, principalmente, os processos educacionais. Podemos notar isso pela afirmação de Kenski

(2008, p.10) que “com a escrita feita a mão e, depois, o livro, os processos interativos e comunicativos de ensino se ampliam no espaço e no tempo”.

Talvez, por um longo tempo, nada de interessante tecnologicamente tenha afetado a educação de maneira significativa até a invenção tecnológica da gravação e da reprodução de som, onde foi possível levar para dentro da sala de aula gravações de áudio. Essa invenção também possibilitou que o conhecimento ultrapassasse os muros das escolas, guiando o ensino por outros caminhos não tradicionais. Dalmolin e Maronez (2015) destacam que, na primeira tecnologia de gravação desenvolvida por Thomas Edison, já existia o intuito de usar a gravação para reprodução de livros. O rádio foi o principal instrumento potencializador para esse fato:

> A utilização do áudio na sala de aula, como elemento motivador do aprendizado, é recurso conhecido em todo o mundo e explorado de diversas formas, desde a década de 1930, quando seu veículo propulsor, o rádio, teve franco desenvolvimento (FILHO, 2005, p.165).

Outro artefato tecnológico que não poderíamos deixar de citar nesse percurso histórico, aliando a Tecnologia à Educação é a televisão, ou seja, o desenvolvimento da imagem áudio visual. Desde sua criação, por volta 1920, a televisão é um dos meios de comunicação mais populares do mundo e, dessa forma, foi inevitável que esse aparelho não fosse aproveitado para fins educacionais, mesmo sabendo que sua expansão e exploração comercial só se deu após a 2ª guerra mundial. Contudo, não podemos deixar de ressaltar que, antes da sua consolidação como um meio de comunicação e informação extremamente potente, a televisão teve suas primeiras experiências nos meios educacionais. Silva (2009) nos relata que:

> Havia uma forte tendência para a propagação das emissoras educativas. Várias experiências foram feitas pelas universidades americanas com aplicabilidades na esfera educativa. Em menos de dez anos, mais de 60 emissoras de televisão educativa estavam em operação e, entre 200 e 300 sistemas de televisão educativa em circuito fechado, foram instalados no sistema de ensino. Propagava-se o amplo uso da tecnologia, mais especificamente a televisão (SILVA, 2009, p.62).

O uso da televisão para fins educativos trouxe um debate relevante nos Estados Unidos na década de 1940, que vale a pena destacar. Depois que a televisão passou a ter o seu uso comercial regulamentado, um grande debate se criou em torno dos objetivos da sua utilização. Muitos defendiam que a televisão deveria ter uma programação livre, proporcionando um serviço de entretenimento e lazer. Outro grupo, composto por professores e líderes civis, apoiava uma programação educativa abrangente, planejada e coerente. Diante desse impasse, o

Conselho Norte Americano interveio e optou por uma televisão educativa sem lucro e não comercial. Mas esse modelo não foi à frente, pois como sustentar a estrutura televisiva sem lucro? Isso era impraticável. Dessa forma, o apoio de grandes corporações e fundos nacionais propiciou a criação de programas televisivos com o intuito de diminuir carências no ensino, tanto formal como informal. Silva (2009) atenta que todo esse imbróglio envolvendo a televisão e a educação nos Estados Unidos, serviu para demonstrar que a qualidade é um fator que deve ser mais relevante no ensino do que apenas a quantidade e, principalmente, que a tecnologia em questão era um meio e não um fim. Essa discussão é importante pois, pela primeira vez na história, pode-se observar uma preocupação em como a tecnologia estava sendo usada para fins educativos. Silva (2009) ressalta essa preocupação da seguinte forma:

> Para a utilização das tecnologias da educação como instrumentos educativos, eram necessários cuidados básicos, com propósitos claros, visando atender objetivos como: onde, quanto, quantas vezes e com que propósito se pode utilizar o equipamento na educação (SILVA, 2009, p.64).

Depois de falarmos de todas essas tecnologias e relacioná-las aos processos educacionais ao longo do tempo, devemos nos ater agora em um dos principais artefatos tecnológicos da era moderna, o computador. Um longo caminho através do tempo foi percorrido até chegarmos a essa máquina que conhecemos e chamamos de computador nos dias atuais. Diante da necessidade humana de realizar cálculos de forma rápida e precisa, muitos pesquisadores apontam o ábaco (4000 a.C.) como ponto de partida desse caminho histórico. Depois de muito tempo, mas com o mesmo intuito, Blaise Pascal criou a *La Pascaline*, em 1642, primeira calculadora que era uma máquina automática, capaz de realizar cálculos de forma rápida e precisa, mesmo que somente operações de soma e subtração. Charles Babbage, em 1822, criou a chamada Máquina de Diferenças capaz, segundo o criador, de calcular funções de diversas naturezas (inclusive trigonométricas e logarítmicas). O mesmo inventor, anos mais tarde, projetou uma máquina analítica com uso de cartões perfurados para processamentos dos dados, mas devido à incapacidade tecnológica da época, ela não foi construída, embora esse projeto tenha servido de base para os computadores atuais.

Dessa forma, foi Alan Mathison Turing (1912-1954) que, em suas pesquisas, concluiu que seria possível criar uma máquina automatizada que possibilitasse materializar fisicamente a lógica humana e determinar a solução de qualquer cálculo representado em formato de um algoritmo, “baseando-se nos passos que um ser humano dá quando executa um determinado cálculo ou cômputo” (FILHO, 2007, p.75). Tais algoritmos seriam apresentados em forma de instruções que deveriam ser processadas de forma mecânica dentro da própria máquina, no que se tornou a primeira visão de um computador, um sistema que, de forma autônoma, realiza tarefas determinadas pelo programa (algoritmo) com o qual está equipado.

Somente durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945), com avanços tecnológicos consideráveis, com intuito de revelar mensagens criptografadas e de criar armas mais inteligentes, que tais máquinas começaram a se desenvolver e passaram a ser chamadas de computadores. Assim, Von Neumann, em 1945, apoiado na lógica booleana e com a tecnologia desenvolvida até o momento, definiu a arquitetura dos computadores utilizada até os dias de hoje. Muito se passou e muito mais tecnologias foram criadas e utilizadas para que o primeiro computador portátil e que podia ser usado por pessoas comuns chegasse a nossas mãos. Somente em 1976 isso aconteceu, com o Apple I. Anos depois, os computadores Lisa (1983) e Macintosh (1984) foram os primeiros a usar o mouse e possuir a interface gráfica como conhecemos hoje em dia, com pastas, menus e área de trabalho. Diante disso, não foi tão difícil dar outros passos para alcançar a tecnologia necessária até os nossos computadores atuais.

Entretanto, podemos nos perguntar: quando os computadores começaram a ser usados nas escolas e puderam contribuir para os processos educacionais? Segundo Borba e Penteado (2012), o computador:

> [...] se torna um fenômeno cultural da segunda metade do século XX depois de permear o mundo da ciência, da guerra e dos negócios empresariais e se espalhar por praticamente todas nossas atividades, direta ou indiretamente. É apenas tardiamente que a informática na educação se faz presente na escola (BORBA e PENTEADO, 2012, p.17).

O uso dos computadores em sala de aula, com certeza foi uma revolução nas práticas pedagógicas de todo o mundo. Para nossa surpresa e em contrapartida à citação acima, sua utilização na educação é tão remota quanto sua fabricação e comercialização em massa. Nos Estados Unidos, já na década de 1950, há relatos de experiências do seu uso na educação. Valente (1999, p.1) relata que "em 1955, foi usado na resolução de problemas em cursos de pós-graduação e, em 1958, como máquina de ensinar, no Centro de Pesquisa Watson da IBM e na Universidade de Illinois – *Coordinated Science Laboratory*".

É importante deixar claro que, inicialmente, os objetivos da utilização dos computadores nas escolas naquela época não eram os mesmos de hoje. A ideia de utilizá-los estava ligada em armazenar informação e, simplesmente, transmiti-la ao aprendiz. Segundo Valente (1999):

> Hoje, a utilização de computadores na educação é muito mais diversificada, interessante e desafiadora, do que simplesmente a de transmitir informação ao aprendiz. O computador pode ser também utilizado para enriquecer ambientes de aprendizagem e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento (VALENTE, 1999, p.1).

Somente com o advento dos computadores portáteis é que foi possível uma disseminação do seu uso nas instituições de ensino. A presença dessa tecnologia, principalmente nas escolas americanas, propiciou uma abordagem diferente frente às práticas escolares, pois o computador passou a assumir um papel importante e enriquecedor nos processos de ensino e aprendizagem. Programas de computador voltados para o ensino começaram a aparecer em larga escala nas escolas e pode-se notar que, a partir desse momento, as práticas desenvolvidas já começavam a ter o mesmo intuito que possuem atualmente:

> De acordo com estudos feitos por *The Educational Products Information Exchange (EPIE) Institute*, uma organização do *Teachers College*, da Universidade de Columbia, foram identificados em 1983 - três anos após a comercialização dos primeiros microcomputadores - mais de 7.000 pacotes de *softwares* educacionais no mercado, sendo que 125 eram adicionados a cada mês (VALENTE, 1999, p.4).

Vale ressaltar que, no final da década de 1960, a França também foi um país que investiu na implantação da informática na educação. O interessante é que, antes do início, houve uma preocupação latente dos envolvidos sobre os objetivos da implantação dessas tecnologias no ensino. Note que essa foi uma grande diferença em relação aos Estados Unidos, que não discutiram antecipadamente os propósitos do uso dos computadores na educação. Educar para dominar a informática ou educar através da informática? (VALENTE, 1999). Essa ainda hoje é uma reflexão muito interessante e sobre a qual devemos sempre estar atentos.

O uso dos computadores nos meios de ensino ganhou ainda mais ênfase e se tornou mais popular, quando a internet passou a ser oferecida com maior facilidade. Sendo atualmente uma das Tecnologias de Informação e Comunicação mais populares do planeta, ela foi criada basicamente pelos militares americanos durante a Guerra Fria, na década de 1960. Quando a Guerra Fria terminou, ela foi cedida aos cientistas que, mais tarde, repassaram-na para as universidades. Com o seu desenvolvimento para www (*world wide web*), muitas possibilidades de conteúdo foram trazidas para a rede, tornando-a mais atraente e popular. “Intensificando os avanços obtidos, a Internet adentra no campo acadêmico, passando a se constituir como importante elo entre equipamentos e, o que é mais relevante, contribuído para intensificar a produção do conhecimento científico” (COSTA e OLIVEIRA, 2004, p.10).

Fica evidente que, com a internet, as relações entre Educação e Tecnologias da Informação e Comunicação ficaram mais estreitas e estão se consolidando cada vez mais. A internet permitiu uma maior dinâmica nessas relações, facilitando com que essas tecnologias adentrassem as salas de aula e principalmente, que a sala de aula chegasse em nossas casas, como no caso que denominamos Educação a Distância. Embora a Educação a Distância seja uma prática bem mais antiga como se pensa, a tecnologia possibilitou que ela se tornasse mais popular e também acessível. O uso da internet também possibilitou a professores e alunos usarem recursos que antes não eram tão acessíveis e disponíveis com a facilidade usual de hoje, principalmente, recursos disponíveis *online* e s*oftwares* educacionais livres. Filho (2012) argumenta que toda essa perspectiva acarreta uma:

> [...] forma diferenciada de apropriação do saber, englobando formas de obter informações a partir de uma fonte inovadora de transmissão das informações, provocando uma revolução na forma de aprender, devido à rede de informações e conhecimentos colocados à disposição do aluno, com acesso fácil e rápido, infinitamente maior do que o acesso no âmbito da escola tradicional (FILHO, 2012, p.36).

Até esse ponto da nossa discussão, estamos nos remetendo ao uso das tecnologias no âmbito educacional, na medida em que as essas se tornavam acessíveis e, de alguma forma, eram incorporadas pelos processos de ensino. Agora, seria de grande valia começarmos a discutir sobre o uso das tecnologias para a formação de conceitos específicos, no caso, conceitos voltados para o ensino da Matemática, o que será feito a seguir.

2.2. Um olhar sobre as Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática

Nesse tópico, vamos nos ater principalmente à discussão sobre o uso das tecnologias disponíveis e sua relação com os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos relacionados à Matemática. Na literatura disponível, muitos autores e pesquisadores preferem chamar esses recursos de TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação, mas por uma opção metodológica e pertinente, principalmente por estarmos pisando no solo da Educação Matemática, achamos melhor usarmos o termo TICEM – Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática, mais abrangente e mais adequado ao que vamos discutir.

As discussões sobre o uso das TICEM estão cada vez mais presentes na literatura atual e vem despertando o interesse de muitos pesquisadores nessa área, embora, segundo Fiorentini e Lorenzatto (2006), a incorporação das tecnologias no ensino e aprendizagem de Matemática tenha se dado a partir do interesse de pesquisadores em Educação Matemática, já na década de 1970.

O ensino da Matemática possui suas especificidades e seus hábitos próprios. Tradicionalmente, o que observamos em sala de aula são práticas que privilegiam o quadro, o giz, as aulas expositivas e o livro didático, com atividades que muitas vezes não são motivadoras e que realmente não agregam valor aos processos de ensino e aprendizagem. Calil (2011, p.47) descreve que "a Matemática como é ensinada nas escolas, por mais que se fale em transformação, ainda possui um caráter 'tradicional', ou seja, o professor detém o conhecimento e 'passa' para o aluno que é o aprendiz".

Apesar dessa realidade ser evidente em inúmeras escolas, muitos professores, percebendo a necessidade de ultrapassar as barreiras tradicionais do ensino, principalmente no ensino da Matemática, estão buscando outros recursos para não serem engolidos por práticas educacionais que se mostram sem um objetivo claro e sem atratividade na escola contemporânea. Talvez um dos principais recursos que vem sendo utilizado, seja o uso da tecnologia nas suas práticas pedagógicas, não importando o nível de ensino, do infantil ao ensino superior. Oliveira, Costa e Moreira (2004) evidenciam essa situação:

> A sala de aula não pode ser percebida hoje do mesmo modo como a percebia quem aprendia o mundo basicamente através dos livros e da tradição oral. A captação da realidade através das novas tecnologias potencializa o envolvimento multissensorial, afetivo e intelectual dos indivíduos inseridos nos sistemas de informações, o que demanda novas pesquisas relativas ao fenômeno educativo (OLIVEIRA et. al, 2004, p.112).

As tecnologias que estão disponíveis já invadiram a escola e entraram sem bater na porta da sala de aula, principalmente, pelos alunos que estão a cada dia, mais inseridos e dominados por elas. Esse fato inevitavelmente modifica as relações com o saber, com o ensino e o com aprendizado, indo muito mais além do que podemos imaginar. Com elas, os alunos podem explorar novas situações, além de fazer novas conjecturas, desde que o uso dessas tecnologias seja bem definido e com propósitos claramente voltados para os processos de ensino e aprendizagem. Essa perspectiva é caracterizada pelas novas maneiras de perceber e reconhecer o mundo, o que pode favorecer a produção do conhecimento e, principalmente, a aprendizagem. Segundo Oliveira et al (2004), toda essa conjuntura gera:

> [...] novas interfaces, que tem influenciado os mecanismos de interação com o saber, distintas daquelas tradicionalmente observáveis e que vinham servindo como balizas para o processo didático pedagógico. O surgimento dessas interfaces exige ajustes nas diferentes estratégias utilizadas pelos professores na condução do processo de ensino/aprendizagem (OLIVEIRA et al, 2004, p.112).

Até aqui, estamos nos referindo às tecnologias no ensino de Matemática de modo geral, principalmente, as digitais. É importante ponderar nesse momento o que vamos considerar tecnologia, já que no tópico anterior nos apropriamos de um conceito de tecnologia mais abrangente para descrever um longo processo histórico tangente às relações educacionais. Aqui, não iremos nos apegar a um recurso qualquer, mas vamos direcionar nossas reflexões nas relações entre os processos educativos e o uso de computadores.

Continuando nossa discussão, utilizar recursos computacionais no ensino de Matemática, não é apenas somá-los à educação de maneira simples e pragmática. Não é somente seguir regras e determinações já pré-estabelecidas; é preciso que haja interações, buscando uma transformação das relações de ensino e aprendizagem. Borba e Villarreal (2005) destacam que não há mudanças boas ou ruins para o ensino com a informática, mas sim uma transformação na forma de ensinar.

Dessa maneira, pensar em práticas educativas que privilegiem essa interação se faz necessário, diante do crescente uso das TICEM. Práticas educativas que envolvem o uso de tecnologias verdadeiramente coerentes, com propósitos bem definidos e que possam gerar resultados satisfatórios aos processos de ensino e aprendizagem, não são tão simples de se pensar:

> Quando nos propomos a introduzir as TIC na educação, faz-se necessário pensarmos cuidadosamente sobre a escolha da tecnologia e, consequentemente, do *software* a ser utilizado na sala de aula, devendo também está escolha atender e contemplar os objetivos projetados pelo professor ao mediar o processo educativo (ESCHER, 2011, p.30).

Devemos nos ater a um ponto importantíssimo no que tange ao uso das tecnologias. Muitas vezes, escutamos a afirmação de que simplesmente ao usarmos os recursos tecnológicos disponíveis, estaremos resolvendo muitos problemas criados pela educação tradicional. Essa afirmação é errônea. Embora possamos até amenizar alguns problemas, essa prática não pode ser pensada como salvadora do grande número de problemas existentes, principalmente no ensino de Matemática. Guimarães et al (1987), diante dos primeiros passos do uso do computador nas escolas, já deixavam bem claro que:

> O computador, em si, como tecnologia, não resolverá os grandes problemas educacionais hoje enfrentados no Brasil. O que ele pode, isto sim, é se tornar agente de substantiva mudança no processo de ensino/aprendizagem, quando usado de maneira adequada (GUIMARÃES et al, 1987, p .42)

Na verdade, temos que entender que o uso de tecnologias no ensino de Matemática deve ser percebido como uma ferramenta para auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem. O que se espera é que as práticas de ensino se apoiem nas tecnologias disponíveis, não como uma solução definitiva, mas sim como uma alternativa, que vem a cada dia se tornando uma realidade dentro das escolas. Cunha (2014) reforça o que estamos discutindo, pois, segundo ele:

> No ensino da Matemática, a utilização das tecnologias é considerada como uma prática alternativa que visa dar novos rumos às relações entre professor e aluno. Seu uso vem aumentando sensivelmente e é de suma importância a reflexão acerca da forma como estão sendo utilizadas (CUNHA, 2014, p.46).

Outro ponto no qual devemos e queremos focar é a questão do professor. Para que tais práticas de ensino apoiadas em recursos tecnológicos sejam possíveis, é necessário que haja uma mudança de postura do professor. É necessário que ele esteja aberto a mudanças, esteja disposto a buscar novas práticas para a sua sala de aula. Essas mudanças, tão esperadas no processo de ensino e aprendizagem com o uso das TICEM, só acontecem quando o professor entende o real sentindo do uso dessas tecnologias no âmbito escolar. Entretanto, sabemos que todos nós que atuamos como educadores, somos tomados por crenças e valores, por vezes tão enraizados que se tornam um dificultador para a busca de novas práticas de ensino, principalmente aquelas que se conectam com as tecnologias. Referente a esse papel do professor como um agente passivo frente à possibilidade de mudança, Mesquita et al (2010) afirma que:

> As concepções do professor podem determinar o estilo do ensino, suas práticas, apontar caminhos fundamentando decisões, sendo interagidas e filtradas pelos valores e crenças pessoais, constituindo, assim, um saber que orienta a prática profissional (MESQUITA et al, 2010, p.5).

Outra questão é que muitos professores de Matemática não aderem ao uso das tecnologias, pelo simples fato de não terem o domínio necessário ao manusear esses recursos. Então, é muito mais conveniente ficar situado na sua zona de conforto do que sair e se arriscar em algo diferente e que não domina plenamente. Obviamente, alcançar algo diferente e se manter numa zona de risco, como o uso de tecnologias nas práticas de ensino, torna-se impossível sem a busca constante por novos conhecimentos, segundo Borba e Penteado (2012).

Por outro lado, quando os professores realmente entendem o verdadeiro sentido e relevância da busca por novas práticas apoiadas no uso da tecnologia para o ensino da Matemática, todos acabam ganhando, tanto o professor, quanto o aluno. Segundo Fiorentini (2013), quando a Matemática se apropria do uso de tecnologias se faz algo inovador, possibilitando uma interação entre os agentes educacionais. Ao mesmo tempo, essas novas práticas viabilizam ressignificações constantes na concepção e na maneira de abordar a Matemática pelos professores. Assim, eles podem experimentar novas maneiras de ensinar e apresentar aos alunos novas perspectivas de aprendizagem. Kenski (2008, p.103) aponta que “a tecnologia utilizada com criatividade, pode alterar a rotina existente dentro de sala de aula, transformando-a em interesse e colaboração, tornando os alunos em cidadãos participativos”.

O uso do computador ou qualquer outro recurso das TICEM, desde que conscientes e objetivando o que discutimos até agora, pode acarretar muitos benefícios aos processos de ensino e aprendizagem. O ensino da Matemática em si, diante dos mais variados conteúdos que essa disciplina aborda, já traz inúmeras possibilidades para que essas práticas de ensino sejam introduzidas no cotidiano escolar. Muitas pesquisas apontam que o uso de tecnologias em conteúdos específicos como tabelas, gráficos, Geometria, Álgebra e outros, favorecem de forma real o ensino e, consequentemente, a aprendizagem. Essa abordagem dos conteúdos da Matemática a partir de recursos computacionais pode fazer uma conexão entre o que o aluno geralmente vê em sala ou nos livros numa linguagem formal e abstrata, com os conhecimentos já existentes que ele carrega na sua estrutura cognitiva; mas apenas inserir o computador nas aulas de Matemática não dará sentido aos processos de ensino e aprendizagem e nem possibilitará essa conexão acima apontada; é necessário que haja uma interação entre o sujeito, no caso, o aluno e o objeto em estudo:

> A construção do conhecimento depende da ação do sujeito sobre a informação disponível, de modo a atribuir-lhe significado. Essa ação constitui, portanto, o processo de apropriação da informação pelo sujeito, o que se dá numa relação dialética, estabelecida entre sujeito e objeto do conhecimento (COSTA e OLIVEIRA , 2004, p.20).

As perspectivas para o uso dos recursos tecnológicos, em especial os computadores, são inúmeras. A própria Matemática permite diversas abordagens. Diante desse fato, pensar em como usá-lo, cabe ao professor, que deve levar em conta muitos fatores, dentre aqueles que discutimos até aqui. Pensar em boas práticas de ensino aparadas nas TICEM demanda do professor, antes de mais nada, uma reflexão antecipada que deve continuar ao longo do processo de utilização das TICEM em sua prática pedagógica.

Até o presente momento, discutimos assuntos relacionados às TICEM e ao ensino e aprendizagem da Matemática de forma geral, sem nos atermos em um conteúdo ou nível de ensino específico. Queríamos com essa discussão debater alguns pontos que acreditamos ser relevantes e que, geralmente, são levados à tona quando se toca no assunto Tecnologias no Ensino de Matemática. A seguir, vamos discutir o uso das TICEM especificamente no Ensino Superior e, mais precisamente, no ensino de Cálculo de Várias Variáveis.

2.3. As TICEM no ensino de Cálculo de Várias Variáveis

Não diferentemente do que discutimos até esse ponto, o uso das TICEM na esfera educacional superior também vem gerando intensas e acirradas discussões entre os interessados no assunto. Muitas pesquisas foram desenvolvidas ao longo dos anos, o que vem proporcionando ao meio acadêmico, principalmente entre professores de Matemática de cursos superiores, a busca por novas práticas educacionais para modificar os processos de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Particularmente, o ensino de Cálculo tem se mostrado um ponto crucial nesses debates envolvendo as TICEM no âmbito da Educação Superior, talvez por se configurar numa disciplina importante em muitos cursos de graduação e demandar aos alunos, uma grande gama de conhecimentos prévios, aliado ao tradicional ensino com uma característica demasiadamente formal e abstrata. Diante desse cenário, o uso de recursos tecnológicos aparece como uma saída interessante para o trabalho pedagógico do professor, o que vem produzindo bons resultados nos processos de ensino, segundo muitas pesquisas. Barufi (1999) evidencia a importância do uso de recursos tecnológicos, principalmente, o computador no ensino de Cálculo:

> Ferramenta extremamente útil para propiciar a formulação de inúmeros questionamentos, reflexões e análises que fazem com que a sala de aula se torne um ambiente onde relações podem ser estabelecidas, possibilitando articulações diversas e, portanto, a construção do conhecimento (BARUFI, 1999, p.176).

Devido aos nossos interesses de pesquisa, iremos focar nossa discussão no ensino de Cálculo de Várias Variáveis. Quando buscamos na literatura, encontramos poucas pesquisas relacionadas ao uso das TICEM voltadas ao Cálculo de Várias Variáveis, com destaque para algumas poucas pesquisas como Henriques (2006), Imafuku (2008), Miranda (2010), Alves (2011) e Oliveira (2014). Por mais que esse conteúdo permeie poucas pesquisas, ele desempenha papel primordial nos estudos e compreensão de conteúdos do Ensino Superior, como por exemplo, as derivadas de funções de duas variáveis, os gráficos de funções de duas variáveis e, especialmente, as Integrais Múltiplas, que é o objeto de estudo dessa pesquisa. Dessa forma, pensar e buscar novas alternativas de abordagem de tal conteúdo em sala de aula se faz necessário, para que possamos fugir do rotineiro ensino de “Cálculo II e/ou III” tradicional nas universidades brasileiras.

O Cálculo de Várias Variáveis situa-se em $\mathbb{R}^3$, ou seja, no espaço tridimensional. Observa-se, dentro de sala de aula, que muitos alunos demonstram enormes dificuldades em trabalhar com funções no âmbito tridimensional, principalmente, quando se faz necessário esboçar gráficos de superfícies e, a partir deles, obter e interpretar informações importantes que serão usadas nas resoluções de problemas propostos. É notável que a utilização de papel e lápis para a aprendizagem desses conteúdos apresenta enormes barreiras, tanto para quem ensina como para quem aprende. Henriques, Attie e Farias (2007, p.78) reforça essa concepção quando afirma que “em muitos casos, a representação gráfica no espaço tridimensional é difícil de fazer no ambiente *papel/lápis*, que só tem como base o plano de duas dimensões (o papel)”. Oliveira (2014) ainda aponta outros problemas que influenciam no aprendizado do Cálculo de Várias Variáveis, como a não consolidação de conceitos básicos relativos ao conteúdo de funções de uma variável:

> Sabemos que muitas das dificuldades com o ensino e a aprendizagem do Cálculo de várias variáveis aparecem em decorrência de deficiências na aprendizagem de conceitos da Matemática da Educação Básica. Outras se referem aos conceitos relativos ao Cálculo de uma variável e às características do pensamento matemático avançado. Porém, muitas delas são específicas do Cálculo de várias variáveis (OLIVEIRA, 2014, p.22).

Até mesmo para o professor lidar em suas aulas com conteúdos tais como gráficos de funções de mais de uma variável, torna-se um grande desafio, o que pode indicar uma tarefa não muito simples, mesmo no caso de professores experientes e acostumados a lecionar essas disciplinas. O uso de recursos tecnológicos como *software*s para esboçar tais gráficos, pode ajudar durante as aulas, contribuindo para a didática do professor e para a visualização por parte dos alunos. De acordo com Henriques, Attie e Farias (2007), a representação tridimensional em um ambiente bidimensional, como o papel, depende exclusivamente da capacidade do indivíduo de realizar o desenho. Sabemos que não são todos que possuem essa capacidade e, assim, podemos considerar essa uma boa razão para se utilizar recursos computacionais.

Os *softwares* são ferramentas que potencializam e melhoram a dinâmica das aulas, proporcionando ganhos consideráveis nos processos de ensino e de aprendizagem. Wilges (2006, p.25) enfatiza que os "ambientes informatizados surgem para que o educador e educando explorem um espaço alternativo para trocar saberes e para a construção de conhecimento". São vários os *softwares* disponíveis que podem ser empregados para auxiliar o ensino do Cálculo de Várias Variáveis. Algumas pesquisas indicam o uso do Maple, Maxima, Winplot, GeoGebra, além de calculadoras gráficas. Entretanto, antes de qualquer utilização de tecnologias nas práticas pedagógicas, é necessário que o professor:

> [...] saiba avaliar a situação problema e identificar a abrangência do campo conceitual. Essa avaliação deve levar em consideração as características do *software* e a classificação centrada no conteúdo e também o que professor julgar de qualidade de aprendizagem do aluno no processo (WILGES, 2006, p.25).

Usar os recursos computacionais disponíveis requer do professor, preparo, critérios e atenção para direcionar sua prática de acordo com as necessidades dos processos de ensino e aprendizagem. Quando nos referimos ao Cálculo de Várias Variáveis, o cuidado deve ser redobrado, uma vez que os objetos matemáticos que são manipulados e estudados se apresentam propícios à utilização desses recursos. A escolha do *software* a se utilizar, como será utilizado e com quais objetivos deve ser utilizado, sempre são questões que devem prevalecer, para que as contribuições à aprendizagem sejam as mais significativas possíveis.

2.3.1. Algumas pesquisas sobre as TICEM no ensino de Cálculo de Várias Variáveis

Algumas pesquisas apresentam propostas e alternativas para se trabalhar com o Cálculo de Várias Variáveis, aliando as tecnologias disponíveis às práticas de ensino. Como já mencionamos, existem poucas pesquisas neste recorte, quando comparamos com as pesquisas relacionadas às tecnologias no ensino de Cálculo de Uma Variável. Vamos delinear, brevemente, o que desenvolveram e discutiram alguns desses trabalhos.

Henriques (2006), em sua Tese de Doutorado desenvolvida na França, com foco de pesquisa nas universidades brasileiras e francesas, trata do ensino e aprendizagem de Integrais

Múltiplas, as quais são utilizadas geralmente para o cálculo de áreas e volumes. Seu principal objetivo foi compreender as dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem desse conteúdo e, consequentemente, entender como o *software* Maple pode ajudá-los a superar tais dificuldades. Sua abordagem a partir do Maple busca favorecer interações entre representações analíticas e gráficas das Integrais Múltiplas. O autor desenvolveu uma técnica chamada "crivo geométrico", amparado pelo *software* Maple para representar graficamente as regiões de integrações tanto para integrais duplas como para integrais triplas. Henriques (2006) aponta em sua pesquisa que o uso de *softwares* no Cálculo de Várias Variáveis para esboçar regiões de integrações e, consequentemente, montagens e soluções de Integrais Múltiplas pode se tornar:

> [...] um meio de aliviar o estudante dessa tarefa que é árdua, mas essencial a ele no tratamento do problema. Em outras palavras, se os alunos precisam de uma representação gráfica que parece ser onerosa, o Maple pode desempenhar papel fundamental, porque pode permitir uma melhor cobertura desta representação gráfica[1] (HENRIQUES, 2006, p.267, tradução nossa).

Imafuku (2008) desenvolveu sua Dissertação de Mestrado com o objetivo de verificar as dificuldades e conceitos que alunos do 4º e 5º período de um curso de Licenciatura em Matemática possuem na transição da abordagem das funções de uma variável para duas variáveis. O trabalho não utilizou recursos computacionais, mas trouxe contribuições relevantes que permitem refletir sobre o panorama existente nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo de Várias Variáveis, reflexão essa que nos direciona para o uso de recursos computacionais no ensino desses conteúdos. Imafuku (2008) aponta em sua pesquisa que:

> [...] muitas dificuldades são manifestadas já no início do estudo das funções de duas variáveis, pois grande parte dos estudantes não compreende o sistema tridimensional, ou seja, a representação gráfica do $\mathbb{R}^3$. Constamos esse fato nas questões que envolviam conversão do registro numérico para o gráfico, em relação à representação de pontos no sistema 3D (IMAFUKU, 2008, p.156).

Dentre as pesquisas que destacam o uso de recursos computacionais inseridos nos conteúdos do Cálculo de Várias Variáveis, podemos citar também, Miranda (2010), que em sua Dissertação de Mestrado, utilizou o *software* Winplot para desenvolver atividades relacionadas

[1] [...] peut être un moyen pour décharger l'étudiant de cette tâche qui lui est coûteuse, mais indispensable pour le traitement du problème. Autrement dit, si les étudiants ont besoin d'une représentation graphique qui paraît coûteuse, alors *Maple* peut jouer un rôle capital, car ce logiciel peut permettre une meilleure prise en charge de cette représentation graphique.

ao esboço de gráficos de duas e três variáveis. O *software* Winplot se apresentou como uma ferramenta importante para traçar gráficos de superfícies em $\mathbb{R}^3$, juntamente com suas curvas de nível. O pesquisador apontou que o uso do recurso computacional, aliado às atividades propostas, contribuiu para a aprendizagem de gráficos em três dimensões, tanto na perspectiva metodológica quanto na perspectiva do recurso se mostrar importante e necessário para que os alunos compreendessem as formas das superfícies e curvas de níveis. Miranda (2010, p.127) ainda destacou que o uso do "*software* auxiliou o processo de construção, visualização, comparação e comprovação das conjecturas dos aprendizes, contribuindo de maneira significativa para a sua aprendizagem dos conteúdos pretendidos".

Alves (2011) também desenvolveu uma pesquisa relacionada ao ensino e aprendizagem do Cálculo de Várias Variáveis. O objetivo do trabalho foi descrever e identificar as categorias do raciocínio intuitivo ao longo das fases de ensino utilizando uma sequência de aprendizagem. *A priori*, o autor levantou questões relacionadas ao Cálculo de Uma Variável e, posteriormente, discutiu a transição interna para o Cálculo de Várias Variáveis, dando ênfase ao fato de que existem poucas pesquisas sobre o conteúdo. Os *softwares* utilizados na pesquisa (GeoGebra e Maple) mostraram-se consistentes para as atividades aplicadas aos alunos, evidenciando elementos significativos no que diz respeito à transição interna do Cálculo de Uma Variável para o de Várias Variáveis. Alves (2011) aponta que o uso de *softwares* em sala de aula:

> [...] serve para quebrar parte da rotina constante que o professor desenvolve diante do quadro branco, escrevendo e demonstrando cadeias gigantescas de inferências usuais no CVV, pois, perto do final, o estudante não se recorda mais de onde se partiu e muito menos onde o professor tenciona chegar (ALVES, 2011, p. 328).

Outra pesquisa a ser destacada é a Dissertação de Mestrado de Oliveira (2014) que teve como intenção investigar a produção de ideias matemáticas em relação a funções de duas variáveis em um ambiente coletivo de seres humanos com mídias, apoiando-se teoricamente nas ideias de Borba e Villarreal (2005). No âmbito do Cálculo de Várias Variáveis, o pesquisador centrou suas atividades, principalmente, em gráficos e domínios de funções de duas variáveis, curvas de nível e derivadas parciais. O *software* Maxima foi explorado para essas atividades considerando suas possibilidades e limitações. Com relação ao uso de recursos tecnológicos para representar gráficos referentes ao Cálculo de Várias Variáveis, Oliveira (2014) entende que as:

> [...] facilidades de obtenção das imagens, as possibilidades de movimentar essas imagens, as possibilidades de experimentar modificações de parâmetros, de usar os recursos algébricos e gráficos [...], assim como as possibilidades de explorar conceitos transitando entre as mídias informáticas, oralidade e escrita contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca dos temas estudados (OLIVEIRA, 2014, p.120).

Podemos notar que as pesquisas descritas se apoiam em diferentes *softwares* e que os resultados para o ensino e aprendizagem dos conteúdos do Cálculo de Várias Variáveis com o auxílio desses recursos são inovadores. É claro que existem limitações, mas nota-se que as possibilidades de êxito são enormes e que, portanto, cabe aos professores explorarem as potencialidades desses *softwares* da melhor maneira possível. Nessa direção Giraldo e Carvalho (2003, p.9) reitera que "os benefícios' ou 'malefícios' do uso de tecnologias no ensino não são intrínsecos à máquina, mas determinados pelo seu emprego em sala de aula".

2.3.2. A questão da visualização proporcionada pelas TICEM no ensino de Cálculo de Várias Variáveis

As TICEM, principalmente o uso de *softwares* no ensino de Cálculo em geral, têm proporcionado inúmeros aspectos benéficos nos processos de ensino e aprendizagem. A visualização talvez seja um aspecto de grande relevância e, por isso, achamos importante tecer algumas considerações e discutir tal assunto ao abordar o ensino de Cálculo de Várias Variáveis. Outro fato que nos propulsiona é a constante evidência da visualização na literatura existente sobre o ensino de Cálculo.

O conceito de visualização abrange várias áreas do conhecimento, como por exemplo a Psicologia, a Pedagogia e a Matemática. Com essa perspectiva, podemos definir visualização de uma maneira mais abrangente, segundo Flores, Wagner e Buratto (2012, p.32) como "habilidades visuais que os indivíduos possuem e podem desenvolver para interpretar imagens".

No campo da Educação Matemática, o conceito de visualização só começou a ser explorado por volta dos anos 1990. Presmeg (2006) aponta que a ênfase no meio social e cultural e as ideias construtivistas incorporadas na Educação deram importância aos aspectos visuais, levando ao reconhecimento das suas manifestações e transformações diante dos conhecimentos matemáticos. Dessa forma, Flores et al (2012) afirmam que:

> [...] somente nos anos 1990, com o reconhecimento da visualização na Educação Matemática, as pesquisas passam a problematizar aspectos antes não considerados, tais como, o desenvolvimento curricular; a eficácia da visualização para a aprendizagem matemática; a imagem e a representação (FLORES et al, 2012, p.36).

Assim, podemos definir visualização dentro do campo da Educação Matemática, de acordo com Presmeg (1986), como sendo um processo de construção e transformação de imagens mentais ou qualquer tipo de apontamento de natureza espacial, ambos usados na Matemática. Flores et al (2012) apresenta uma definição que vai ao encontro das ideias de Presmeg, definindo visualização como a capacidade do indivíduo para lidar com aspectos visuais para que o entendimento matemático seja alcançado.

O interesse pelos conceitos ligados à visualização para a construção do conhecimento matemático ultrapassou a margem do simples entendimento e atingiu o campo dos processos de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, muitas pesquisas ligadas à Educação Matemática, apoiadas aos conceitos de visualização, surgiram nos últimos anos. Uma linha que nos interessa nessa discussão está relacionada ao uso de tecnologias e *softwares* aliada aos processos de visualização.

Alguns autores (NEMIROWSKY e NOBLE, 1997; BORBA e VILLAREAL, 2005) defendem que esses recursos digitais possuem papel fundamental nesse contexto de visualização e, consequentemente, contribuem amplamente para o desenvolvimento e aprendizagem dos alunos.

Arcavi (2003) apresenta uma definição para a visualização que abrange aspectos desse contexto. O autor aponta o uso de tecnologias como uma possibilidade de potencialização do processo de visualização:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados[2] (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

O Cálculo de Várias Variáveis é um conteúdo que se apoia demasiadamente em estruturas gráficas, geralmente no sistema tridimensional, para apresentar conceitos importantes

[2] Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

relativos à sua natureza. Já dissemos em outros momentos e voltamos a frisar que, caminhar por essas representações gráficas nem sempre é tarefa fácil para o professor e muito menos para o aluno. A utilização de recursos computacionais para os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos do Cálculo de Várias Variáveis, principalmente os *softwares* de maneira exploratória, são ferramentas que possibilitam um rápido *feedback* quanto se tratam de aspectos relativos à visualização (BORBA e VILLARREAL).

É claro que as representações gráficas podem ser feitas à mão, desde que se tenha habilidades necessárias, utilizando lápis e papel, mas a capacidade que os *softwares* possuem para agilizar e fornecer componentes visuais são muito maiores. Esse fato possibilita alcançar uma nova dimensão para os processos de ensino e aprendizagem, alavancando os softwares como um objeto de aprendizagem importante. (BORBA, 2010, p.3) argumenta que "é possível dizer que o *software* torna-se ator no processo de fazer Matemática". Dessa forma, muitas possibilidades podem ser criadas a partir desses recursos tecnológicos que enfatizam os processos de visualização:

> - Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
> - A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
> - Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas. Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.
> - Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança [...] (BORBA e VILLARREAL, 2005, p.96).

Mesmo nas concepções iniciais do Cálculo, como por exemplo, conceitos de funções, limites, continuidades e outros conceitos relacionados, a visualização se mostra de suma importância, destacando-se como um componente crucial para o desenvolvimento dessas ideias (TALL, 1991). Dessa forma, não seria diferente para os conceitos do Cálculo de Várias Variáveis. É nítido que a utilização de *softwares* pode melhorar e agilizar as representações gráficas existentes no Cálculo de Várias Variáveis, o que pode proporcionar ganhos consideráveis. Villarreal (1999) enfatiza a importância do uso dos computadores como um fator que privilegia os aspectos visuais relativos aos conceitos do Cálculo:

> Dentre as múltiplas potencialidades que o computador oferece para a Educação Matemática, poder-se-ia dizer que o processo de visualização por ela favorecido ocupa um lugar privilegiado. Ao mesmo tempo, a importância da visualização no ensino, aprendizagem e construção dos conceitos de Cálculo é indicada como fundamental por muitos autores. Assim, a visualização se transforma em um denominador comum nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores (VILLARREAL, 1999, p.43).

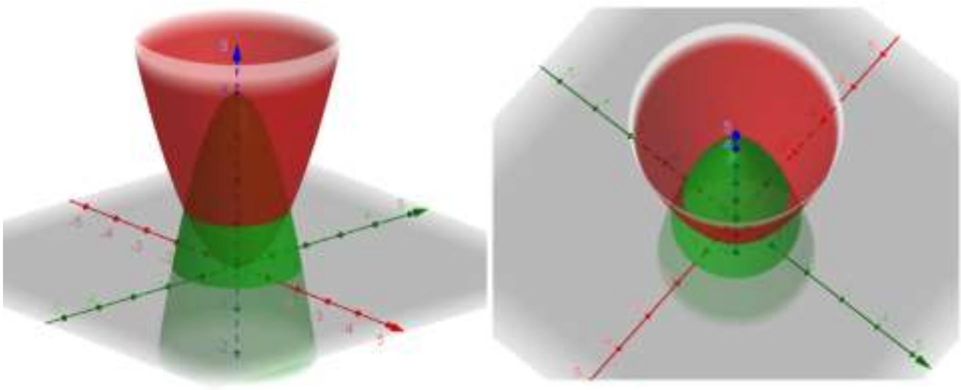
Podemos, de maneira conveniente, explorar um exemplo específico dentro do Cálculo de Várias Variáveis, o caso das Integrais Múltiplas. Quando estamos abordando questões que envolvem esse tipo de integral, tanto em integrais duplas quanto em integrais triplas, a questão da visualização é primordial. Problemas envolvendo cálculos de áreas, de volumes, centro de massa e outros, requerem o uso desses tipos de integrais. Assim, o uso de representações geométricas se faz necessário para o seu desenvolvimento, no que se refere às chamadas regiões de integração. Essas regiões nem sempre são tão simples de se esboçar e a utilização de recursos computacionais se apresenta como uma boa solução, já que a questão da visualização e, consequentemente, interpretação dessas regiões são o ponto principal no que tange às Integrais Múltiplas. Alves (2011) salienta que o uso de recursos como *softwares* podem permitir um controle sobre as variáveis visuais na interpretação geral das propriedades geométricas.

Sem dúvida, o uso de softwares potencializa a capacidade de visualização. Podemos observar esse fato no seguinte exemplo:

- Calcular o volume do sólido limitado pelos paraboloides $x^2 + y^2 = z$ e $-2x^2 - 2y^2 + 4 = z$ usando integrais triplas.

Podemos visualizar o sólido limitado e a região de integração a partir das superfícies dadas utilizando-se o *software* GeoGebra 3D, como vemos na figura a seguir:

Figura 1 – Região de integração



Fonte: Dados do pesquisador.

A construção da região de integração acima com o auxílio do *software* GeoGebra evidencia como os aspectos visuais facilitam a construção da integral tripla para o cálculo do volume do sólido compreendido entre os paraboloides. Notamos também que essa região de integração não é tão fácil de ser esboçada com os recursos que temos a nossa disposição costumeiramente, como papel e lápis. O *software* proporcionou o esboço de forma simples e com a possibilidade de mover a região no espaço tridimensional, explorando a visualização do objeto em várias posições diferentes. Segundo Borba (2010, p.4) tudo isso leva os estudantes a "criarem conjecturas, a descoberta de resultados matemáticos desconhecidos, a possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados e a chance de proporcionar novos experimentos".

É claro que existem muitos aspectos ligados à Educação Matemática que estão presentes em um simples problema, como o levantado no exemplo dado acima. A questão da visualização e o uso de *softwares* são apenas a ponta do *iceberg* dos assuntos relativos aos processos de ensino e aprendizagem de conteúdos de Cálculo.

No próximo capítulo, vamos abordar questões ligadas aos conceitos da Teoria das Representações Semióticas com implicações para o conteúdo de Integrais Múltiplas.

Capítulo 3

A CONTRIBUIÇÃO DA TEORIA DOS REGISTROS DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

> Talvez seja ingênuo, de nossa parte, querer melhorar o modo de ver de nossos alunos, a partir de um conjunto de atividades desenvolvidas em sala de aula, ou ainda, procurar explicar como a atividade do olhar se processa em cada um de nós. Talvez esta complexidade envolva muitos outros elementos que não estejam, unicamente, ligados às figuras em si, nem à capacidade visual de cada um de nós. Talvez fosse o caso de, antes de tudo, analisarmos o fato de que uma imagem é a representação de um modo de olhar.
>
> Flores (2003)

3.1. Apontamentos iniciais

As contribuições da Teoria dos Registros das Representações Semióticas para o campo da Educação Matemática no Brasil vêm ganhando um espaço cada vez mais abrangente e relevante nos últimos anos. Pesquisas e trabalhos surgem, a todo momento, apoiando-se de maneira sólida nas concepções desenvolvidas pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Essas pesquisas contemplam conteúdos de Matemática tanto do ensino fundamental e médio, quanto voltados para o Ensino Superior.

Foi a partir dos estudos de Raymond Duval (1986), centrados na Psicologia Cognitiva, que surgiu a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. No entanto, no Brasil, as primeiras publicações envolvendo essa teoria, surgiram em meados da década de 90 (COLOMBO, FLORES e MORETTI, 2008). Esses trabalhos buscam apresentar a teoria e principalmente conectá-la aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, ou de forma mais pormenorizada:

> O trabalho com registros de representação semiótica com alunos, ou mesmo com professores em processo de formação, possibilita uma melhor compreensão, não apenas do objeto matemático em estudo por parte dos estudantes, como também da especificidade da aprendizagem matemática (COLOMBO et al. 2008, p.61).

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas tem como objetivo analisar e compreender a maneira de se adquirir o conhecimento, amparado por uma abordagem cognitiva, onde o sujeito interage com vários elementos que fazem parte do ato pedagógico (DUVAL, 2003). O cerne da teoria está na complexidade cognitiva do pensamento humano e nas inúmeras relações que as representações implicam na compreensão matemática. Duval (2009) aponta que é impossível estudar os fenômenos ligados ao conhecimento sem se apoiar nas noções de representação. Para ele, as representações vão muito mais além do que o simples papel de comunicação.

Quando lançamos nosso olhar através da História da Matemática, podemos constatar que as representações estão incondicionalmente presentes no desenvolvimento da Matemática. Na Grécia Antiga e na Idade Média, a linguagem era a representação usada para exprimir todo o conhecimento matemático, baseado na intuição geométrica. Era através da linguagem, que o conhecimento era explicado e demonstrado. Posteriormente, uma nova forma de expressar e representar o conhecimento matemático, surgiu na Idade Clássica. Era a representação algébrica, feita através de símbolos, o que tornou a Matemática mais acessível e possibilitou seu desenvolvimento. Essa mudança de representação é descrita por Serfati (1997) como:

> [...] a passagem histórica progressiva entre uma escritura "grega" das matemáticas, puramente retórica, quer dizer, inscrita na língua comum, onde tudo se diz e se calcula em palavras, a uma escritura simbólica onde o texto é quase reduzido a uma concatenação de signos (letras, números, ou signos figurados), que é preciso de início decifrá-los, depois interpretar segundo regras sintáxicas e semânticas prescritas. (SERFATI, 1997, p.5).

Em sala de aula, frequentemente nos apoiamos no uso das representações para nos auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Geralmente usamos a linguagem, símbolos, tabelas, gráficos, códigos e outras representações para acessarmos os objetos matemáticos aos quais estamos nos referindo. Essas distintas representações devem ser consideradas nos processos de ensino da Matemática porque:

> [...] em Matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (DAMM, 2010, p.167).

Nesse capítulo, iremos discutir a Teoria dos Registros das Representações Semióticas que irão nortear e embasar nosso trabalho teoricamente. Iniciaremos com ideias sobre os conceitos de semiótica, abordando brevemente as concepções de Pierce, Frege e Saussure. Dessa forma, posteriormente aprofundaremos na teoria de Duval no campo da Educação Matemática.

3.2. Concepções sobre a Semiótica

Para estabelecermos uma definição do que seja semiótica, iremos inicialmente nos apoiar nas ideias de Santaella (2002), que alerta para um fato importante de que não devemos construir um conceito definitivo sobre semiótica, pois o mesmo se apresenta como um estudo em desenvolvimento e aberto a novas possibilidades de indagações e de investigações. Segundo Pontes e Dionízio (2014, p. 210) a "definição acabada do termo seria limitada devido a sua abrangência, além de impedir a curiosidade necessária que motiva o pesquisador na busca incansável pelo conhecimento".

Outro ponto importante e que consideramos relevante esclarecermos antes de propormos uma definição para semiótica, refere-se à questão do surgimento de duas ciências no século XX: a Linguística e a Semiótica (SANTAELLA, 2002). A linguística é a ciência da linguagem verbal, sendo, portanto, diferente de língua. A Semiótica é a ciência de toda e qualquer linguagem. Essa diferenciação é importante no que tange à questão de evidenciarmos, de maneira relevante, que a língua definida como materna é aquela que usamos para nos comunicarmos (falarmos), ou seja, usamos como linguagem verbal. Já a linguagem, impregnada de complexidade, constitui toda e qualquer forma de comunicação, tais como gráficos, sinais, setas, números, luzes e outros. Pontes e Dionísio (2014) destacam o porquê de, costumeiramente, a língua ser vista com mais destaque em relação à linguagem:

> Por uma questão histórica e cultural [...] a língua é entendida, equivocadamente, como único veículo de conhecimento, em detrimento a um intrincado sistema de representação do mundo, que possibilita, inclusive, o conhecimento manifestado na sua forma mais sensível, que pode ser expresso por outros tipos de linguagem (PONTES e DIONÍSIO, 2014, p.211).

A partir dos conceitos contemplados anteriormente, podemos apontar algumas definições, que consideramos relevantes para Semiótica, as quais irão orientar nosso trabalho. A semiótica possui suas origens na filosofia do período greco-romano. O termo semiótica, do grego *semeiótike* ou "artes dos sinais", é a ciência geral dos signos e da semiose, que estuda todos os fenômenos culturais, como se fossem sistemas de significação. Ela ocupa-se com o processo de significação, com aspectos conceituais, ao contrário da linguística que se preocupa com os aspectos sígnicos da língua. Santaella (2002) apresenta a seguinte definição para semiótica:

> A semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido. Seu campo de investigação e vasto [...] (SANTAELLA, 2002, p.2).

Para que possamos elucidar o conceito de semiótica, sintetizamos esse conceito segundo as concepções de Peirce, Saussure e Frege, os quais contribuíram para o desenvolvimento do conceito de Semiótica. Em nosso estudo, exploraremos o modelo de signo na concepção desses autores.

3.2.1. A Semiótica segundo Peirce

Charles Sanders Peirce (1839-1914), cientista-lógico-filósofo, nascido nos Estados Unidos da América, produziu trabalhos no final do século XIX e início do século XX, que trouxeram enormes contribuições para o campo da Semiótica. Peirce desenvolveu trabalhos em inúmeras áreas, tais como: Matemática, Física, Astronomia, Lógica, Biologia, Psicologia, Filosofia, Linguística, História dentre outras. Como uma pessoa pode ter interesse por tantas áreas assim? Santaella (2002) esclarece que o interesse de Peirce por essa variedade de temas, advém da sua característica de cientista. Mas a sua área de maior interesse e que demandou dele maior dedicação foi a Lógica. Mas não a lógica tradicional, e sim a Lógica das Ciências, a qual buscava entender seus métodos de raciocínio para estabelecer pontos em comum entre elas (SANTAELLA, 2002).

Com relação à Semiótica, Peirce traçou suas ideias inicialmente colocando a lógica como parte integrante do campo da teoria geral dos signos. Estendendo, posteriormente, a lógica a uma concepção mais ampla e dessa forma admitindo-a como sendo uma ampliação da Semiótica. Apoiado nas concepções da Fenomenologia, ele elaborou uma lista de categorias, chamadas de categorias universais e para evitar falsas associações com definições e termos já existentes, preferiu denominá-las de primeiridade, secundidade e terceiridade. Santaella (2002, p.34) fomenta que a partir da “observação direta dos fenômenos, nos modos como eles se apresentam à mente, que as categorias universais, como elementos formais do pensamento, puderam ser divisadas". Essas três categorias são definidas da seguinte maneira por Dionizio e Brandt (2012):

> A primeiridade se refere à categoria do sentimento imediato e presente das coisas, não apresentando nenhuma relação com outros fenômenos do mundo. A secundidade é quando um fenômeno primeiro é relacionado a outro fenômeno qualquer, sendo considerada a categoria da comparação. E a categoria terceiridade é quando um fenômeno segundo é relacionado a um terceiro (DIONIZIO e BRANDT, 2012, p.7).

Baseando nessas três categorias, Peirce destaca, que os signos devem se apresentar como um fenômeno da primeiridade, depois da secundidade e por fim da terceiridade (NÖTH, 2008). Pontes e Dionizio (2014) apontam um bom exemplo dado por Santaella (2002), para tal concepção de categorias criadas por Peirce:

> A autora exemplifica as categorias da seguinte forma: refere-se a cor azul como qualidade (primeiro), refere-se ao céu como lugar e tempo onde se encarna o azul (segundo) e por último refere-se ao azul do céu, azul no céu, como resultado de uma elaboração cognitiva ou uma síntese intelectual (terceiro) (PONTES e DIONIZIO, 2014, p.214).

Para compreender a semiótica peirciana com clareza, é necessário adentrar às suas concepções sobre signos. Para ele os signos representam "o axioma de que as cognições, as ideias e até o homem são essencialmente entidades semióticas. Como um signo, uma ideia também se refere a outras ideias e objetos do mundo" (NÖTH, 2008, p.61). Dessa maneira, quando nos deparamos com algum fenômeno ou necessitamos compreender algo, um signo é produzido na consciência, para que haja uma mediação entre nós e o fenômeno, isso é denominado de percepção. A representação do objeto através de um signo é também responsável pela compreensão, que por sua vez acarreta um novo pensamento e consequentemente a produção de um novo signo e assim continuamente. Para Peirce o significado de signo é um outro signo. O segundo traz a interpretação ou significado do primeiro (SANTAELLA, 2002).

O signo não é o objeto. Peirce indica que ele é somente a representação do objeto. Para ele o signo tem a função de interpretar na mente de alguém, algum objeto, fato ou ideia. Entretanto, esse objeto, fato ou ideia pode ser representado por diversos signos, mas que levarão a mesma interpretação. Os objetos são ditos dinâmicos ou imediatos. Segundo Santaella (2002), os autores Pontes e Dionizio (2014) esclarecem que:

> O objeto imediato pode ser representado pela aparência de um desenho, assim como a aparência gráfica ou acústica de uma palavra. O que este signo pode interpretar em uma outra pessoa ou outra mente está condicionado à natureza e potencial do signo, que consiste no objeto dinâmico (PONTES e DIONIZIO, 2014, p.215).

Essa divisão dos signos, de forma lógica, possibilitou a Peirce estabelecer uma complexa e intrincada rede de classificação triádica de interpretação, o que o levou, a diferenciar inúmeros níveis hierárquicos de signos. Contudo, nem mesmo Peirce foi capaz de explorar todas as possibilidades que essa classificação poderia proporcionar, argumentando que isso seria trabalho para futuros pesquisadores.

No que tange ao campo da Matemática, Duval (2011, p.33) considera, que o mais útil para analisar a aquisição de conhecimento matemático pelos alunos a partir das ideias de Peirce, é a "partição tricotômica das representações *em função* DE SUA RELAÇÃO COM O OBJETO *que elas evocam*". Esse aspecto será abordado nas concepções de Duval sobre a Semiótica e em sua Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Na seção seguinte sintetizaremos as ideias de Saussure que consideramos necessárias para fundamentar os conceitos de Semiótica.

3.2.2. A Semiótica segundo Saussure

Ferdinand de Saussure (1857-1913) é considerado o fundador da linguística moderna. Sua principal contribuição para a semiótica se deve ao seu projeto de teoria geral de sistemas de signos, a qual chamou de *semiologia* (NÖTH, 2005). Saussure teve uma carreira acadêmica bem-sucedida após estudar em Leipzig (de 1876 a 1880), em Sorbone (de 1881 a 1891) e ocupar uma cadeira na Universidade de Genebra (de 1891 a 1912). As contribuições para a semiótica se deram apenas em três cursos ministrados por ele no período de 1907 a 1911. Foi através desses cursos, de Linguística Geral, que Saussure desenvolveu suas ideias sobre a linguagem e os sistemas sígnicos. Pontes e Dionizio (2014) comentam que:

> No primeiro desses cursos apenas seis alunos se matricularam: no segundo foram 11 alunos e, no terceiro 12. Muitos manuscritos desses cursos foram destruídos pelo próprio autor. Com isso a publicação do livro "Curso de Linguística Geral" de Saussure, por Charles Bally, Albert Sechehaye e Albert Reidlinger, em 1916, somente foi possível a partir de anotações de sete de seus estudantes (PONTES e DIONIZIO, 2014. p.217).

Saussure propôs uma definição para signo um tanto quanto diferente e revolucionária para o que se pensava sobre o assunto, deixando as concepções clássicas de signo de lado. A sua definição de signo “não retoma a propriedade comum de evocação de qualquer outra coisa, como também leva a substituir a noção de sistema semiótico pela de signo” (DUVAL, 2011, p.29). Para Santaella (2002), a grande revolução na teoria de Saussure está no centro da noção de estrutura, qualquer mudança ou alteração dos elementos que constituem a estrutura da língua, por menor que seja, causa alteração em todos os demais elementos do sistema. Dessa forma, sua teoria descreve os mecanismos linguísticos gerais e não línguas particulares.

Nessa perspectiva, as ideias de Saussure apontavam para o desenvolvimento de uma ciência da linguagem verbal, a qual deveria ser mais ampla e teria como objeto de estudo todos os sistemas de signos ligados à vida social. Ele a denominou de Semiologia. Para ele, essa nova ciência ensinaria em que consistiam os signos e quais leis poderiam regê-los.

> Para a elaboração das leis dessa nova ciência denominada Semiologia, seria necessário, então, utilizar a Linguística, que Saussure considerava uma ciência bastante avançada, como um guia heurístico, fazendo o caminho inverso ao grau de abrangência dos campos (PONTES e DIONIZIO, 2014, p.218).

A característica mais relevante presente nos conceitos de Saussure é sua abordagem através de um modelo diático. Seus conceitos são baseados em díades, que consistem em um par no qual a individualidade de cada um é eliminada em detrimento da unidade desse par, possibilitando e organizando certos tipos ligações. No caso de Saussure, ele excluiu o objeto de referência, o que é outra característica da semiologia saussuriana. Nöth (2005, p.28) chama a atenção para o fato de que “o modelo sígnico bilateral de Saussure compreende três termos, o signo e seus constituintes, *significante* e *significado*. O traço distinto da sua arbitrariedade é a exclusão do objeto de referência”.

Segundo Duval (2011), Saussure aponta que os signos só podem ser reconhecidos como signos, quando existe uma relação de oposição entre eles, no interior de um sistema. Chamado por Saussure de “valores de oposição e são eles que compõem o sentido do signo” Duval (2011, p.30). Nessa perspectiva, podem-se entender as seguintes distinções feitas por Saussure: A distinção que aponta que “o signo não é material, mas sim sua ocorrência”, a distinção relacionada à diferença existente entre o sentido de um signo e sua referência a um dado objeto e, por último, a distinção que Duval (2011) chama de secundária, mas não menos importante, pois se refere às línguas vivas praticadas, em dupla articulação: fônica e semântica.

Duval (2011) destacou que o modelo proposto por meio dos trabalhos de Saussure apresenta uma limitação no que se refere à eliminação da diversidade de enunciados que a língua pode produzir. Mas é evidente que sua contribuição para o desenvolvimento da semiótica foi considerável.

3.2.3. A Semiótica segundo Frege

Gottlob Frege (1848-1925), matemático e filósofo alemão, estudou nas universidades de Goettingen e Jena, onde foi professor até 1918. Durante toda a sua vida publicou alguns livros e artigos científicos de grande relevância. Dentre eles estão “Sobre o sentido e a referência” (1892) e “O pensamento” (1918). Sua produção cientifica é um tanto quanto modesta, já que muitos artigos de sua autoria não foram publicados. À sua produção podem ser incorporadas algumas cartas trocadas entre ele e alguns filósofos e matemáticos da época. Miranda (2011) destaca que:

> [...] o *corpus* fregiano é relativamente modesto, bem como são limitados os âmbitos da principal questão que procurou responder ao longo da sua carreira e do seu projeto intelectual: qual é a base do conhecimento aritmético? E o seu projeto, conhecido como logicismo, seria a resposta: as nossas crenças nas proposições da aritmética seriam justificáveis a partir, exclusivamente, de leis e princípios lógicos, sendo, pois, a capacidade de pensar logicamente a base do conhecimento aritmético (MIRANDA, 2011, p.1).

Do ponto de vista da Semiótica, Frege buscou uma abordagem diferente dos outros dois modelos que comentamos nos tópicos anteriores. Frege tocou na questão do ponto de vista da matemática. Ele não propôs uma definição para signo, como até então haviam feito Peirce e Saussure. Segundo Duval (2011, p.34) “ele se interessou diretamente pelo modo da produção semiótica que possa ter valor ao mesmo tempo de prova e de descoberta em matemática”.

Na obra mais importante de Frege “Sobre o sentindo e a referência” (1892), considerada como uma obra clássica da filosofia da lógica e da linguagem, ele busca tratar de assuntos relativos à linguagem e problemas que se apresentam em obras anteriores, em especial no livro “Conceitografia” (1879). Nesse livro, segundo Miranda (2011), “a Conceitografia nasce da intenção do autor de construir provas para noções e princípios elementares da aritmética a partir de noções e princípios elementares da lógica”.

Em seu artigo “O sentindo e a referência”, Frege apresenta inicialmente um problema sobre a relação de igualdade (identidade), abordando uma oposição entre conceitos tautológicos (a = a) e de equivalência onde (a = b). Para entender com maior clareza o que Frege quer dizer, Duval (2011) explica que para entender o conceito de equivalência, ele introduziu os conceitos de sentido de uma expressão e referência de uma expressão, afirmando que:

> Duas expressões podem ter dois sentidos diferentes, mas se referirem ao mesmo objeto: $3+9, 3\times 4, 24/2$, etc. [...] a e b tem, cada um, sentido diferente, ou apresentam conteúdos muito diferentes, mas eles representam o mesmo objeto, por exemplo, o mesmo número (DUVAL, 2011, p.35).

As contribuições de Frege são de suma importância, pois mostraram que os processos semióticos são produtores de novos conhecimentos, principalmente na matemática. Entretanto, Duval (2011) aponta que por ele ter considerado as escritas simbólicas utilizadas em álgebra e em análise como um modelo que poderia ser estendido para todas as representações utilizáveis em matemática, sua teoria se apresentou limitada. Essa foi a questão que Russel criticou, em 1905, nas ideias de Frege, dando notoriedade a dois de seus artigos publicados em 1892 e 1894.

3.3. Desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval

Apoiando-se nas ideias de Peirce, Saussure e Frege relacionadas à Semiótica, Duval desenvolve seus conceitos sobre as representações semióticas. Segundo Duval (2009), pensadores como Kant e Descartes já apresentavam, em suas teorias, a noção de representação, principalmente quando se referem à constituição do conhecimento. Para ele “não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (DUVAL, 2011, p.29).

A noção de representação pode ser entendida sob três pontos de vista: a primeira, classificada como mental, se apoia nos estudos de Piaget; a segunda, ligada à representação interna ou computacional, compreendida pela noção de codificação da informação, e a terceira compreendida “no quadro dos trabalhos sobre aquisição de conhecimentos matemáticos e sobre os problemas consideráveis que sua aprendizagem origina” (DUVAL, 2009, p.32). O quadro abaixo apresenta essa noção de representação de forma bem elucidativa.

Quadro 1 - Comparativo entre as noções de representação, segundo Duval (2009)

Representações	**Objeto de estudos**	**Noção de representação**
Mental	“as crenças e as explicações são concernentes aos fenômenos naturais e psíquicos” (DUVAL, 2009, p.30).	“evocação dos objetos ausentes” (DUVAL, 2009, p.30).
Interna ou Computacional	“o tratamento, por um sistema, das informações recebidas de forma a produzir uma resposta” (DUVAL, 2009, p.30).	“forma pela qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento” (DUVAL, 2009, p.31).
Semiótica	Aquisição do conhecimento e os problemas originados por sua aprendizagem, relativos a um sistema particular de signos.	Forma pela qual um conhecimento é representado. (Sistemas semióticos diferentes).

Fonte: Cargnin (2013)

Duval (2009) considera conceitos importantes como a questão da *semiósis* e *nóesis*. Ao considerar a *semiósis* como a compreensão ou produção de uma representação semiótica e *nóesis* como a compreensão de atos cognitivos, Duval (2009) assegura que não há *nóesis* sem *semiósis*, ou seja, não há compreensão sem representação. A *semiósis* está diretamente ligada ao funcionamento do pensamento e à maneira como o conhecimento se desenvolve, a partir do momento em que se considera a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados.

Segundo Dionizio e Brandt (2012), Pierce foi o primeiro a observar que a *semiósis* não pode ser separada por uma diversidade de tipos de signos. Eles ainda destacam que a distinção de três tipos de signos feita por Pierce (os ícones, os símbolos e os índices) foi um ponto determinante para fundar a semiótica. Mas, por outro lado, Duval (2009) salienta que Pierce e sua classificação de signos deixaram de considerar as relações existentes entre os sistemas semióticos e principalmente a possibilidade de converter uma dada representação criada dentro de um sistema em uma representação de outro sistema.

Estudos foram feitos principalmente nesse tópico, para que a noção de sistema semiótico ganhasse uma conotação mais precisa, até então inexistente. Entretanto, tais estudos deixaram de lado a diversidade desses sistemas no que tange ao pensamento humano e também à possibilidade da conversão das representações em outros sistemas semióticos. Dessa forma, Duval foi levado a chamar os sistemas semióticos que respondiam a algumas especificidades, de registros de representação semiótica. Para Duval (1993) as representações semióticas se definem como:

> [...] produções constituídas pelo emprego de signos [sinais] pertencentes a um sistema de representação que têm suas dificuldades próprias de significância e de funcionamento. Uma figura, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, são representações semióticas que salientam sistemas semióticos diferentes. Considerando-se geralmente as representações semióticas como um simples meio de exteriorização das representações mentais para fins de comunicação, ou seja, para deixá-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, esse ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para a atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 1993, p.39).

Na próxima seção, discutiremos como Duval utilizou essa teoria na área da Educação Matemática, especificando seus principais conceitos.

3.3.1. O ensino da Matemática por meio da Teoria dos Registros das Representações semióticas

No âmbito da Educação Matemática, Duval (2003) procura descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a compreensão da Matemática, apresentada dentro de situações de ensino. Para esse autor, existe uma enorme dificuldade de compreensão dos objetos matemáticos e também uma confusão, principalmente quando se necessita representá-los. Os objetos matemáticos não são necessariamente palpáveis, ou seja, diretamente observáveis, e uma maneira de chagarmos até eles, é por meio das representações.

Para Duval (2011), o papel dos signos e das representações consiste em evocar o que se apresenta ausente, ou em comunicar um pensamento que não se apresenta aparente para todos. Mas, em Matemática, existe uma enorme variedade de representações semióticas para serem utilizadas, tais como: língua natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras. Essas representações podem, de certa forma, facilitar tal acesso à compreensão dos conteúdos matemáticos. Dionizio e Brandt (2012) comentam que ao lidar com as representações semióticas, muitos alunos:

> [...] acabam não reconhecendo o mesmo objeto, por meio de representações semióticas diferentes. Podemos usar como exemplo uma função que pode ser

> representada discursivamente por uma equação algébrica, por uma argumentação na língua natural, ou de forma não discursiva a partir de um gráfico cartesiano (DIONIZIO e BRANDT, 2012, p.11).

Para essa diversidade de representações existente em Matemática, Duval (2010) introduz a ideia de registros de representações semióticas, ressaltando que existem dois tipos de registros, com representação discursiva e não discursiva. No quadro abaixo, sintetizamos essas ideias.

Quadro 2 – Relação entre registros e representações

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros Multifuncionais: onde os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Formas de raciocinar: • Argumentações a partir de observações, de crenças; • Dedução válida a partir de definição ou teorema.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (dimensão 0, 1, 2 e 3): • Apresentação operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: onde os tratamentos envolvem algoritmos.	Sistemas de escrita: • Numéricas (binária, decimal, fracionária, ...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais); Cálculo.	Gráficos cartesianos: • Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2010, p.14).

Para que essa perspectiva seja válida, é importante considerar o que Duval (2012) aponta como primordial, ou como um ponto estratégico, que consiste em não confundir objetos matemáticos com a representação que se faz dele. Para Duval (2012), "toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem". O que deve-se levar em conta é que ao utilizarmos as representações semióticas para "evocar" os objetos matemáticos, passamos a lidar com esses objetos e não com as suas representações ou com os signos.

Esse ponto é importante, pois o significado de objeto matemático não é tão simples como se pensa e pode ocasionar controvérsias até para os próprios matemáticos. Flores (2006) traz uma citação de Lefebvre (2001) onde podemos verificar como é complexa essa definição.

> Os matemáticos platônicos definem os objetos matemáticos como entidades ideais que existiriam independentemente do espírito humano. Para os formalistas, a matemática é definida como a ciência da dedução formal, dos axiomas aos teoremas. Seus enunciados só têm conteúdo quando é fornecida uma interpretação. Para os mais radicais dentre eles, a matemática se resume em um jogo de linguagem sem relação com os objetos materiais (LEFEBVRE, 2001, p.154 *apud* FLORES, 2006, p.11).

O que se pode notar de tais definições sobre objeto matemático é que as representações influenciam na sua compreensão. Por isso, Duval ressalta que não devemos confundir o objeto matemático com suas representações. Para Duval (2011), constantemente:

> Corremos o risco de considerar duas representações diferentes de um mesmo objeto por dois objetos diferentes ou, ao contrário, arriscamos a considerar duas representações de um mesmo objeto porque seus conteúdos são quase parecidos (DUVAL, 2011, p.47).

Para Duval (2009), um mesmo objeto matemático pode ser representado de várias formas diferentes sem perder a essência. Para ele essas diversas formas de representação são absolutamente necessárias, possibilitando a escolha da mais adequada para o que se pretende trabalhar. Flores (2006) acrescenta que a possibilidade de variar a representação de um mesmo objeto pode ajudar a elaboração mental do significado desse objeto matemático. Dessa forma, Duval (2012) ressalta que "basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática". Podemos exemplificar a afirmação da seguinte maneira: para um estudante, pode ser fácil compreender ou reconhecer o número 4 em 3+1, ou 20/5, mas para outro, pode não ser uma tarefa tão fácil.

Diante do que discutimos até o momento, Duval (2012) considera que para um sistema semiótico ser considerado um sistema de registro de representação semiótica ele deve permitir três atividades cognitivas ligadas a *semiosis*: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação identificável ou uma operação cognitiva identificável pode ser compreendida como um enunciado compreensível em uma língua natural. Podemos também entender como sendo a identificação do objeto matemático representado, o que irá implicar em regras específicas de registros cognitivos. Segundo Duval (2012), “a função dessas regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos”. Dionizio e Brant (2012, p.12) citam, como exemplo, as regras “gramaticais para a composição de um texto, e as regras posicionais para o algoritmo da multiplicação”. Temos ainda como exemplos: esquemas, desenho de uma figura geométrica, uma expressão matemática de uma fórmula, dentre outros.

Com relação ao tratamento, podemos considerá-lo como uma atividade cognitiva que busca a transformação de uma representação semiótica em outra, porem dentro do mesmo registro de representação. “O tratamento é uma transformação interna a um registro” (Duval, 2012, p.272). Apresentamos, no quadro 3, um exemplo de tratamento em relação a um conteúdo de Matemática:

Quadro 3 – Exemplo de tratamento em uma tarefa
de Cálculo de Várias Variáveis

Determine a interseção entre o plano $z=8$ e o paraboloide $z=2x^2+2y^2$:

Solução: Devemos igualar as duas equações para encontramos a interseção; dessa forma, temos:

$$2x^2+2y^2=8$$
$$2\left(x^2+y^2\right)=8$$
$$x^2+y^2=4$$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Observando esse exemplo, podemos verificar que sua resolução se apresenta no registro algébrico, ou seja, para resolver o que se pede, basta igualar as duas equações e resolver as operações matemáticas pertinentes. Nesse exemplo, partimos do registro algébrico, dado na questão e usamos o mesmo registro para a resolução.

Na matemática usamos a operação de tratamento constantemente. Santos e Curi (2012) ressaltam que nesse processo o apelo cognitivo por parte do aluno não é tão grande, o que não acarreta muitas mobilizações de conteúdo.

Duval (2012) ressalta um fato importante que deve ser considerado:

> Há, naturalmente, regras de tratamento [...] a cada registro. Sua natureza e seu número variam consideravelmente de um registro a outro: regras de derivação, de coerência temática, associativas de contiguidade e de similitude. No registro da língua natural há, paradoxalmente, um número elevado de regras de conformidade e poucas regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo (DUVAL, 2012, p.272).

A conversão se refere às transformações de registros de representação semiótica, que acontecem quando existe mudança de sistema semiótico de representação, levando em consideração o mesmo objeto matemático. Duval (2012, p.272) define conversão de uma representação da seguinte maneira: “é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial”. Para esclarecer o referido conceito, podemos citar os seguintes exemplos: a conversão de um registro de representação algébrica para um registro de representação gráfica; a transformação de um registro de representação em língua natural (o enunciado de uma atividade matemática-problema) para um registro de representação algébrica (uma equação algébrica).

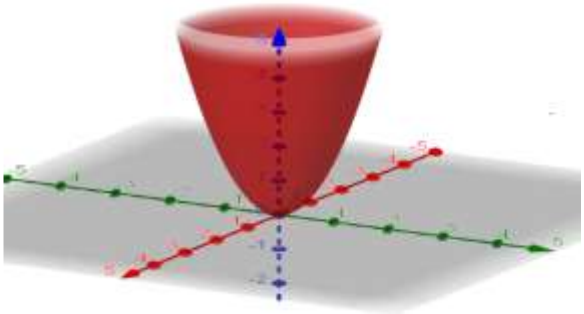
A atividade cognitiva da conversão acontece independentemente e de forma diferente da atividade de tratamento. Devemos ficar atentos a essa diferença nos processos de ensino e aprendizagem de distintos objetos matemáticos, pois tais processos acontecem, frequentemente, nas aulas. Duval (2012) apresenta um exemplo, por meio do qual podemos refletir sobre onde e como isso acontece.

> Alunos podem, muito bem, efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão. Muitas vezes é este tipo de exemplo que é colocado para explicar porque os alunos chegam ao ensino médio e não sabem calcular. É esquecer que a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com expoente constituem três registros diferentes de representação de números (DUVAL, 2012, p.273).

Podemos apresentar também um outro exemplo, para tentarmos esclarecer o conceito da transformação de conversão, que descrevemos acima:

Quadro 4 – Exemplo de conversão para uma tarefa
de Cálculo de Várias Variáveis

Esboçar o gráfico da seguinte equação: $z = 2x^2 + 2y^2$ (registro algébrico)



(Registro gráfico)

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

No exemplo acima, estamos transitando de uma representação algébrica, que é a expressão matemática que representa o paraboloide, para uma representação gráfica, ou figural, que exprime o paraboloide em forma de uma ilustração. Dessa forma, estamos mudando o tipo de representação, caracterizando um processo de conversão.

Quando estamos resolvendo um problema, segundo Duval (2009) um registro pode aparecer mais evidente que o outro, ganhando certo privilégio, mas o que importa é a possibilidade de mobilizar/transitar entre, pelo menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, através da conversão, ou a possibilidade de transitar, constantemente, entre distintos registros de representações semióticas. Entretanto, é necessário estar sempre ciente de que está trabalhando com o mesmo objeto matemático.

Na conversão, as funções cognitivas exigidas em cada tipo de registro são diferentes, o que pode acarretar dificuldades dependendo de como a tarefa pode sugerir essa transição entre as representações. Essa transição entre os distintos registros de representações semióticas não acontece de forma espontânea ou natural, pois muitos estudantes se encontram limitados à capacidade de mobilizar apenas uma forma de representação. A operação de conversão exige certos procedimentos metodológicos que estabelecem relações entre os elementos das unidades significantes em cada registro (DIONIZIO e BRANDT, 2012).

Dessa forma, o grande dilema que se apresenta diante da operação de conversão é o que permite e o que permitirá reconhecer a mudança a se realizar (DUVAL, 2012). A transição entre pelo menos dois registros distintos é o primeiro passo do pensamento matemático, constituindo-se, na Teoria do Registro de Representações Semióticas, no critério para a compreensão em matemática. Nesse sentido, o autor considera que:

> Sem esse gesto que deve ser mais ou menos automático, nenhuma atividade ou encaminhamento matemático é possível. Ficamos com o espírito bloqueado, sem nada reconhecer daquilo que é possível fazer. E se alguém sugerir a mudança de representação a fazer e desbloquear a situação, a incompreensão permanece (DUVAL, 2012, p.119).

Um dos fatos que levam a dificuldade de coordenação de registros pertencentes a sistemas semióticos distintos repousa nos conceitos de congruência e não congruência. Essa dificuldade pode estar ligada diretamente a problemas de aprendizagem do objeto matemático. Para o autor, a operação de conversão pode ser mais complexa ou menos complexa, já que a análise dessa atividade compreende comparar registros de partida com os registros de chegada. Duval (2003) aponta que, para uma conversão ser congruente, deve satisfazer às seguintes condições:

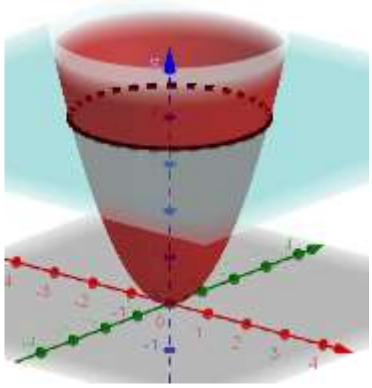
1) Correspondência semântica, ou correspondência uma a uma entre os elementos significantes (os símbolos têm os mesmos significados): para cada elemento simples no registro de saída tem um elemento simples correspondente no registro de chegada

2) Unicidade semântica terminal: cada unidade significante no registro de saída tem uma única unidade significante no registro de chegada.

3) Conservação da ordem que compõe cada uma das representações: diz respeito à forma de apresentação de cada uma das representações.

As conversões não congruentes são aquelas que deixam de atender a, pelo menos, uma das exigências elencadas acima. Como exemplo para o fenômeno de conversão congruente, podemos propor a seguinte situação:

Quadro 5 – Identificando elementos de congruência

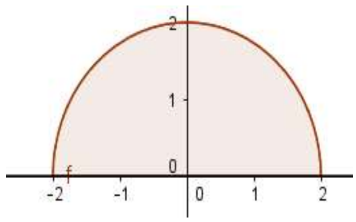
Registro em Língua Natural	**Registro Algébrico**	**Registro Gráfico**
Dado o paraboloide $z = x^2 + y^2$ a sua interseção com o plano $z = 4$ é uma circunferência.	$x^2 + y^2 = 4$	

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Nesse exemplo podemos verificar que: 1) cada símbolo no registro de partida corresponde a um símbolo com o mesmo significado nos registros de chegada (a palavra interseção e circunferência, o sinal de igual, a equação referente à circunferência e o desenho mostrando a interseção dos gráficos, a qual é uma circunferência), ou seja existe correspondência semântica entre os registros. 2) há unicidade semântica, cada símbolo no registro de partida corresponde a uma, e somente uma, unidade significante no registro de chegada. 3) a ordem em que os dados são apresentados é a mesma ordem para realização do cálculo de interseção e do desenho gráfico.

Já no exemplo abaixo existe uma conversão não congruente. Não existe correspondência biunívoca entre as unidades significantes no registro de partida e de chagada. No registro de língua natural, não existe nada se referindo aos sinais de “maior ou igual” ou de “menor ou igual” que aparecem na representação algébrica.

Quadro 6 – Identificando elementos de não congruência

Registro em Língua Natural	**Registro Algébrico**	**Registro Gráfico**
O conjunto dos pontos no plano localizados na região R, compreendidos entre a semicircunferência superior de raio 2 e centro na origem.	$0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ $-2 \leq x \leq 2$	

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

O que se observa na fala de Duval é que principalmente as atividades matemáticas que estabelecem uma relação de congruência levam os estudantes ao êxito com maior facilidade. Duval (2011) salienta a importância dos professores terem essa consciência, para que possam guiar suas atividades nos processos de ensino e aprendizagem. Ele considera que:

> Quando verificamos a escolha dos problemas pelos professores, observamos a tendência de escolher, de preferência, os problemas em que as conversões a realizar são congruentes, e a reservar os problemas em que as conversões a realizar são não congruentes, para as aulas de pesquisas com alunos mais avançados. Existe aqui, evidentemente, uma tendência, porque se não tiverem essa variável didática explicitamente na cabeça, eles propõem sempre problemas que exigem as conversões não congruentes para os alunos que já têm dificuldades (DUVAL, 2012, p.122).

A questão da congruência e não congruência nas operações de conversão demonstra, para Duval (2012), que não existe uma relação direta entre as representações de um objeto matemático e suas possíveis representações em outros registros. Elas implicam, dessa forma, em um fenômeno fundamental para a análise do funcionamento cognitivo do pensamento em matemática. Contudo, Duval (2012) faz três importantes observações:

- Existe um funcionamento semiótico específico para cada registro de representação.
- A passagem de um registro a outro exige que comecemos a desenvolver uma coordenação sinérgica entre pelo menos dois registros. Esse desenvolvimento exige atividades e tarefas específicas, diferentes daquelas privilegiadas para aquisição de conceito.

- A compreensão dos "conceitos matemáticos", diferentemente da compreensão dos conceitos nas outras disciplinas, pressupõe a coordenação sinérgica de pelo menos dois registros de representação (DUVAL, 2012, p.124).

Iremos nos deparar com um número bem maior de fenômenos de não congruência em relação aos de congruência. Contudo, para Duval (2012), esse fato possibilita uma riqueza enorme no que se refere à diversidade de registros que podem aparecer, os quais devem ser estudados caso a caso, de acordo com cada problema ou atividade dada.

3.4. O uso de computadores: outro modo de produzir representações

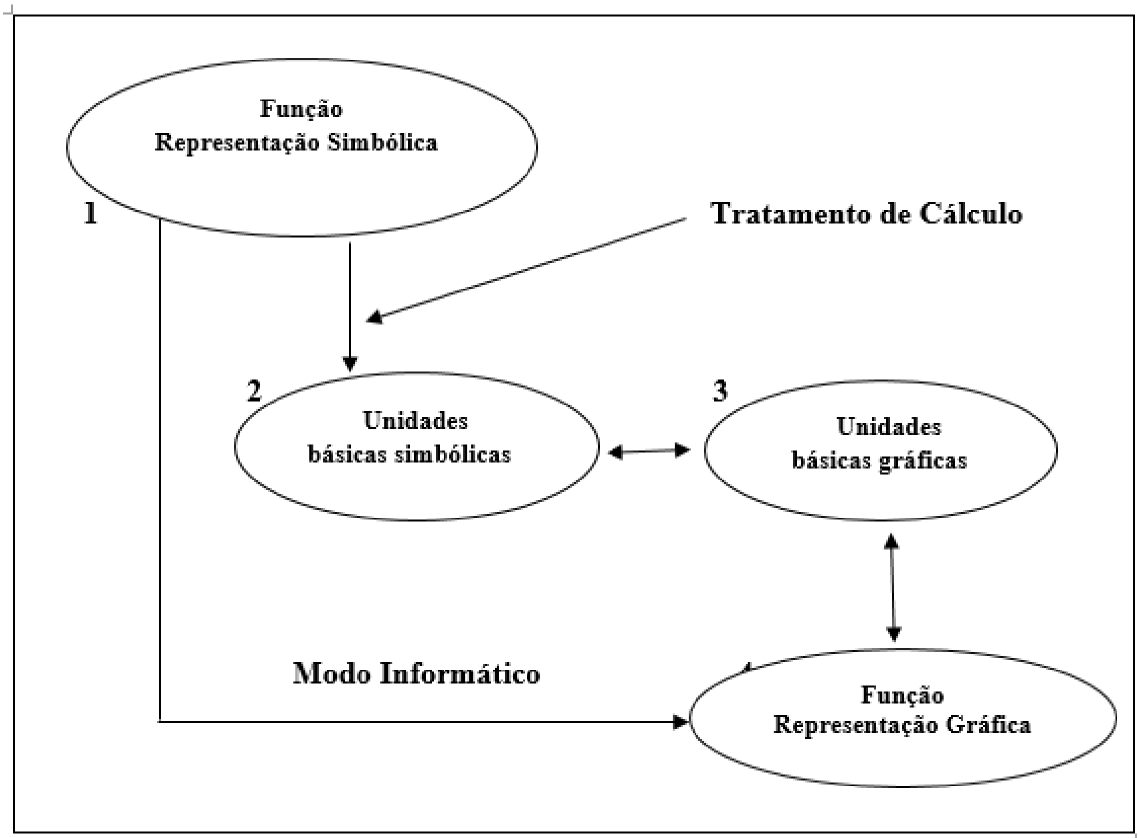
O uso de computadores, com seus *softwares* para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem em Matemática, é um assunto amplamente discutido no âmbito da Educação Matemática. Nesta seção focaremos nas contribuições das tecnologias, particularmente de computadores e *softwares*, para produzir representações.

Duval (2011) considera que é importante estabelecer um paralelo entre as contribuições que o computador pode trazer e os outros modos de produção de representação semiótica existentes. Nesse contexto, o autor tece algumas considerações que pensamos serem relevantes e que devem ser observadas em nossa pesquisa. A primeira considera que os computadores não consistem em um novo registro de representação, uma vez que "as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual" (DUVAL, 2011, p. 137). Quando produzimos um gráfico, uma figura geométrica ou uma superfície no computador, observamos que a visualização dessas representações requer a mesma mobilização dimensional quando produzidas com a utilização de lápis e papel. Além disso, exige a capacidade de reconhecer os valores visuais ligados aos conceitos matemáticos e associá-los com as equações correspondentes.

Em segundo lugar, Duval (2011, p.137) afirma que "eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos". O uso de tecnologia acelera a execução da representação da mesma forma da representação mental, mas com a possibilidade imensa de tratamento. O que não ocorre na forma gráfico-visual. Com a execução de uma representação por meio de recursos computacionais, Duval (2011), afirma que podemos obter, imediatamente, muito mais do que a mesma representação feita à mão livre, onde demandaria um tempo maior de execução.

Para exemplificar esse ponto de vista, podemos utilizar um esquema feito por Moretti e Luiz (2014, p.69), que irá nos ajudar a entender as afirmações realizadas. A figura 2 contempla a movimentação de funções nas representações algébrica e gráfica. Observe o “atalho” que o uso de computadores proporciona.

Figura 2 – Esquema de procedimento do uso da informática para representações



Fonte: Moretti e Luiz (2014).

Por fim, temos a novidade que as representações semióticas podem ser manipuláveis como objetos reais. Os computadores, através de *softwares* possuem ferramentas que permitem manipular, girar, deslocar, aumentar, diminuir essas representações. Segundo Duval (2011, p. 137), “esse aspecto dinâmico é apenas uma consequência da potência ilimitada do tratamento”. O autor ressalta que o computador permite desenvolver uma função por uma maneira distinta de qualquer outro modo de representação: simulação. Nesse sentido, considera que essa função permite a exploração de problemas matemáticos.

A utilização de computadores levanta uma questão interessante e pertinente no que diz respeito às atividades/tarefas cognitivas que essa utilização implica aparentemente da parte de um indivíduo não especialista. Essa questão se refere, principalmente, a que ações são necessárias ao estudante realizar para que o computador exiba, em seu monitor, algo considerado uma reposta a uma pergunta. Duval (2011) sinaliza para a possibilidade de:

> Observar que a interface real entre o computador e o indivíduo não é o que se exibe no monitor, mas *o que permite comandar uma exibição, isto é, o menu comando para as instruções*. Podemos, então, analisar as tarefas cognitivas requeridas pela utilização de cada *software* em função das ações que seu menu autoriza ou exclui (DUVAL, 2011, p.137).

Como exemplo para essa questão, podemos pensar da seguinte forma. Seja o local para se digitar uma equação (menu de comando) em um *software* qualquer. A ação realizada pelo usuário seria digitar uma equação e, dessa forma, teríamos a partir dessa atividade cognitiva mobilizada, a conversão automática de uma equação (representação algébrica) para uma representação gráfica específica. O menu de comando, segundo Duval (2011), restringe e apresenta um caráter muito vinculativo, muitas vezes redutor, que pode ir contra os outros modos de produção de representação.

Diante disso, o autor afirma que as instruções podem ser multiplicadas facilmente, podendo introduzir, uma sequência linear parecida com a da fala, através do monitor do computador.

> O que quer dizer que encontramos limitações da memória imediata que são aquelas próprias da escuta distraída ou atenta. Torna-se, portanto, difícil fazer um trabalho de observação ou de comparação sobre variações de representação gráficas em relação às variações de forma e escrita das equações (DUVAL, 2011, p.138).

Os menus permitem a entrada de escritas de equações e não permitem a entrada da representação gráfica para se obter a equação correspondente, pois segundo Duval (2011), é importante em pelo menos uma fase de aprendizagem envolver a entrada inversa. Nessa perspectiva, o autor nos coloca que um determinado menu privilegia um registro de representação para se obter outro registro correspondente.

Por fim, Duval (2011) coloca um ponto em relação à interface com um computador, pois para ele, ela elimina a linguagem, ou seja, todas as operações discursivas. Dessa forma, reduzindo a utilização de um conjunto de palavras da língua em jogo ou de palavras-chaves. Essas palavras são trocadas por ícones.

3.4.1. Pesquisas envolvendo suporte digital e a Teoria dos Registros das Representações Semióticas

O uso da Teoria dos Registros das Representações Semióticas amparado pelo uso de ambientes informatizados vem ganhando espaço no campo da Educação Matemática. Observam-se diversas pesquisas com essa perspectiva, abordando conteúdos matemáticos, tanto do Ensino Fundamental e Médio, quanto do Ensino Superior. Dentre essas pesquisas, podemos destacar o uso de *software*s como uma ferramenta de auxílio e exploração para a Teoria dos Registros das Representações Semióticas. Nesse sentido, Gravina (2015, p.238) salienta que "é importante dizer que este interesse de pesquisa vem sendo alimentado, especialmente, pelas indagações que se tem sobre as implicações do potencial das representações veiculadas em suporte digital, na aprendizagem da matemática".

Ferreira, Santos e Curi (2013) mapearam as pesquisas realizadas na área de Educação Matemática no Brasil em um período de 10 anos (de 2002 a 2012) que tiveram como suporte principal o uso teórico dos Registros de Representação Semiótica. Dentre as pesquisas encontradas, as autoras identificaram dentro do foco temático Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, nove pesquisas envolvendo Limites, Derivadas, Integrais e Máximos e Mínimos. Na referida pesquisa, não há indícios sobre o uso de tecnologia em trabalhos desse foco. Entretanto, segundo as autoras, percebeu-se que os poucos trabalhos analisados que utilizam ambientes informatizados são:

> [...] bem pontuais e continuam limitados ao estudo de funções e, em alguns casos, no ensino de Geometria. Ressaltamos que o registro que se prioriza nesses trabalhos é a representação gráfica de objetos matemáticos em detrimento dos outros registros, não se permitindo uma mobilização e conversão entre os mesmos, uma vez que, quanto aos objetos matemáticos, mesmo quando tratados em dois ou três registros, não se estabelece uma devida articulação entre estes (FERREIRA, et al, 2013, p.11).

No âmbito do ensino do Cálculo de Várias Variáveis, essa perspectiva (Teoria dos Registros de Representação Semiótica / ambientes informatizados) se apresenta de maneira escassa em termos de produção de pesquisas e, mais ainda, quanto se trata do conteúdo de Integrais Múltiplas, aparentemente estamos pisando em um solo ainda pouco explorado. Alves (2012) e Henriques (2006) são dois pesquisadores que abordaram o conteúdo de Integrais Múltiplas a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, mas usando o *software Maple* como recurso tecnológico.

Em nossa pesquisa, queremos explorar a Teoria dos Registros das Representações Semióticas utilizando o *software* GeoGebra para podermos compreender os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas.

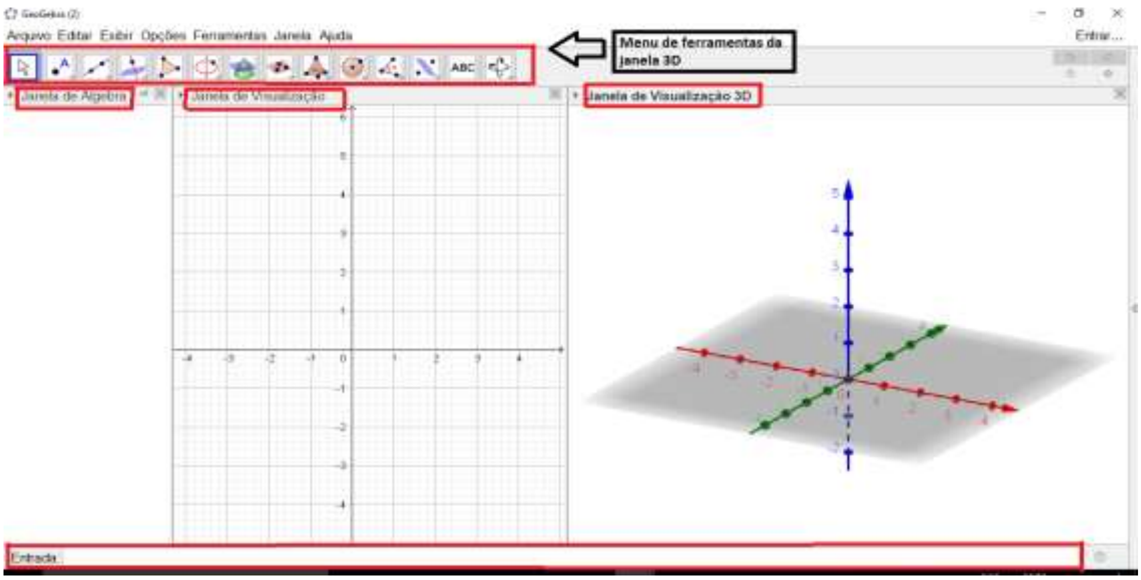
3.4.2. O *software* GeoGebra diante da Teoria do Registros de Representações Semióticas

O uso dos computadores aliados aos conteúdos matemáticos se faz frequentemente a partir do emprego de algum *software*. Existem inúmeros *software*s disponíveis, cada um com suas especificidades e potencialidades. O GeoGebra é um deles e, ultimamente, largamente explorado pelos educadores matemáticos, tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior.

O GeoGebra possui uma vasta quantidade de ferramentas que podem ser exploradas em vários conteúdos da Matemática. A disposição dessas ferramentas na tela do *software,* permite um manuseio simples e fácil por parte dos usuários. Sua área de trabalho voltada a princípio para o estudo de geometria plana e álgebra possui, já nos dias atuais, janelas 3D para geometria espacial, além da possibilidade de se trabalhar com planilhas eletrônicas e conteúdos de probabilidade, entre outros.

Para essa pesquisa o que nos interessa, são as potencialidades e contribuições que o *software* GeoGebra pode nos oferecer, quando trabalhamos com funções de várias variáveis dentro do conteúdo de Integrais Múltiplas. Dessa forma, as ferramentas que estão ligadas às janelas 3D se tornam de grande importância. Essa janela de visualização possibilita a exibição tridimensional de objetos matemáticos, os quais muitas vezes são praticamente impossíveis de serem desenhados à mão livre, acarretando um enorme empecilho no aprendizado de Integrais Duplas e Triplas por parte dos alunos. Ela traz também ferramentas adicionais para esse tipo de função, permitindo a manipulação dos objetos construídos, sendo possível movê-los sem alterar suas propriedades, o que significa poder explorar uma gama maior de conteúdos matemáticos com essa tecnologia. A figura 3, a seguir, dá uma boa noção da disposição dessas ferramentas juntamente com a janela algébrica, a janela 2D e a janela 3D.

Figura 3 – Janelas e menus de ferramentas do GeoGebra



Fonte: Dados do pesquisador (2017)

No Cálculo de Várias Variáveis, especificamente no conteúdo de Integrais Múltiplas (Duplas e Triplas), trabalhamos com funções em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$; dessa forma, a disposição das janelas de álgebra, 2D e 3D que esse *software* oferece (Figura 4), permitem além de uma visualização simultânea dos objetos de estudo por meio dessas janelas, a possibilidade de explorá-los de uma maneira que, no papel, seria impraticável. Podemos citar como exemplos, as possibilidades de: esboçar e girar (movimentar) uma superfície; criar e mover planos paralelos aos planos coordenados; determinar com precisão as interseções entre duas ou mais superfícies; destacar as regiões de integração, tanto na janela 2D como na 3D.

Com relação aos conceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, podemos explorar alguns deles a partir do GeoGebra. Para o estudo de Integrais Múltiplas, se faz necessário o uso de uma variedade de representações para um determinado objeto matemático e a articulação entre esses registros é fundamental para a compreensão e construção dessas integrais. Dessa forma, o *software* GeoGebra pode auxiliar tais processos, pois permite que operações semióticas possam ser evidenciadas, principalmente, quando se trabalha com representações algébricas e gráficas. Observa-se entre os alunos, uma grande dificuldade nessas trocas de registros levando, segundo Duval (2009), à existência de "um enclausuramento de registros que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático, em duas de suas representações bem diferentes".

No que se refere à propriedade de tratamento, o *software* GeoGebra possui ferramentas de construção e manipulação para uma figura ou uma superfície que possibilita evidenciar e trabalhar de forma consistente essa propriedade para esses registros. Na verdade, para Duval (2011), existe uma aceleração dos tratamentos, pois o *software* permite uma exibição desses objetos muito rapidamente, com uma potência de tratamento ilimitada se comparadas com as possibilidades de um desenho no papel. Já na janela de álgebra, onde os registros algébricos são apresentados, podemos modificar/editar as equações de entrada e, consequentemente, a sua representação geométrica também é modificada. Também na janela visualização 2D ou 3D, dando ênfase à propriedade de conversão, novamente podemos observar uma aceleração em relação a essa propriedade.

Assim, podemos observar que as características que o GeoGebra apresenta nos levam a acreditar que podemos explorá-las à luz da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, destacando a suas potencialidades nos processos de ensino e aprendizagem.

Capítulo 4

O CAMINHO METODOLÓGICO DA PESQUISA

> Pesquisar configura-se em como buscar explicações cada vez mais convincentes e claras sobre a pergunta feita. Buscar compreensões e interpretações? Responder a perguntas? Solucionar problemas? Entretanto, não há uma última resposta, uma solução definitiva, não há compreensão e interpretações plenamente desenvolvidas e que dão conta de todas as dimensões do fenômeno interrogado. Mas há sempre o "andar em torno... outra vez e outra ainda...". Há sempre o andar cuidadoso, que solicita rigor e sistematicidade.
>
> Bicudo (1993)

Neste capítulo, abordaremos os procedimentos metodológicos desenvolvidos nesta pesquisa. Para nos situarmos, a princípio, retomaremos a nossa questão de investigação e os objetivos já citados anteriormente.

Mais adiante, iremos descrever e detalhar como os dados para a pesquisa foram coletados, o ambiente onde ela foi realizada, justificando a nossa escolha e apontando os instrumentos metodológicos utilizados. Serão apresentadas, também, as atividades que foram propostas e aplicadas, de forma detalhada.

4.1. Retomando a Questão de Investigação

Em capítulos anteriores, apresentamos temas relacionados ao uso das TICEM – Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática e, mais precisamente, no ensino de Cálculo de Várias Variáveis. Discutimos as implicações, as potencialidades e os cuidados do uso de tecnologias dentro de sala de aula para auxiliar os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, dando ênfase ao *software* GeoGebra 3D.

Outro assunto abordado tratou da Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Raymond Duval, que foi amplamente discutida no capítulo anterior e será nosso principal referencial teórico nos guiando nas análises dos dados levantados durante a pesquisa de campo.

Diante desse panorama, tais discussões permitiram elaborar tal questão de investigação:

Quais são as possíveis contribuições de sequências didáticas com a utilização do *software* GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis?

Tendo em mãos a questão de investigação, pudemos traçar os objetivos de pesquisa e planejar nossos procedimentos metodológicos.

4.2. Retomando os Objetivos

O principal objetivo dessa pesquisa está diretamente relacionado à questão de investigação que já levantamos nesse capítulo. Dessa forma, nosso maior objetivo com essa pesquisa foi identificar, analisar e discutir as possíveis contribuições que sequências didáticas, apoiadas na utilização do GeoGebra 3D, podem trazer para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis.

Não menos importantes, os objetivos específicos também buscaram apontar contribuições relevantes para o tema pesquisado e, principalmente, para a prática docente. Relembrar tais objetivos se faz necessário nesse momento, para que possamos nos situar e, consequentemente, direcionar o desenvolvimento do atual capítulo. Tais objetivos específicos foram: investigar o Ensino de Cálculo de Várias Variáveis, mais precisamente, o ensino de Integrais Múltiplas, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, apoiado no uso das tecnologias disponíveis; elaborar, aplicar e avaliar sequências didáticas com o *software* GeoGebra 3D, relacionadas à construção de superfícies e sólidos, para o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis; apresentar um conjunto de sequências didáticas com o *software* GeoGebra 3D, sob a forma de Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática, que possa contribuir para a prática docente de Professores de Cálculo de Diferencial e Integral.

É importante frisar que, nas Considerações Finais, iremos retomar mais uma vez esses objetivos, a fim de discuti-los e confrontá-los com os resultados obtidos.

4.3. Retomando e detalhando a Metodologia de Pesquisa

Levando em conta a nossa questão de investigação – contribuições para os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas – os objetivos traçados, a maneira como os dados serão coletados e posteriormente analisados, essa pesquisa terá uma abordagem qualitativa. O método qualitativo não está ligado às especificidades numéricas, ou seja, a dados estatísticos, mas sim à compreensão de algum fenômeno, a partir de um conjunto de procedimentos racionais guiados e objetivados por regras estabelecidas.

Para Miles e Huberman (1994), o método qualitativo se caracteriza principalmente pela "palavra" como dado. A quantificação do material coletado de forma empírica não é primordial. Borba (2004) enfatiza que a pesquisa qualitativa prioriza:

> [...] procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado (BORBA, 2004, p.2)

Dentro dessa metodologia de pesquisa, temos como característica em destaque "tentar dar sentido ou interpretar os fenômenos em termos de significados que as pessoas trazem para elas" (DENZIN e LINCOLN, 1994, p.2).

Os pesquisadores que se aventuram por esse método, buscam explicar o porquê das coisas e se valem de diferentes abordagens. O cientista é, ao mesmo tempo, o sujeito e o objeto de sua pesquisa e, assim, o desenvolvimento do estudo nem sempre é previsível. Dessa forma, uma pesquisa com tais características busca sempre "produzir informações aprofundadas e ilustrativas, seja ela pequena ou grande. O que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações" (DESLAURIERS, 1991, p. 58).

Dentro do campo da Educação Matemática, esse método científico tem predominado quando nos referimos às pesquisas nessa área. Podemos supor que tal fato se dá pelo motivo desse campo permear as ciências sociais que, constantemente, faz uso do método de pesquisa qualitativa. Outro ponto que deve ser levado em consideração é a possibilidade de tal método poder revelar os processos educacionais de forma mais convincente. Isso possibilita uma análise profunda, potencializando o poder de investigação dentro do cenário escolar.

Quando analisamos as principais características do método qualitativo, além de algumas que já citamos acima, seria interessante enumerá-las para que, de certa forma, possamos delinear nosso caminho metodológico no decorrer dessa pesquisa. Assim, alguns pesquisadores como Lincon e Guba (1985), Lüdke e André (1986), Miles e Huberman (1994) e Bogdan e Biklen (1994) no campo da Educação, apontam algumas características que são fundamentais. Abaixo citamos algumas e traçamos um paralelo com a nossa pesquisa:

1) **O pesquisador pode recorrer as suas experiências, aos seus valores e crenças para coletar os dados, compreendê-los e interpretá-los, sendo assim de certa forma considerado como um instrumento de pesquisa**: Em nosso caso, o pesquisador foi o próprio professor da turma de Cálculo III. Sua experiência como professor de tal disciplina certamente ajuda. Ele esteve envolvido diretamente com a turma, vivendo e conhecendo os processos educacionais, coletando informações ganhando subsídio para analisá-los e posteriormente compreendê-los com mais veracidade;

2) **Os dados coletados são de natureza descritiva, muitas vezes são coletados sob a forma de palavras**: Para Barbosa (2001, p.82) os dados "contem citações literárias, figuras e outros recursos que ajudam a construir o cenário investigativo". Utilizamos nessa pesquisa, as anotações do diário de campo do professor, as atividades exploratórias e um questionário final aplicado aos alunos;

3) **Nesse tipo de pesquisa, qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural:** Nossa pesquisa foi desenvolvida durante um semestre, mesclando o ambiente de aprendizagem da sala de aula tradicional com o do laboratório de informática, onde foram desenvolvidas as atividades para coleta de dados;

4) **Os pesquisadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que a busca por resultados ou geração de produtos:** Os processos utilizados nas atividades de pesquisa, sob a Teoria dos Registros das Representações Semióticas, abordados em nosso referencial teórico nos levaram a traçar um panorama dos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas com o auxílio do *software* GeoGebra 3D;

5) **Nenhuma hipótese ou teoria é aceita previamente, o método de trabalho é indutivo:** Para Barbosa (2001, p.83) "isso não significa que o pesquisador entra em campo descarregado de seus pressupostos, nem a inexistência de um quadro teórico que sustente a coleta e análise de dados". Por meio da análise dos dados, tentamos compreender como é possível produzir conhecimento matemático para a aprendizagem de Integrais Múltiplas;

6) **O conhecimento da realidade depende da perspectiva de que se observa:** O significado que as pessoas concedem aos fatos é importante na pesquisa qualitativa. Em nossa pesquisa, o

pesquisador trouxe seu olhar de professor de Cálculo; com isso, as experiências vividas durante a pesquisa tiveram a perspectiva e o ponto de vista de um professor.

Essas características que abordamos não se tornaram um caminho rígido seguido ao longo da pesquisa. Nossa pesquisa se encaixou dentro delas. Os pesquisadores qualitativos são livres para trilhar o melhor caminho, com a intenção de que seu objetivo traçado seja alcançado.

4.4. Sobre a coleta de dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994), os dados são, ao mesmo tempo, as provas e as pistas que os investigadores possuem como material bruto do mundo que pretendem estudar. Na pesquisa qualitativa, a maneira como esses dados são coletados varia de pesquisa para pesquisa, principalmente no âmbito da educação. Os dados nos conectam ao mundo empírico e, quando são recolhidos e sistematizados, possibilitam a pesquisa qualitativa ser relacionada com outras formas de ciências. Assim, a coleta de dados é uma fase de grande importância em qualquer pesquisa. Fazer a escolha correta da maneira como os dados serão coletados é fundamental para que a questão de investigação levantada seja respondida e também para que os objetivos sejam alcançados.

Nessa pesquisa, coletamos os dados, basicamente, a partir de três instrumentos: observação (diário de campo), aplicação de atividades exploratórias (a partir de sequências didáticas) e questionário final.

4.4.1. A observação

A observação pode ser definida como um método de coletar dados que "consiste em coletar impressões do mundo ao redor através de todas as faculdades humanas relevantes" (ADLER E ADLER, 1994, p.378). Para Barbosa (2001, p.88) é "desnecessário usar o adjetivo participante para o termo observação, já que esta última não existe sem participação no contexto a ser investigado". A observação exige que o observador esteja presente no local de estudo, que ele manifeste, através de interesses, costumes, atos e ações. Dessa forma, vamos adotar somente o termo observação, mas lembrando que, para essa pesquisa, todas as observações foram feitas pelo professor-pesquisador da turma na qual a investigação foi desenvolvida.

Quando se opta por utilizar a observação como instrumento de coleta de dados, o pesquisador dever estar ciente da sua tarefa. Não é uma ação totalmente desinteressada, mas com propósitos bem delimitados. Deve-se focar no que se quer observar, ficar atento aos detalhes e sutilezas que podem aparecer no decorrer da observação. Portanto, ir a campo para coletar dados, remete a um preparo prévio e objetivos traçados.

Nessa pesquisa, nosso alvo principal com a observação, foi levantar dados sobre processo de ensino e aprendizagem do Cálculo de Várias Variáveis em sala de aula com práticas tradicionais e também com o auxílio do *software* GeoGebra 3D no laboratório de informática.

Para isso, a observação do tipo não estruturada foi condizente com a situação apresentada e os princípios qualitativos que orientam esse estudo. Esse tipo de observação se caracteriza, segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1998, p.166), pelos "comportamentos a serem observados no qual não são predeterminados, eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo em uma dada situação". Dessa forma, nos interessamos por diálogos gerados por dúvidas dos alunos e consequentemente as discussões realizadas em sala de aula e no laboratório de informática. A participação e envolvimento dos alunos nas aulas e nas atividades também ganharam destaque na observação.

Os registros dessas observações se deram por meio de um diário de campo, feito em folhas A4, onde as anotações eram feitas em forma de tópicos e, outras vezes, na forma de relatos mais extensos sobre o que havia acontecido. Posteriormente, a cada aula e observações feitas, todo o material foi digitado em um arquivo no computador, com detalhes e pormenores relevantes importantes para o estudo.

4.4.2. As Atividades Exploratórias a partir de Sequências Didáticas

Outro instrumento importante para a coleta de dados nesse estudo foi a aplicação das atividades exploratórias, ou seja, de atividades a partir de sequências didáticas envolvendo os conteúdos de Integrais Múltiplas. Embora as atividades tenham uma sequência e sejam guiadas, o termo exploratório remete à possibilidade de conjecturar situações matemáticas que podem apresentar processos de ensino e aprendizagem não convencionais.

Já as sequências didáticas, segundo Zaballa (1999), devem se apresentar estruturadas, organizadas e com uma ordem lógica a fim de articular conhecimentos para um determinado conteúdo:

> O conjunto ordenado de atividades estruturadas e articuladas para a consecução de um objetivo educacional em relação a um conteúdo concreto. Esta unidade de análise, como as sequências didáticas, está inserida num contexto em que se deverá identificar, além dos objetos didáticos e do conteúdo objeto da sequência, as outras variáveis metodológicas: relações interativas, organização social, materiais curriculares, etc (ZABALA, 1999, p. 78).

As sequencias didáticas são ferramentas que se mostram de grande importância para auxiliar o trabalho do professor. Elas permitem que os conhecimentos que se apresentam em fase de construção sejam muitas vezes consolidados quando abordados por sequências didáticas, pois a disposição organizacional das atividades privilegia uma progressão em fases, a partir do levantamento do conhecimento do que os alunos já possuem.

Para isso, o professor deve ter um domínio pedagógico do conteúdo aguçado e não somente um simples domínio do conteúdo, que obviamente, também não deixa de ser importante. O conhecimento desses dois aspectos pode levar o professor a perceber que uma lista de estratégia conecta os alunos a uma melhor compreensão do conteúdo e à construção do conhecimento (SHULMAN, 1986).

Diante dessa perspectiva, as atividades dessa pesquisa, caracterizadas como sequências didáticas visam buscar de forma ordenada e organizada articular conceitos dos Cálculo de Várias Variáveis, como por exemplo, os gráficos de funções de uma e duas variáveis, para explorar o conteúdo de Integrais Múltiplas.

Utilizamos o software GeoGebra 3D para facilitar a construção e visualização desses gráficos gerados por tais funções. Durante o processo de exploração desse conteúdo através das sequencias didáticas podemos levar os participantes da pesquisa a fazer conjecturas, considerações, rever conceitos e propriedades. Para Zaballa (1998, p.20), "as sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir".

As atividades exploratórias elaboradas a partir de sequências didáticas seguem nos apêndices.

4.4.3. O Questionário Final

Segundo Gil (1999, p.128), o questionário pode ser definido como “a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, etc.”

Muitas pesquisas no âmbito educacional se valem do questionário como um instrumento de coleta de dados, já que ele é uma ótima opção para coletar informações da realidade. O questionário possibilita atingir um grande número de pessoas, permite o anonimato dos participantes, apresenta um custo relativamente baixo, permite que os participantes respondam no momento mais conveniente, dentre outros aspectos; mas, por outro lado, impede auxiliar o sujeito quando ele não entende corretamente as perguntas ou instruções, não existindo assim, uma garantia de que todos os questionários serão respondidos satisfatoriamente.

Em nossa pesquisa, aplicamos um questionário final, depois da execução das atividades exploratórias. É importante deixar claro que esse instrumento de coleta de dados nos ajudou a colher algumas opiniões de como foram as atividades propostas, quais as contribuições e possíveis dificuldades encontradas e outros aspectos que, para nós, se mostraram relevantes.

O Questionário Final segue nos Apêndices.

4.5. O Contexto da Pesquisa

Essa pesquisa foi realizada no 1º semestre letivo de 2017, em uma turma de Cálculo III – Cálculo Diferencial e Integral III, que integra a grade curricular do 4º período do curso de Engenharia Elétrica de uma faculdade particular da região metropolitana de Belo Horizonte – MG.

Essa disciplina é obrigatória e foi ministrada pelo professor-pesquisador, com início na 1ª semana de fevereiro e término na 1ª semana de julho de 2017, tendo carga horária total de 60 horas/aula.

A disciplina de Cálculo III, nessa instituição, aborda principalmente os conteúdos relacionados às funções de várias variáveis. Diante desse fato, a ementa dessa disciplina se apresentou com os seguintes conteúdos programáticos:

Quadro 7 – Ementa da disciplina Cálculo III

Unidades de Ensino	**Conteúdo das Unidades**
Unidade 1: **Integrais Duplas**	Revisão de Superfícies Cilíndricas e Quádricas; Integrais Duplas sobre retângulos; Integrais Iteradas; Integrais Duplas sobre Regiões Génericas; Integrais Duplas em Coordenadas Polares; Aplicação de Integrais Duplas (área, volumes, massa, quantidade de carga elétrica, centro de massa e outros).
Unidade 2: **Integrais Triplas**	Integrais Triplas Iteradas; Integrais Triplas Sobre Superfícies Genéricas; Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas; Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas; Aplicação de Integrais Triplas (volume, massa, centro de massa, momento de inércia, quantidade de carga elétrica).
Unidade 3: **Cálculo Vetorial**	Integrais de Linha de Função Escalar; Integrais de Linha de Função Vetorial; Integrais Independentes do Caminho; Teorema de Green; Teorema da Divergência.;
Unidade 4: **Integrais de Superfícies**	Superfícies Parametrizadas Cálculo de Áreas de Superfícies; Áreas de Superfícies de Revolução; Teorema de Stokes.

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A bibliografia básica adotada para a disciplina foi:

- STEWART, J. Cálculo, Volume 2. 5ª Ed. São Paulo: Thomson Learning, 2014;

- FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. B. Cálculo B. 8ª Ed. São Paulo: Makron Books, 1992.

As aulas da disciplina foram ministradas da seguinte maneira:

- 50 horas/aula em sala de aula, distribuídas em aulas expositivas e resolução de exercícios;

- 10 horas/aula no laboratório de informática, nas quais as 3 (três) atividades exploratórias foram desenvolvidas.

A turma era constituída por 29 (vinte e nove) alunos regularmente matriculados. Desse total, 2 alunos estavam repetindo a disciplina pela 1ª vez e 1 aluno repetia pela 3ª vez. Apresentamos aos alunos a proposta de trabalho, explicando que uma pesquisa seria feita no decorrer do semestre e os convidamos a participar, sendo que todos aceitaram o convite.

As 3 atividades exploratórias foram desenvolvidas em 4 aulas, todas no laboratório de informática. Tais atividades foram aplicadas logo após a exposição dos conteúdos em sala de aula, por meio de aulas expositivas e resolução de exercícios. A 1ª atividade foi aplicada em 1 aula, a 2ª atividade foi aplicada em 2 aulas e 3ª atividade foi aplicada em 1 aula.

É importante deixar claro que as aulas possuíram a duração de 2:30 h, sendo divididas em dois tempos de 1:15 h, existindo um intervalo de meia hora entre eles. Assim, o tempo total de aplicação das atividades foi de 10 horas.

As atividades exploratórias foram dividas da seguinte forma, com os seguintes conteúdos, datas e número de participantes indicados no quadro, a seguir:

Quadro 8 – Cronograma das Atividades Exploratórias

Atividades	**Data**	**Conteúdo**	**Participantes**
Atividade 1: **Construindo & Explorando as “Quádricas” no GeoGebra 3D**	14/Março	Quádricas	29
Atividade 2: **Explorando &Construindo Integrais Duplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra 3D**	18/Abril e 09/Maio	Integrais Duplas	25 e 23
Atividade 3: **Explorando & Construindo Integrais Triplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra 3D**	23/Maio	Integrais Triplas	23

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Utilizamos o Laboratório de Informática da Faculdade. Esse laboratório possui 35 computadores, todos em perfeito estado. Esse número de computadores permitiu que as atividades fossem realizadas com um aluno por computador, favorecendo a condução das atividades.

O *software* que utilizamos foi o GeoGebra 3D. Nos capítulos anteriores, já discutimos as potencialidades apresentadas por ele e também sua utilização no ensino de Cálculo; mas, nossa escolha se deu pelo fato dele apresentar alguns aspectos importantes, como ser um *software* livre, leve, de fácil instalação e manuseio. A não necessidade de conhecimento de uma linguagem computacional mais apurada para sua utilização também foi um ponto crucial para descartamos outros *softwares* e escolhermos o GeoGebra 3D. A linguagem de entrada algébrica é simples e intuitiva, o que possibilita que usuários que nunca tiveram contato com ele, possam usá-los com facilidade depois de uma breve explicação do professor.

Outro ponto que influenciou na escolha do *software* está ligado à sua capacidade de visualização gráfica, tanto em duas ou três dimensões. O GeoGebra 3D possui janelas de visualização algébricas e gráficas (2D e 3D), o que favorece as atividades matemáticas que necessitam transitar nesses âmbitos, além de possuir ferramentas que são interessantes para serem usadas e exploradas em atividades ligadas aos conteúdos que aqui investigados.

Por fim, podemos usar como argumento o que Oliveira (2016, p.74) aponta sobre o uso do GeoGebra, ao salientar que ele "oferece a potencialidade de fomento de atividades matemáticas por meio de experimentos de ensino, explorações interativas e aprendizagem pela descoberta".

A aplicação do questionário final, após todas as atividades exploratórias serem aplicadas, aconteceu em sala de aula, no dia 30 de maio de 2017. Nesse dia, havia 25 alunos e 23 se interessaram em responder ao questionário.

Com base nos instrumentos de coleta de dados, na observação em sala de aula, nas anotações em um diário de campo, na aplicação das três atividades exploratórias com uso do Geogebra 3D e no questionário final, daremos início, no próximo capítulo, à descrição e análise do material coletado.

Capítulo 5

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

> Por mais rigorosos e sistemáticos que os métodos da análise formal ou discursiva possam ser, eles não podem abolir a necessidade de uma construção criativa do significado, isto é, de uma explicação interpretativa do que está representado ou do que é dito.
>
> Thompson (1995)

Neste capítulo, apresentaremos os dados obtidos por meio de nossa pesquisa de campo. Posteriormente, analisaremos esses dados, embasada no referencial teórico que definimos. No decorrer desse trabalho, delineamos uma estratégia de pesquisa que possibilitasse responder a nossa questão de investigação. Para isso construímos, ao longo do estudo, como forma de alicerce, considerações e discussões em torno de algumas perspectivas: Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática – TICEM, o Ensino e a aprendizagem de Cálculo de Várias Variáveis e a Teoria dos Registros das Representações Semióticas. Desta forma, elaboramos atividades exploratórias, através de sequências didáticas, que nos guiasse por caminhos, os quais nos levassem a tais repostas.

Na continuação, realizaremos a descrição / análise das três atividades exploratórias. Para isso, iremos nos remeter às anotações realizadas no diário de campo, às observações em sala de aula e, também, ao nosso referencial bibliográfico. Assim, buscaremos encontrar conexões, similaridades com as teorias abordadas e os dados obtidos nas resoluções das atividades aplicadas aos participantes da pesquisa.

Por último, elaboraremos categorias / eixos de análise amparado pela teoria dos registros de representação semiótica, de acordo com a metodologia e observações feitas através das atividades aplicadas e analisadas.

5.1. Os participantes da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma turma de Cálculo III (Cálculo de Várias Variáveis), do curso de Engenharia Elétrica, da Faculdade "Pitágoras Betim". A turma era constituída por 29 alunos matriculados. Por questões éticas de pesquisa, os alunos foram numerados de 1 a 29 e, durante a pesquisa, referimo-nos a eles como aluno 1, aluno 2 e assim por diante. Como já citamos no capítulo anterior, três deles eram alunos que estavam repetindo a disciplina e, um deles, pela 3ª vez. Os demais cursaram a disciplina de Cálculo II no semestre anterior e, consequentemente, nesse semestre ingressaram em Cálculo III.

Todos os três alunos que faziam a disciplina novamente haviam sido reprovados nos semestres anteriores com o mesmo professor / pesquisador. Este fato pode ser considerado relevante, pois muitos alunos, quando reprovados, optam por refazer a disciplina virtualmente (*on line*), numa modalidade de ensino ofertada pela faculdade, na qual o estudo foi desenvolvido. Ao dialogar com estes alunos, no decorrer do semestre, foi possível identificar o motivo pelo qual optaram pela modalidade presencial:

> Acho melhor fazer presencial, posso vir aqui e assistir às aulas, tirar dúvidas... já fiz essa matéria uma vez e vi que é muito difícil, tive muita dificuldade, por isso fui reprovado. É muito gráfico, tem que desenhar demais, em três dimensões e em duas também, tem que desenhar e interpretar, já não sou bom nisso, imagina *online*. (Aluno reprovado 1, diário de campo, março de 2017)

A opinião expressa, anteriormente, por este aluno, vai ao encontro das opiniões dos outros dois alunos, também reprovados. Todos tinham o mesmo discurso em relação à disciplina: dificuldade no conteúdo, excesso de gráficos, dificuldade de interpretação. O que chama a atenção é que essas falas dos alunos são coerentes com as nossas discussões, realizadas em capítulos anteriores, acerca das disciplinas que envolvem funções de várias variáveis.

Durante as aulas iniciais, percebemos que muitos alunos, que cursavam Cálculo III pela 1ª vez, apresentavam dificuldades relacionadas aos conceitos abordados. No primeiro tópico do conteúdo, observamos as dificuldades apresentadas por grande parte da turma, principalmente para entender os desenhos e as curvas relacionadas às Superfícies Quádricas. Suas dificuldades residem, particularmente, em relacionar as representações algébricas das funções e suas representações gráficas. Alguns depoimentos dos alunos se mostraram relevantes, para que pudéssemos delinear características dos participantes da pesquisa.

> Desenhar essas superfícies é muito complicado, difícil de enxergar o que é cada tracinho desse. Eu olho para essa equação e nem sei por onde começar. Nossa, tem muito desenho.... Desenhar retas e parábolas é fácil, no Cálculo 2 era só isso, agora no espaço (R^3), a gente nunca viu isso. (Aluno 1, diário de campo, março de 2017)

> Como vou desenhar essas coisas? Para que isso professor? Está muito difícil. Tem certeza que vamos precisar disso mesmo? Vamos ter que desenhar durante todo semestre? Sou ruim demais para desenhar. (Aluno 2, diário de campo, março de 2017)

Diante destes relatos, das indagações e de outras conversas ocorridas em sala de aula, observamos que a turma, na qual a pesquisa foi desenvolvida, apresentava dificuldades básicas com relação ao esboço de curvas e superfícies. Foi observado, durante algumas explicações em aulas expositivas, que as dúvidas que surgiam levavam a crer que o conteúdo sobre gráficos de funções simples (retas e parábolas) não estavam totalmente compreendidos por eles. O Aluno 1 comenta que no Cálculo 2 trabalhava apenas com reta e parábola (funções polinomiais do primeiro e do segundo grau), não mencionando outras funções (exponencial e trigonométrica, por exemplo) e seus respectivos gráficos. Desta forma, podemos constatar a percepção de alguns alunos relativas a esse conteúdo.

É claro que não era um problema generalizado, havia alguns alunos que se saiam bem em vários quesitos e apresentavam desenvoltura para desenhar tais superfícies em $\mathbb{R}^3$. Podemos verificar tal fato, observando os alunos durante as explicações e resolução de exercícios em sala de aula. A passagem retirada do diário de campo reflete essa posição:

> Na aula de hoje pude perceber que alguns alunos conseguiram desenvolver esboços de algumas superfícies com facilidade. Um grupo de alunos me mostrou seus desenhos feitos no caderno, eram repostas de exercícios de fixação e listas de atividades. Estavam bem desenhados, porem notei alguns erros, os quais discutimos e prontamente foram entendidos e corrigidos por eles. (Diário de campo, março de 2017)

Desta forma, a pesquisa se desenvolveu, tanto com alunos que apresentavam algumas dificuldades quanto com alunos que tinham uma boa compreensão dos conteúdos, ficando evidente que a turma não era homogênea. Fato que foi possível comprovar durante o desenrolar do semestre, através de muitas observações feitas em sala de aula e durante a execução das atividades exploratórias.

Na próxima seção, descreveremos as atividades exploratórias detalhadamente, tecendo comentários à luz de nosso referencial teórico.

5.2. Descrevendo as atividades exploratórias

Durante esta pesquisa, realizamos uma vasta revisão da literatura relativa ao nosso objeto de estudo, disponibilizada em livros, artigos, dissertações e teses. As atividades exploratórias, baseadas em sequências didáticas, foram elaboradas com base neste estudo prévio, organizado a partir do referencial teórico desta pesquisa. Esse embasamento teórico proporcionou a elaboração de atividades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo de Várias Variáveis. O uso das TICEM foi outro aporte usado na elaboração das atividades, já que acreditamos que elas podem alavancar a produção de conhecimento, principalmente quando centramos nosso interesse nas distintas representações dos conceitos abordados.

As atividades exploratórias foram elaboradas para serem executadas por alunos de Cálculo III, abordando os conteúdos de Superfícies Quádricas, Integrais Duplas e Integrais triplas. Todas elas foram pensadas para serem desenvolvidas em um ambiente de laboratório de informática. As atividades exploratórias ocorreram sempre após o conteúdo ser abordado em sala de aula, com exposição da teoria e com atividades sem o uso do computador. No laboratório de informática, as atividades exploratórias proporcionaram aos alunos relacionar os momentos de aprendizagem do conteúdo do Cálculo de Várias Variáveis da sala de aula tradicional àqueles possibilitados por um software dinâmico (GeoGebra 3D), permitindo a construção de conhecimentos relativos aos conteúdos estudados. A descrição destas atividades e a discussão de suas potencialidades serão realizadas na continuação.

5.2.1. Atividade Exploratória 1

A primeira atividade, Construindo & Explorando as “Quádricas” no GeoGebra 3D, tinha como objetivos propiciar aos alunos a construção dessas superfícies de maneira dinâmica, explorar e inferir sobre as interseções dos planos perpendiculares a elas.

Considerando que o conhecimento das Superfícies Quádricas constitui-se em um pré-requisito importante para quem vai estudar assuntos relativos à integração múltipla (Integrais Duplas e Triplas), pois na maioria das vezes a região de integração dessas integrais são constituídas dessas superfícies, entendemos que um ponto crucial para nossa pesquisa consiste em elaborar atividades que possibilitem trabalhar e explorar esse conteúdo, de maneira concreta, estabelecendo uma relação entre as formas algébricas e suas representações gráficas. No que se refere ao ensino de Integrais Múltiplas (IM), Henriques (2010) frisa que:

> A passagem para o ensino de *IM* é acompanhada com analogias e com mudanças ou rupturas em relação ao lugar ocupado para as funções e suas representações gráficas. Nessa passagem, uma função não será mais examinada de forma isolada. Na maioria dos casos de resolução de problemas, uma função interagirá com outras funções para formar um domínio de integração, que é um sólido resultante de uma Representação Gráfica (*RG*) a partir de uma Representação Analítica (*RA*) no espaço (HENRIQUES, 2010, p. 1-2).

Retomando, especificamente, as Quádricas, Stewart (2004, p. 822) as define como um “conjunto de pontos que obedecem a uma equação do segundo grau nas variáveis $x, y \; e \; z$. Possuindo como forma geral a equação:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + j = 0$$

Onde $A, B, C, ..., J$ são constantes. Os coeficientes $\left[A, B, (...), F\right]$ não podem ser todos nulos, pois se todos forem nulos, a equação não será do segundo grau. Podendo ser um plano, ou até um ponto no espaço.

Segundo Stewart (2004), por rotação e translação, a equação acima pode ser posta nas seguintes formas padrões, as quais adotamos em sala de aula e consequentemente na atividade exploratória:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + j = 0 \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

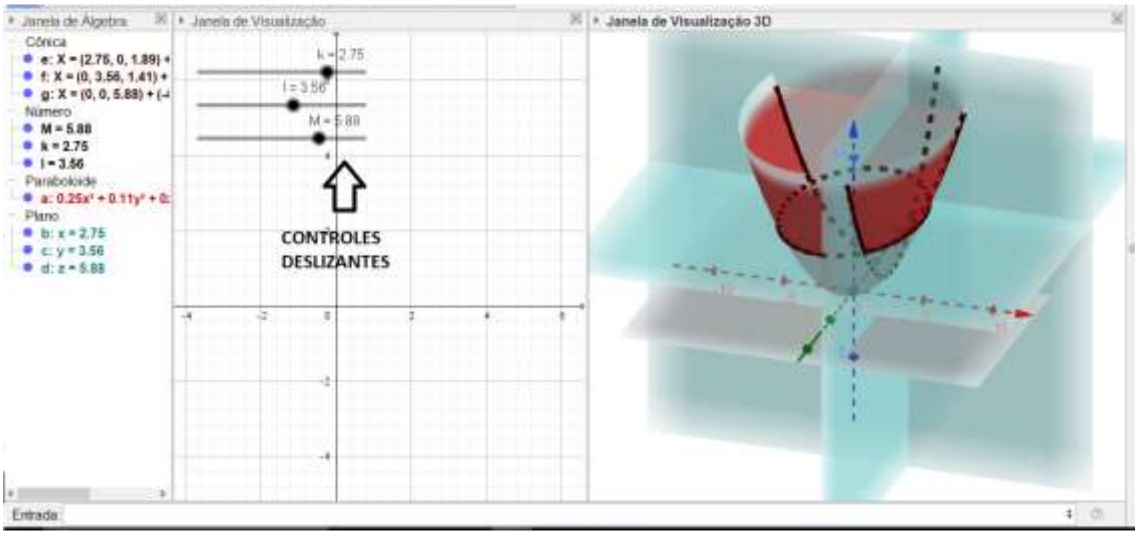
Abordamos nessa atividade exploratória algumas superfícies Quádricas, (paraboloide, elipsoide, hiperboloide, cone e esfera). A ideia principal com essas atividades além de construir as Superfícies Quádricas, é construir planos paralelos aos planos coordenados enfatizando a sua visualização e mostrando algebricamente a interseção entre eles e as superfícies.

As sequências didáticas se iniciam propondo que uma Superfície Quádrica seja plotada diretamente no GeoGebra e, em seguida, que sejam criados planos paralelos aos planos coordenados. Vale ressaltar que todos os blocos de sequências didáticas contidos na Atividade

Exploratória 1 se iniciam dessa maneira, assim não descreveremos a criação das Quádricas uma a uma.

Prosseguindo, quando criamos tais planos paralelos ($x = K$, $y = L$, $z = M$, onde K, L e M são constantes), exploramos comandos do GeoGebra como "Controles deslizantes" e "Girar janela de visualização 3D", os quais permitem mover as superfícies e os planos livremente, possibilitando explorar uma faceta impossível de ser visualizada quando lidamos com desenhos usando somente papel e lápis, uma vez que estamos trabalhando numa dimensão 2D (papel). Entretanto, com o auxílio do GeoGebra e a sequência didática proposta, podemos plotar a superfície na janela 3D e mover os planos criados em várias direções, verificando visualmente (janela de visualização 3D) e algebricamente (janela de álgebra) a interseção entre eles e as superfícies. Na figura 4, apresentamos a construção de um paraboloide realizada por meio da sequência didática proposta e executada pelos participantes da pesquisa.

Figura 4 – Construção de um Paraboloide e planos paralelos aos planos coordenados



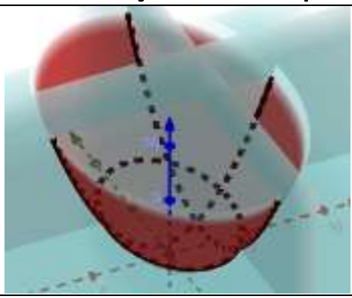
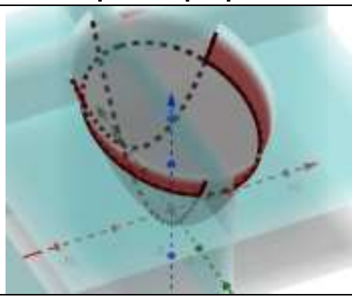
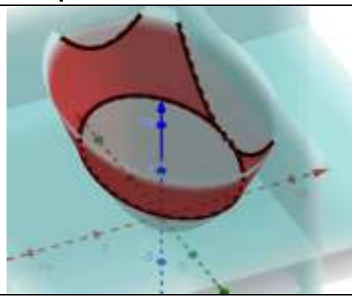
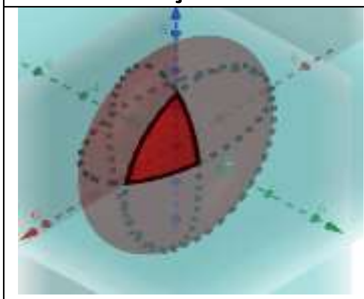
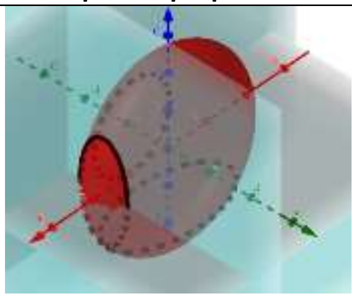
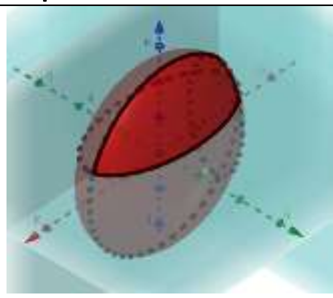
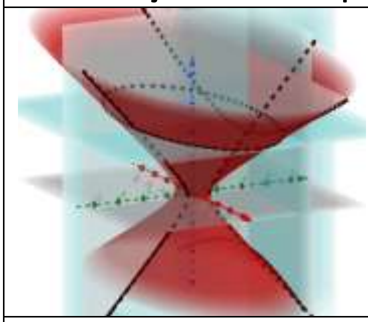
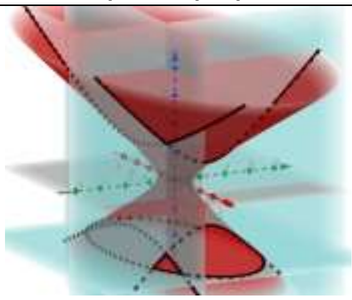
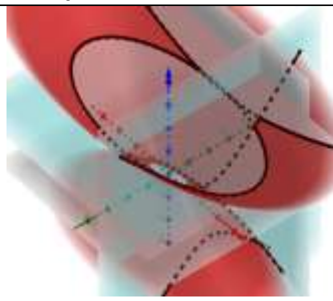
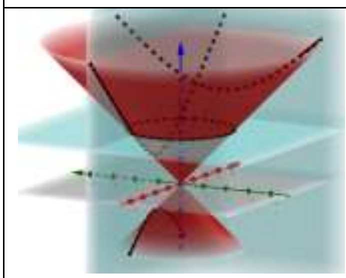
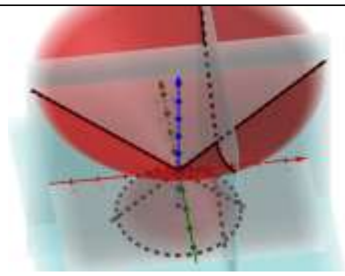
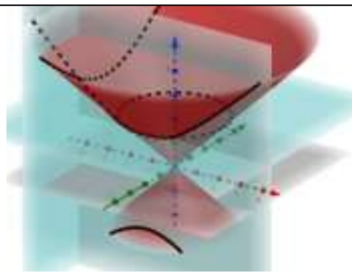
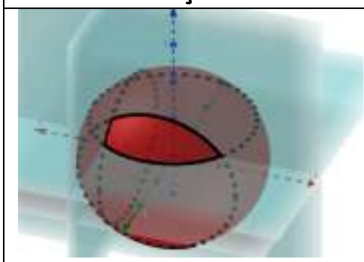
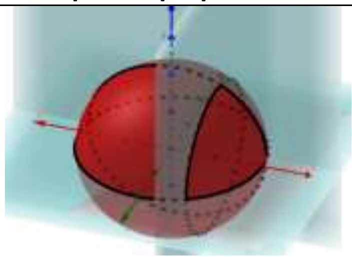
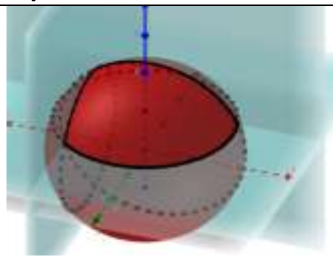
Fonte: Dados do pesquisador (2017)

No que se refere à Teoria em que estamos nos embasando, a formação da representação semiótica (representação gráfica) para cada superfície é proporcionada pelos recursos do GeoGebra. No decorrer das atividades, podemos evidenciar as operações de tratamento, pois estamos diante de uma atividade cognitiva mediada por um *software* que transforma internamente um registro, ou seja, existe uma transformação de representação semiótica em outra, porém dentro do mesmo registro gráfico. A ferramenta “Interseção Entre Duas Superfícies”, explorada pelos alunos na atividade proposta possibilita destacar o nosso objeto de estudo, acenando para a possibilidade de uma maior compreensão do que acontece com as interseções entre os planos criados e as superfícies. Além disso, verifica-se que existe uma agilidade em executar as operações de tratamento, já que as posições dos planos são dinâmicas e, de acordo com a movimentação dos controles deslizantes, observamos as mudanças de posição das interseções. A fala do aluno 5, registrada no diário de campo, questionado se havia compreendido a construção, expressa tal possibilidade:

> Professor, esses planos fazem com que possamos ver essas interseções mais fácil. Dá para mover e ver o que é cada linha dessas (interseções). Essa construção no computador ajuda muito, se fosse para desenhar no caderno eu não ia conseguir nunca ver isso (Aluno 5, diário de campo, março de 2017).

No quadro 9, apresentaremos as construções das Superfícies Quádricas e suas diversas interseções com os planos, colocando em evidência as potencialidades do *software* e a possibilidade de criar um ambiente favorável às operações de tratamento. Tais construções foram exploradas nos blocos de sequência didática durante a Atividade Exploratória 1.

Quadro 9 – Operação de tratamento evidenciada pelo GeoGebra

<table>
<tr><th colspan="3">Interseção entre um paraboloide e planos perpendiculares aos planos coordenados</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="3">Interseção entre um Elipsoide e planos perpendiculares aos planos coordenados</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="3">Interseção entre um Hiperboloide e planos perpendiculares aos planos coordenados</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="3">Interseção entre um Cone e planos perpendiculares aos planos coordenados</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="3">Interseção entre uma Esfera e planos perpendiculares aos planos coordenados</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A busca pela compreensão do que representam as interseções entre as Superfícies Quádricas e os planos também foi uma faceta explorada do ponto de vista geométrico e algébrico nesse primeiro conjunto de atividades, através da nossa sequência didática. No quadro 9, podemos visualizar cada uma dessas interseções, as quais foram muito bem explicitadas usando as ferramentas do GeoGebra, e evidenciadas nas operações de tratamento nos registros gráficos possibilitadas por ele. Mas coube aos alunos demostrar, algebricamente, o que representa cada interseção com os planos $x = K$, $y = L$, $z = M$ e as superfícies. Vale ressaltar que o GeoGebra apresenta estas interseções de forma algébrica na janela de álgebra, mas com a equação parametrizada, e este tipo de representação algébrica não atende aos nossos objetivos.

Apesar de a sequência didática já direcionar os alunos para isso e do GeoGebra ajudar a explicitar essas interseções geometricamente, muitos alunos (cerca de 55%) apresentaram dificuldades em demostrar quais as equações algébricas estavam relacionadas às curvas que representam as interseções. Verificamos que alguns alunos (cerca de 30%) reconheciam as interseções graficamente com o auxílio do GeoGebra, mas não conseguiam determinar as equações que as representavam. É claramente notável que estavam trabalhando com o mesmo objeto matemático, mas não o reconheciam por meio de representações diferentes. Podemos verificar este fato através da seguinte anotação do diário de campo:

> Passando pelos computadores, pude perceber que muitos alunos apresentavam enormes dificuldades em justificar de forma algébrica o que era, geometricamente, cada interseção (item 5 das sequências didáticas). Percebi que sabiam o que representavam as interseções, respondendo que eram parábolas, elipses, hipérboles. Mas na hora de manipular as equações estavam se perdendo. Fiz algumas perguntas para tentar direcioná-los, mas as dúvidas ainda permaneciam. (Diário de campo, março de 2017)

Para encontrarmos essas equações, bastava resolver o sistema entre a equação da superfície com a qual estamos trabalhando e a equação do plano paralelo a um dos planos coordenados escolhidos. Como no exemplo abaixo, entre o paraboloide e os planos paralelos ao plano xy:

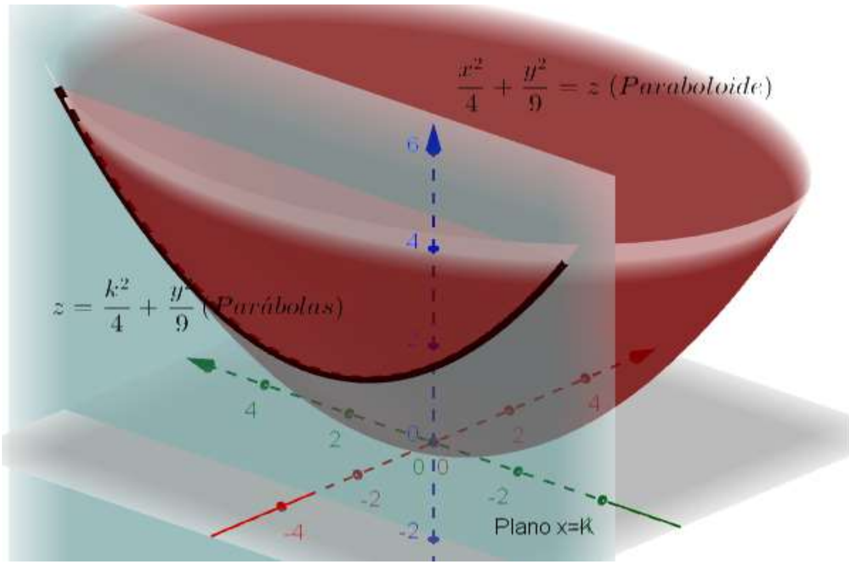
$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z \\ &x = k \end{aligned}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$z = \frac{k^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

Como k é uma constante, a equação é do segundo grau. Logo, podemos notar algebricamente que a interseção de cada plano paralelo ao plano xy é uma parábola. Como pode ser apreciado na figura 5.

Figura 5 – Interseção entre um Paraboloide e o plano paralelo ao plano yz

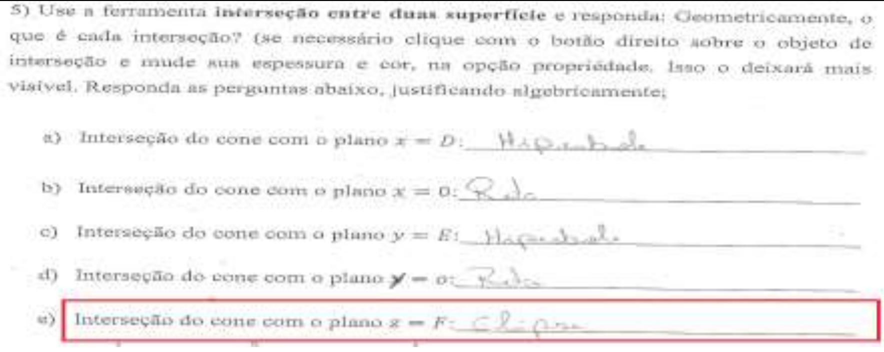


Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Mais uma vez, estamos diante da operação de tratamento, mas agora no âmbito de um registro algébrico. A dificuldade apresentada pelos alunos se refere à namis equações de maneira a encontrar as interseções algébricas relativas a cada uma que está explicitada no registro gráfico realizado no GeoGebra. Podemos observar nas atividades que muitos alunos (cerca de 40%) manipulavam as equações de maneira correta, mas não reconheciam as interseções (parábola, elipse, hipérboles, entre outras), mesmo quando elas eram visualizadas na tela do computador, ou seja, não conseguiam conectar a equação encontrada, com a sua representação gráfica. Nesse sentido, podemos observar que alguns alunos (cerca de 25%) não conseguiram reconhecer o objeto matemático que estavam trabalhando, quando manipulado em diferentes registros (gráfico e algébrico). Isso nos leva a pensar que a atividade cognitiva de conversão, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, ainda é falha para alguns deles. O quadro 10, aponta o desenvolvimento de uma atividade sobre uma superfície cônica (cuja equação é $x^2+y^2=z^2$) de um dos alunos participantes da pesquisa. Esse exemplo ilustra bem o que estamos discutindo.

Quadro 10 – Comparativo de respostas dadas às atividades exploratórias

Respostas apresentadas a partir das observações da representação gráfica e do uso de ferramentas do GeoGebra.



5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente;

a) Interseção do cone com o plano $x = D$: Hipérbole

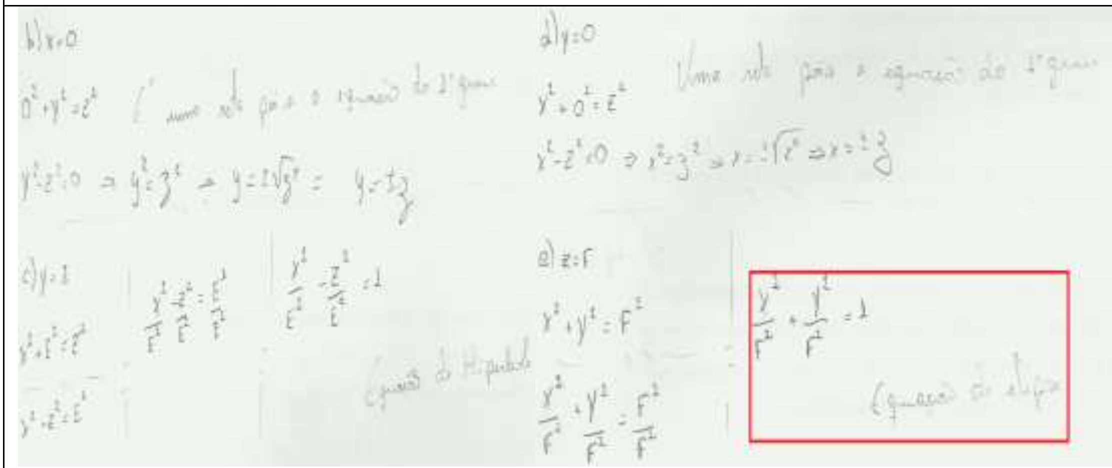
b) Interseção do cone com o plano $x = 0$: Reta

c) Interseção do cone com o plano $y = E$: Hipérbole

d) Interseção do cone com o plano $y = 0$: Reta

e) Interseção do cone com o plano $z = F$: Elipse

Reposta apresentada a partir de registros algébricos sem uso do GeoGebra.

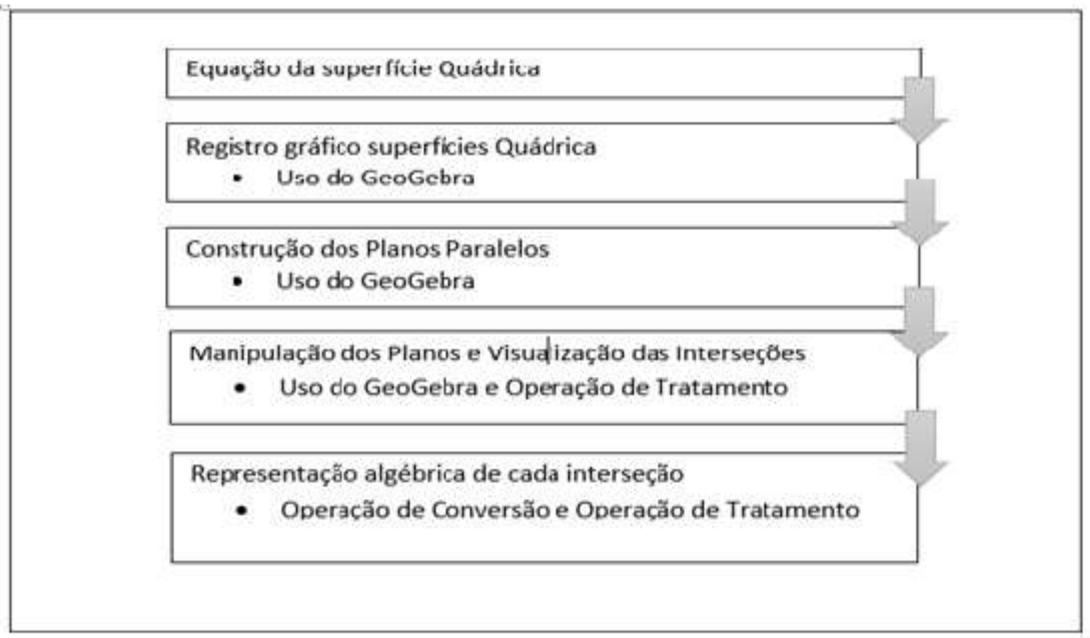


Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Existem alguns equívocos que merecem serem ressaltados nas respostas apresentadas no quadro 10, e que também apareceram em respostas de outras sequências didáticas dentro dessa Atividade Exploratória 1. A primeira diz respeito às respostas atribuídas para as interseções entre o cone e os planos paralelos aos planos coordenados. A resposta da letra e, ressaltada em vermelho, não é uma elipse, mas sim uma circunferência. Vale frisar que para determinar a resposta, bastava observar a interseção no registro algébrico do GeoGebra. Podemos verificar que na resposta apresentada a partir da representação algébrica sem uso do GeoGebra, também ressaltada em vermelho, o aluno manipulou as equações corretamente e encontrou uma equação de uma circunferência, entretanto, por algum motivo, continuou afirmando que é a equação de uma elipse. O segundo aspecto que ressaltamos se refere às interseções com os planos $x = 0$ e $y = 0$ que representam retas e não uma única reta como sugere a resposta do aluno. Na justificativa algébrica, o aluno a faz corretamente, mas escreve que a equação representa apenas uma reta, e não duas retas. Do ponto de vista cognitivo percebemos que as transições entre os variados registros semióticos (gráfico, algébrico e língua natural) se apresentam de forma falha em algumas atividades. Mas o aluno consegue fazer, em parte, a conversão na atividade analisada.

Resumindo o conjunto de sequências didáticas presente na Atividade Exploratória 1, pensamos no seguinte esquema apresentado no quadro 11, que ilustra as etapas de cada sequência didática para cada Superfície Quádrica explorada. Apresentamos também em cada etapa os recursos utilizados e as atividades cognitivas esperadas.

Quadro 11 – Etapas das sequências didáticas aplicadas aos participantes



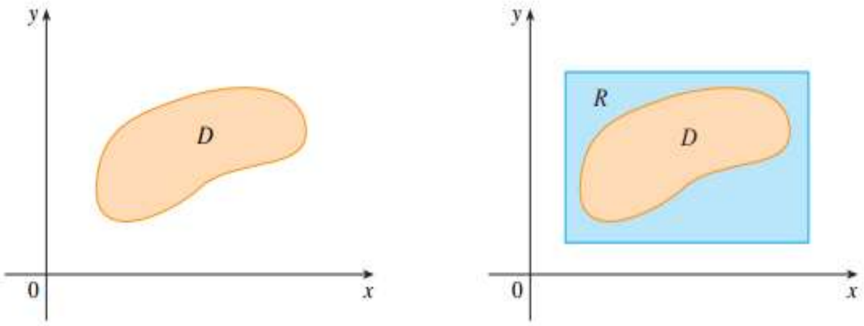
Fonte: Dados do pesquisador (2017)

5.2.2. Atividade Exploratória 2

A segunda atividade, “Explorando & Construindo Integrais Duplas através de Regiões de Integração Construídas no GeoGebra”, possui como objetivo explorar a construção de regiões de integração simples em $\mathbb{R}^2$, enfatizando a construção de integrais duplas para cálculo de áreas e volumes.

Segundo Stewart (2004) quando estamos trabalhando com integrais simples, a região de integração é sempre um intervalo. Já no âmbito das Integrais Duplas, é necessário integrarmos uma função f sobre uma região D de formal mais geral, como na figura 6:

Figura 6 – Regiões de Integração



Fonte: Stewart (2004)

Seja uma região D limitada. Ser limitada significa que D está contida em uma região retangular como na figura 6. Seja também uma função F definida como:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) \text{ se } (x,y) \text{ está em D} \\ 0 \text{ se } (x,y) \text{ está em } \mathbb{R} \text{ mas não está em D} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Dessa forma, segundo Stewart (2004), se F for uma função integrável em $\mathbb{R}$, podemos definir Integral Dupla de f em D por:

$$\iint_D f(x,y)dA=\iint_R F(x,y)dA \text{ onde F é dada pela definição (I)}$$

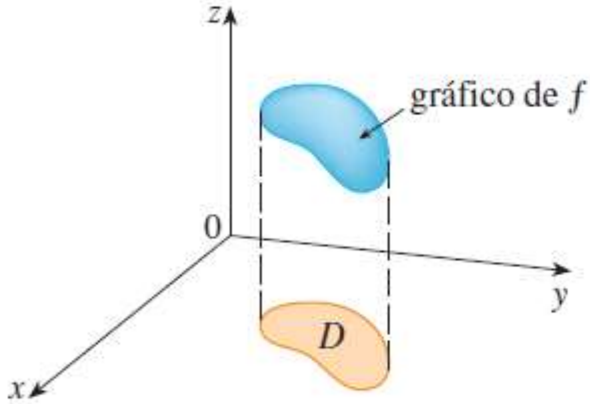
Podemos observar que mesmo que $F(x,y)$ assume valores iguais a 0 quando (x,y) não pertence ao conjunto D, o valor da integral não se altera. O que importa é que o retângulo R, deve conter D.

Para Stewart (2004) se $f(x,y)\geq 0$ a integral

$$\iint_D f(x,y)dA$$

pode ser interpretada como o volume do sólido (figura 7) contido entre a região D e a superfície $z = f(x, y)$. Outra interpretação pode ser a área da região D, sendo a integral dupla construída com a função $f(x, y) = 1$.

Figura 7 – Superfície e Região de Integração



Fonte: Stewart (2004)

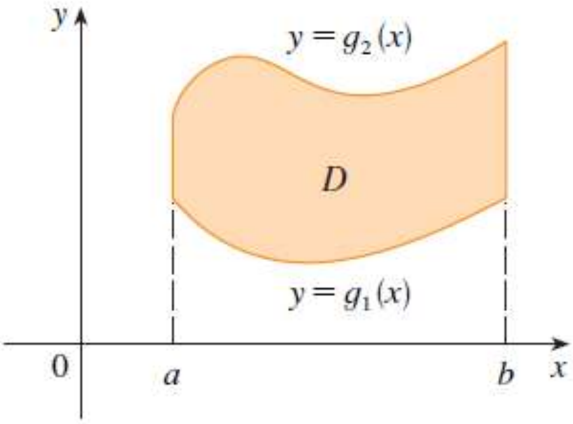
Para que possamos escrever essas Integrais Duplas que representam o volume de sólidos em $\mathbb{R}^3$ ou áreas entre curvas, precisamos determinar os limites de integração e a função de integração. Para isso, devemos observar qual a região estamos integrando. De acordo com Stewart (2004) temos duas possibilidades de regiões de integração:

1 - Uma região do tipo I: se está contida entre o gráfico de funções contínuas de x.

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Onde $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são continuas em um intervalo $[a, b]$.

Figura 8 – Região de Integração do tipo I



Fonte: Stewart (2004)

Assim podemos usar a integral iterada seguinte para calcular o volume de um sólido contido acima de uma região D do tipo I e abaixo de uma superfície $z = f(x, y)$:

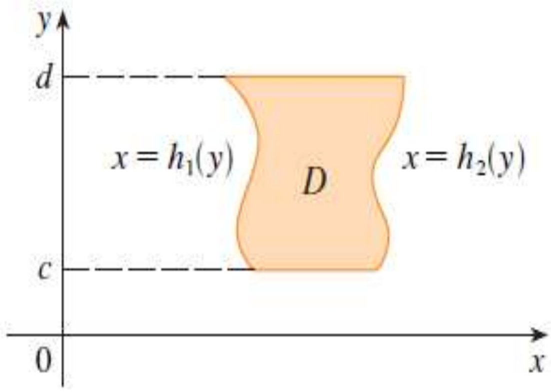
$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

2 – Uma região do tipo II: se está contida entre o gráfico de funções contínuas de y.

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(x)\}$$

Onde $h_1(y)$ e $h_2(y)$ são contínuas em um intervalo $[c, d]$.

Figura 9 – Região de Integração do Tipo II



Fonte: Stewart (2004)

Para esse tipo de região D, tipo II, usamos a seguinte integral iterada:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \text{ dxdy}$$

Para construir uma Integral Dupla, é necessário sempre ter a região D em $\mathbb{R}^2$, sobre a qual vamos integrar. Esta região é limitada por funções que nem sempre apresentam uma representação simples no plano. Desta forma, o uso de softwares que permitem o esboço dessas regiões se mostra como uma boa opção, dando ênfase à visualização e possibilitando uma melhor interpretação no momento de construção das Integrais Duplas, podendo diferenciar com maior clareza regiões do tipo I ou do tipo II. Henriques (2004, p.15) assegura que diante de recursos computacionais, “o aluno pode visualizar e analisar, em tempo real, os conceitos inerentes a uma família de superfícies e dos objetos que ela pode construir, ampliando assim o leque de relações entre os objetos envolvidos na situação em estudo”.

Como já dissemos, as atividades desenvolvidas voltadas para o conteúdo de Integrais Duplas apresentaram características relacionadas entre as suas regiões de integração (representação gráfica) e a expressão relativa às integrais (representação algébrica). Para isso, elaboramos sequências didáticas que permitem ao aluno construir integrais duplas a partir da representação da região de integração no GeoGebra e também fazer o caminho inverso: construir a região de integração dada uma integral dupla.

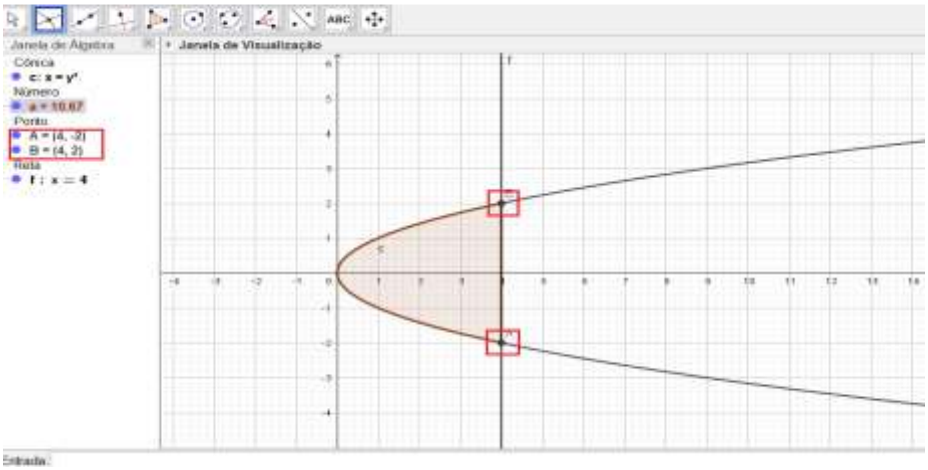
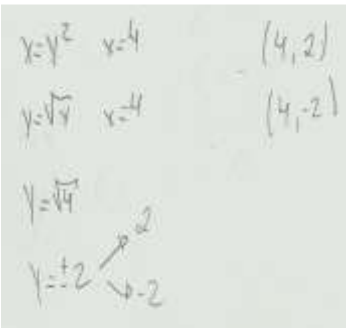
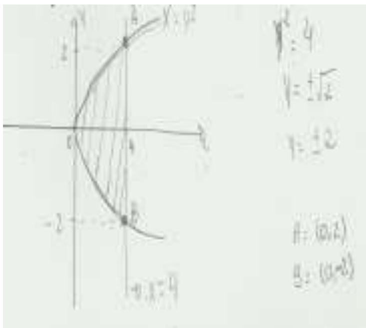
Na primeira sequência didática apresentada “Construindo Integrais Duplas sobre regiões no plano”, nesta Atividade Exploratória 2, pedimos, incialmente, para serem plotados no GeoGebra os gráficos das funções $x = y^2$ e $x = 4$, formando uma região de integração no plano. Além do comando de entrada das funções na representação algébrica e de sua representação gráfica, foi explorado o comando “Interseção entre dois objetos”, que permitem determinar os pontos de interseção entre as funções, necessários para representar algebricamente as Integrais Duplas.

No âmbito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, as tarefas iniciais, feitas com o GeoGebra, que consistem em plotar os gráficos das funções, determinar a região de integração, encontrar as interseções entre funções, evidenciam atividades ligadas à operação de tratamento. Podemos observar que o registro gráfico foi conservado na execução dessas tarefas e, contudo, houve um ganho de tempo e agilidade para realizá-las. O *software* permite isso com bastante facilidade. Para a comparação, entre o que foi feito com o auxílio do GeoGebra e o que pode ser feito com papel e lápis, foi pedido aos alunos para justificarem, algebricamente, a resposta encontrada nas interseções entre as curvas. Desta forma, bastava igualar as equações numa mesma variável e resolver a equação do segundo grau resultante. A atividade de tratamento novamente foi explorada, mas através do registro algébrico. O depoimento do aluno participante da pesquisa expressa bem tal comparação:

> Fazer as interseções no gráfico é muito mais fácil, é só marcar os pontos. A gente já está vendo as interseções. Ter que encontrá-las fazendo contas, nesse caso não é tão complicado, mas pode envolver equações mais difíceis de fazer à mão. (Aluno 7, diário de campo, abril de 2017).

O quadro 12 expressa a região de integração e os pontos de interseção entre as funções obtidos com o auxílio do GeoGebra. No mesmo quadro, estão algumas justificativas algébricas apresentadas pelos participantes da pesquisa para essa atividade:

Quadro 12 – Região de integração e determinação das interseções entre as funções

<table>
<tr><th colspan="3">Região de integração e pontos de interseção</th></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><th colspan="3">Algumas justificativas algébricas para as interseções</th></tr>
<tr><th>Justificativa 1 – Aluno 3</th><th>Justificativa 2 – Aluno 7</th><th>Justificativa 3 – Aluno 9</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do Pesquisador (2017)

Escolhemos as três justificativas que resumem bem as respostas dos participantes. É importante esclarecer que grande parte dos alunos (aproximadamente 68%) justificou as interseções algebricamente de maneira correta como pode ser apreciado na justificativa número 1 do aluno 3, interpretada como uma mobilização de representações de registros, do gráfico para o algébrico, de forma coerente, ou seja, como uma operação de conversão. O objeto matemático nesta passagem da atividade pode ser evidenciado pela ferramenta do GeoGebra “interseção entre as funções”, sendo identificado tanto na forma gráfica como algébrica. A justificativa 2 é bastante peculiar, pois o aluno 7 reproduziu o gráfico corretamente (papel e lápis) e definiu de forma algébrica as ordenadas das interseções, mas determinou as abcissas como zero. Assim indicou erroneamente os pontos $A(0,2)$ e $(0,-2)$ como respostas. A justificativa 3 (aluno 9) apresenta o desenvolvimento correto, mas indicou como resposta apenas o ponto $(4, -2)$. É relevante apontar que alguns alunos (cerca de 15%) indicaram apenas um ponto de interseção também.

Retomando a sequência didática, a determinação de qual tipo de região e, consequentemente, de qual Integral Dupla usar, foi o grande “x da questão”. Durante a aplicação da atividade, gerou-se na turma uma boa discussão sobre qual o tipo de região era a que estávamos trabalhando, já que esta região admite ser tanto do tipo I como do tipo II. O interessante é que a sequência didática preparada propicia ao aluno o passo a passo para solucionar este impasse. Primeiramente, ele é levado a observar a região como sendo de tipo I $(dydx)$ e, consequentemente, a relacionar quais curvas limitam a região inferiormente e superiormente. Os relatos abaixo do aluno 5 e do diário de campo expõem esse momento da pesquisa:

> Achei que a região era do tipo $dxdy$, mas observando direitinho vi que pode ser feita de outro jeito, integrando em y primeiro. Essas perguntas em ordem ajudaram bastante (Aluno 5, diário de campo, abril de 2017).

> Ao observar os alunos executarem a Atividade Exploratória sobre Integrais Duplas, logo na primeira sequência didática percebi que muitos estavam perdidos e me chamavam o tempo todo para poder conferir seus desenhos no GeoGebra. Atendi o máximo que consegui e pedi para eles dessem continuidade na tarefa. Lendo a sequência e pedindo para que continuassem a fazer de forma independente, sem minha ajuda. Pude ainda perceber que as dúvidas diminuíram. Observei ao passar por alguns alunos que muitos apresentavam dificuldade de justificar os itens algebricamente, mesmo tendo as equações na janela de algébrica do GeoGebra (Diário de campo, abril de 2017).

No quadro 13, apresentamos a sequência didática para essa etapa e algumas respostas dadas por alguns participantes.

Quadro 13 – Respostas da Sequência Didática para Integrais Duplas (Tipo I)

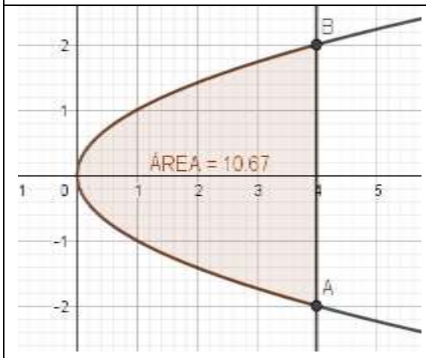
Resposta 1 – Aluno 5	Resposta 2 – Aluno 10
3.1. Observando a região R, qual curva limita essa região superiormente? A curva $y=\sqrt{x}$ 3.2. E qual curva limita a região R inferiormente? A curva $y=-\sqrt{x}$ 3.3. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? no ponto (0,0) e (4,0) 3.4. Essa região admite uma integral dupla do tipo I (dydx)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Sim $\int_0^4\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydx$	3.1. Observando a região R, qual curva limita essa região superiormente? $y^2=x \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$ 3.2. E qual curva limita a região R inferiormente? $x=4$ 3.3. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? 0 e 4 3.4. Essa região admite uma integral dupla do tipo I (dydx)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. $\int_0^4\int_4^{\sqrt{x}} 1\,dx\,dy$
Resposta 3 – Aluno 14	**Resposta 4 – Aluno 21**
3.1. Observando a região R, qual curva limita essa região superiormente? $y^2=x$ $y=\sqrt{x}$ 3.2. E qual curva limita a região R inferiormente? $\sqrt{x}$ 3.3. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? 0, 4 3.4. Essa região admite uma integral dupla do tipo I (dydx)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. $\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dx$	3.1. Observando a região R, qual curva limita essa região superiormente? $y^2=x$ $y=\sqrt{x}$ 3.2. E qual curva limita a região R inferiormente? $y^2=x$ $y=-\sqrt{x}$ 3.3. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? P, (0,4) 3.4. Essa região admite uma integral dupla do tipo I (dydx)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. $\int_0^4\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydx$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Para montar a integral dupla do tipo I para cálculo da área, a região de integração feita no GeoGebra é imprescindível (figura do quadro 12). O que esperamos mobilizar através da sequência didática é a operação de conversão, partindo de uma representação no registro gráfico (região formada entre as funções), passando por uma representação no registro algébrico (descrever analiticamente a região de integração), e chegando à integral dupla que expressa a área da região entre as funções.

A resposta 1, apresentada pelo aluno 5, contempla a integral dupla corretamente, o que nos leva a crer que, cognitivamente, as etapas da sequência didática possibilitaram que ele transformasse as informações dadas e retiradas das representações no registro gráfico para o registro algébrico. O quadro 14 expressa o que pretendemos com essa sequência didática

Quadro 14 – Operação de Conversão de uma integral dupla

Registro Gráfico		Registro Algébrico
		$A = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\, dx$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Consideramos que na reposta 1, o aluno 5 conseguiu converter as informações contidas na representação no registro gráfico para o registro algébrico, sem confundir os objetos matemáticos envolvidos. Conseguiu visualizar e conectar as funções que limitam a região, superiormente e inferiormente com os limites de integração da primeira integral que depende da variável y. Posteriormente, relacionou onde a região é limitada em relação a x. A tarefa ainda exigiu que a função $y^2 = x$, fosse escrita como $y = \pm\sqrt{x}$, que é uma operação de tratamento. Descrever a região na forma analítica:

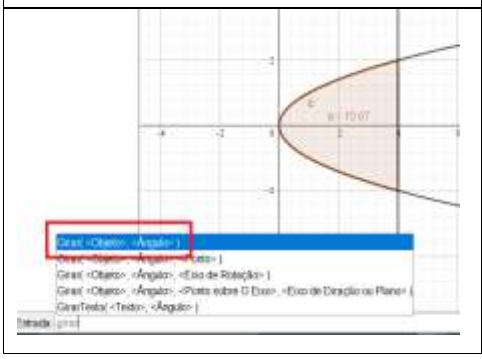
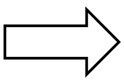
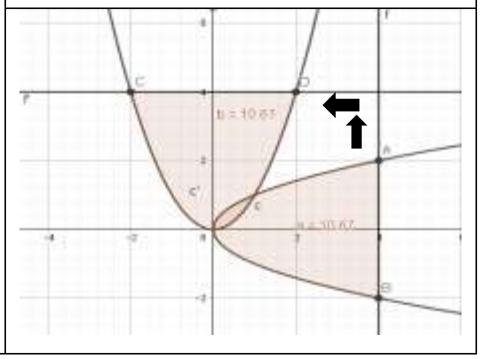
$$R\!:\left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 4, -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

é muito relevante na proposição do registro algébrico da integral dupla. As perguntas da sequência didática proposta conduzem a essa representação da integral dupla.

A resposta 2, apresentada pelo aluno 10, mostra que ele manipulou corretamente a equação da parábola, mas não percebeu que ela pode ser desmembrada em duas funções distintas, uma limitando a região superiormente $\left(y=\sqrt{x}\right)$ e a outra limitando inferiormente $y=-\sqrt{x}$, ou seja, $-\sqrt{x}\leq y\leq\sqrt{x}$. Para ele, a função que limita a região inferiormente é $x=4$. O aluno demonstrou, nesta passagem da sequência didática, não conseguir conectar os objetos matemáticos, gráficos e algébricos corretamente para expressar a integral dupla. Analogamente as repostas 3 e 4 dos alunos 14 e 21 respectivamente, revelaram que a mobilização desses objetos matemáticos apresentam-se ainda mais desconexos. Especificamente na resposta 4, os limites de integração foram apresentados numericamente, sugerindo uma região de integração retangular, o que é inconsistente para essa atividade exploratória.

Na sequência da Atividade Exploratória utilizamos as ferramentas do GeoGebra para visualizar a região como sendo do tipo II, já que a região em estudo admite as duas possibilidades. Para isso, usamos a ferramenta “Girar [<objeto>, <ângulo>]”, para que a região de integração gire 90°, permitindo aos alunos visualizar as funções com maior facilidade para expressar a integral na forma $dxdy$. Essa ferramenta e os procedimentos usados novamente permitem colocar em foco a operação de tratamento no conteúdo matemático estudado, como demonstrado no quadro 15.

Quadro 15 – Operação de tratamento em um registro gráfico

Região de Integração - Tipo I		Região de Integração - Tipo II
		

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A possibilidade de executar um giro na região de integração colocando-a numa posição para melhor visualização das funções que a compõem potencializou a representação algébrica da Integral Dupla, visto que evidenciou as funções que limitam a região quando considerada do tipo II. Os depoimentos dos alunos 4 e 5 destacam que:

> É como se essa região ficasse igual a região do tipo I, né professor. Agora dá para ver quem é por cima (função que limita superiormente) e quem é por baixo (função que limita inferiormente). Melhorou para encontrar a integral (Aluno 4, Diário de Campo, abril de 2017).

> O que mais tenho dúvida é quando tenho que isolar o x nas funções, mas girando o gráfico, deixou tudo mais visível, quando está deitado eu fico com muita dúvida, confundo a integral, confundo tudo. Acho que agora vou conseguir montar a integral dupla. (Aluno 5, Diário de Campo, abril de 2017).

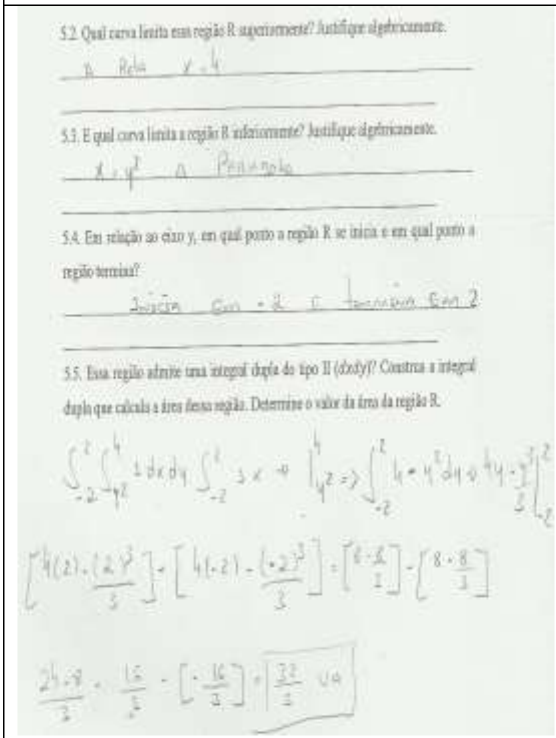
Novamente, propusemos, por meio de uma sequência didática, que os alunos trabalhassem com atividades cognitivas de tratamento e conversão. Algumas perguntas compõem a sequência didática elaborada para montar a integral dupla sobre a região do tipo II. Inicialmente, esperávamos que os alunos observassem que as funções que serão os limites da primeira integral, em relação a x, devem depender da variável y. Já os limites da segunda integral, em relação a y, são limites numéricos relativos ao limite da região de integração no eixo y. A Região de integração ficaria escrita na forma analítica como:

$$R:\left\{\left(x,y\right)|\,4\leq x\leq y^{2},-2\leq y\leq 2\right\}$$

No quadro 16, destacamos algumas repostas dos participantes da pesquisa. A resposta 1 apresentada pelo aluno 3, corresponde ao que se espera como resposta correta. Podemos observar que o aluno conseguiu, através do registro gráfico, retirar todas as informações necessárias, seguindo a sequência didática, manipulando as funções, determinando o registro algébrico da região de maneira analítica e expressando a integral corretamente. Cerca de 55% dos alunos participantes executaram a atividade corretamente.

Quadro 16 - Respostas da Sequência Didática para Integrais Duplas (Tipo II)

Resposta 1- Aluno 3



5.2. Qual curva limita essa região R superiormente? Justifique algebricamente.

A Reta $x = 4$

5.3. E qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

$x = y^2$ A Parábola

5.4. Em relação ao eixo y, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

Inicia em -2 e termina em 2

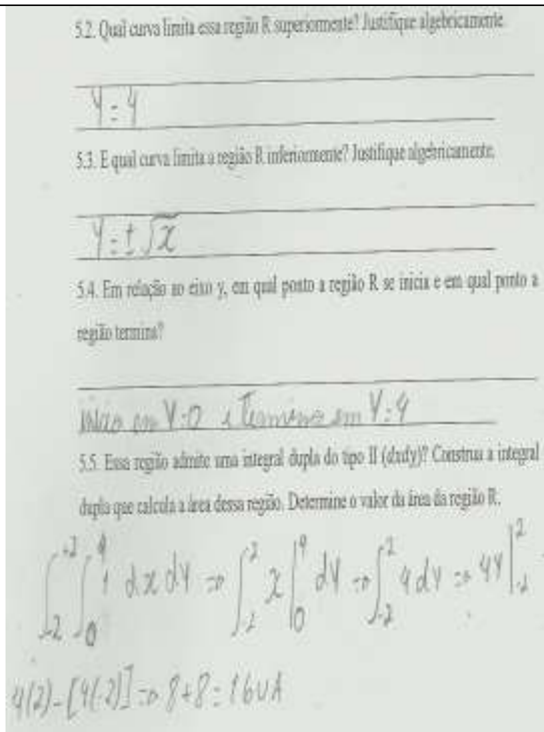
5.5. Essa região admite uma integral dupla do tipo II (dxdy)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Determine o valor da área da região R.

$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} 1\,dx\,dy \int_{-2}^{2} 1x \left.\right|_{y^2}^{4} \Rightarrow \int_{-2}^{2} 4-y^2\,dy \Rightarrow 4y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$

$\left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 + \frac{8}{3}\right]$

$\frac{24-8}{3} = \frac{16}{3} - \left[-\frac{16}{3}\right] = \boxed{\frac{32}{3}\ ua}$

Resposta 2 – Aluno 13



5.2. Qual curva limita essa região R superiormente? Justifique algebricamente.

$Y = 4$

5.3. E qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

$Y = \pm\sqrt{x}$

5.4. Em relação ao eixo y, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

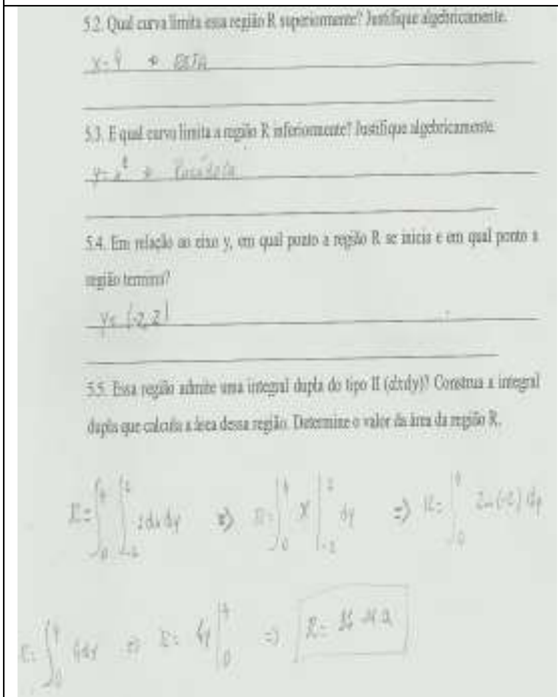
Inicia em $Y = 0$ e termina em $Y = 4$

5.5. Essa região admite uma integral dupla do tipo II (dxdy)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Determine o valor da área da região R.

$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4} 1\,dx\,dy \Rightarrow \int_{-2}^{2} x\Big|_{0}^{4} dy \Rightarrow \int_{-2}^{2} 4\,dy \Rightarrow 4y\Big|_{-2}^{2}$

$4(2) - [4(-2)] \Rightarrow 8 + 8 = 16uA$

Resposta 3 – Aluno 23



5.2. Qual curva limita essa região R superiormente? Justifique algebricamente.

$x = 4$ → Reta

5.3. E qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

$y = x^2$ → Parábola

5.4. Em relação ao eixo y, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

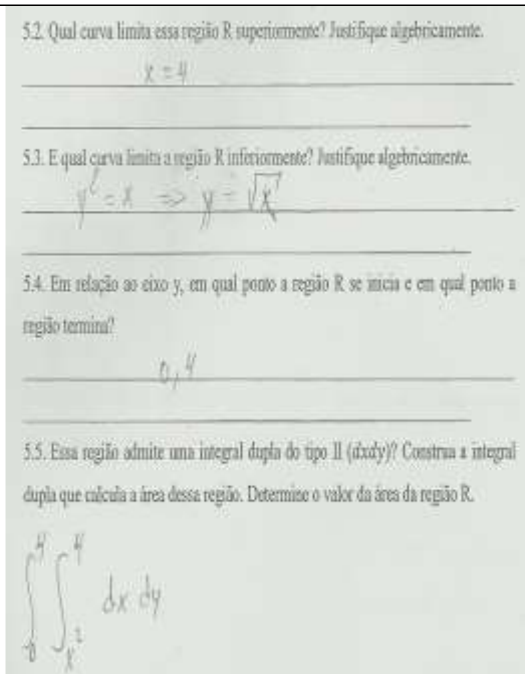
$y = [-2, 2]$

5.5. Essa região admite uma integral dupla do tipo II (dxdy)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Determine o valor da área da região R.

$R = \int_{0}^{4}\int_{-2}^{2} 1\,dx\,dy \Rightarrow R = \int_{0}^{4} x\Big|_{-2}^{2} dy \Rightarrow R = \int_{0}^{4} 2-(-2)\,dy$

$R = \int_{0}^{4} 4\,dy \Rightarrow R = 4y\Big|_{0}^{4} \Rightarrow \boxed{R = 16\ u.a.}$

Resposta 4 – Aluno 26



5.2. Qual curva limita essa região R superiormente? Justifique algebricamente.

$x = 4$

5.3. E qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

$y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$

5.4. Em relação ao eixo y, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

0, 4

5.5. Essa região admite uma integral dupla do tipo II (dxdy)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Determine o valor da área da região R.

$\int_{0}^{4}\int_{x^2}^{4} dx\,dy$

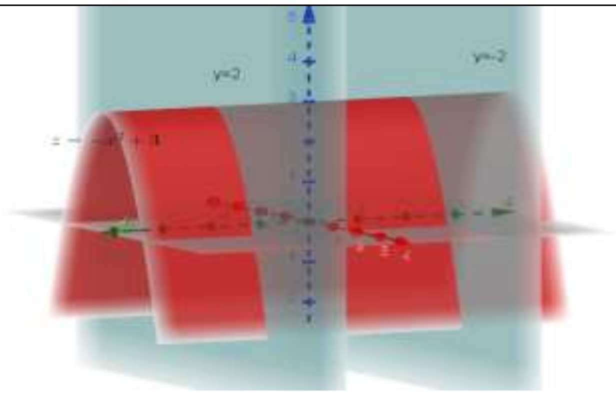
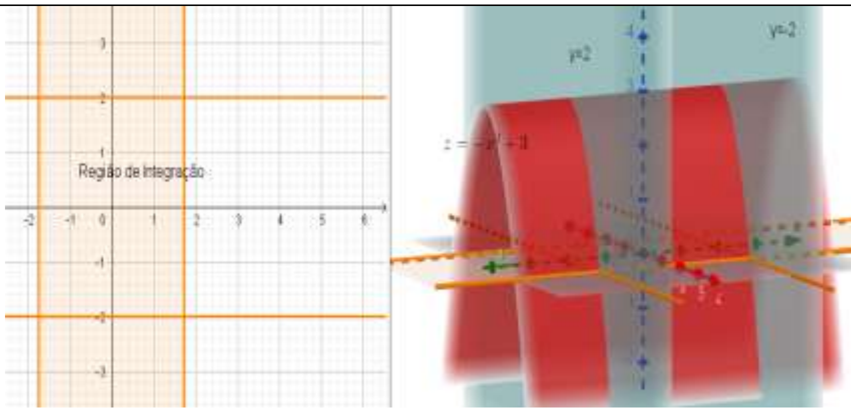
Fonte: Dados do pesquisador (2017)

As demais repostas, apresentadas no quadro 16, demonstram algum tipo de erro, principalmente no momento de conversão das representações no registro gráfico para representações no registro algébrico (registros analíticos da região de integração). Nas repostas 2 e 3, os alunos 13 e 23, respectivamente, chegaram a uma integral dupla que segure uma região de integração retangular, pois os limites de integração apresentados por eles são numéricos, sendo difícil achar uma relação com as suas repostas na sequência didática. Na resposta 4, o aluno 26 obtém uma integral distinta da esperada. Especificamente, a sua primeira integral leva a crer que o aluno não manipulou as funções em relação à variável x que estava integrando. Podemos pensar que, ao usar as ferramentas do GeoGebra e girar a região de integração, o aluno expressou a integral como sendo do tipo I.

A próxima sequência didática intitulada “Construindo Integrais Duplas para Cálculo de Volumes” está relacionada à construção de sólidos no $\mathbb{R}^3$ e à Integral Dupla para o cálculo do seu volume. Nesta sequência, o sólido S está compreendido por uma superfície cilíndrica $z = -x^2 + 3$ e pelos planos xy, $y = 2$ e $y = -2$. Primeiramente, foi proposta a plotagem de todas as superfícies e, posteriormente, que se aplicasse a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies”, a qual irá apresentar, na caixa de visualização 2D, a região retangular de integração no plano xy.

As possibilidades que o *software* oferece permitem explorar as operações de tratamento no registro gráfico. Entendemos que desenhar e manipular as superfícies propostas nas atividades, apenas com papel e lápis, é bastante trabalhoso e demanda habilidades que muitos estudantes não possuem. Determinar regiões de integração, desta forma, não é uma tarefa simples. Por isso, elaboramos essa sequência didática orientada à determinação dessa região de integração no plano xy, através de ferramentas que possibilitam manipular e determinar interseções entre as superfícies, além de transitar da janela 3D para a 2D. A determinação das funções que limitam essa região, geralmente realizada por meio do registro algébrico, passa a ser feita com o auxílio do *software*, utilizando as operações de tratamento neste registro. A interseção entre a superfície cilíndrica$= -x^2 + 3$ e o plano xy é facilmente encontrada usando a ferramenta **“**Interseção de Duas Superfícies”**.** Basta clicar na superfície e no plano e as interseções são destacadas no sólido e aparecem na janela 2D, como as retas $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ .Tal transição de dimensões acarretou um ganho importante para expressar as integrais duplas. O quadro 17 nos mostra como fica a construção do sólido no GeoGebra e a determinação da região de integração na janela 2D.

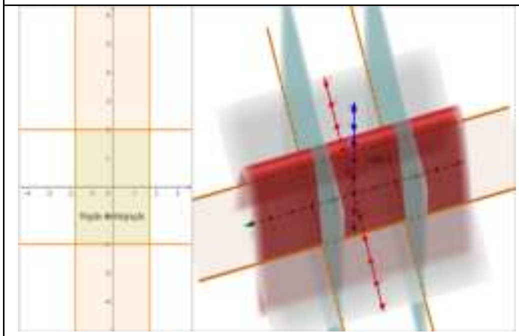
Quadro 17 – Operação de tratamento em um registro gráfico de superfície

Superficies que compõem o Sólido S – Janel a de visualização 3D

Região de integração na janela de visualização 2D – Mobilização Dimensional


Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Para essa atividade de cálculo do volume do sólido S através de uma integral dupla, não elencamos uma sequência didática com o passo a passo, como foi feito anteriormente. De posse do sólido S, já plotado no *software* e diante do que já havíamos estudado em sala de aula, pedimos uma integral dupla que representasse o volume do sólido. A ideia principal para essa atividade era que a visualização do sólido possibilitasse que os alunos observassem qual superfície fazia o papel da função $f(x, y)$, ou seja, que identificassem a função de integração da integral dupla do volume de S. Também queríamos que, através das interseções das superfícies que compunham o sólido com o plano xy, chegassem à região de integração e, consequentemente, determinassem os limites das integrais. A ideia é de transitar do registro gráfico para o registro analítico e, posteriormente, o algébrico, tendo como objeto matemático a integral dupla para cálculo do volume do sólido S, explorando a operação de conversão. A ordem de integração ficou a critério dos alunos, pois a região admite ser do tipo I e /ou do tipo II, já que é uma região retangular (Quadro 18).

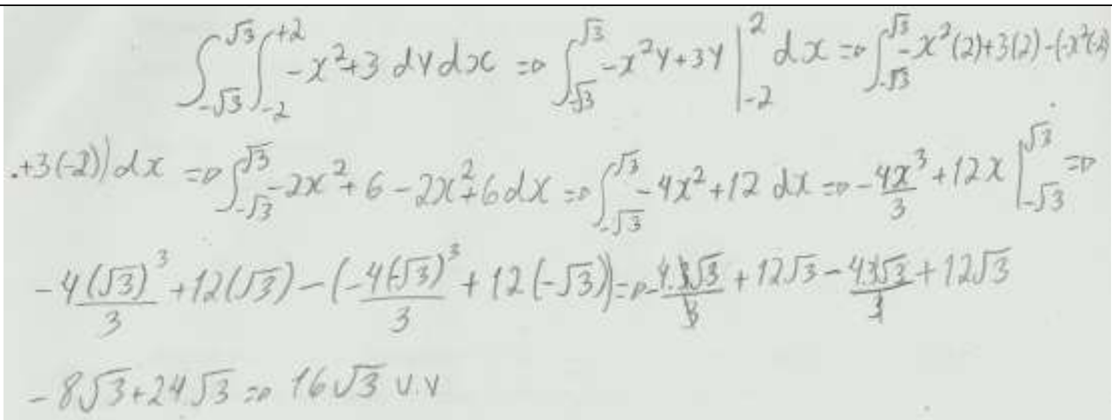
Quadro 18 – Representação da região de integração e a Integral Dupla

Registro Gráfico		Registro Algébrico
		$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-2}^{2} (-x^2 + 3)\, dy\, dx$

Fonte: dados do pesquisador (2017)

Observando as atividades resolvidas pelos alunos, pode-se constatar que boa parte (aproximadamente 53%) conseguiu transitar de forma correta da representação no registro gráfico para a representação no registro algébrico, expressando a integral dupla corretamente. Em relação às atividades anteriores, observamos que um número maior de alunos (cerca de 47%) cometeu erros ao determinar essa integral, entre os quais destacam-se aqueles relacionados à determinação da região analiticamente e, consequentemente, dos limites de integração. No quadro 19, sintetizamos algumas respostas dos alunos participantes.

Quadro 19 - Respostas para Integral Dupla para cálculo de volume sólido S

Resposta 1 – Aluno 7


$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-2}^{+2} -x^2+3\, dy\, dx \Rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -x^2y+3y \Big|_{-2}^{2} dx \Rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -x^2(2)+3(2)-(-x^2(-2)+3(-2))\, dx \Rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -2x^2+6-2x^2+6\, dx \Rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} -4x^2+12\, dx \Rightarrow -\frac{4x^3}{3}+12x \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$-\frac{4(\sqrt{3})^3}{3}+12(\sqrt{3})-\left(-\frac{4(-\sqrt{3})^3}{3}+12(-\sqrt{3})\right) \Rightarrow -\frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{3}+12\sqrt{3}-\frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{3}+12\sqrt{3}$$

$$-8\sqrt{3}+24\sqrt{3} \Rightarrow 16\sqrt{3}\ \text{u.v}$$

Resposta 2 – Aluno 11
δ: $-x^2+3$ $\int_{-1,73}^{1,73}\int_{0}^{3} -x^2+3 \; dy\,dx \Rightarrow \int_{-1,73}^{1,73} -x^2y+3y\Big\vert_{0}^{3} dx \Rightarrow -x^2 3+3.3 \,\vert\, dx$ $\int_{-1,73}^{1,73} -3x^2+9 \; dx \Rightarrow -\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}+9x\Big\vert_{-1,73}^{1,73} \Rightarrow -(1,73)^3+9.(1,73)-(-1,73)^3+3(-1,7$ $5.17+15.57-(-5.17-15.57)$ $5,17+15,57+5,17+15,57=\boxed{41,48 ua}$
Resposta 3 – Aluno 19
$\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} -x^2+3 \; dy\,dx \Rightarrow \int_{-2}^{2} -x^2y+3y\Big\vert_{-2}^{2} dx \Rightarrow$ $\int_{-2}^{2} -2x^2+3.2-(-x^2.-2+3.-2)\,dx \Rightarrow \int_{-2}^{2} -2x^2+6-(+2x^2-6)\,dx$ $\int_{-2}^{2} -2x^2+6-2x^2+6 \Rightarrow \int_{-2}^{2} -4x^2+12\,dx \Rightarrow -4\frac{x^3}{3}+12x\Big\vert_{-2}^{2} dx$ $-4.\frac{8}{3}+12.2-(-4.\frac{-8}{3}+12.-2) \Rightarrow -\frac{32}{3}+24-(\frac{32}{3}-24)$ $-\frac{32}{3}+24-\frac{32}{3}+24=\frac{-64}{3}+48=\frac{-64+144}{3}=\boxed{\frac{80}{3} uv}$
Resposta 4 – Aluno 24
$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{-x^2+3} 1 \; dy\,dx$ $\Rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} y\Big\vert_{0}^{-x^2+3} dx \Rightarrow \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x)^2+3 \; dx \Rightarrow \frac{(-x)^3}{3}+3x\Big\vert_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$ $\frac{-\sqrt{3}^3}{3}+3\sqrt{3}-\left[\frac{+\sqrt{3}^3}{3}+3(-\sqrt{3})\right] \Rightarrow -\frac{\sqrt{27}}{3}+3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{27}}{3}+3\sqrt{3}$ $\Rightarrow 6\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{27}}{3}=4\sqrt{3}$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A resposta 1, apresentada pelo aluno 7, satisfaz o que esperamos como solução correta. A integral dupla contempla corretamente a função de integração e os limites das integrais. Nesta atividade, foi pedido que a integral fosse resolvida, mas este não era nosso objetivo principal. As demais repostas apresentam os limites das integrais de forma equivocada, demonstrando uma desconexão na passagem entre as representações no registros do gráfico e a representação no registro algébrico usados para expressar a integral dupla. Analisando a região plotada temos:

$$R:\left\{(x,y)\mid -\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3}, -2\leq y\leq 2\right\}$$

Os alunos, para se certificarem que os limites estavam corretos, podiam igualar as equações das superfícies com a equação do plano xy e resolver a equação resultante. Aparentemente, as repostas 2 e 3 apresentadas pelos alunos 11 e 19, respectivamente, indicam que os limites da região de integração não ficaram claros para eles. Vale mencionar a reposta 4 (aluno 24), em que o aluno usou como limite superior a função da superfície cilíndrica e não os limites de integração no plano xy. Outra observação é com relação à função de integração, na qual não se considerou nenhuma função.

Por fim, criamos uma sequência didática intitulada “Construindo regiões de integração através de Integrais Duplas”, com o objetivo de construir as regiões de integração a partir de uma integral dupla dada previamente. Com esta atividade, estamos tomando o caminho inverso do que estávamos fazendo até o momento, que se baseava em expressar a integral dupla a partir da região de integração dada. Estamos transitando no caminho inverso, partindo da representação no registro algébrico e chegando à representação no registro gráfico. Para isto, apontamos a seguinte integral dupla como início da sequência didática proposta, (quadro 20).

Quadro 20 – Integral Dupla apresentada na sequência didática

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(-x^2-y^2+4)\;dy\;dx$$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Dada a integral dupla, contemplada no quadro 20, a sequência didática tem como objetivo possibilitar ao aluno a construção do sólido que originou a integral. A ideia é que, a partir da integral dupla proposta, os alunos possam descobrir quais as superfícies em $\mathbb{R}^3$ deram origem a ela. Para isso, os alunos devem manipular algebricamente as funções que compõem a integral e confirmar suas respostas no GeoGebra. No quadro 21, apresentamos algumas repostas para essa sequência.

Quadro 21 – Respostas dos alunos para a sequência didática

Resposta 1 – Aluno 2	Resposta 2 – Aluno 3
Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxilio do GeoGebra. Dessa forma, responda as perguntar: 1) Qual função da integral dupla acima, limita o sólido S superiormente? $z = -x^2 - y^2 + 9$ O que essa superfície representa? Parabolóide Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Com relação a região de integração no plano xy, o que representa essa região? Circulo de raio 2 Justifique sua reposta algebricamente. $-x^2 - y^2 + 9 = 0$ $-x^2 - y^2 = 9$ $\boxed{x^2 + y^2 = 9}$ Equação da circunferência	Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxilio do GeoGebra. Dessa forma, responda as perguntar: 1) Qual função da integral dupla acima, limita o sólido S superiormente? $(-x^2 - y^2 + 4)$ O que essa superfície representa? Uma Parabola Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Com relação a região de integração no plano xy, o que representa essa região? Um circulo. Justifique sua reposta algebricamente. $-x^2 - y^2 + 4 \Rightarrow -x^2 - y^2 = -4 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 = 4}$ raio Equação de circulo
Resposta 3 – Aluno 14	**Resposta 4 – Aluno 24**
Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxilio do GeoGebra. Dessa forma, responda as perguntar: 1) Qual função da integral dupla acima, limita o sólido S superiormente? $\sqrt{4-x^2}$ O que essa superfície representa? REPRESENTA A PARTE SUPERIOR DO CILINDRO Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Com relação a região de integração no plano xy, o que representa essa região? CIRCUNFERÊNCIA (CIRCULO) Justifique sua reposta algebricamente. DADO A FUNÇÃO $y^2 = 4 - x^2$ TEREMOS $y = \sqrt{4-x^2}$ TENDO UM RESULTADO POSITIVO E NEGATIVO, SENDO: $\sqrt{4-x^2}$ a PARTE SUPERIOR $-\sqrt{4-x^2}$ a PARTE INFERIOR	Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxilio do GeoGebra. Dessa forma, responda as perguntar: 1) Qual função da integral dupla acima, limita o sólido S superiormente? $-x^2 - y^2 + 4$ O que essa superfície representa? Cilindro Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Com relação a região de integração no plano xy, o que representa essa região? Circunferência Justifique sua reposta algebricamente. $x^2 + y^2 = r^2$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Esta atividade foi a que gerou maior discussão entre os alunos, no entanto apresentou um índice de acerto razoável (aproximadamente 40%). A resposta 1 apresentada pelo aluno 2 está correta. A primeira pergunta da sequência se refere à função de integração $z = -x^2 - y^2 + 4$. O objetivo era verificar se os alunos estavam cientes de que esta função limitava o sólido superiormente e se sabiam retirar esta informação da integral. A equação em evidência se refere a um paraboloide, com eixo de simetria em z e voltado para baixo. Muitos alunos (cerca de 30%) apontaram esta equação como sendo de um cilindro e alguns afirmaram que era uma parábola (20%). Observamos que a identificação da representação deste objeto matemático em registros diferentes ainda acarretou muitas dúvidas. Quando foi solicitado para verificar a resposta no GeoGebra, houve muita confusão e vários alunos (aproximadamente 45%) não conseguiram expressar graficamente o que a superfície representava. Como se trata de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, estamos trabalhando com as três variáveis x, y e z, e os alunos estavam escrevendo na caixa de entrada do *software* a equação da seguinte maneira $-x^2 - y^2 + 4$, desconsiderando a variável z. Assim, nenhuma superfície era plotada na janela 3D. Depois de algumas intervenções e explicações, puderam realizar tal etapa com maior facilidade. A passagem abaixo, retirada do diário de campo, expõe a dificuldade à qual nos referimos:

> Na última sequência didática sobre integrais duplas, percebi algumas dificuldades nos alunos para plotar algumas superfícies. Mas muitas por não saberem entrar com as equações corretamente. Observei que entravam com equações sem sinal de igualdade ou com escritas erradas. Interrompi a atividade e atentei-me para os erros. Observando os computadores, pouco tempo depois, ainda percebi alguns erros (Aluno 4, Diário de Campo, abril de 2017).

A identificação da região de integração foi uma tarefa árdua para os alunos, entretanto produziu discussões bastante proveitosas. Para isso, bastava observar as equações dos limites da primeira integral que depende de y, que podem ser escritos da seguinte maneira:

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

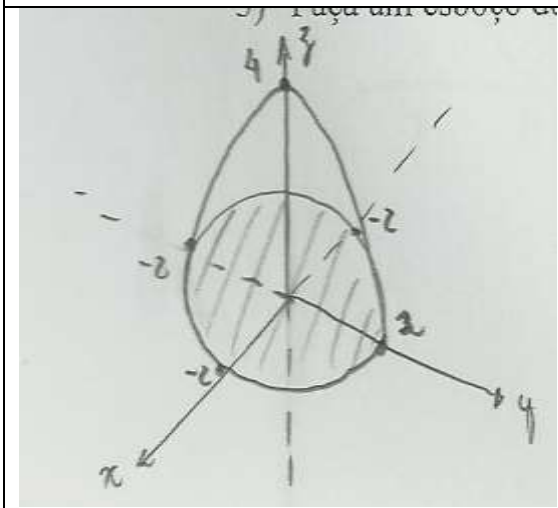
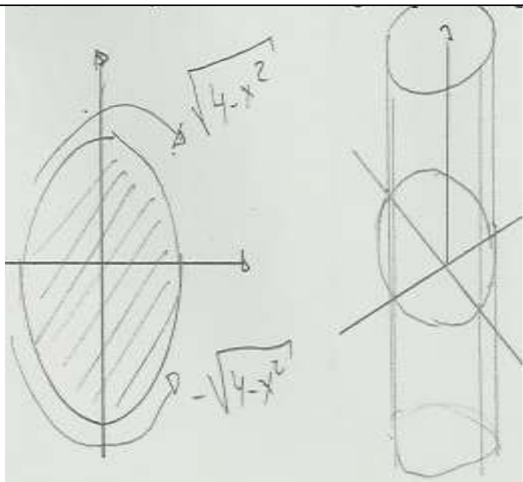
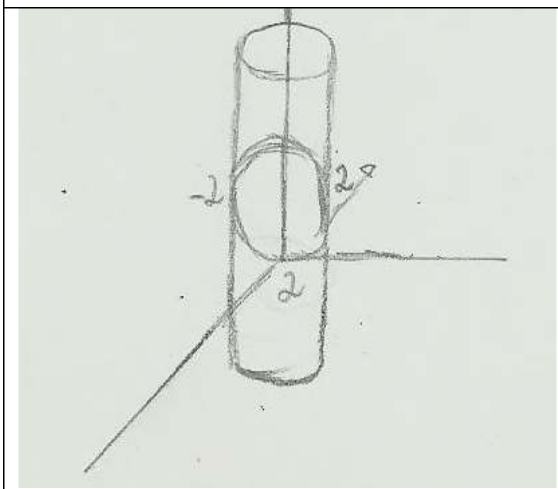
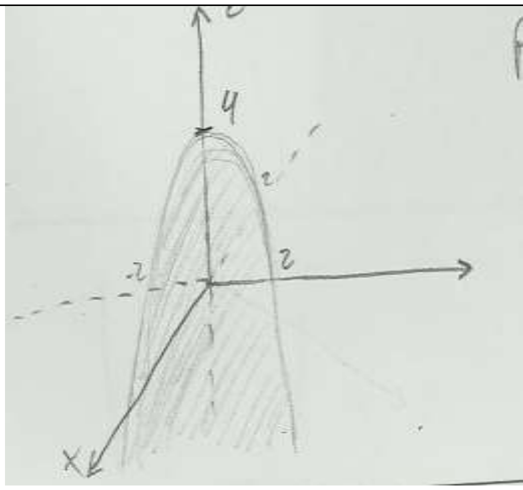
Lembrando que os limites, em relação à variável x, podem ser escritos por meio de $-2 \leq x \leq 2$, podemos inferir que esses limites representam uma região de integração circular de raio 2, com centro na origem no plano xy, assim temos:

$$y = \pm\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

No quadro 21, pode-se observar que as repostas variaram entre círculo e circunferência. O nosso objeto matemático, neste caso, é a região circular, mas, para que possamos mostrá-la algebricamente, devemos encontrar a equação da circunferência, como feito acima. Talvez isto tenha gerado dúvidas e acarretou respostas incorretas.

Apresentamos alguns sólidos esboçados pelos alunos à mão livre (papel e lápis) no quadro 22. Ainda que alguns alunos considerassem que o sólido representado pela integral dupla era uma superfície cilíndrica (respostas 2 e 3), uma parte considerável (aproximadamente 40%) conseguiu desenhar o paraboloide limitado pelo plano xy (resposta 1).

Quadro 22 – Sólidos construídos através da sequência didática

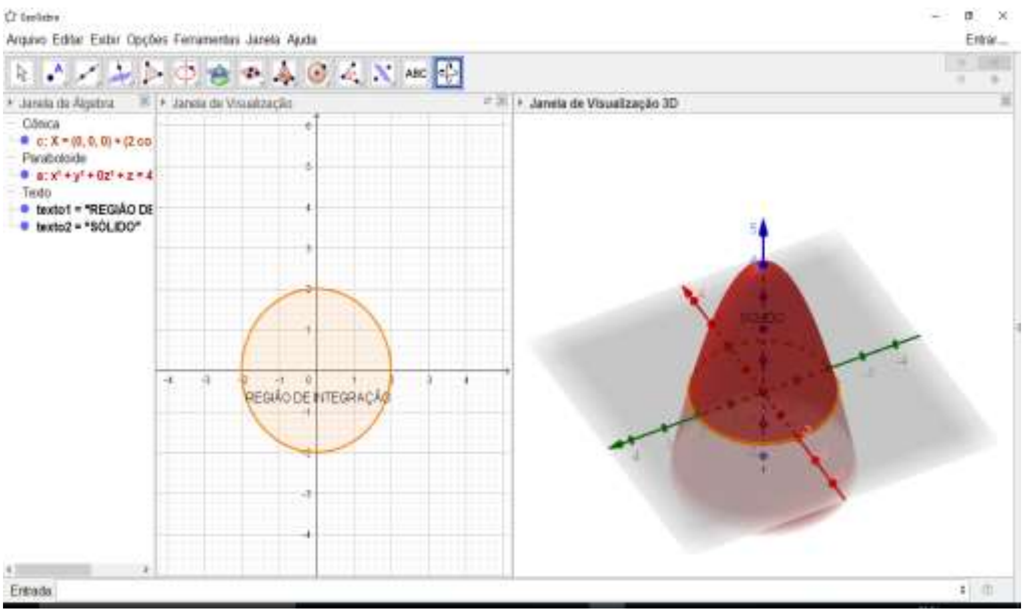
<table>
<tr><td>Resposta 1 – Aluno 5</td><td>Resposta 2 – Aluno 10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Resposta 3 – Aluno 15</td><td>Resposta 4 – Aluno 27</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Observamos nesta atividade a mobilização de operações de tratamento, principalmente no registro algébrico, quando foi necessário a manipulação dos limites das integrais para determinar a região de integração. O registro analítico foi primordial para determinar o sólido a partir da integral dupla proposta.

A operação de conversão também se fez evidente. Consideramos que a sequência didática, com perguntas bem direcionadas, pode guiar a construção do sólido. Apesar de que a maioria dos alunos não obteve sucesso nesta atividade. Boa parte deles se aproximou da resposta esperada (45%). Muitos erros se apresentaram no momento de manipular algebricamente as equações e determinar a região de integração no plano xy. O quadro 23 expressa o que pretendíamos atingir com determinada sequência didática.

Quadro 23 – Operação de conversão: registro algébrico para registro gráfico

Integral Dupla (Registro Algébrico)
$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(-x^2-y^2+4)\ dy\ dx$
Volume do sólido que a Integral Dupla representa (registro gráfico)


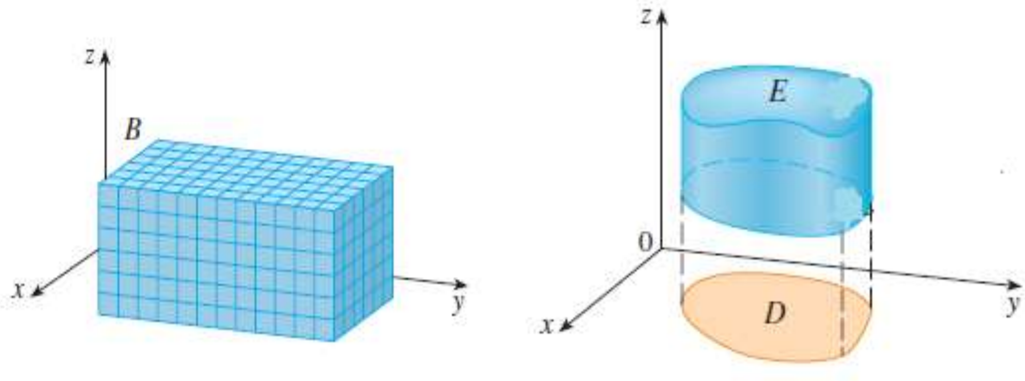
Fonte: Dados do pesquisador (2017)

5.2.3. Atividade Exploratória 3

Na atividade “Explorando e Construindo Integrais Triplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra”, o principal objetivo é explorar a construção de regiões de integração em $\mathbb{R}^3$ (sólidos), dando ênfase à construção de integrais triplas para o cálculo de volumes.

As Integrais Triplas sobre uma região genérica limitada no espaço tridimensional serão definidas por um método análogo à definição das Integrais Duplas que fizemos na seção anterior. Para isso, de acordo com Stewart (2004), vamos imaginar uma região genérica E envolta por uma caixa B (figura 10) e uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos a B fora de E.

Figura 10 – Região limitada genérica de integração em $\mathbb{R}^3$



Fonte: Stewart (2004)

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iiint_B F(x,y,z)\,dV$$

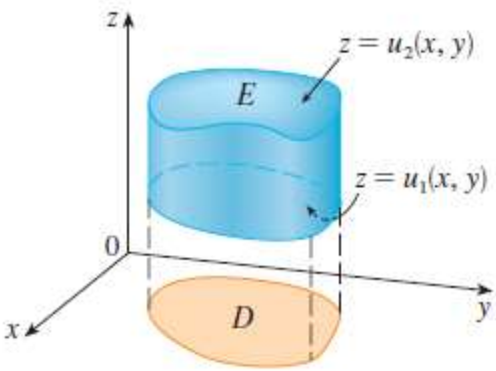
Por definição, segundo Stewart (2004) a integral tripla definida pela figura 10 existe se f for contínua e na fronteira de E for “razoavelmente lisa”.

Para esta Atividade Exploratória com Integrais Triplas, vamos nos ater somente a um tipo de região de integração, que chamaremos do tipo 1. Para Stewart (2004), uma região de integração é considerada do tipo 1, se está contida entre os gráficos de duas funções contínuas de x e y:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Sendo D a projeção do sólido E sobre o plano xy (figura 11).

Figura 11 – Região sólida do tipo I



Fonte: Stewart (2004)

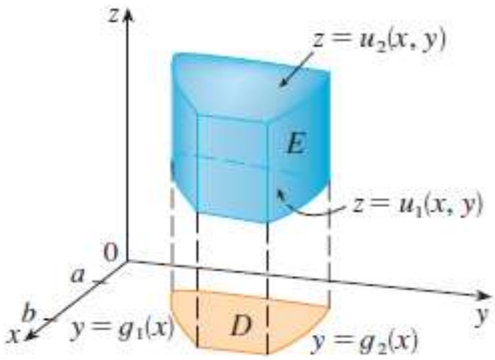
Podemos observar que o sólido E é limitado superiormente pela superfície de equação $z = u_2(x, y)$ e inferiormente pela superfície $z = u_1(x, y)$. Assim temos a equação (I):

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA \qquad (I)$$

Desta forma, a projeção D de E sobre o plano xy pode ser uma região do tipo I ou do tipo II, como vimos na seção anterior. A figura 12 apresenta essa região D como sendo do tipo I, assim temos:

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Figura 12 – Região sólido com região D do tipo I



Fonte: Stewart (2004)

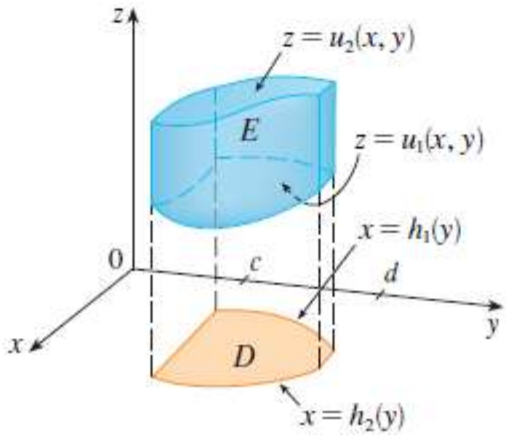
E a equação (I) fica:

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV \;=\; \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\; dy\; dx$$

Para uma região D do tipo II, representada na figura 13, temos:

$$E = \{(x,y,z) \mid c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y), u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

Figura 13 – Região sólido com região D do tipo II



Fonte: Stewart (2004)

Assim temos a equação (I) modificada para:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Uma das aplicações da Integral tripla é no cálculo de volumes de sólidos representados em $\mathbb{R}^3$. Segundo Stewart (2004), se $f(x,y,z)=1$ para todos os pontos em E, temos que o volume de E, pode ser representado pela integral tripla:

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Os limites de integração para essa integral seguem as mesmas regras que descrevemos anteriormente.

A Atividade Exploratória voltada para o conteúdo de Integrais Triplas, utilizando sequências didáticas, foi dividida em três partes, visando explorar a construção dessas integrais e também as regiões de integração. Na primeira sequência, “Construindo Integrais Triplas sobre regiões no espaço $\mathbb{R}^3$”, exploramos a construção de um sólido no espaço tridimensional com o auxílio do GeoGebra e, posteriormente, a construção passo a passo de uma integral tripla para a cálculo de seu volume.

Para expressar as integrais triplas, utilizamos procedimentos similares aos usados para as integrais duplas, com um elemento a mais, que consiste em identificar os limites da integral que dependem da variável z. Para que esse processo seja executado com sucesso, é necessário ter em mãos o esboço do sólido sobre o qual a integral está sendo calculada. Novamente o que queremos explorar é a conversão da representação no registro gráfico, mediado pelo GeoGebra, para a representação no registro algébrico, representado analiticamente, da região de integração até a construção da integral tripla.

Inicialmente, a primeira sequência didática para este tipo de situação apresenta as seguintes superfícies para serem plotadas no GeoGebra, as quais constituirão um sólido S no espaço tridimensional:

$$x^2 + y^2 = 4$$

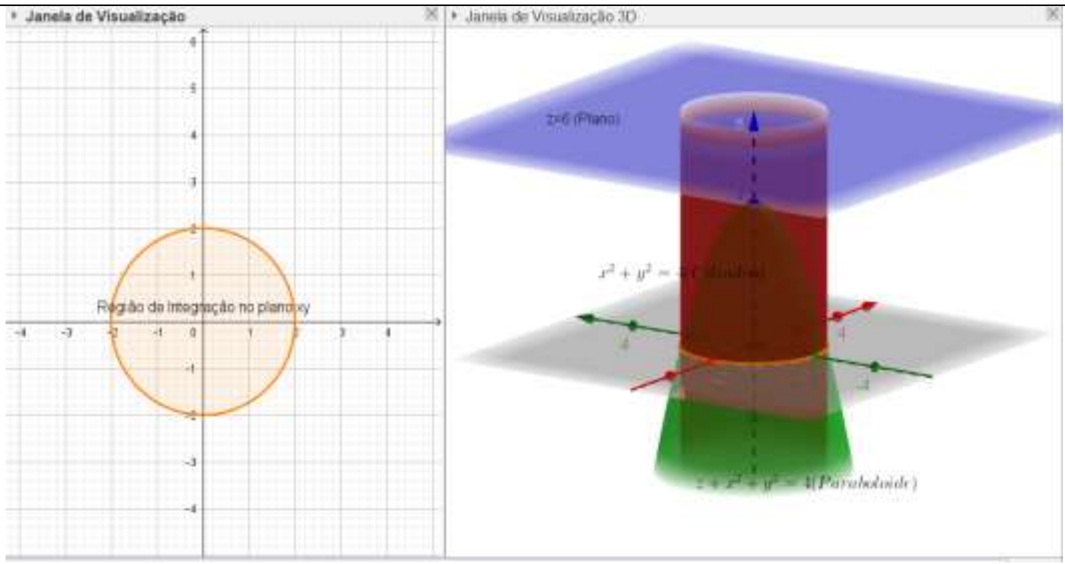
$$z + x^2 + y^2 = 4$$

$$z = 6$$

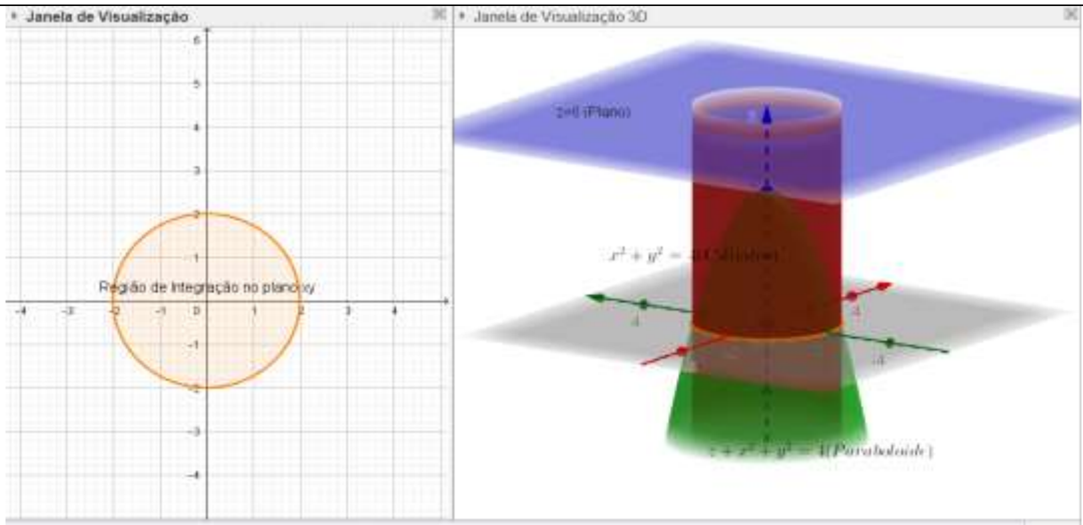
Nestas superfícies, temos que a primeira equação se refere a um cilindro de raio 2 e eixo de simetria em z; a segunda se refere a um paraboloide também simétrico ao eixo z; e, a terceira referente a um plano paralelo ao plano xy que intercepta o eixo z exatamente no ponto $(0,0,6)$. O quadro 24 representa as superfícies e o sólido S formado por elas e a integral tripla que se espera que os alunos consigam expressar com o auxílio da sequência didática proposta. Ressaltamos a possibilidade de mobilização das operações de tratamento e conversão para tal tarefa, segundo a Teoria dos Registros das Representações Semióticas.

Quadro 24 – Sólido S: operações de tratamento e de conversão

Sólido S



Sólido S e região de integração no plano xy



Integral Tripla para o volume do sólido S
$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{4-x^2-y^2}^{6} dz\ dy\ dx$$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A sequência didática proposta possui o objetivo principal de construir uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S. Nesta etapa, espera-se que os alunos possam mobilizar seus conhecimentos matemáticos e converter as representações gráficas em representações algébricas, no caso a integral tripla. Para isso, devem ser observadas quais as superfícies que dependem das variáveis x e y estão limitando o sólido superiormente e inferiormente, pois vamos usar uma integral tripla do tipo 1, com a ordem de integração $dzdydx$. O que estamos procurando são as funções que já denominamos anteriormente de $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$, que são os limites de integração para a primeira integral que depende da variável z. É claro que agora temos um sólido em que essas superfícies não estão tão explícitas como na explicação anterior, mas ainda assim é possível observá-las e identificá-las. O plano $z=6$ limita o sólido superiormente, sendo este o limite superior da integral que depende de z. Inferiormente, a superfície que limita este sólido é o paraboloide cuja equação deve ser manipulada para $z=4-x^2-y^2$. Então, temos a representação no registro algébrico, representado analiticamente como:

$$4-x^2-y^2 \leq z \leq 6$$

Nesse sentido, consideramos que o comentário do aluno 10 expressa justamente o que queremos nessa atividade, quando interpelado quais superfícies limitam o sólido S.

> Professor, aqui nesse sólido o plano limita por cima e por baixo parece ser o outro plano (plano xy), mas é o paraboloide (aluno usa a ferramenta **Girar Janela de Visualização** e aponta com o dedo o paraboloide na tela do computador) podemos ver isso aqui no computador (Aluno 10, Diário de Campo, maio de 2017).

Uma vez realizada a primeira parte da sequência didática, o que se apresenta posteriormente são os mesmos passos utilizados nas atividades contempladas nas seções anteriores, quando exploramos as integrais duplas. A partir da região de integração obtida com a ferramenta "Interseção de duas superfícies", podemos determinar os limites de integração para as outras duas integrais que compõem a integral tripla em questão. Essa região de integração se encontra em $\mathbb{R}^2$, ou seja, na janela 2D do software (quadro 24). Os recursos que o GeoGebra possui potencializam as operações de tratamento quando estamos trabalhando com as representações no registro gráfico, sobretudo pela possibilidade de mover / girar a superfície e visualizar especificidades ocultas em determinadas posições do desenho. Outro aspecto importante é a viabilidade de transitar pelas dimensões 3D e 2D. Na realização da atividade proposta, foi possível observar que esses recursos revelaram-se potentes para encontrar a região de integração no plano xy, que é uma região circular de centro na origem e raio igual a 2, ficando a cargo do aluno apenas identificar essa região algebricamente como:

$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

A região de integração em $\mathbb{R}^2$ admite ser tanto do tipo I como do tipo II, mas a sequência didática proposta está orientada para o aluno utilizá-la como sendo do tipo I, pois as perguntas feitas são sobre quais funções limitam a região superiormente e inferiormente em relação a y. Dessa forma, as outras duas integrais deverão ser em função de y e de x nessa ordem, como pode ser observado o quadro 24.

Quadro 25 – Respostas dos alunos para a sequência didática sobre Integrais Triplas

<table>
<tr><th colspan="2">Resposta 1 – Aluno 4</th></tr>
<tr><th>Sequência didática desenvolvida</th><th>Integral Tripla</th></tr>
<tr><td>Plano $z = 6$

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
Parabolóide $z + x^2 + y^2 = 4$
$z = 4 - x^2 - y^2$

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o plano xy e o cilindro ou entre o plano xy e o paraboloide, para encontrarmos a região R de integração no plano xy. Observando a região R na janela 2D, responda:
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
$x^2 + y^2 = 4$
$y^2 = 4 - x^2$
$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
A curva que limita a região R superiormente $y = +\sqrt{4-x^2}$

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
A curva que limita a região inferiormente
$y = -\sqrt{4-x^2}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Clique na janela de visualização 2D e use a ferramenta interseção de dois objetos. Clique sobre o eixo x e o curva. Justifique algebricamente.
Inicia em 2 e termina em −2</td><td>$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{4-x^2-y^2}^{6} 1\,dz\,dy\,dx$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Resposta 2 – Aluno 11</th></tr>
<tr><th>Sequência didática desenvolvida</th><th>Integral Tripla</th></tr>
<tr><td>$z = 6$

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
$z = 4 - x^2 - y^2$ é uma parábola

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o plano xy e o cilindro ou entre o plano xy e o paraboloide, para encontrarmos a região R de integração no plano xy. Observando a região R na janela 2D, responda:
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
$y = \pm\sqrt{4 - y^2}$ p/ $z = 0$

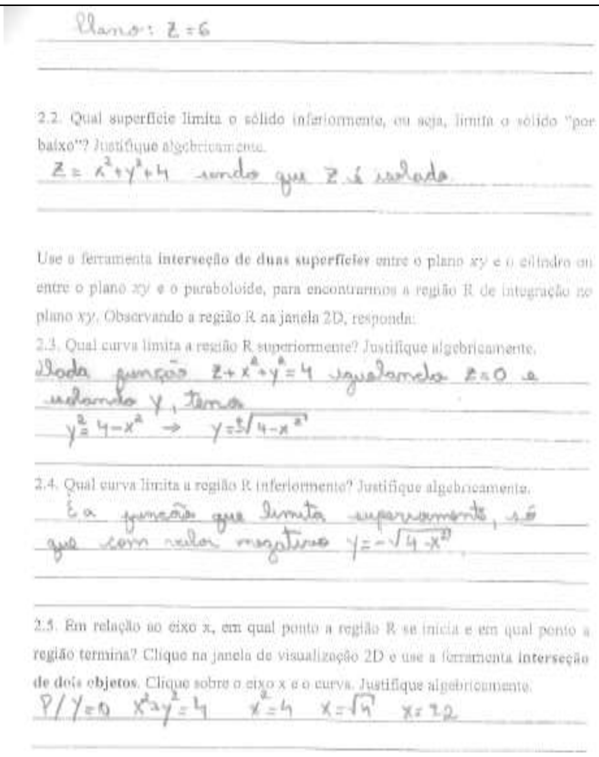
2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
p/ $z = 0$ $y^2 = 4 - x^2$ $y = -\sqrt{4 - x^2}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Clique na janela de visualização 2D e use a ferramenta interseção de dois objetos. Clique sobre o eixo x e o curva. Justifique algebricamente.
$y = -2$ Inferiormente e $x = 2$</td><td>$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{6} 1\,dz\,dy\,dx$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Resposta 3 – Aluno 20</td></tr>
<tr><td>Sequência didática desenvolvida</td><td>Integral Tripla</td></tr>
<tr><td>
Plano → z=6

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
Paraboloide → $z+x^2+y^2=4$

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o plano xy e o cilindro ou entre o plano xy e o paraboloide, para encontrarmos a região R de integração no plano xy. Observando a região R na janela 2D, responda:
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
P/ z=0 $z+x^2+y^2=4$ y=0 $x^2+y^2=4$
$0+x^2+y^2=4$ $x^2+0=4$
$x^2+y^2=4$ $x=\pm\sqrt{4}$
$x=\pm 2$
2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Clique na janela de visualização 2D e use a ferramenta interseção de dois objetos. Clique sobre o eixo x e o curva. Justifique algebricamente.
y=0 $x^2+y^2=4$
$0+y^2=4$
$y=\pm\sqrt{4}$
$y=\pm 2$</td>
<td>$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z+y^2+y^2=4}^{z=6} dz\,dy\,dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resposta 4 – Aluno 21</td></tr>
<tr><td>Sequência didática desenvolvida</td><td>Integral Tripla</td></tr>
<tr><td>
Plano: z=6

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
$z=x^2+y^2+4$ sendo que z é isolado

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o plano xy e o cilindro ou entre o plano xy e o paraboloide, para encontrarmos a região R de integração no plano xy. Observando a região R na janela 2D, responda:
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
Dada função $z+x^2+y^2=4$ igualando z=0 e isolando y, temos
$y^2=4-x^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
É a função que limita superiormente, só que com valor negativo $y=-\sqrt{4-x^2}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Clique na janela de visualização 2D e use a ferramenta interseção de dois objetos. Clique sobre o eixo x e o curva. Justifique algebricamente.
P/ y=0 $x^2+y^2=4$ $x^2=4$ $x=\sqrt{4}$ $x=\pm 2$</td>
<td>$$\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{4-x^2-y^2}^{6} 1\,dz\,dy\,dx$$</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

As respostas apresentadas no quadro anterior expressam bem como se desenvolveu a atividade sobre integrais triplas. A maioria dos alunos (aproximadamente 80%) seguiu a sequência didática proposta corretamente e conseguiu expressar a integral tripla utilizada para o cálculo do volume S do sólido dado (resposta 1), executando de maneira correta as operações de tratamento e conversão necessárias. Mesmo com o sólido S plotado no GeoGebra e uma sequência de perguntas para se chegar à integral tripla, muitos erros se mostraram evidentes e uma parcela pequena (cerca de 20%) dos alunos apresentou dificuldade para realizar essa tarefa, como se pode ver nas demais respostas do quadro 25. Observamos que no momento de transitar da representação gráfica para a representação no registro algébrico, de maneira analítica, muitos erros ocorreram. Logo, muitos responderam às perguntas corretamente como a resposta 4 do aluno 21, mas expressaram a integral tripla equivocadamente. Neste caso, a resposta apresentada indica que a região de integração no plano xy é uma região retangular, o que graficamente já mostramos que não é. Na resposta 3, especificamente, o aluno 20 apresentou dificuldades em manipular as informações no registro analítico, expressando a integral tripla com os limites incluindo a variável z, o que não faz sentido, já que a integral depende dessa variável. Na resposta 2, apresentada pelo aluno 11 reponde a pergunta algebricamente de maneira correta, mas indica que a superfície é uma parábola, o que também não faz sentido, pois estamos trabalhando com uma equação com três variáveis (x, y, z). Mesmo dando a entender que o paraboloide limita inferiormente o sólido, ele expressa erroneamente a integral tripla, indicando que o plano xy $(z=0)$ faz esse papel.

A segunda sequência didática que compõe essa Atividade Exploratória possui o mesmo nome da anterior: “Construindo Integrais Triplas sobre regiões no espaço ($\mathbb{R}^3$)”. Assim visamos ao mesmo objetivo, porém o sólido que pedimos para plotar e, posteriormente, a construção da integral tripla para o cálculo do seu volume se apresenta com um maior grau de complexidade.

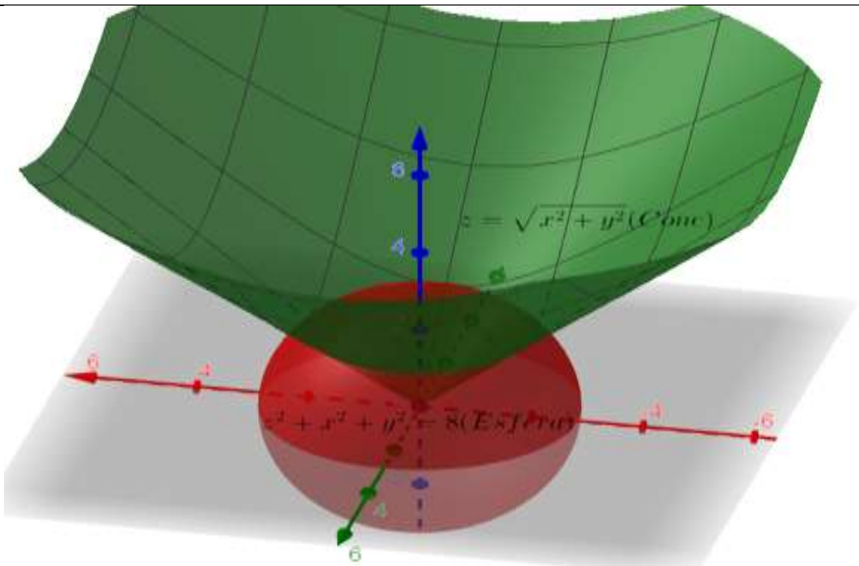
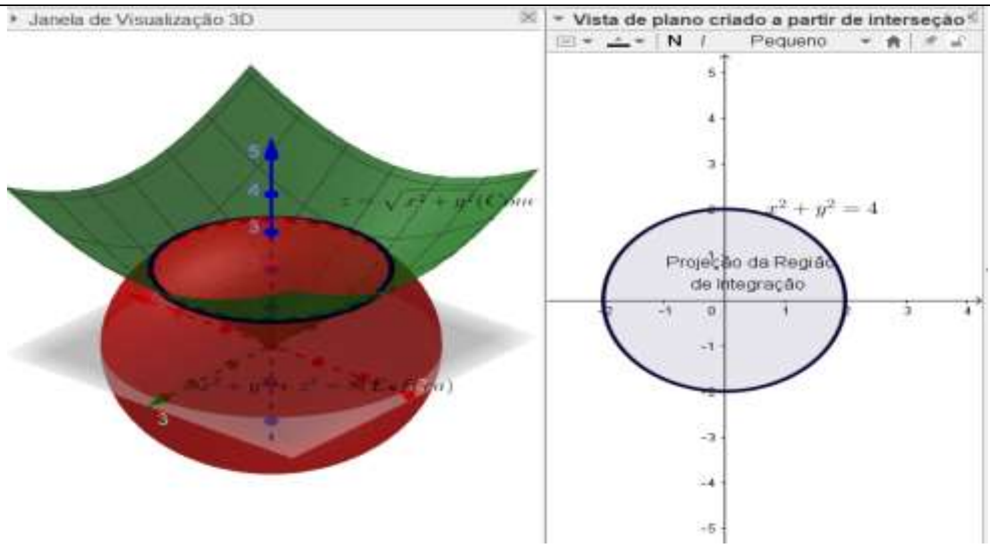
A sequência didática se inicia orientando o aluno para a representação gráfica do sólido com a auxílio do GeoGebra. Dessa forma, as seguintes superfícies devem ser plotadas:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 + x^2 + y^2 = 8$$

As superfícies que compõem o sólido da atividade são um cone e uma esfera. A equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ representa a parte do cone acima do plano xy, em que todos os pontos que constituem a superfície são positivos. A outra superfície dada por $z^2 + x^2 + y^2 = 8$ representa uma esfera, com centro na origem $(0,0,0)$ e raio igual a $2\sqrt{2}$. No quadro 26 representamos esse sólido, plotado no GeoGebra e outros aspectos que esperamos alcançar com esta atividade.

Quadro 26 – Sólido S: Operação de tratamento e conversão de integrais triplas

Sólido S

Sólido S e região de integração projetada no plano xy

Integral Tripla para o volume do sólido S
$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2+8}} dz\ dy\ dx$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Para construção da integral tripla, devemos mobilizar as informações contidas no registro gráfico, realizado através do GeoGebra. Esperava-se, com as questões iniciais da sequência didática, que os alunos descobrissem quais superfícies limitam o sólido S superiormente e inferiormente. Esta passagem da atividade gerou bastante dúvidas, talvez por ser um sólido mais complexo que os apresentados anteriormente. O comentário do aluno 13 corrobora esta ideia:

> Professor, estou olhando para esse sólido e para mim quem está por baixo é a esfera. O cone por cima. Esse sólido não deixa claro quem são as superfícies, tá difícil de ver isso... tem sólido que dá pra ver facilmente e montar a integral também. Qual é a região de integração, vai ser tudo zero? (Aluno 13, Diário de Campo, Maio de 2017).

Observando o sólido construído através do GeoGebra, podemos verificar que a esfera se limita superiormente. Como a primeira integral depende de z, devemos isolar esta variável na equação da esfera. Assim, obtemos duas equações $z = \pm\sqrt{8 - x^2 - y^2}$. A equação positiva representa a semiesfera superior - a parte da esfera que nos interessa. A equação negativa é a semiesfera inferior, abaixo do plano xy, que, no sólido em questão, pode ser descartada. Para o limite inferior da integral, podemos observar que a superfície que limita inferiormente o sólido é o cone, o qual já apresenta a equação no formato ideal para a construção da integral $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja:

$$\sqrt{8 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Para os demais limites das duas integrais restantes, que dependem de y e x respectivamente (a sequência didática leva a considerar a região como do tipo I), devemos ficar atentos, pois a região de integração não está sobre o plano xy, como nas outras atividades. Devemos usar as ferramentas do GeoGebra para encontrar essa região de integração e obter a sua projeção no plano xy (quadro 26). Usando estes recursos, chegamos a uma região circular de centro na origem e raio igual a 2.

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$-\sqrt{4 - x^2} \leq \mathrm{y} \leq \sqrt{4 - x^2}$$

A prova e manipulação algébrica dessa região ficam a cargo do aluno. Segue, no quadro 27, algumas respostas dadas pelos alunos.

Quadro 27 - Respostas dadas pelos alunos para a sequência didática

<table>
<tr><th colspan="2">Resposta 1 – Aluno 2</th></tr>
<tr><th>Sequência didática desenvolvida</th><th>Integral Tripla</th></tr>
<tr><td>2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido “por cima”? Justifique algebricamente.
Superiormente $z = \sqrt{8-x^2-y^2}$

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido “por baixo”? Justifique algebricamente.
Inferiormente $z = \sqrt{x^2+y^2}$

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o cone e a esfera, para encontrarmos a região de integração no plano xy.
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
Interseção. $(\sqrt{x^2+y^2})^2 + x^2+y^2 = 8$ R superior $\sqrt{4-x^2}$
$2x^2+2y^2=8$
$2(x^2+y^2)=8$
$x^2+y^2=4$
$y=\pm\sqrt{4-x^2}$

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
R inferior $y = -\sqrt{4-x^2}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Justifique algebricamente.
$x^2+y^2=4 \longrightarrow \sqrt{r^2}=\sqrt{4}$
$r=\pm\sqrt{4}$
$r=\pm 2$</td><td>$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Resposta 2 – Aluno 7</th></tr>
<tr><th>Sequência didática desenvolvida</th><th>Integral Tripla</th></tr>
<tr><td>
2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.
~~Esfera~~ $z^2+x^2+y^2=8$

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
Cone $\sqrt{x^2+y^2}$

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o cone e a esfera, para encontrarmos a região de integração no plano xy.
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
$(\sqrt{x^2+y^2})^2+x^2+y^2=8$
$x^2+y^2+x^2+y^2=8$
$2(x^2+y^2)=8$
$x^2+y^2\ \ 8/2$
$x^2+y^2=4$
$y^2=-x^2+4$
$y=\pm\sqrt{-x^2+4}$

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
$y=-\sqrt{-x^2+4}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Justifique algebricamente.
$x^2=4-y^2$
$x=\sqrt{4-y^2}$ por cima
$-\sqrt{4-y^2}$ por baixo
</td><td>
$$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{x^2-y^2-8}} 1\,dz\,dy\,dx$$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Resposta 3 – Aluno 9</th></tr>
<tr><th>Sequência didática desenvolvida</th><th>Integral Tripla</th></tr>
<tr><td>2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.
$z=\sqrt{x^2+y^2}$

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
$z^2+x^2+y^2=8$
$z^2=8-x^2-y^2 \Rightarrow z=\sqrt{8-x^2-y^2}$

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o cone e a esfera, para encontrarmos a região de integração no plano xy.
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $z^2+x^2+y^2=8$ (interseção)
$(\sqrt{x^2+y^2})^2+x^2+y^2=8$
$x^2+y^2+x^2+y^2=8$ p/ superiormente $\Rightarrow$ $\boxed{y=+\sqrt{4-x^2}}$
$2x^2+2y^2=8$
$2(x^2+y^2)=8$
$x^2+y^2=4$
$y^2=4-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
$y=-\sqrt{4-x^2}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Justifique algebricamente.
Inicia em -2 e termina em +2.</td><td>$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{8-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} 1\,dz\,dy\,dx$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Resposta 4 – Aluno 17</th></tr>
<tr><th>Sequência didática desenvolvida</th><th>Integral Tripla</th></tr>
<tr><td>2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.
O que limita o volume por cima é a esfera, isolamos z, então fica $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.
O que limita o sólido inferiormente é a parábola $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Use a ferramenta interseção de duas superfícies entre o cone e a esfera, para encontrarmos a região de integração no plano xy.
2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.
p/ $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=8$ e com isso isolamos y para integrar em relação a dy, $y^2=8-x^2$ então $y=\sqrt{8-x^2}$ então o que limita superiormente é $y=\sqrt{8-x^2}$

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.
Dando procedimento à questão anterior, a função que limita inferiormente é $y=-\sqrt{8-x^2}$

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Justifique algebricamente.
Pegamos a função dada para xy, e damos o valor de zero, ou seja, $y=0$ então $x=\pm\sqrt{8}$</td><td>$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

As repostas das atividades propostas na sequencia apresentada apontaram muitos erros (aproximadamente 60%) cometidos pelos alunos ao transitarem das representações, no registro gráfico, para as representações no registro algébrico, no momento de expressar a integral tripla para o volume do sólido S. Grande parte desses erros foi cometido principalmente ao descrever, analiticamente, a região de integração. A resposta 1, apresentada pelo aluno 2, mostra a sequência didática respondida e a integral tripla indicada corretamente, mostrando que o aluno conseguiu mobilizar os conhecimentos matemáticos necessários para sair da representação gráfica para as representações no registro algébrico. As demais respostas contemplaram a integral tripla de maneira errada. Na resposta 2, o aluno 7 consegue determinar graficamente e algebricamente a interseção das superfícies e, consequentemente, a região de integração, entretanto comete equívocos ao determinar os limites da mesma. Na reposta 3, o aluno 9 não consegue identificar os limites da primeira integral, invertendo-os. Para ele, o cone limita o sólido superiormente e a esfera inferiormente, mesmo podendo visualizar o sólido de vários ângulos diferentes no GeoGebra. Na resposta 4, o aluno 17 apresenta uma região de integração no plano xy que não é a correta. O aluno fez a interseção da esfera com o plano xy, e não a interseção entre o cone e a esfera e, posteriormente, a sua projeção nesse plano, expressando a integral como se essa região fosse retangular. Podemos observar que nas três últimas repostas apresentadas no quadro 27, a manipulação e a transição entre os registros se mostraram falhas em algum momento.

Prosseguindo com a Atividade Exploratória, chegamos à terceira e última sequência didática proposta sobre Integrais Triplas. Esta sequência objetiva explorar a construção de regiões de integração através de integrais triplas já construídas. Estamos explorando o processo inverso das outras sequências, as quais objetivavam a construção da integral quando o sólido já havia sido construído. Na verdade, o que pretendemos, é a partir de uma integral tripla dada, propor um passo a passo que possibilite ao aluno a construção do sólido que originou a integral, o que muitas vezes não se apresenta como uma tarefa fácil.

Iniciamos nossa sequência didática apresentando a seguinte integral tripla:

Quadro 28– Integral tripla apresentada na sequência didática

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\ dy\ dx$$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Dada a integral, uma sequência didática é apresentada. Primeiro, buscamos identificar quais são as funções das superfícies expressas nos limites de integração que limitam o sólido superiormente e inferiormente, pois determinando quais são essas superfícies, o desenho do sólido começa a ficar mais evidente. Para a integral tripla proposta no quadro 28, o sólido é limitado superiormente pelo plano inclinado $z = 4 - y$ e, inferiormente, pelo plano xy, cuja equação é $z = 0$. Essas superfícies são identificadas através dos limites da integral que depende da variável z, assim, $0 \le z \le 4 - y$.

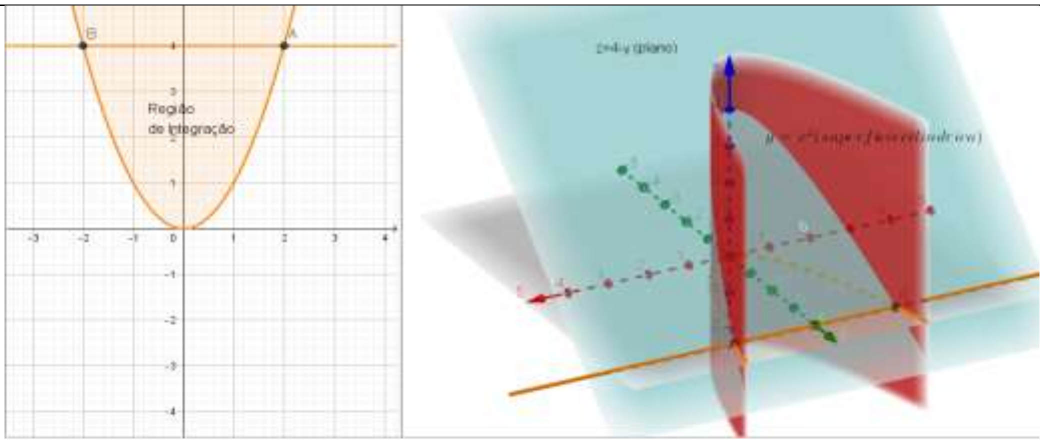
Em seguida, pedimos para que essas superfícies fossem plotadas no GeoGebra. As integrais que dependem de y e x, respectivamente, nos levam a descobrir qual é a região de integração no plano xy e, consequentemente, qual é o sólido que determinou a integral tripla. Observando a segunda integral, temos a superfície cilíndrica $y = x^2$ limitando o sólido. Essa superfície determina no plano xy uma região limitada por uma parábola $y = x^2$ e uma reta $y = 4$, oriunda da interseção entre o plano $z = 4 - y$ e plano xy possuindo como pontos de interseção os pontos $(-2, 4)$ e $(2, 4)$ com a superfície cilíndrica. Logo, podemos escrever analiticamente a região de integração no plano xy como;

$$-2 \le x \le 2$$

$$x^2 \le y \le 4$$

No quadro 29, sintetizamos as etapas esperadas par construção do sólido.

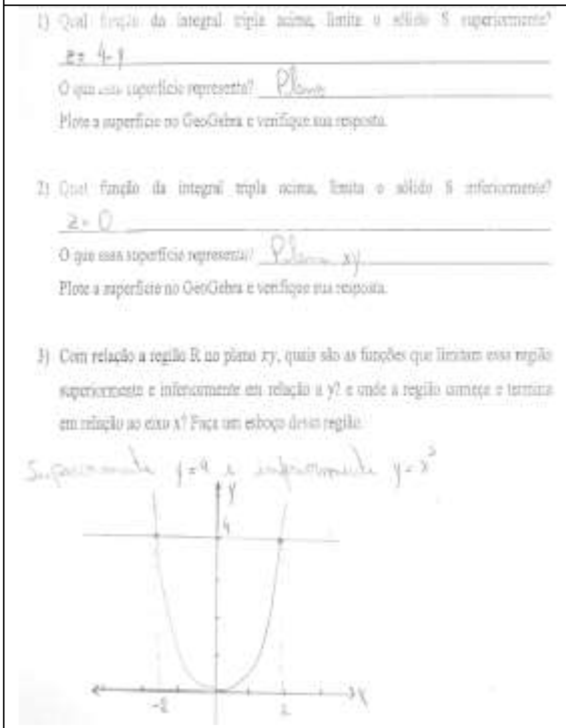
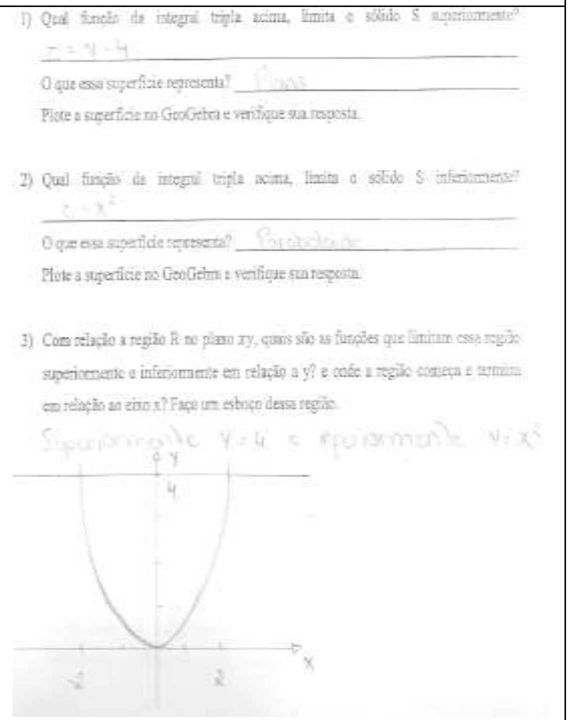
Quadro 29 – Sólido e região de integração gerados pela integral tripla

Integral Tripla dada
$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\, dy\, dx$$
Sólido e região no plano xy obtido através da Integral Tripla


Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A seguir, apresentamos algumas repostas para a sequência didática criada para essa atividade.

Quadro 30 – Respostas dos alunos para a sequência didática sobre Integrais Triplas

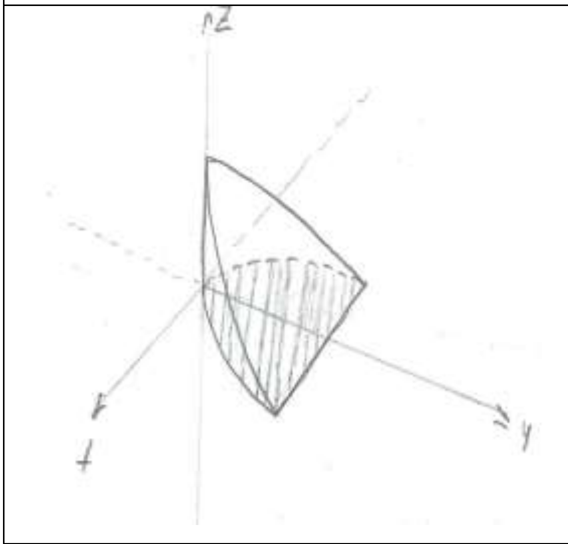
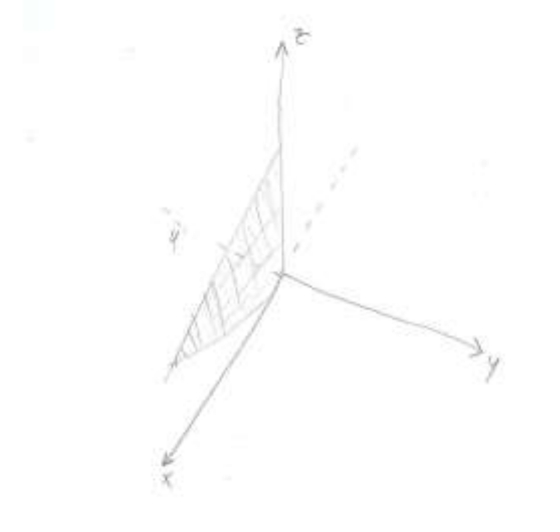
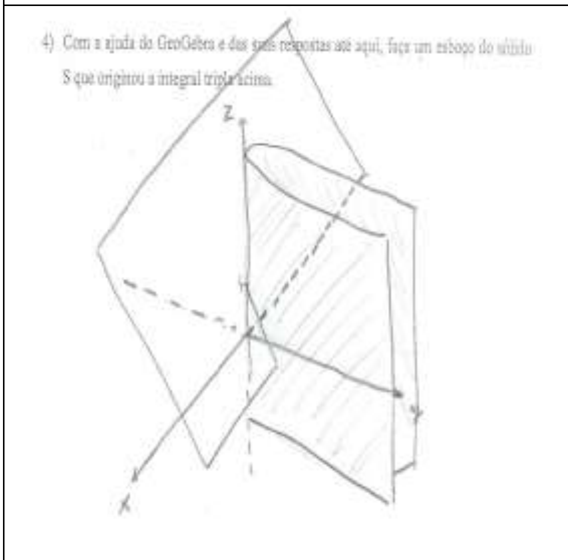
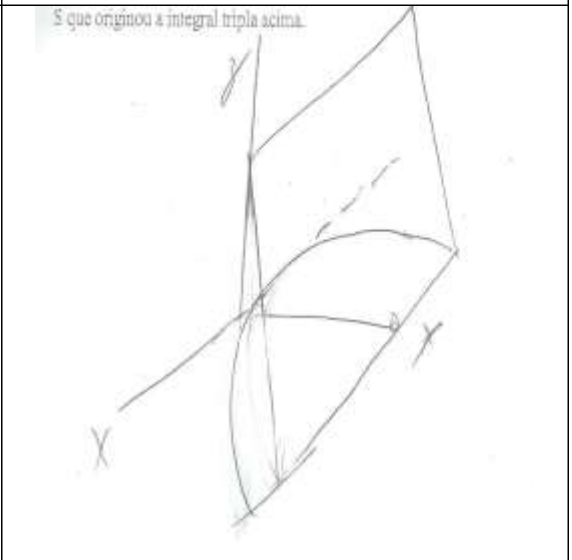
Resposta 1 – Aluno 4	Resposta 2 – Aluno 8
 1) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S superiormente? z= 4-y O que essa superfície representa? Plano Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S inferiormente? z= 0 O que essa superfície representa? Plano xy Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 3) Com relação a região R no plano xy, quais são as funções que limitam essa região superiormente e inferiormente em relação a y? e onde a região começa e termina em relação ao eixo x? Faça um esboço dessa região. Superiormente y=4 e inferiormente y=x²	 1) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S superiormente? z= 4-y O que essa superfície representa? Uma reta Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S inferiormente? z=0 O que essa superfície representa? Uma reta Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 3) Com relação a região R no plano xy, quais são as funções que limitam essa região superiormente e inferiormente em relação a y? e onde a região começa e termina em relação ao eixo x? Faça um esboço dessa região. Superiormente y=4 Superiormente y=x² Em relação a x Começa em x=-2 Termina em x=2
Resposta 3 – Aluno 12	**Resposta 4 – Aluno 25**
 1) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S superiormente? z= 4-y O que essa superfície representa? Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S inferiormente? z= 0 O que essa superfície representa? Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 3) Com relação a região R no plano xy, quais são as funções que limitam essa região superiormente e inferiormente em relação a y? e onde a região começa e termina em relação ao eixo x? Faça um esboço dessa região. x: Começa em -2 / Termina em 2 y: y=4 / y=x²	 1) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S superiormente? z = 4-y O que essa superfície representa? Plano Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 2) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S inferiormente? z = x² O que essa superfície representa? Parábola Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta. 3) Com relação a região R no plano xy, quais são as funções que limitam essa região superiormente e inferiormente em relação a y? e onde a região começa e termina em relação ao eixo x? Faça um esboço dessa região. Superiormente y=4 e inferiormente y=x²

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

As respostas dadas pelos alunos mostram como foi desenvolvida esta atividade, guiada pela sequência didática. Uma porcentagem considerável (55%) conseguiu seguir os passos propostos e encontrar o sólido que originou a integral tripla, como podemos observar na resposta 1, apresentada pelo aluno 4. Mas é relevante discutirmos algumas repostas apresentadas. As respostas 2 e 3, apresentadas pelos alunos 4 e 12, respectivamente, mostram que eles consideram os limites da primeira integral como sendo retas, o que foi um erro bem comum (cerca de 35% dos participantes), pois são funções polinomiais do primeiro grau. Os limites dessa integral são as superfícies que limitam o sólido superiormente e inferiormente, portanto não são constituídas por retas, mas por planos. Com relação à região de integração, a resposta 2 do aluno 4 apresenta-se corretamente, mas a reposta 3 do aluno 12 aponta uma parábola com concavidade para baixo, apesar do limite da integral estar constituído pela função $y = x^2$. Essa situação leva a inferir que o aluno usou algum recurso do GeoGebra e acabou observando a região ao contrário. Na resposta 4, apresentada pelo aluno 25, ele associou a equação da parábola a um paraboloide, talvez induzido pela palavra superfície, na pergunta da sequência didática.

Desta maneira, os sólidos construídos pelos alunos no GeoGebra atenderam às expectativas, mas quando pedimos para esboçá-los com auxílio de papel e lápis, os alunos (cerca de 45%) não atingiram o desempenho esperado, reforçando nossa percepção de que esboçar tais superfícies por este mecanismo não é tarefa fácil. Também verificamos que essa parcela de alunos não conseguiu mobilizar as informações necessárias para transitar entre a representação nos registros algébricos e a representação no registro gráfico. No quadro 31, registramos alguns sólidos gerados pelas repostas da sequência didática explicitadas no quadro 30, na respectiva ordem.

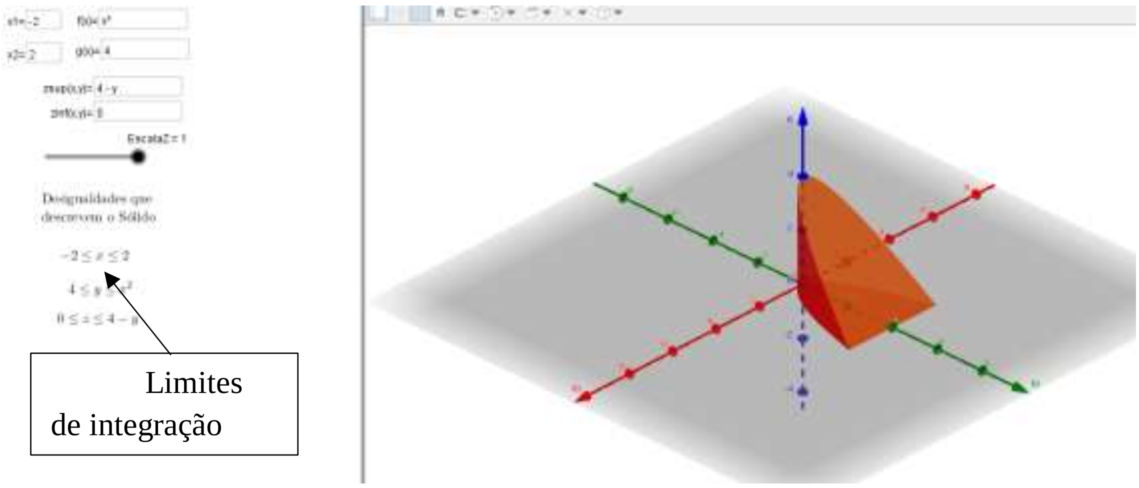
Quadro 31 – Sólidos desenhados a partir da Integral Tripla

Resposta 1- Aluno 4	Resposta 2 – Aluno 8
	
Resposta 3 – Aluno 12	Resposta 4 – Aluno 25
	

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Por fim, usamos um arquivo desenvolvido no GeoGebra para verificar se dada a integral tripla da atividade, o sólido construído pelos alunos era o correto, ou seja, eles poderiam comparar os desenhos feitos à mão com os realizados com o auxílio do *software*. Para isso, foi necessário apenas inserir os limites das integrais nas entradas contidas no arquivo, que são as desigualdades que descrevem o sólido. A figura 14 possibilita visualizar as entradas e o sólido gerado.

Figura 14 – Arquivo para plotar sólido a partir de Integral Tripla



Fonte: Dados do pesquisador (2017)

O interessante é que ao entrar com os limites de cada integral que compõe a integral tripla, o sólido é plotado automaticamente na janela de visualização 3D. Comparando o sólido contido no quadro 28 com o da figura 13, observamos que o primeiro mostra “por inteiro” todas as superfícies que compõem o sólido, o que possibilita identificar interseções entre elas e outras características do sólido. Já o segundo apresenta o sólido acabado, apenas composto por partes limitadas das superfícies e talvez dificulte encontrar os limites de integração.

5.3. Elaborando eixos / categorias de análise

Após termos descrito e analisado os dados obtidos por meio de nossas atividades exploratórias, iniciaremos uma etapa de grande relevância dentro da pesquisa que desenvolvemos: a elaboração de eixos / categorias de análise. Engana-se quem considera esta uma etapa fácil e corriqueira, pois é neste momento que confrontamos o que colhemos no campo com o que temos de embasamento teórico. Gomes (2009) argumenta que:

> Quando falamos em análise e interpretação de informações geradas no campo da pesquisa qualitativa, estamos falando de um momento em que o pesquisador procura finalizar o seu trabalho, ancorando-se em todo o material coletado e articulando esse material aos propósitos da pesquisa e à sua fundamentação teórica (GOMES, 2009, p.80).

No âmbito da pesquisa qualitativa, as categorias e eixos estabelecidos expressam, quase que exclusivamente, o olhar do pesquisador iluminado pelo referencial de análise escolhido, sobre o conjunto de dados coletados durante a pesquisa. Portanto, não é de se assustar, que outros olhares poderiam gerar novos eixos e categorias de análise.

A partir da análise das atividades exploratórias, das observações feitas no diário de campo, do referencial teórico / bibliográfico e do questionário de avaliação, apontamos quatro eixos / categorias de análise.

5.3.1 O papel da visualização com o auxílio do GeoGebra na aprendizagem de Integrais Múltiplas

Nossa pesquisa está centrada no Cálculo de Várias Variáveis, particularmente nos processos de ensino e de aprendizagem de Integrais Múltiplas. Entendemos que a visualização é imprescindível ao desenvolvimento destes processos, especialmente quando são estabelecidas as conexões entre Integrais Múltiplas e suas aplicações geométricas para realização do cálculo de área e de volumes. A visualização das chamadas regiões de integração, juntamente com as superfícies que a compõem, são essenciais para a compreensão das Integrais Múltiplas. Em consonância com o referencial teórico desta pesquisa, essa visualização se produz por meio da compreensão / interpretação dos registros gráficos realizados tanto em $\mathbb{R}^2$ quanto em $\mathbb{R}^3$. Nesse sentido, consideramos que a habilidade de visualizar e de refletir matematicamente sobre a estrutura das representações gráficas de Integrais Múltiplas possibilita ao aluno obter e descrever informações contidas nas regiões de integração. O uso das ferramentas desenvolvidas em alguns *softwares* específicos promovem a realização destas tarefas de maneira mais intuitiva e perceptível, já que as superfícies envolvidas, em muitas integrais, não são fácies de ser visualizadas ou desenhadas sem a utilização de recursos tecnológicos.

Nesta pesquisa, apoiamo-nos em conceitos de visualização em Educação Matemática propostos por Flores (2012), Villarreal (1999), Villarreal & Borba (2005), Presmeg (1986) e Arcavi (2003). A maioria desses autores defende o uso de *softwares* como uma ferramenta importante na atividade de visualização, principalmente no desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo. Diante disso, usamos o *software* GeoGebra para plotar as regiões de integração propostas nas atividades contempladas nas sequências didáticas que desenvolvemos relacionadas à Integrais Múltiplas. Esse *software* permite aos alunos explorar suas potencialidades, evidenciando conceitos e características ligadas à visualização "considerada uma ferramenta para a compreensão matemática" (VILARREAL, 1999)

Durante a aplicação das atividades verificamos muitas situações que levaram a crer que a utilização do GeoGebra contribuiu com o processo de aprendizagem das Integrais Múltiplas, permitindo que os alunos visualizassem os sólidos e as regiões de integração com maior clareza, o que possibilitou a transição do registro gráfico e ou analítico desse objeto matemático. As distintas ferramentas desenvolvidas pelo GeoGebra têm a potencialidade de promover a visualização e, consequentemente, de proporcionar uma interpretação satisfatória dos sólidos e das regiões de integração. Algumas passagens retiradas do diário de campo corroboram esta conclusão:

> A primeira atividade sobre as Superfícies Quádricas, levou os alunos a visualizar com maior facilidade as interseções entre os planos construídos e as superfícies exploradas, pois podiam movimentá-las livremente. [...]. Ao observar os monitores, pude perceber que muitos alunos respondiam às perguntas da atividade somente observando a construção disponível na tela do computador (Diário de Campo, março de 2017).

> Observando os alunos desenvolverem as atividades sobre integrais duplas, constatei que ao plotarem as regiões de integração no GeoGebra e seguirem as perguntas da sequência, muitos apontavam com o dedo na tela do computador o que era limite superior e inferior da integral. levando a crer que conseguiam visualizar esses limites no registro gráfico feito no GeoGebra (Diário de Campo, abril de 2017).

> Observei muitos alunos usando ferramentas do GeoGebra que não foram mencionadas na atividade e que eu não havia mencionado nas aulas. Indagados porque estavam usando essas ferramentas, responderam que ficava mais fácil de ver o que acontecia com a região de integração, pois poderiam girar a região ou destacá-la, mudando a cor e aumentando o tamanho (Diário de Campo, abril de 2017).

Podemos recorrer também ao questionário final aplicado aos alunos participantes após as atividades exploratórias terem sido concluídas. O objetivo desse questionário foi verificar as opiniões dos alunos relativas às contribuições da sequência didática proposta, com a auxílio do GeoGebra, para os processos de aprendizagem de Integrais Múltiplas. Destacamos a seguinte pergunta: "Dentre os tópicos de Integrais Múltiplas explorados nas atividades, em quais e em que aspectos a utilização do *software* GeoGebra 3D contribuiu para sua aprendizagem de forma significativa? Detalhe!" Consideramos relevantes à seguintes respostas:

> No geral contribuiu muito porque deu para ter uma visão melhor dos gráficos utilizados no cálculo (Aluno 2, Questionário Final, abril de 2017).
>
> O GeoGebra ajudou a visualizar as imagens para montar as integrais (Aluno 5, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Principalmente na visualização do sólido, mas também nas funções do software de visualizar as interseções (Aluno 8, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Contribuiu em visualizar o que é preciso para calcular as integrais, auxiliando nos limites com curvas e nas respectivas interseções (Aluno 11, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Na utilização da janela 3D e no plano xy que nos fazia enxergar melhor o sólido (Aluno 12, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Possuía muita dificuldade de visualização dos sólidos, com o GeoGebra obtive melhores resultados (Aluno 15, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Principalmente na visualização dos sólidos. Quais funções estavam nos limites (Aluno 17, questionário final, abril de 2017).

Podemos observar que a palavra visualização aparece em grande parte das repostas dos alunos e também em muitas anotações relatadas no diário de campo. É importante ressaltar que o termo “visualização” emergiu naturalmente nas respostas dos alunos e nos relatos do pesquisador, o que nos permite considerar que a visualização com auxílio do GeoGebra nos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas pode ser interpretada nas seguintes perspectivas:

- o GeoGeobra, com seus recursos e ferramentas, possibilitou plotar regiões de integração tanto em $\mathbb{R}^2$ quanto em $\mathbb{R}^3$, o que seria quase impossível usando somente lápis e papel. Logo, contribui para que aspectos visuais das regiões de integração, muitas vezes inacessíveis, pudessem ser realçados e explorados;

- a visualização é parte da atividade matemática (BORBA e VILLARREAL, 2005), e possibilita que conceitos importantes abordados nos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas como: funções de integração, regiões do tipo I ou do tipo II e funções que compõem limites de integração tornem-se mais evidentes a partir da representação gráfica realizada por meio do GeoGebra;

- a representação visual pode transformar o entendimento de conceitos matemáticos (BORBA e VILLARREAL, 2005). Logo, consideramos que as representações das regiões de integração, visualizadas com auxílio do GeoGebra, facilitou a construção do conhecimento de Integrais Múltiplas pelos alunos.

5.3.2. O GeoGebra e os Registros de Representações Semióticas

Este eixo está embasado em Duval (2011), que argumenta que os computadores, juntamente com seus *softwares*, apresentam um outro modo de produzir representações. Nesta pesquisa, utilizamos o GeoGebra para plotar inúmeros gráficos no plano e no espaço tridimensional, que foram explorados no desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem de Integrais Duplas e Triplas. De tal procedimento emerge a representação gráfica de Integrais Múltiplas, a qual se revelou indispensável para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem de nosso objeto de estudo.

Para Duval (2009), os registros de representações semióticas de objetos matemáticos permitem a compreensão cognitiva destes. Mas para ele há uma enorme dificuldade de compreensão quando necessitamos representá-los. No caso das Integrais Múltiplas, consideramos diversos registros que demandam um grau de dificuldade enorme, quando se utiliza a mídia papel e lápis. Portanto, uma simples equação de uma superfície pode requerer um registro gráfico no espaço complexo e / ou impossível de ser desenhado sem recursos computacionais. Este fato acarreta uma dificuldade na transição semiótica associada ao tema, o que pode comprometer a compreensão de Integrais Múltiplas. A utilização do GeoGebra para produzir essas representações apresentou-se como como uma maneira de evocar objetos matemáticos relacionados à Integrais Múltiplas de difícil acesso, coadunando com a visão de Duval (2011), na qual as representações possuem o papel de evocar o que se apresenta ausente: o objeto.

Durante a pesquisa, principalmente nos momentos de execução das atividades, e, consequentemente, de coleta de dados, percebemos como o GeoGebra proporcionou uma facilidade e contribuiu para agilizar a produção de registros gráficos. Já na análise dos dados verificamos que os registros realizados por meio do Geogebra realmente possibilitaram o acesso de informações aparentemente ausentes, para expressar as Integrais Múltiplas. Os relatos seguintes, extraídos do diário de campo, corroboram esta afirmação:

> Muitos alunos ao executarem as atividades exploratórias se mostraram impressionados com os gráficos que estavam criando no GeoGebra. Pude ouvir muitos comentários sobre como era fácil plotar os gráficos e da rapidez

> que eram feitos. O resultado na tela do computador deixava os alunos eufóricos e motivados a continuarem as atividades. Muitos relatavam que se fossem desenhar à mão, não sabiam nem por onde começar (Diário de Campo, março de 2017).
>
> As atividades sobre integrais duplas foram bastante satisfatórias, pois pude perceber que o GeoGebra ajudou muito no esboço dos gráficos e superfícies. Muitos alunos comentaram durante as atividades, que fazer os gráficos com o computador ajuda bastante e se podiam sempre fazer assim. Percebi que as ferramentas que o software possui estavam sendo usadas e permitindo que muitos explorassem as regiões de integração com maior facilidade (Diário de Campo, abril de 2017).
>
> Observando a execução das atividades de integrais triplas percebi como o GeoGebra ajudava na construção das superfícies no espaço tridimensional, rapidamente os alunos estavam com o desenho em sua frente na tela do computador e podiam fazer as análises que a sequência didática exigia. (Diário de Campo, maio de 2017).

A opinião dos alunos participantes também vai ao encontro do que identificamos em relação à facilidade e agilidade para plotar as representações gráficas realizadas com o auxílio do GeoGebra, além da possibilidade de obter informações para expressar as Integrais Múltiplas. Uma pergunta comtemplada em nosso questionário final possibilita interpretar a posição dos alunos sobre esse aspecto. Ressaltamos as seguintes respostas dos alunos para a pergunta: "A utilização do GeoGebra 3D, em algum momento da realização das atividades, causou certos entraves / dificuldades para sua aprendizagem nos conteúdos de Integrais Múltiplas? "

> Não, nenhuma. O software é muito bom, ajudou muito a entender as regiões de integração (Aluno 2, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Não tive dificuldades. Facilitou desenhar os gráficos e expressar as integrais. A simplicidade de escrever a equação e desenhar o gráfico é bom demais (Aluno 7, Questionário Final, abril de 2017).
>
> O GeoGebra não causou entrave. Na verdade, facilitou fazer os gráficos e também as integrais (Aluno 10, Questionário Final, abril de 2017).
>
> Não. Ficou muito mais fácil desenhar os sólidos com o GeoGebra. Foi muito tranquilo, o programa tem muita coisa legal que facilita a gente entender (Aluno 13, Questionário Final, abril de 2017).

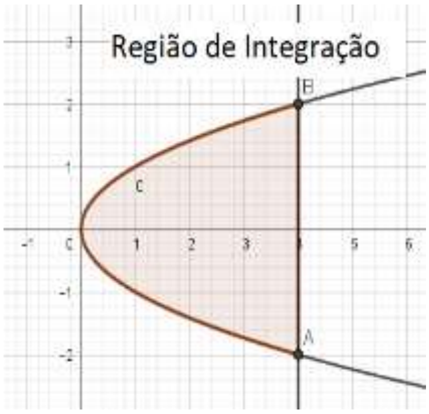
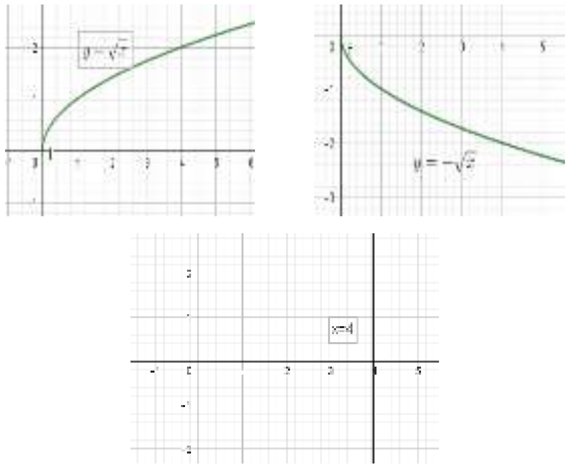
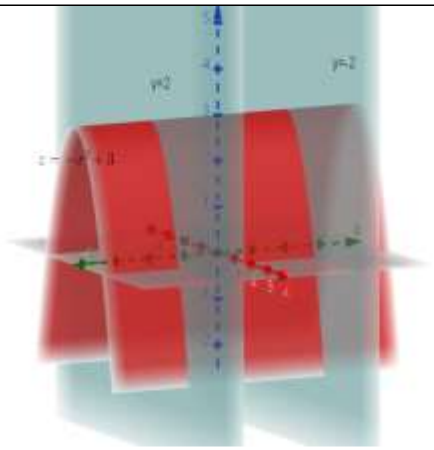
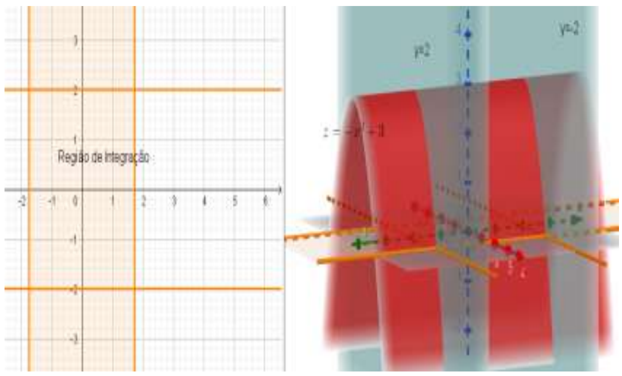
É importante salientar que os registros gráficos, realizados por meio do GeoGebra, não podem ser considerados como um novo tipo de representação semiótica, uma vez que, segundo Duval (2011), as representações que o *software* exibem são as mesmas que podem ser produzidas à mão. Entretanto, ressaltamos a potencialidade do GeoGebra para produção e interpretação das representações no registro gráfico, especialmente das superfícies mais complexas.

Analisando as atividades propostas e executadas com o auxílio do GeoGebra, à luz dos conceitos da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, observamos vários pontos relevantes no que tange os processos cognitivos relacionados ao conhecimento matemático. O GeoGebra, como já falamos, produz as representações gráficas com rapidez e facilidade, mas suas características de representar gráficos na janela 2D ou 3D, a possibilidade de exibição de objetos na janela algébrica e, acima de tudo, a suas ferramentas, trazem a capacidade de potencializar os processos de aprendizagem. Nossas atividades exploraram bastante um tópico que Duval (2011) aponta como desconstrução dimensional, ou seja, a capacidade de ver que uma figura de dimensão nD pode ser decomposta em outra de dimensão $(n-1)D$.

No desenvolvimento das atividades verificamos que em vários momentos os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar esse tipo de operação figural, principalmente na análise das regiões de integração, tanto para Integrais Duplas ou Triplas. Em Integrais Duplas, a região de integração plotada na dimensão 2D é geralmente analisada na dimensão 1D, através das retas, curvas e interseções que determinam os limites de integração. Para as atividades envolvendo Integrais Duplas, percebemos que cerca de 65% dos alunos participantes conseguiram compreender e mobilizar informações ao executar esse tipo de operação figural. O que possibilitou que as regiões de integração pudessem ser explicitadas no registro algébrico com maior facilidade. Já nas Integrais Triplas, a região de integração se localiza na dimensão 3D, mas parte da análise dessa região se dá na dimensão 2D, através das interseções das superfícies com o plano xy, ou a projeção das interseções neste plano. Cerca de 55% dos participantes da pesquisa conseguiram, nas atividades envolvendo Integrais Triplas, transitar entre as dimensões envolvidas de maneira satisfatória, expressando as integrais corretamente.

Para Duval (2011, pag. 87), “ver geometricamente uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista”. Nossas atividades elaboradas por meio de sequências didáticas contribuíram para que os alunos observassem a atividade de desconstrução dimensional das regiões de integração, o que se apresentou como uma mobilização cognitiva importante para expressar as Integrais Múltiplas por meio de outras representações. Este processo fica bastante evidente quando usamos as ferramentas existentes no GeoGebra. O quadro 32 possibilita visualizar essa desconstrução dimensional.

Quadro 32 – Desconstrução dimensional de regiões de integração

<table>
<tr><td colspan="2">Desconstrução figural de uma Região de Integração na dimensão 2D</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desconstrução figural de uma Região de Integração na dimensão 3D</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Tal operação importante permeou, frequentemente, as atividades propostas durante sua execução. Duval (2011) considera que a operação essencial às figuras geométricas não é essencialmente a sua construção, mas sim, a desconstrução dimensional de todas aquelas que são construídas instrumentalmente ou com o auxílio de um *software*. Assim, entendemos que tal consideração apontada por Duval coaduna com o que observamos durante a análise das atividades. A desconstrução das regiões de integração apresentou-se de maneira intensa e como uma operação fundamental na construção das Integrais Múltiplas.

Os conceitos importantes como as operações de Tratamento e Conversão serão tratados mais adiante, pois aparecem em nossa pesquisa em destaque, e por bem, consideramos melhor classificá-los como eixos / categorias de análise.

5.3.3. A questão da potencialização da operação de tratamento

Como dissemos no fim do último tópico, a operação de tratamento será um dos nossos eixos / categorias de análise, pois observamos, durante a descrição e análise das atividades aplicadas, grande evidência de características relacionadas ao tratamento. A operação de tratamento no contexto da Teoria dos Registros de Representação Semiótica consiste em uma mobilização cognitiva que busca transformar uma representação em outra, porém dentro do mesmo registro, ou seja, é uma transformação interna de um registro (DUVAL, 2012).

Em nossas atividades, a operação de tratamento se destaca constantemente, tanto no âmbito do registro algébrico, quanto no registro gráfico. Em todas as atividades exploratórias aplicadas, a operação de tratamento esteve presente. No que tange as representações no registro gráfico, podemos perceber que o *software* usado propicia uma potencialização para estas operações, devido às ferramentas disponibilizadas. O GeoGebra permite manipular facilmente os objetos gráficos tanto em sua janela de exibição 2D como na janela 3D. A possibilidade de mover, aumentar ou diminuir, girar, traçar planos, determinar interseções, destacar regiões ou superfícies e muitas outras dentro do registro gráfico impulsiona operações cognitivas consideráveis que sem o auxílio do *software* seria quase impossível.

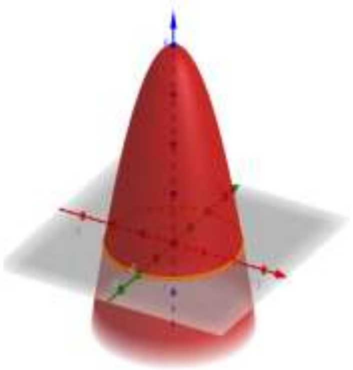
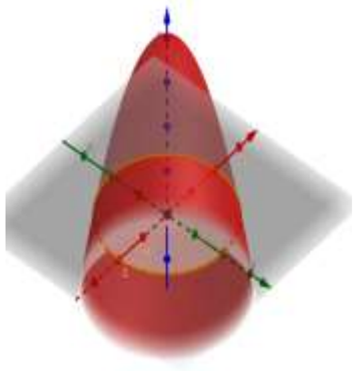
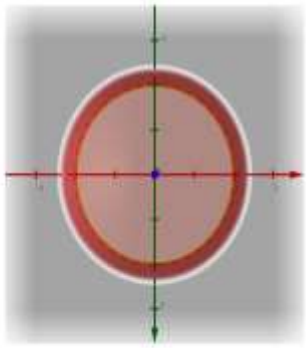
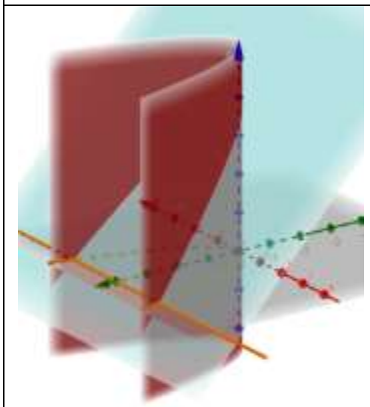
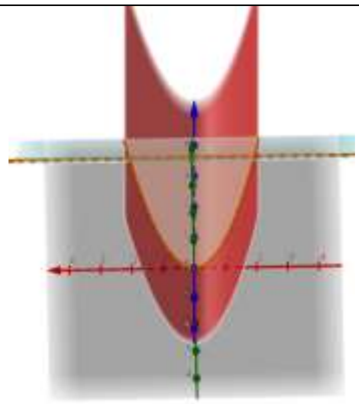
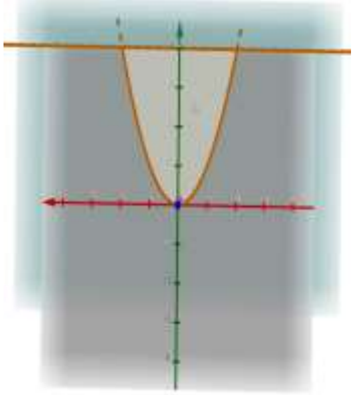
Diante dessas possibilidades, Duval (2011, p.137) aponta para um “modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos”. Esta aceleração e capacidade de produção e transformação de representações no registro gráfico, com o uso do GeoGebra, propiciou um ambiente gráfico muito fértil para desenvolvimento e estudo de Integrais Múltiplas. De fato, para Henriques et al. (2007, p. 70) “a escolha de um registro de representação adequado pode favorecer o tratamento”.

Em nossa primeira atividade, podemos observar que essa operação foi bastante explorada. Os alunos construíram Superfícies Quádricas e planos paralelos aos planos coordenados, e encontraram as interseções entre eles. Verificamos que cerca de 80% das operações de tratamento, exigidas nessa atividade, com o auxílio do registro gráfico, foi realizada com sucesso pelos alunos. Para isso, distintas ferramentas do GeoGebra foram utilizadas, o que possibilitou aos alunos moverem os planos, e destacarem as interseções, mobilizando a criação de novos registros gráficos, a partir dos outros já criados. Tudo isso, feito de forma rápida e com facilidade, destacando operações de tratamento importantes para o processo de aprendizagem.

Nas atividades voltadas para as Integrais Duplas e Triplas, a operação de tratamento se mostrou presente, principalmente na determinação de regiões de integração. As atividades que elaboramos possibilitaram a determinação destas regiões por parte dos alunos com o auxílio do GeoGebra. Logo, a utilização das ferramentas disponíveis no GeoGebra possibilitou a transformação de representações no interior de um mesmo registro, bem como a obtenção de informações importantes para a construção das integrais. Observamos que aproximadamente 68% dos participantes realizaram as operações de tratamento com êxito nas atividades exploratórias de Integrais Duplas e 60% nas atividades exploratórias de Integrais Triplas.

Estes novos registros gráficos levaram, por exemplo, a determinar a ordem de integração que depende diretamente de como visualizamos a região de integração. O *software* permite girar e mover esta região (janela de visualização 2D) e determinar a ordem de integração e, consequentemente, as funções que serão os limites das integrais. Permitiu, também, determinar as funções de integração, que geralmente limitam o sólido superiormente e nem sempre são de fácil identificação (janela de visualização 3D). Com a operação de tratamento no registro gráfico, podemos explicitar as especificidades das regiões de integração e utilizá-las na construção das Integrais Múltiplas. Para Duval (2011), a escolha de um registro de representação adequado para expor os conceitos de um objeto matemático pode favorecer a operação de tratamento**.** Entendemos que os registros construídos por meio do GeoGebra, durante a execução das atividades exploratórias, possibilitaram a exploração deste tipo de operação, evidenciando informações importantes para expressar as Integrais Múltiplas. Uma síntese da operação de tratamento no registro gráfico pode ser apreciada no quadro 33.

Quadro 33 – Operações de tratamento no registro gráfico

Sólido gerado para construção de uma Integral dupla		
		
Sólido gerado para construção de uma Integral Tripla		
		

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A operação de tratamento também se fez presente nas resoluções das atividades. A manipulação algébrica se mostrou tão necessária como a manipulação gráfica, que foi bastante explorada com o auxílio do GeoGebra. Para este tipo de operação de tratamento, verificamos que pouco mais de 45% dos participantes tiveram êxito em sua execução. Em muitas passagens das atividades, propusemos aos alunos que justificassem algebricamente o que estavam visualizando na tela do computador, e, para isso, foi necessário trabalhar com o registro algébrico. Para determinar pontos de interseção entre curvas, a equação de uma curva resultante da interseção de duas superfícies ou a resolução de uma integral dupla ou tripla exigiram uma transformação de registros, mas sempre permanecendo no registro algébrico. Ressaltamos que, apesar do GeoGebra possuir uma janela de visualização algébrica, não nos interessamos pelo que é produzido por ela, pois muitas vezes os registros algébricos (equações) se apresentam de forma parametrizada, fugindo aos objetivos de nossa pesquisa.

5.3.4. A necessidade da operação de conversão para o ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas

A Teoria dos Registros das Representações Semióticas destaca a operação de conversão. Para Duval (2011), esta operação se caracteriza pela mudança de registros, desde que o objeto matemático seja o mesmo.

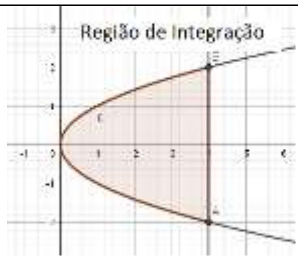
Nesta perspectiva, podemos observar que existe uma forte relação entre os procedimentos adotados para expressar as Integrais Múltiplas e a operação de conversão da Teoria de Duval. Observamos que é necessário transitar, quase que frequentemente, entre os registros gráficos e algébricos, ou seja, é necessário explorar essas representações para que possamos mobilizar conhecimentos necessários para construirmos as integrais. Duval (2011) relata que do ponto de vista cognitivo, é importante que possamos reconhecer objetos matemáticos por meio de múltiplas representações ou manifestações possíveis.

Para o estudo de Integrais Múltiplas, consideramos que as transições entre as representações nos registros gráficos e os registros algébricos são primordiais. A tarefa de realização da conversão entre estes registros de representações nem sempre é fácil, principalmente da representação no registro gráfico para o algébrico (escrito analiticamente, e vice-versa. Este fato vai ao encontro das ideias de Duval (2009, p. 63) o qual assegura que "a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos". Para a maioria dos registros gráficos, como já é sabido, usamos o *software* GeoGebra. Portanto, as atividades que elaboramos, através de sequências didáticas, permitiram transitar entre estas formas de representação de nosso objeto matemático, destacando as operações de conversão existentes no estudo de Integrais Múltiplas e possibilitando que as especificidades de cada representação fossem bem descriminadas.

Nas atividades sobre Integrais Duplas criamos, a princípio, uma sequência didática na qual, dadas as funções (expressas algebricamente) que compõem uma região limitada no plano $\mathbb{R}^2$, era solicitado que os alunos plotassem seu gráfico com o auxílio do GeoGbra e, através de perguntas especificas, realizassem os registros algébricos de maneira analítica, podendo finalmente construir a integral dupla, outro registro algébrico do objeto matemático em estudo. Verificamos que cerca de 55% dos alunos conseguiram transitar entre as representações nos registros especificados nestas atividades. As integrais duplas construídas por estas sequências tinham como objetivo calcular a área dessas regiões.

Observamos que a conversão das representações no registro gráfico para o algébrico, realizado de forma analítica da região de integração, mobiliza novos conhecimentos para entender e descrever esta região. A possibilidade de expressá-la de uma forma diferente coloca em correspondência todas as suas unidades significantes elementares, constituídas de cada um dos registros (DUVAL, 2009). Além deste fato, a conversão entre as representações dos registros movimenta um passo muito importante na construção das Integrais Múltiplas, possibilitando a organização das informações algébricas a partir de registros gráficos. Isto permite encontrar os limites da região de integração e assim expressar a integral dupla. Duval (2009) aponta que o uso de vários sistemas semióticos de representação é indispensável para a realização de necessárias atividades cognitivas na construção conceitual de um objeto matemático. O quadro 34 representa as mobilizações de registros esperadas para uma sequência didática das atividades aplicadas.

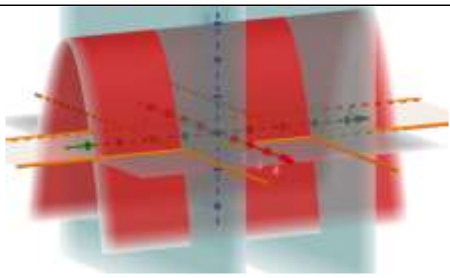
Quadro 34 – Representações usadas para construção de Integrais Duplas

<table>
<tr><td>Expressões Algébricas (dadas inicialmente)</td><td>$x = y^2$
$x = 4$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Representações dos registros</td><td>Representação no Registro Gráfico</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>Representação no Registro Algébrico (escrito de maneira analítica)</td></tr>
<tr><td>$R:\left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4, -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}\right\}$</td></tr>
<tr><td>Integral Dupla (área da região)</td></tr>
<tr><td>$A = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\ dx$</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

A outra sequência que elaboramos, relacionadas às integrais duplas, visa construir uma integral para cálculo do volume de um sólido. Para isso, são dadas as expressões algébricas que compõem o sólido em $\mathbb{R}^3$e solicitado o registro gráfico deste sólido. As atividades propostas nesta sequência didática possibilitam construir as representações algébricas, de forma análitica e, consequentemente, expressar a integral dupla para cálculo do volume. Nesta atividade, percebemos que, aproximadamente, 57% dos participantes conseguiram expressar os diferentes registros necessários. Percebemos que, para o estudo das Integrais Múltiplas, a mudança de representações permite estabelecer significados variados do que é representado graficamente, como pode ser apreciado na síntese realizada no quadro 35.

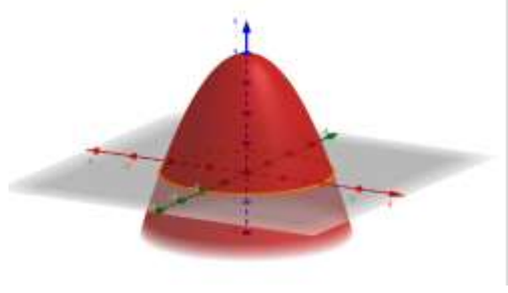
Quadro 35 – Representações usadas para construção de Integrais Duplas

Expressões Algébricas (dadas inicialmente)	$z=-x^2+3$ $z=0$ $y=-2$ $y=2$
Representações dos registros	Representação no Registro Gráfico
	
	Representação no Registro Algébrico (escrito analiticamente)
	O sólido está sob o gráfico da função: $z=-x^2+3$ E acima da região $R:\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},-2\le y\le 2\right\}$
	Integral Dupla (Volume do sólido)
	$V=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-2}^{2}\left(-x^2+3\right)\,dy\,dx$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Elaboramos outra sequência didática em que a mobilização dos registros das representações ocorreu por meio de um caminho contrário do que estávamos operando nas sequências anteriores. Esta sequência estava baseada em desconstruir uma integral dupla já dada, com seus limites e ordem de integração. Nesse sentido, dada uma integral dupla que representa um volume de um sólido, podemos obter os registros algébricos desta superfície e, consequentemente, determinarmos o sólido que originou a integral dupla inicial. Converter as representações dos registros fazendo o caminho contrário ao habitual no estudo de Integrais Múltiplas movimenta uma coordenação de elementos matemáticos que propicia a busca da compreensão das atividades congênitas existentes. Estas representações podem ser apreciadas por meio do quadro 36.

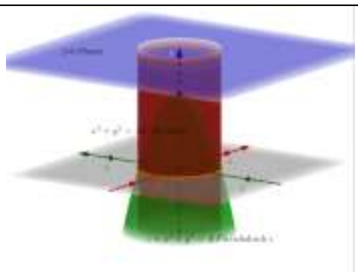
Quadro 36 – Integral Dupla e representações usadas para construção do sólido

<table>
<tr><td rowspan="6">Representações dos registros</td><td>Representação no Registro Algébrico</td></tr>
<tr><td>$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(-x^2-y^2+4)\ dy\ dx$$</td></tr>
<tr><td>Representação no Registro Algébrico (escrito analiticamente)</td></tr>
<tr><td>O sólido está sob o gráfico da função
$$z=-x^2-y^2+4$$
E acima da região
$$D:\left\{(x,y)\,|\,-2\le x\le 2,-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$$</td></tr>
<tr><td>Representação no Registro Gráfico</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

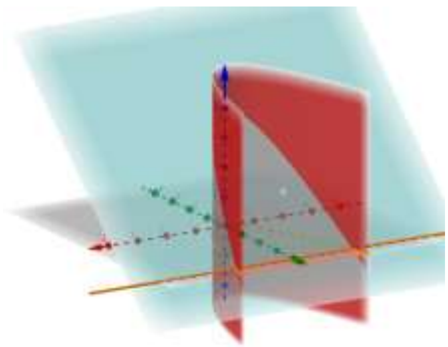
Com relação à operação de conversão, as atividades propostas para o conteúdo de Integrais Triplas possibilitaram observar os mesmos processos de mudança de representações de registros, além da mobilização de conteúdos matemáticos, mas agora com uma especificidade diferente, a região de integração está localizada em $\mathbb{R}^3$. Os procedimentos usados foram os mesmos, uma sequência didática que possibilita obter informações necessárias para transitar entre os registros gráficos e algébricos e construir uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido. O caminho contrário também foi explorado, do mesmo modo que fizemos para as Integrais Duplas. As conversões entre as representações semióticas realizadas nas atividades relacionadas às Integrais Triplas são sintetizadas no quadro 37 e 38.

Quadro 37 – Representações usadas para construção de Integrais Triplas

Expressões Algébricas (dadas inicialmente)	$x^2+y^2=4$ $z+x^2+y^2=4$ $z=6$
Representações dos registros	Representação do Registro Gráfico
	
	Representação do registro Algébrico (escrito analiticamente)
	$R:\left\{(x,y,z)\mid -2\le x\le 2, -\sqrt{4-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2}, 4-x^2-y^2\le z\le 6\right\}$
	Integral Dupla (Volume do Sólido)
	$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{4-x^2-y^2}^{6} dz\ dy\ dx$

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

Quadro 38 – Integral Tripla e representações usadas para construção do sólido

Representações dos Registros	Representação no Registro Algébrico
	$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\, dy\, dx$$
	Representação no Registro Algébrico (escrito analiticamente)
	$$R:\{(x,y,z)\,|\,-2\le x\le 2, x^2\le y\le 4, 4-y\le z\le 0\}$$
	Representação no Registro Gráfico
	

Fonte: Dados do pesquisador (2017)

À guisa de conclusão deste capítulo, acreditamos na perspectiva de Duval (2009) que “a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que se tende a crer”. Os próprios conteúdos de Cálculo de Várias Variáveis, especialmente de Integrais Duplas, são complexos, o que requer a mobilização de distintos conceitos no desenvolvimento de seus processos de ensino e de aprendizagem. Apesar desta complexidade, consideramos que o desenvolvimento de sequências didáticas que contemplam atividades que possibilitam a realização de conversão, entre as distintas representações das Integrais Múltiplas, podem contribuir com uma aprendizagem significativa dos alunos. A análise de dados de nossa pesquisa revelou que uma parte considerável dos alunos realizou, satisfatoriamente, a transição entre pelo menos dois registros de representação semiótica de Integrais Múltiplas, o que permite considerar que houve compreensão do conteúdo em estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> O que o pesquisador acredita ser a Matemática e a Educação Matemática e seu entendimento de conhecimento e de como ele é produzido (ou transmitido, ou descoberto) são fundamentos que influenciam diretamente os resultados da pesquisa.
>
> Araújo & Borba (2017)

No desenvolvimento da presente pesquisa, descrevemos inicialmente as inquietações vivenciadas pelo pesquisador em sala de aula quanto ao ensino e aprendizagem do Cálculo de Várias Variáveis, mais precisamente, abordamos o conteúdo de Integrais Múltiplas. A seguir, relatamos de forma sucinta a História do Cálculo e as dificuldades encontradas em relação à sua pratica de ensino e à sua aprendizagem. Mais adiante, fizemos um panorama histórico do uso das tecnologias no cenário educacional e aprofundamos no âmbito da Matemática. Destacamos o uso das TICEM – Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática, dentro do Cálculo de Várias Variáveis, enfatizando o número escasso de pesquisas existentes. A seguir, tocamos na questão da visualização proporcionada pelo uso das TICEM baseando-nos na visão de alguns pesquisadores da Educação Matemática. Por fim, descrevemos a Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Raymond Duval, uma teoria que se apresentou importante em nosso trabalho.

Diante das inúmeras leituras e, principalmente, da motivação nascida das situações vivenciadas em sala de aula como professor, a seguinte questão de investigação foi investigada:

Quais são as possíveis contribuições de sequências didáticas com a utilização do *software* GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis?

Para tentar responder tal questão norteadora, alguns objetivos e tarefas foram levantados que, por meio de nossa metodologia utilizada, acreditamos terem se mostrado plenamente alcançáveis.

No que tange à revisão de literatura, nossas leituras e discussões iniciais foram direcionadas para um panorama geral do uso de tecnologias na Educação ao longo do tempo e, posteriormente, afunilamos para o âmbito da Matemática, evidenciando o Cálculo de Várias Variáveis. Procuramos investigar pesquisas relacionadas ao conteúdo de Integrais Múltiplas amparadas pelo uso das TICEM. Dentre os poucos trabalhos elencados, apenas um abordou o uso de tecnologias e Integrais Múltiplas e os demais apresentaram conteúdos variados relacionados ao Cálculo de Várias Variáveis. Mesmo diante dessa perspectiva escassa, pudemos refletir e encontrar contribuições e elementos relevantes que acenaram para a possibilidade do uso de *softwares* para o ensino de Integrais Múltiplas. A questão da visualização proporcionada pela prática do uso de tecnologias se mostrou evidente em diversos trabalhos pesquisados e, assim, levou-nos a dedicar um momento para tal discussão importante para a pesquisa desenvolvida.

A seguir, ainda com relação ao nosso referencial teórico, descrevemos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, que se mostrou a principal referência para nosso trabalho. Salientamos pontos importantes dessa concepção teórica, desde de conceitos preliminares como a origem da teoria, até especificidades e perspectivas que achamos relevantes para nossa pesquisa. Essa teoria funcionou como uma "lente" para analisarmos os dados colhidos na pesquisa de campo, por meio das Atividades Exploratórias.

Após o trabalho de fundamentação teórica da pesquisa, partimos para a pesquisa de campo, na qual elaboramos e aplicamos 3 (três) Atividades Exploratórias, apoiadas em sequências didáticas, relacionadas a Superfícies Quádricas, Integrais Duplas e Integrais Triplas. Contamos com participação de cerca de 29 (vinte e nove) alunos matriculados na disciplina de Cálculo III do curso de Engenharia Elétrica da Faculdade Pitágoras, Unidade Betim – MG. Utizamos o *software* GeoGebra 3D como uma ferramenta auxiliar na execução das atividades. As atividades possibilitaram explorar conceitos relativos à construção de Superfícies Quádricas e as interseções geradas entre planos paralelos aos planos coordenados e as superfícies, bem como explorar a construção de regiões de integração em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, para Integrais Duplas e Triplas, além da montagem dessas integrais para cálculo de áreas e volumes.

Depois de termos obtidos diversos dados, partimos para a sua descrição e análise, a fim de identificar quais **as possíveis contribuições de sequências didáticas com a utilização do *software* GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas.** Dessa forma, podemos observar que os dados colhidos e analisados apontaram respostas substanciais à questão levantada.

Apontamos assim, quatro possíveis categorias de contribuições, à guisa de obter um conjunto de respostas à nossa questão de investigação:

- O papel da visualização com o auxílio do GeoGebra na aprendizagem de Integrais Múltiplas

Em nossa pesquisa, a visualização proporcionada pelo GeoGebra se mostrou um componente indispensável para os processos de construção dos principais conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas. Ficou evidente que as propriedades que o GeoGebra possui, como a facilidade de manuseio e as suas inúmeras ferramentas, ajudaram muito para que pudéssemos observar e explorar conceitos visuais. Possibilitaram também que aspectos contidos na construção de gráficos no plano e no espaço pudessem ser melhor compreendidos. As chamadas regiões de integração essenciais na construção de Integrais Múltiplas ganharam dinamicidade, o que acarretou na possibilidade de explorar características visuais inacessíveis em desenhos feitos por meio de papel e lápis. Diante desse fato, acenamos para a perspectiva de explorar regiões de integração muito mais complexas do que as que abordamos na pesquisa.

Observamos durante a aplicação das Atividades Exploratórias e também durante a análise dos dados colhidos, que aspectos ligados à visualização favoreceram a aprendizagem de Integrais Múltiplas, pois viabilizaram o processo de criação, interpretação e reflexão sobre os gráficos criados no GeoGebra, permitindo descrever e analisar informações e ideias antes desconhecidas. É importante frisar que tal concepção não garante uma aprendizagem em sua totalidade, mas acreditamos que potencializa os processos, tanto de ensino como de aprendizagem.

Ficou evidente também que existem indivíduos que apresentam uma facilidade de entender e interpretar aspectos visuais gráficos e que outros, nem tanto. Dessa forma, a utilização da visualização não pode ser entendida como um processo comum e similar para todos os indivíduos nos processos de ensino e aprendizagem. Cada um possui suas particularidades e experiências próprias diante dos conteúdos de Matemática e isso não foi diferente em relação aos conteúdos abordados nessa pesquisa.

Outro aspecto importante foi que as atividades ligadas à exploração de características visuais são melhor aproveitadas e adquirem maiores potencialidades quando guiadas pelo professor ou por uma sequência didática. Em nosso caso, usamos sequências didáticas para construir e interpretar regiões gráficas usadas em Integrais Múltiplas. Dessa forma, foi possível guiar os estudantes durante as atividades, levando-os a explorar recursos do *software*, destacando as especificidades visuais dos gráficos criados.

Contudo, o uso do GeoGebra nessa pesquisa oportunizou momentos relevantes aos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, apoiados em aspectos ligados à visualização. Defendemos que essa experiência possa se tornar uma opção pedagógica frente às práticas tradicionais dos professores de Cálculo, principalmente, no ensino de Cálculo de Várias Variáveis.

- O GeoGebra e os Registros de Representações Semióticas

Essa categoria de análise apresentou a possibilidade de aliar o uso do *software* GeoGebra à construção de registros de representação semiótica, principalmente registros gráficos, usados na construção das Integrais Múltiplas. Novamente o GeoGebra se mostrou eficiente na criação desses gráficos, exibindo características importantes e bastante usuais, que viabilizaram o processo de construção desses registros.

Salientamos que os registros obtidos com o auxílio de softwares não representam um novo registro de representação (DUVAL, 2011). Nessa perspectiva, concordamos com o autor no que tange à construção das regiões de integração para as Integrais Múltiplas, exigidas em nossas Atividades Exploratórias. Muitas representações gráficas usadas para desenvolver essas Integrais podem ser feitas à mão no papel, sem perder especificidades e informações importantes; mas, entendemos que o GeoGebra, exibindo as mesmas representações feitas no papel para uma compreensão visual, permitiu exibi-las com maior facilidade e com maior clareza de detalhes. O recurso computacional utilizado possibilitou sair de uma representação estática (papel e lápis) para um tipo de representação dinâmica o que, em nosso caso, permitiu explorar as representações de outras maneiras, apresentando bons resultados em termos de aprendizagem.

Outro aspecto da teoria de Duval, referente à construção de registros de representações que evidenciamos, está relacionado à capacidade do GeoGebra de proporcionar uma desconstrução dimensional, muitas vezes necessária para o entendimento de Integrais Múltiplas. Essa desconstrução dimensional leva a uma mobilização de informações contidas nas regiões de integração, importantes para a construção das integrais. Verificamos que as ferramentas do GeoGebra possibilitaram plotar registros, tanto nas janelas 2D como 3D e, o mais interessante, poder transitar entre essas janelas. Acreditamos que tal fato proporciona explorar aspectos cognitivos importantes para o processo de aprendizagem.

Entretanto, deixamos claro que produzir as representações com o auxílio de um *software* foi uma tentativa de mudança de prática de ensino, com o intuito de contribuir com a aprendizagem, mas o “bom e velho papel e lápis” ainda é uma possibilidade didática relevante.

- A questão da potencialização da operação de tratamento

As operações de tratamento caracterizaram uma categoria de análise muito relevante para a pesquisa, pois emergiram nitidamente por meio dos dados analisados. Por isso, apesar do tratamento integrar a Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Duval, acreditamos ser importante dar um destaque especial a análise feita sob a ótica desse conceito.

Em nossas Atividades Exploratórias, destacaram-se o intenso uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto no âmbito gráfico. Observamos que as atividades, em forma de sequência didática, e também o próprio conteúdo de Integrais Múltiplas favoreceram a mobilização de representações dentro de um mesmo tipo de registro, além do *software* que utilizamos, que permitiu o trabalho com esse tipo de operação. Evidenciamos a capacidade do GeoGebra em produzir inúmeros registros gráficos e uma potência de tratamentos ilimitada. Quanto ao uso de *softwares* e às operações de tratamento, compartilhamos os apontamentos de Duval (2011) ao argumentar que esses possuem a capacidade de acelerar estas operações. Acreditamos que a possibilidade de dinamizar as atividades de tratamento, principalmente para os registros gráficos, acarretou ganhos importantes na aprendizagem e também, possivelmente, para a prática de ensino.

Entendemos que tal operação é uma das etapas essenciais na construção das Integrais Múltiplas e que, quando entendidas pelos estudantes, possibilita mobilizar cognitivamente informações / conhecimento primordiais para a aprendizagem. Dessa forma, seria interessante que os professores pensem em práticas de ensino que valorizem essa atividade, destacando as potencialidades dos *softwares* frente às operações de tratamento.

- A necessidade da operação de conversão para o ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas

Essa categoria de análise relacionou-se com os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, mais especificamente na perspectiva da necessidade de mudanças de registros de representações. Essas mudanças de registros são imprescindíveis na tarefa de montagem das Integrais Múltiplas, desde os limites de integração até os integrandos. Notamos que existe uma grande dificuldade dos estudantes em transitar por alguns registros (gráfico para algébrico ou algébrico para gráfico) na construção de Integrais Múltiplas.

Observamos que a atividade cognitiva de conversão, ligada às representações semióticas, pode ser mais explorada devido ao formato das atividades que aplicamos. As sequências didáticas, com seu passo a passo, propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão, atentando para os detalhes e informações contidas em cada registro usado. Isso possibilitou percorrer um caminho entre os registros (conversão) de modo que os estudantes tivessem a possibilidade de compreender os aspectos cognitivos gerados em cada tipo de representação.

Acreditamos que, nos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, a atividade de conversão muitas vezes não ocorre como algo habitual e, assim, muitos estudantes se encontram limitados a representar apenas uma forma de registro e, quando o fazem, muitos não se atentam para a mobilização de conhecimento que uma troca de registro pode gerar. Dessa maneira, defendemos que a operação de conversão se torna mais relevante para a aprendizagem quando criamos possibilidades de explorar as particularidades existentes em cada registro.

Por fim, ressaltamos diversas possibilidades de pesquisas futuras, relacionando outros conteúdos do Cálculo de Várias Variáveis à luz da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, como a investigação de limites, continuidade e derivação de funções reais de várias variáveis, além de Integrais de Linha e de Superfície, conceitos nos quais a utilização de tecnologias pode contribuir para reflexões importantes da parte de professores-pesquisadores do Ensino Superior, comprometidos com um ensino voltado para a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ADLER P. A.; ADLER P. Obervational Techniques. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 1994. cap.23, p.377-392.

ALVES, D. O. **Ensino de funções, limites e continuidades em ambientes educacionais informatizados**: **Uma proposta para os cursos de introdução ao Cálculo.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ALVES, F. R. V**. Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis**. .Tese. (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNADJER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998, 203 p.

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics,** n. 52, p. 215-241, 2003. Disponível em: < http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.126.6579&rep=rep1&type=pdf >. Acesso em: 22 de fevereiro de 2017.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.** Tese (Doutorado em Educação) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BEZERRA, C. A. **Proposta de Abordagem para Técnicas de Integração usando o Software GeoGebra.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. In: **Pro-Posições**. Campinas, v. 04, nº 1, p. 18-23, março de 1993.

BITENCOURT, K. R. S.; SANTOS, S.K.S.L. A evolução da tecnologia no ambiente escolar e papel do professor tutor na atualidade. In: **XIX Congresso Internacional ABED de Educação a Distância**. Salvador, 2013. Disponível em: < www.abed.org.br/congresso2013/cd/284.doc >. Acesso em 19 de janeiro de 2017.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: Anais da 27º Reunião da ANPED. Caxambu, 2004. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf >. Acesso em 17 de junho de 2017.

BORBA, M. C. Softwares e Internet na sala de aula de informática. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010. Disponível em:< http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra6.pdf >. Acesso em 20 de janeiro de 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, 1974.

CALIL, A. M. **Caracterização da utilização das TIC pelos professores de Matemática e diretrizes para ampliação do seu uso**. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2011.

CATAPANI, E. C. **Cálculo em serviço: um estudo exploratório**. São Paulo: Bolema/Unesp, 2001, ano 14, nº 16. p.48 – 62.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T**. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências.** Zetetiké, Campinas-SP, 16(29), p. 41-72, 2008.

CARGNIN C. **Ensino e aprendizagem de integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas.** Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

COSTA, J. W.; OLIVEIRA, M. A. M**. Novas linguagens e nova tecnologias: educação e Sociabilidade**. 1º ed. Petrópolis: Vozes, 2004.

CUNHA, L. G. A. **Estudo do comportamento de funções por meio da análise de suas derivadas, utilizando objeto de aprendizagem em ambientes educacionais informatizados**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

DALMOLIN, A. R.; MARONEZ, I. T. Audiolivro e história das tecnologias de gravação e reprodução sonora: um produto em construção. In: **Anais do X Encontro Nacional de História da Mídia**, Porto Alegre, 2015. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/alcar/encontros-nacionais-1/encontros-nacionais/10o-encontro-2015/gt-historia-da-midia-sonora-1/audiolivro-e-historia-das-tecnologias-de-gravacao-e-reproducao-sonora-um-produto-em-construcao/view >. Acesso em 20 de janeiro de 2017.

DAMM, R.F. Registros de Representação. In: MACHADO, S.D.A.(org). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, 2010, p.167-188.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: entering the field of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 1994. cap.1, p.1-17.

DESLAURIERS J. P. Recherche Qualitative. Montreal: McGraw Hill, 1991.

DIONIZIO, F. A. Q.; BANDT C. F. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática. In: **IX ANPED Sul. Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul**, Caxias do Sul, 2012. Disponível em: < http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2012/Ensino_de_Matematica_e_ciencias/Trabalho/12_54_15_2866-6636-1-PB.pdf >. Acesso em 20 de fevereiro de 2017.

DUVAL, R. Registres de representation sémiotique e fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Gognitives**. Strasbourg, IREM-ULP, França, v. 5, 1993, p. 37-64.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: **Revista eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n.2, p.266 – 297, 2012. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2012v7n2p266/23465 >. Acesso em 27 de fevereiro de 2017.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (L. F. Levy e M. R. A. Silveira, Trad.). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 7. ed. São Paulo: Papirus, 2010. p. 11-33.

ESCHER, M. A. **Dimensões teórico-Metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas históricas e de ensino e aprendizagem**. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA F. A. SANTOS C. A. B. CURI E. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. In: **Em Teia -**

Revista de Educação Matemática e tecnologia Iberoamericana, Recife, v.4, n.2, p.1 -14, 2013.

FILHO, A. B. Audioaula: o som como suporte pedagógico em sala de aula. In: **Revista Comunicação e Educação, revista do departamento de comunicação e artes da ECA/SP**, São Paulo: v.10, nº. 2, p. 175-172, 2005. Disponível em: < http://www.revistas.usp.br/comueduc/article/view/37524/40238 >. Acesso em 18 de janeiro de 2017.

FILHO, C. F. **História da Computação: O caminho do pensamento e da tecnologia**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

FILHO, N. R. **Utilizando tecnologias informacionais e comunicacionais na educação matemática financeira; um estudo com alunos de graduação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

FIORENTINI, D. Learning and Professional Development of the Mathematics Teacher: In: **Research Communities. Sisyphu, Journal of Education**, v. 1, n. 3, p. 152-181, 2013.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar: ensaios sobre a representação em perspectiva**.2003. 188 f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FLORES, C. R.; WAGNER, D.R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização em Educação Matemática: Conceitos, tendências e perspectivas. In: **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.1, p.31-45, 2012. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/8008/6827 >. Acesso em 30 de janeiro de 2017.

FLORES, C.R. Registros de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **BOLEMA**, v.19, n.26, 2006, Unesp De Rio Claro. Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853/161 Acesso em 20 maio. 2017.

FONSECA, D. S. S. M. **Convergência de sequências de séries numéricas no Cálculo. Um trabalho visando a corporificação dos conceitos**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, 2012.

FROTA, Maria Clara R. Investigações na sala de aula de cálculo. In: **29ª Reunião Nacional da AMPEd**, 2006, Caxambu. Educação, Cultura e Conhecimento a Contemporaneidade: Desafios e compromissos. Caxambu, 2006, V. 1. p. 1-14.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. Descrições e conflitos teóricos computacionais: o caso da retidão local, In: **II Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática**, 2003, p. 1-10.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o Geogebra**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

GOMES, Romeu. Análise e interpretação de dados de pesquisa qualitativa. In: MINAYO, Maria C. S. (org.). **Pesquisa Social** – teoria, método e criatividade. Petrópolis: Editora Vozes, 2009. p. 79-108.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do teorema fundamental do cálculo voltado ao seu ensino**. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. In: Vidya Revista eletrônica, Santa Maria, v.35, n.2, p.237-253, 2015. Disponível em https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA. Acesso em 21 de maio de 2017.

GUIMARÃES, A. M.; OLIVEIRA C. C.; MENEZES E. I. M.; MOREIRA M. Produção e avalição de software educativo. In. **Educação e Revista**, nº 6, p.41-44. Belo Horizonte.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple.** Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Universite Joseph Fourier - UJF-Grenoble, Lab. Leibniz, 2006.

HENRIQUES, A.; ATTIE J. P.; FARIAS L. M. S. Referencias teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do *software* Maple. In: **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. V.09, nº 1, p. 51 - 81, 2007. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/585/436. Acesso em 25 de julho de 2016.

HENRIQUES A. Cálculo de integrais múltiplas com auxílio de técnicas instrumentais: o caso do crivo geométrico. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/MC/T9_MC2054.pdf. Acesso em 21 de janeiro de 2017.

HERINQUES A. Um estudo de superfícies e de integrais múltiplas em ambiente computacional. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/04/PO84824255449.pdf. Acesso em fevereiro de 2017.

HOHENWARTER, M. **Geogebra Quickstart: Guía Rápida de Referência sobre Geogebra**. Portugal, 2007. http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_geogebra.pdf. Acesso em 26 maio 2016.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C.R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recife: SBEM, 2009, p. 11-26.

IMAFUKU, R. S. **Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis.** Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação**. 4. ed. Campinas: Papírus, 2008.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo**.** In: LAUDARES J. B.; LACHINI, J. (orgs.) **Educação Matemática: A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001, p. 146-189.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic inquiry**. Newbury Park: Sage, 1985. 416 p.

LOPES, V. R. **Aprendizagem em um ambiente construcionista: Explorando conhecimentos de cálculo I em espaços virtuais**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LUZ, V. M. **Introdução ao Cálculo: uma proposta associando pesquisa e intervenção**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MARIN, D. Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo. In: **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.3, p.527-546, 2011. Disponível em: http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/tic_professores/5998.pdf. Acesso em 26 junho. 2016.

MARTINS JUNIOR. J. C. **Ensino de Derivadas Em Cálculo I: Aprendizagem a partir da Visualização com o Uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

MESQUUITA, M.G.B.F; PAIXÃO, H. S.; GOMES, P. N. N. Crenças e concepções de professores de matemática interferindo nos processos de aprendizagem. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**. Salvador, 2010. Disponível em: < http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T13_CC1675.pdf >. Acesso em 20 de janeiro de 2017.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. N. **Qualitative data analysis: na explanded sourcebook**. 2 ed. Thousand Oaks: Sage, 1994, 338 p.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do Cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MIRANDA, S. R. O artigo “Sobre o sentido e a referência” de Frege. Fundamento: **Revista de pesquisa em Filosofia**, v.1, n.3, maio-ago. 2011. Disponível em: <

http://www.revistafundamento.ufop.br/Volume1/n3/vol1n3-2.pdf >. Acesso em: 25 de fevereiro 2017.

MORETTI, M. T. LUIZ L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no Ensino Médio. In: BRANDT, C. F.; MORETTI M.T. (orgs). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: ed. Unijuí, 2014, p.68-87.

MOURA, D. A. S. **Perspectiva no estudo de limite: numa perspectiva figural e conceitual - foco em objetos de aprendizagem**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

NASSARELA, A. M. **Elaboração e descrição de situações didáticas com amparo na Sequência Fedathi: o caso da integral imprópria**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9º, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Recife: SBEM, 2007, p. 1-10.

NEMIROVSKY, R. e NOBLE, T. **On mathematical visualization and the place where we live. Educational Studies in Mathematics**, v.33, pp.99-131, 1997.

NOTH, W. **A Semiótica no Século XX.** 3. Ed. São Paulo: Annablume, 2005.

NÖTH, W. **Panorama da semiótica:** de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OLIVEIRA, C. C.; COSTA, J. W.; MOREIRA, M. Ambientes informatizados de aprendizagem. In. COSTA, J. W.; OLIVEIRA, M. A. M. (Org.) **Novas linguagens e nova tecnologias: educação e Sociabilidade.** 1º ed. Petrópolis: Vozes, 2004. P. 111-138.

OLIVEIRA, J. L. **Utilização de softwares no ensino de análise real: um estudo sobre a construção do conceito de integral de Riemann**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

OLIVEIRA, L.O. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres humanos com mídias**. Dissertação. (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

PAIVA, V. L. M. O. História do material didático. In DIAs, R.; CRISTOVÂO, V.L.L. O **Livro didático de língua estrangeiro: múltiplas perspectivas**. Cmapinas: Mercado de Letras, 2009, p. 17-56.

PINTO, Rieuse Lopes. **Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo**. 2014. Dissertação (Mestrado em Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, 2014.

PONTES, H. M. S.; DIONIZIO, F. A. Q. Concepções de Peirce, Frege, Suassure e Duval sobre semiótica: uma trajetória. In: BRANDT, C. F.; MORETTI M.T. (orgs). **As Contribuições da**

Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática. Ijuí: ed. Unijuí, 2014, p.209-225.

PRESMEG, N. Research on Visualization in Learning an Teaching Mathematics. In Gutierrez, A & Boero, P (eds). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, pp. 205-235. The Netherlands, Sense Publishers, 2006.

PRESMEG, N. Visualization in high school mathematics. For the Learning of Mathematics, 6(3), 42-46, 1986.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REIS, T. L. B. **Integral Definida: conteúdos e estratégias de aprendizagem**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifica Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

REZENDE, W.M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2003.

RICALDONI, M.A.G. **Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014.

ROCHA, M. D**. Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002. Disponível em: < https://pt.scribd.com/doc/7153850/O-Que-e-Semiotica-Lucia-Santaella >. Acesso em: 25 de fevereiro de 2017.

SANTOS, C. A. B.; CURI, E. Registros de Representações Semiótica e suas contribuições para o Ensino de Física. In. Revista Ensaio. Belo Horizonte, v.14, n.03, set-dez, 2012, p, 85-95.

SERFATI, M. **La constitution de l'écriture symbolique mathematique** 432 p. Thèse (Doctorat en Philosophie) - l'Université Paris I, 1997.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: the knowledge growths in teaching. Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, February, 1986. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1175860>. Acesso em: 03 de junho de 2017.

SILVA, L. C. **A televisão e sua utilização na educação**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SILVA, P. S. A utilização dos recursos tecnológicos no ensino superior. **Revista Olhar Científico**. V.01, nº 2, p. 267 -285, agosto/dezembro 2010. Disponível em <

http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/tics/14-151-1-PB.pdf> . Acesso em 30 de julho de 2016.

STEWART, J. **Cálculo – Vol. 2**, 6ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning, 2004.

TALL, D. Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematic**s (p. 121-126). Washington: MAA, 1991.

THOMPSON, J. B. (1995). Ideologia e cultura moderna: teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa (2a ed., Grupo de Estudos sobre Ideologia, Comunicação e Representações Sociais da Pós-Graduação do Instituto de Psicologia da PURCS, Trad.). Rio de Janeiro: Vozes. (Obra original publicada em 1990)

VALENTE, J. A. (org). O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1999.

VOGADO, G. E. R. **O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral por meio da resolução de problemas.** 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

WILGES, A. M. **Uma investigação acerca das práticas docentes no ensino superior de Matemática envolvendo o uso de softwares educacionais**. Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZABALA, A. **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

ZUCHI, I. A integração de ambientes tecnológicos no ensino: uma perspectiva instrumental e colaborativa. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recide: SBEM, p. 239-252, 2009.

APÊNDICE 1: Atividade Exploratória 1

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Educação Matemática

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Projeto: Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem

Pesquisador: Prof. Márcio Antônio Cometti
Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

ATIVIDADE 1: Construindo & Explorando as "Quádricas" no GeoGebra 3D

1.1. Construindo Paraboloides

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o Paraboloide, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

Sequência Didática:

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o Paraboloide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$ no GeoGebra. Digite no campo de entrada:

x^2/4+y^2/9=z

3) Vamos criar planos paralelos aos planos coordenados. Clique na janela 3D e no campo de entrada crie o plano $x = K,\ y = L,\ z = M.$ Automaticamente, na janela 2D controles deslizantes serão criados. Clique em OK.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram suas interseções com o Paraboloide.

5) Use a ferramenta **Interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário, clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor na opção propriedades. Isso o deixará mais visível). Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente:

a) Interseções do Paraboloide com o plano $x = K$:________________________________

b) Interseções do Paraboloide com o plano $y = L$: ________________________________

c) Interseções do Paraboloide com o plano $z = M$: ________________________________

1.2. Construindo Elipsoides

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o Elipsoide, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o Elipsoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2/16+y^2/4+z^2/25=1

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique na janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D controle deslizantes são criados. Clique em OK.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com o Elipsoide.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente.

a) Interseção do Elipsoide com o plano $x = D$:_________________________________

b) Interseção do Elipsoide com o plano $y = E$:_________________________________

c) Interseção do Elipsoide com o plano $z = F$: _________________________________

1.3 Construindo Hiperboloides

Ojetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o hiperboloides, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o Hiperboloide $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2/4+y^2-z^2=1

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique a janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D, y = E, z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D **controles deslizantes** são criados. Clique em OK.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com o hiperboloide criado.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente.

a) Interseção do Elipsoide com o plano $x = D$:________________________________

b) Interseção do Elipsoide com o plano $y = E$:________________________________

c) Interseção do Elipsoide com o plano $z = F$: ________________________________

1.4. Construindo Cones

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e o Cone, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o cone $x^2 + y^2 = z^2$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2+y^2=z^2

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique a janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D controle deslizantes são criados.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com o cone.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente, o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude

sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente;

a) Interseção do cone com o plano $x = D$:_______________________________________

b) Interseção do cone com o plano $x = 0$:_______________________________________

c) Interseção do cone com o plano $y = E$:_______________________________________

d) Interseção do cone com o plano $x = o$:_______________________________________

e) Interseção do cone com o plano $z = F$:_______________________________________

1.5 Construindo Esferas

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre as interseções entre os planos perpendiculares e a esfera, a partir das representações gráficas e algébricas no *software* GeoGebra 3D.

1) Clique sobre o ícone exibir e selecione **Janela de Visualização 3D**.

2) Vamos plotar o cone $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no Geogebra 3D. Digite no campo de entrada:

x^2+y^2+z^2=4

3) Vamos criar planos paralelos aos planos ordenados. Clique a janela 3D e em campo de entrada crie os planos $x = D$, $y = E$, $z = F$. Veja que automaticamente na janela 2D controle deslizantes são criados.

4) Observe que ao movermos os controles deslizantes, os planos mostram as interseções dos mesmos com a esfera.

5) Use a ferramenta **interseção entre duas superfície** e responda: Geometricamente o que é cada interseção? (se necessário clique com o botão direito sobre o objeto de interseção e mude sua espessura e cor, na opção propriedade. Isso o deixará mais visível. Responda as perguntas abaixo, justificando algebricamente.

a) Interseção da esfera com o plano $x = D$:___________________________________

b) Interseção da esfera com o plano $y = E$: __________________________________

c) Interseção da esfera com o plano $z = F$: ___________________________________

APÊNDICE 2: Atividade Exploratória 2

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Educação Matemática

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Projeto: Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem

Pesquisador: Prof. Márcio Antônio Cometti
Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

ATIVIDADE 2: Explorando e Construindo Integrais Duplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra.

1.1 Construindo Integrais duplas sobre regiões no plano (R^2) :

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais duplas sobre regiões no plano, tanto para regiões de integração do tipo I ($dydx$) quanto do tipo II ($dxdy$).

Sequência Didática:

1) Vamos plotar a região R limitada pela curva $x = y^2$ e pela reta $x = 4$ no GeoGebra e faça um esboço abaixo.

2) Vamos agora, encontrar os pontos de interseção entre a parábola e a reta. Vá até o ícone **Ponto** (segundo ícone na barra de ferramentas) e procure a ferramenta **Interseção de dois Objetos**. Clique sobre a parábola e sobre a reta, automaticamente os pontos de

interseção entre eles serão criados. Na janela de visualização, os mesmos estão representados algebricamente. Quais são esses pontos? Justifique algebricamente sua resposta.

3) A região R limitada pela parábola e pela reta, pode ter sua área calculada por uma integral dupla. Para isso responda as perguntas abaixo:

3.1. Observando a região R, qual curva limita essa região superiormente?

3.2. E qual curva limita a região R inferiormente?

3.3. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

3.4. Essa região admite uma integral dupla do tipo I ($dydx$)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região.

4) Agora vamos analisar se a região R admite uma integral dupla do tipo II ($dxdy$). Para isso vamos manipular as funções que limitam essa região. Na área de entrada digite o comando **Girar.** Irá aparecer algumas opções**,** escolha **Girar [<objeto>, <ângulo>]**. Digite no campo objeto $x = y^2$ e no campo ângulo $pi/2$. Observe que a parábola irá girar 90 graus no sentido anti-horário. Faça o mesmo para a reta $y = 4.$ Faça um esboço dessa região.

5) Observando essa região R, responda:

5.1. Quais os pontos de interseção entre a reta e a parábola. Repita o procedimento do **Item 2** dessa atividade para encontra-los. Justifique algebricamente a sua resposta

5.2. Qual curva limita essa região R superiormente? Justifique algebricamente.

___

___

5.3. E qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

___

___

5.4. Em relação ao eixo y, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina?

___

___

5.5. Essa região admite uma integral dupla do tipo II ($dxdy$)? Construa a integral dupla que calcula a área dessa região. Determine o valor da área da região R.

1.2 Construindo Integrais para cálculo de volumes:

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais duplas para cálculo de volumes de sólidos em R^3.

Sequência Didática:

1) Abra a janela 3D (clique em **Exibir** e **Janela de Visualização 3D**)
2) Considere um sólido S formado por uma superfície cilíndrica, por planos perpendiculares ao plano xy e o próprio plano xy. Cujas equações são: $z = -x^2 + 3$, $y = 2$ e $y = -2$.
3) Através do Geogebra você plotou todas as superfícies do sólido S. Abaixo, faça um esboço desse sólido S.

4) Determine as interseções das superfícies com o plano xy. Para isso vá até a ferramenta **Interseção de Duas Superfícies** e clique sobre as superfícies que você deseja encontrar

a interseção. Na janela 2D (plano xy) as interseções serão determinadas. Faça isso para todas as interseções possíveis. (Superfície cilíndrica e plano xy, plano $y = 2$ e plano xy e plano $y = -2$ e o plano xy.). Faça um esboço para essa região R.

5) Agora observando o sólido S e a região R. Construa uma integral para o cálculo do volume do sólido. Resolva essa integral.

1.3. Construindo regiões de integração através de Integrais duplas:

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de regiões de integração através de integrais duplas.

Sequência Didática:

Dada a integral dupla abaixo:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-x^2 - y^2 + 4) \quad dydx$$

Sabemos que um sólido S originou a integral acima. Dessa forma, vamos esboçar o sólido S, com o auxílio do GeoGebra.

1) Qual função da integral dada, limita o sólido S superiormente? ____

   O que essa superfície representa? ____

   Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta.

2) Com relação a região de integração no plano xy, o que representa essa região? ____

Justifique sua reposta algebricamente.

Agora, use a ferramenta **Interseção entre Duas Superfícies,** para verificar sua resposta.

3) Faça um esboço do sólido S e diga o que a integral dupla acima pode representar.

APÊNDICE 3: Atividade Exploratória 3

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Educação Matemática

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Projeto: Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem

Pesquisador: Prof. Márcio Antônio Cometti
Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

ATIVIDADE 3: Explorando e Construindo Integrais Triplas através de regiões de integração construídas no GeoGebra.

1.1. Construindo Integrais Triplas sobre regiões no plano (R^3) :

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais triplas sobre superfícies em R^3.

Sequência Didática:

1) Vamos plotar na janela 3D as seguintes superfícies:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$z + x^2 + y^2 = 4$$

$$z = 6$$

Essas superfícies formam em R^3 um sólido que iremos denominá-lo de S. Se a escala dos eixos coordenados não estiver compatível com o sólido S, clique com o botão direito na janela 3D e clique em **exibir todos os objetos**.

2) Vamos agora, montar uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S. Para isso, responda as seguintes perguntas:

2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.

____

____

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido "por baixo"? Justifique algebricamente.

____

____

Use a ferramenta **interseção de duas superfícies** entre o plano xy e o cilindro ou entre o plano xy e o paraboloide, para encontrarmos a região R de integração no plano xy. Observando a região R na janela 2D, responda:

2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Clique na janela de visualização 2D e use a ferramenta **interseção de dois objetos**. Clique sobre o eixo x e o curva. Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.6. Agora, com todas essas informações obtidas, monte uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S.

1.2. Construindo Integrais Triplas sobre regiões no plano (R^3):

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de integrais triplas sobre superfícies em R^3.

Sequência Didática:

1) Vamos plotar na janela 3D as seguintes superfícies:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 + x^2 + y^2 = 8$$

Essas superfícies formam em R^3 um sólido que iremos denominá-lo de S. Se a escala dos eixos coordenados não estiver compatível com o sólido S, clique com o botão direito na janela 3D e clique em exibir todos os objetos.

2) Vamos agora, montar uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S. Para isso responda as perguntas abaixo:

2.1. Observando o sólido S, qual é a superfície que o limita superiormente, ou seja, limita o sólido "por cima"? Justifique algebricamente.

____

____

2.2. Qual superfície limita o sólido inferiormente, ou seja, limita o sólido “por baixo”? Justifique algebricamente.

____

____

Use a ferramenta **interseção de duas superfícies** entre o cone e a esfera, para encontrarmos a região de integração no plano xy.

2.3. Qual curva limita a região R superiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.4. Qual curva limita a região R inferiormente? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.5. Em relação ao eixo x, em qual ponto a região R se inicia e em qual ponto a região termina? Justifique algebricamente.

____

____

____

____

2.6. Agora, com todas essas informações obtidas, monte uma integral tripla para o cálculo do volume do sólido S.

<u>1.3. Construindo regiões de integração através de Integrais triplas:</u>

Objetivo: Explorar / argumentar / inferir sobre a construção de regiões de integração através de integrais triplas.

Sequência Didática:

Dada a integral tripla abaixo:

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{x-4} \quad dzdydx$$

1) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S superiormente?

____

____

O que essa superfície representa?

____

____

Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta.

2) Qual função da integral tripla acima, limita o sólido S inferiormente?

____

____

O que essa superfície representa?

____

____

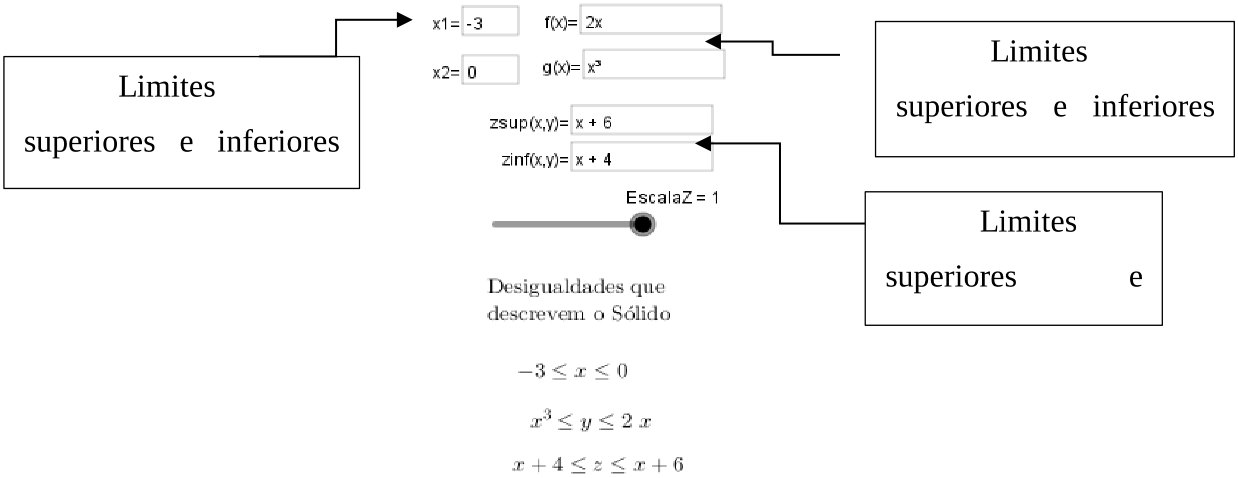
Plote a superfície no GeoGebra e verifique sua resposta.

3) Com relação a região R no plano xy, quais são as funções que limitam essa região superiormente e inferiormente em relação a y? e onde a região começa e termina em relação ao eixo x? Faça um esboço dessa região.

   Agora, plote as superfícies no GeoGebra. Se necessário use a ferramenta **Interseção entre Duas Superfícies,** para verificar sua resposta.

4) Com a ajuda do GeoGebra e das suas respostas até aqui, faça um esboço do sólido S que originou a integral tripla acima.

5) Vamos usar o arquivo **Integraltripla.ggb** que está na área de trabalho do seu computador para verificar se suas respostas e se seu sólido está correto. Nesse arquivo, você irá entrar com as funções que limitam a integral tripla dada e automaticamente o sólido S, será plotado na janela 3D. Veja as informações abaixo:



5.1. O sólido que você desenhou no item 4 é o mesmo que foi plotado no item 5? Em caso de algo diferente, o que de diferente existe entre os sólidos?

APÊNDICE 4: Questionário Final

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Educação Matemática

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Projeto: Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem

Pesquisador: Prof. Márcio Antônio Cometti
Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

QUESTINÁRIO FINAL: Construção de Superfícies Quádricas, Integrais Duplas e Integrais Triplas com o auxílio do GeoGebra 3D.

Objetivo: Identificar as principais contribuições e entraves gerados pelo uso do GeoGebra 3D em uma sequência didática, para a construção de Superfícies Quádricas, Integrais Duplas e Integrais Triplas.

1) Essa estratégia de trabalho, na qual apresentamos as sequências didáticas de forma guiada, contribuiu para que você pudesse visualizar, representar e conjecturar sobre os conteúdos estudados? Comente!

   ____

   ____

   ____

   ____

2) Dentre os tópicos de Integrais Múltiplas explorados nas atividades, em quais e em que aspectos a utilização do *software* GeoGebra 3D contribuiu para sua aprendizagem de forma significativa? Detalhe!

____

____

____

____

____

____

3) E quais aspectos a utilização do GeoGebra 3D, em algum momento da realização das atividades se mostraram um entrave para sua aprendizagem nos conteúdos de Integrais Múltiplas? Detalhe!

____

____

____

____

4) A partir do desenvolvimento deste projeto, qual é a sua impressão final sobre a utilização de softwares no ensino de Cálculo de Várias Variáveis?

____

____

____

____

5) Você faria alguma sugestão de mudança nas sequências didáticas ou na sua forma de realização? Fique à vontade!

____

____

____

____

Muito obrigado pela participação no projeto!