Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática

Geraldo Cesar de Figueiredo

Equações de Diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais

Ouro Preto

2017

GERALDO CESAR DE FIGUEIREDO

Equações de Diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.
Coorientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.

Ouro Preto
2017

F469e Figueiredo, Geraldo Cesar de.
Equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais [manuscrito] / Geraldo Cesar de Figueiredo. - 2017.
78f.: il.: color; grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Eder Marinho Martins.
Coorientador: Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Equações de diferença. 2. Solução de problemas. 3. Plantas anuais. I. Martins, Eder Marinho. II. Ferreira, Wenderson Marques. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Titulo.

CDU: 517.929

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

"Equações de Diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais"

Autor: Geraldo Cesar de Figueiredo

Dissertação defendida em 15 de dezembro de 2017 e aprovada por banca examinadora constituída pelos professores:

Eder Marinho Martins (Orientador)
Universidade Federal de Ouro Preto

Wenderson Marques Ferreira (Coorientador)
Universidade Federal do Ouro Preto

Geraldo César Gonçalves Ferreira
Universidade Federal do Ouro Preto

Monique Rafaella A. de Oliveira
Universidade Federal do Ouro Preto

Jorge Andrés Julca Avila
Universidade Federal de São João del-Rei

Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT
Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – ICEB III – Sala 1-10 – 35400-000– Ouro Preto – MG – Brasil
Homepage: http://www. profmat.ufop.br – E-mail: profmat.na.ufop@gmail.com – Fone: (31) 3559-1629

À Deus e à meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, pelo dom da vida.

Ao meu pai José Emídio e ao meu irmão Manoel Antônio (in memorian), à minha mãe Maris Stela, minhas irmãs Maria Verônica, Maria das Graças e Rosália e à minha sobrinha Bárbara.

Aos "mestres" que proporcionaram minha formação no curso de graduação e no curso de pós-graduação e, em especial, aos professores Eder Marinho Martins e Wenderson Marques Ferreira, pelos ensinamentos e pelo grande comprometimento na orientação do presente trabalho.

Ao amigo Márcio, companheiro desde a graduação, pelos momentos de estudos e por sempre se disponibilizar em esclarecer minhas dúvidas, principalmente, relacionadas à digitação deste trabalho.

Agradeço à toda minha família, aos meus amigos e todas as pessoas que estiveram presentes durante esta etapa da minha vida.

Resumo

Abordamos, neste trabalho, o estudo das equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. São estudados o caso homogêneo e alguns casos de equações não homogêneas. Objetivando uma melhor compreensão do que são tais equações é apresentada uma situação problema que envolve Geometria Euclidiana Plana. Acreditamos que tal abordagem possa ser trabalhada com alunos de Ensino Médio. No desenvolvimento do trabalho são apresentados resultados que possibilitam escrever a solução geral das equações estudas. Uma aplicação à Biologia também é apresentada: crescimento populacional de plantas anuais. Simulações dessa aplicação são apresentadas utilizando-se o software Excel.

Palavras-chave: Equações de Diferenças Lineares, Solução Geral, Unicidade de Solução, Plantas Anuais.

Abstract

In this work, this researcher studied the equations of second order linear differences with constant coefficients. This study looked at both the homogeneous case and nonhomogeneous equations. Aiming for a better understanding of what these equations, a problem situation is presented that involves Flat Euclidean Geometry. This research showed that such an approach can be worked on with high school students. In the development of the work presented here, the results show that it is possible to write the general solution of the studied equations. An application to biology is also presented: where the example of population growth of annual plants was used. Simulations of this application are presented using Excel software

Keywords: Linear Difference Equations, General Solution, Uniqueness of Solution, Annual Plants.

Conteúdo

1 Introdução

Neste trabalho faremos o estudo de equações de diferenças, também denominadas equações de recorrência (conceito que é, geralmente, apresentado para os alunos do Ensino Médio ao iniciar-se o estudo das progressões). As equações de diferenças tem sido abordadas em alguns Trabalhos de Conclusão de Curso do PROFMAT (veja, por exemplo, [9], [5], [10], [12]); entretanto não encontramos na base de dados do PROFMAT um trabalho com abordagem similar a que apresentamos aqui.

No Capítulo 2 será apresentada uma conceituação inicial acerca das equações de diferenças, em seguida, uma formalização desse conceito e como são classificadas as equações de diferenças.

Os Capítulos 3 e 4 são dedicados ao estudo das equações de diferenças lineares e homogêneas com coeficientes constantes de primeira e de segunda ordem, sendo que, abordaremos as equações de primeira ordem no Capítulo 3 e o estudo referente às equações de segunda ordem será desenvolvido no Capítulo 4. Em ambos os capítulos apresentaremos a forma das respectivas equações e a determinação da referente solução.

No Capítulo 5 aborda-se um problema biológico relacionado a processos discretos. Tal problema, apresentado no livro [7], refere-se à propagação de uma determinada espécie de plantas. O modelo obtido na resolução do problema é uma equação com a forma das equações a serem estudadas no Capítulo 4 e, ainda com relação ao problema, mostra-se uma condição sobre os parâmetros da equação-modelo para que se possa garantir a sobrevivência da espécie e duas simulações utilizando-se o software Excel.

No Capítulo 6 mostra-se casos bem específicos de não homogeneidade das equações de diferenças lineares e não homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. Ou seja, faz-se uma pequena introdução ao estudo das equações de diferenças lineares e não homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

No apêndice apresenta-se a definição de conjunto discreto, a resolução de uma equação de diferenças linear e não homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes e a forma trigonométrica dos números complexos.

2 Equações de diferenças

Neste capítulo, apresenta-se na Seção 2.1 um conceito inicial de uma estrutura Matemática através de um problema simples que torna possível sua proposição para uma classe de alunos do Ensino Médio instigando-os à determinação da solução do problema, o que evidencia o conceito: equações de diferenças. Na Seção 2.2 faz-se a apresentação do conceito formal dessas estruturas Matemáticas e na Seção 2.3 mostra-se algumas classificações que tais estruturas recebem de acordo com a forma que possuem.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram [1], [4] e [6].

2.1 Conceito inicial de equações de diferenças

As **Equações de diferenças** ou **Equações de recorrência** são equações com variações discretas (ver definição de Conjunto Discreto no Capítulo 8, Definição 8.1.1). Para uma melhor compreensão desse conceito, vamos analisar a seguinte situação: considere uma superfície retangular de dimensões $2 \times n$ (n inteiro positivo maior ou igual a 1) em que 2 é a altura e n a base (veja Figura 2.1).

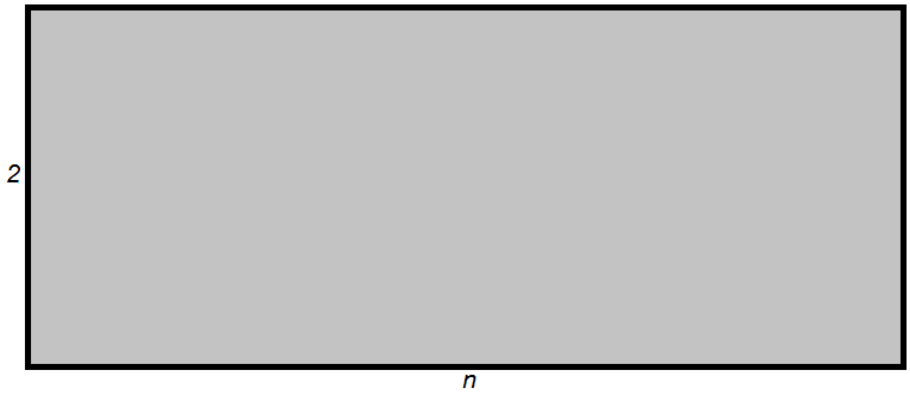

Figura 2.1: Superfície retangular de dimensões $2 \times n$.

Problema 1. *De quantas maneiras podemos colocar, de forma justaposta (ou seja, sem que haja sobreposição), n "lâminas" retangulares indistinguíveis de dimensões 2×1 para obtermos uma cobertura exata da superfície retangular de dimensões $2 \times n$, da Figura 2.1?*

Resolução. No caso $n = 1$, a fronteira da superfície obtida é o retângulo de dimensões 2×1. É fácil notar a existência de apenas uma maneira para colocar essa única lâmina de modo a obtermos a cobertura solicitada. No entanto, para $n \geq 2$, o número de maneiras de se colocar as n lâminas para obtermos a cobertura solicitada não é único. Inicialmente notemos que $n \geq 2$ possibilita a colocação da primeira lâmina tanto na direção da fronteira de dimensão n (que iremos expressar como direção horizontal), quanto na direção da fronteira de dimensão 2 (que indicaremos como direção vertical) e, para uma melhor visualização desse fato considere, por exemplo, $n = 5$ e vejamos algumas formas de obtermos a cobertura da superfície cuja fronteira será um retângulo de dimensões 2×5:

$1)$ a primeira lâmina colocada na direção vertical, em seguida duas lâminas justapostas na direção horizontal e finalizando com as duas últimas lâminas também justapostas na direção horizontal (veja Figura 2.2);

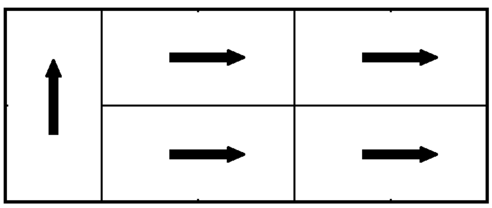

Figura 2.2: Cobertura da superfície retangular 2×5 (possibilidade 1).

$2)$ as duas primeiras lâminas colocadas justapostas na direção horizontal, em seguida uma lâmina na direção vertical e finalizando com as duas últimas lâminas justapostas na direção horizontal (veja Figura 2.3);

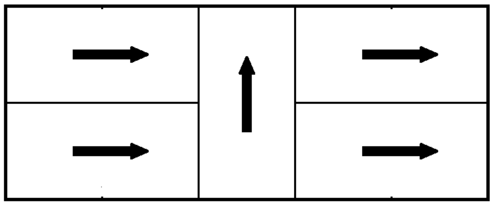

Figura 2.3: Cobertura da superfície retangular 2×5 (possibilidade 2).

$3)$ as duas primeiras lâminas colocadas justapostas na direção horizontal e, em seguida, três lâminas na direção vertical (veja Figura 2.4).

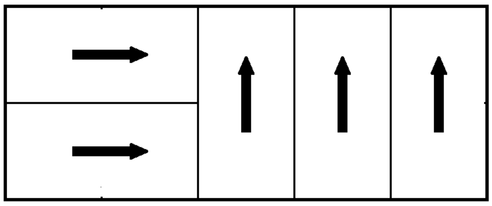

Figura 2.4: Cobertura da superfície retangular 2×5 (possibilidade 3).

Outras maneiras podem ser obtidas, com raciocínios semelhantes.

Antes de buscarmos a solução do problema proposto é interessante observar a existência de duas quantidades que assumem valores variáveis nessa situação, mas apenas valores inteiros positivos:

(i) a dimensão variável da superfície retangular (variável independente), será denotada por n;

(ii) o número de maneiras que podemos colocar as n lâminas retangulares (variável dependente), será denotada por M_n.

Assim, é razoável notar que M_n é função de n. Também, como n pode assumir apenas valores na sequência $(x_n) = (1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots)$, conclui-se que as variações entre quaisquer termos de (x_n) são discretas e, consequentemente, também são discretas as variações entre os termos da imagem dos termos de (x_n).

Com o objetivo de determinar a solução do problema proposto, iniciemos a resolução do mesmo atribuindo a n valores que nos possibilitem uma manipulação direta, de modo que possamos determinar o valor de M_n. Em seguida, tentaremos visualizar se existe alguma relação entre esses resultados obtidos. Objetivando não ignorar nenhuma maneira de cobrir a superfície e nem contabilizar alguma(s) dessas maneiras mais de uma vez, vamos adotar a seguinte notação:

$N1)$ $\uparrow$ para indicar uma lâmina colocada na posição vertical;

$N2)$ $\rightrightarrows$ para indicar duas lâminas colocadas justapostas na posição horizontal.

Com a notação estabelecida, temos:

(i) para $n = 1$, tem-se que $M_1 = 1$ e a única possibilidade é $\uparrow$;

(ii) para $n = 2$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×2. Nesse caso, temos as seguintes possibilidades: $\uparrow\uparrow$ ou $\rightrightarrows$. Logo $M_2 = 2$;

(iii) para $n = 3$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×3 e as maneiras possíveis de cobrirmos a superfície são: $\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\rightrightarrows$ ou $\rightrightarrows\uparrow$. De modo que $M_3 = 3$.

Poderíamos inicialmente imaginar que o número de maneiras possíveis para colocar n lâminas, de modo que a cobertura da superfície $2 \times n$ seja realizada, seria exatamente igual a n. Entretanto veremos que essa suposição não se verifica.

De agora em diante separaremos as maneiras de obter a cobertura da superfície $2 \times n$ em duas linhas para que possamos ter uma melhor visualização do número M_n: na primeira, listaremos todas as possibilidades considerando-se a primeira lâmina colocada na direção vertical e, na segunda, listaremos todas as possibilidades considerando-se a colocação da primeira lâmina na direção horizontal (note que, nesse caso, somos obrigados a colocar uma outra lâmina na direção horizontal de forma justaposta à primeira). Deste modo, temos:

(iv) para $n = 4$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×4 e, desta forma, as maneiras possíveis são:

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow\rightrightarrows, \uparrow\rightrightarrows\uparrow$$

$$\rightrightarrows\uparrow\uparrow, \rightrightarrows\rightrightarrows .$$

Daí $M_4 = 5$;

(v) para $n = 5$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×5 e as possíveis maneiras de obtermos a cobertura da superfície são:

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow\uparrow\rightrightarrows, \uparrow\uparrow\rightrightarrows\uparrow, \uparrow\rightrightarrows\uparrow\uparrow, \uparrow\rightrightarrows\rightrightarrows$$

$$\rightrightarrows\uparrow\uparrow\uparrow, \rightrightarrows\uparrow\rightrightarrows, \rightrightarrows\rightrightarrows\uparrow .$$

Portanto $M_5 = 8$.

Ao analisarmos a Tabela 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
M_n	1	2	3	5	8	?	?	?	?	?	?	...

Tabela 1: Dados resultantes das observações anteriores.

intuímos que o número de maneiras possíveis para colocar n lâminas, de modo que seja obtida a cobertura da superfície retangular de dimensões $2 \times n$, é dado pela soma do número de maneiras possíveis nos dois casos que o precedem. Dito de outra forma: para determinarmos M_n, os casos analisados nos sugerem que devemos recorrer aos valores M_{n-1}, M_{n-2} e adicioná-los. Isto é,

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2},\ n \geq 3;\ M_1 = 1,\ M_2 = 2. \tag{2.1}$$

Notemos que o valor da variável dependente M_n, $n \geq 3$, é determinado através de uma fórmula de recorrência e, deste modo, a Equação (2.1) evidencia o conceito de equações de diferenças. Mostremos agora que realmente a Equação (2.1) é a solução do Problema 1.

Inicialmente observe a necessidade de se ter $n \geq 3$ para que a Equação (2.1) tenha sentido e então considere a superfície retangular de dimensões $2 \times n$, particionada em n regiões retangulares de área igual a 2. Veja a Figura 2.5 em que cada região R_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tem altura 2 e base 1.

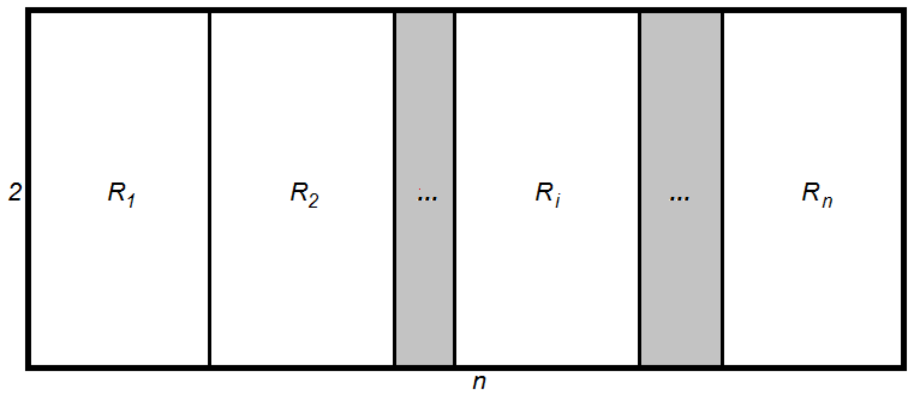

Figura 2.5: Possibilidade de particionamento da superfície retangular $2 \times n$ em n regiões.

Assim, temos que:

(i) se a região R_1 for coberta por uma lâmina colocada na direção vertical, então haverá M_{n-1} maneiras para se colocar as $n-1$ lâminas de modo que seja coberta a superfície restante de dimensões $2 \times (n-1)$;

(ii) se as regiões R_1 e R_2 forem cobertas por duas lâminas justapostas na direção horizontal, então haverá M_{n-2} maneiras para se colocar as $n-2$ lâminas de modo que seja obtida a cobertura da superfície restante de dimensões $2 \times (n-2)$.

Portanto, $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$, em que $n \geq 3$, $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$.

De acordo com o problema proposto, não é coerente pensarmos em $n = 0$, pois estaríamos imaginando um retângulo de dimensões 2×0. Contudo, considerando-se $M_0 = 1$ (de modo a obtermos $M_0 = M_1 = 1$) e M_{k-1}, $k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$, correspondendo ao k-ésimo termo da nova sequência a ser construída e o número M_n, para todo $n \geq 2$, determinado através da recorrência $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$, obtemos uma nova sequência chamada sequência de Fibonacci (veja Observação 2.1.1).

Observação 2.1.1. *Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, nasceu na cidade italiana de Pisa em 1175 e morreu no ano de 1250. Em sua obra mais famosa, intitulada Liber Abaci e publicada em 1202, são apresentados vários problemas. Dentre tais problemas, aquele que despertou grande atenção é o seguinte:*

A partir de um casal de coelhos, quantos casais serão gerados em um ano considerando-se que cada casal gera um novo casal que se torna produtivo a partir do segundo mês?

A determinação da solução do problema é obtida através da sequência conhecida como sequência de Fibonacci, a saber:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots, a_n, \cdots), \text{ em que } a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3;\ a_2 = a_1 = 1.$$

Informações dessa sequência é encontrada em [6].

2.2 Formalização do conceito de equações de diferenças

Sejam $y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$. As equações de diferenças de ordem m são equações da forma

$$y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n),\ n \geq m$$

em que $\{\beta_n\}$ é uma sequência de números reais e f é uma função de y_k e β_n, $k \in \{n-1, n-2, \cdots, n-m\}$.

Observação 2.2.1. *Neste trabalho denota-se uma equação de diferenças de ordem m por*

$$\begin{cases} y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n), \ n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição 2.2.1. *Uma sequência numérica $\{x_n\}$ é solução da Equação (2.2) se*

$$x_0 = y_0, \ x_1 = y_1, \ \cdots, \ x_{m-1} = y_{m-1}$$

e

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-m}, \beta_n), \text{ para todo } n \geq m.$$

A seguir destacam-se alguns exemplos de equações de diferenças:

$$(1) \begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1}, \ n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado,} \end{cases}$$

em que $f(y_{n-1}, \beta_n) = \alpha y_{n-1}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = 0$;

$$(2) \begin{cases} y_n = a y_{n-1} + b, \ n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado,} \end{cases}$$

sendo $f(y_{n-1}, \beta_n) = a y_{n-1} + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = b$;

$$(3) \begin{cases} y_n = a y_{n-1} + b y_{n-2}, \quad n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados,} \end{cases}$$

em que $f(y_{n-1}, y_{n-2}, \beta_n) = a y_{n-1} + b y_{n-2}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = 0$;

$$(4) \begin{cases} y_n = y_{n-1} - 3 y_{n-2} + 2n^2 - 7n, \quad n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados,} \end{cases}$$

em que $f(y_{n-1}, y_{n-2}, \beta_n) = y_{n-1} - 3 y_{n-2} + 2n^2 - 7n$ e $\beta_n = 2n^2 - 7n$;

$$(5) \begin{cases} y_n = n y_{n-1} - n^2 y_{n-2}, \quad n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados,} \end{cases}$$

sendo $f(y_{n-1}, y_{n-2}, \beta_n) = n y_{n-1} - n^2 y_{n-2}$ e $\beta_n = 0$;

$$(6) \begin{cases} y_n = \alpha (y_{n-1})^2, \quad n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado,} \end{cases}$$

sendo $f(y_{n-1}, \beta_n) = \alpha (y_{n-1})^2$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = 0$.

2.3 Classificação das equações de diferenças

2.3.1 Equações de diferenças lineares

As equações de diferenças lineares de ordem m são estruturas Matemáticas que têm a forma da Equação (2.2) de modo que

$$f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n) = f_1(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}) + \beta_n$$

com f_1 combinação linear de $\{y_k\},\ k \in \{n-1, n-2, \cdots, n-m\}$. Isto é, são as equações que tem a forma geral

$$\begin{cases} y_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i} y_{n-i}\right) + \beta_n,\ \alpha_{n-i}, \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases} \tag{2.3}$$

As equações dos exemplos de (1) a (5) são equações de diferenças lineares.

Observação 2.3.1. *Dentre os exemplos anteriores, apenas o exemplo* (6) *refere-se a uma equação de diferenças não linear.*

2.3.2 Equações de diferenças lineares e homogêneas

As equações de diferenças lineares de ordem m, ou seja, aquelas que tem a forma da Equação (2.3), são classificadas como homogêneas se $\beta_n = 0$. Em outras palavras, a forma geral dessas equações é

$$\begin{cases} y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i} y_{n-i},\ \alpha_{n-i} \in \mathbb{R},\ n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Os exemplos (1), (3) e (5) correspondem a equações de diferenças lineares e homogêneas.

2.3.3 Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

No desenvolvimento desse trabalho considera-se que a forma geral das equações de diferenças lineares de ordem m com coeficientes constantes é dada pela Equação (2.3) com $\alpha_{n-i},\ i = 1, \cdots m$, constantes reais. Ou seja, a forma geral de tais equações é

$$\begin{cases} y_n = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i} \right) + \beta_n,\ \alpha_i, \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Deste modo, exemplos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes são dados pelas equações de (1) a (4).

Observação 2.3.2. *De acordo com a forma considerada na classificação das equações de diferenças lineares com coeficientes constantes, exige-se apenas que os coeficientes dos termos "y_{n-i}" sejam constantes. Logo, a equação de diferenças do exemplo (4) se classifica em linear e não homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes em que o termo não homogêneo, β_n, é expresso pelo polinômio $p(n) = 2n^2 - 7n$ e, portanto, não é constante. Outros exemplos de equações com a mesma classificação da equação dada no exemplo (4) serão mostrados no Capítulo 6, quando apresentaremos uma introdução ao estudo das equações de diferenças lineares e não homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.*

Observação 2.3.3. *Note que o exemplo (5) destaca uma equação de diferenças linear, homogênea e com coeficientes variáveis.*

2.3.4 Equações de diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes

As equações de diferenças de ordem m lineares e homogêneas com coeficientes constantes possuem a forma da Equação (2.5) com $\beta_n = 0$. Isto significa que são as equações cuja forma geral é

$$\begin{cases} y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i},\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Apenas os exemplos (1) e (3) se referem a equações de diferenças lineares, homogêneas e com coeficientes constantes.

3 Equações de primeira ordem, lineares e homogêneas com coeficientes constantes

A principal referência deste capítulo é o livro [1]. Na Seção 3.1 apresentaremos a forma geral das equações de diferenças lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes. A determinação da solução dessas equações é mostrada na Seção 3.2.

3.1 Forma das equações

As equações de diferenças lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes têm a forma da Equação (2.6) com $m = 1$, ou seja, são equações do tipo

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i} = \sum_{i=1}^{1} \alpha_i y_{n-i} = \alpha_1 y_{n-1}, \ \alpha_1 \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Para simplificar a forma de se escrever a Equação (3.1), visto que a expressão de y_n apresenta apenas a constante α_1, consideremos $\alpha_1 = \alpha$. Assim, a forma geral das equações de diferenças lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes é

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado.} \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 Solução

O processo de recorrência, aplicado à Equação (3.2), fornece:

$$y_1 = \alpha y_0,$$

$$y_2 = \alpha y_1 = \alpha^2 y_0,$$

$$y_3 = \alpha y_2 = \alpha^3 y_0,$$

$$\cdots$$

$$y_n = \alpha^n y_0.$$

Portanto, $y_n = y_0\alpha^n$ é a solução da Equação (3.2).

Observação 3.2.1. *Para uma melhor assimilação do método recursivo, no apêndice desse trabalho encontra-se a resolução da equação de diferenças linear e não homogênea de primeira ordem com coeficiente constante dada por:*

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \ n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \textit{ dado}. \end{cases}$$

Neste momento, apenas destacamos que a solução dessa equação é

$$y_n = \begin{cases} y_0 + bn, \text{ se } a = 1; \\ \\ y_0 a^n + b\dfrac{1-a^n}{1-a}, \text{ se } a \neq 1. \end{cases}$$

4 Equações de segunda ordem, lineares e homogêneas com coeficientes constantes

De forma similar à estruturação do capítulo anterior, na Seção 4.1 mostraremos a forma das equações de diferenças lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. Na Seção 4.2 construiremos a solução dessas equações. A principal referência utilizada neste capítulo é o livro [8].

4.1 Forma das equações

Equações de diferenças lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes têm a forma da Equação (2.6) com $m = 2$, ou seja, são equações da forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i y_{n-i} = \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Em determinado momento, no estudo de um problema a ser apresentado no Capítulo 5, faremos uma mudança na notação dos coeficientes da equação-modelo que será obtida, denotando o coeficiente do termo y_{n-1} por a e o coeficiente do termo y_{n-2} por b (tal mudança terá a finalidade de deixar essa equação-modelo menos sobrecarregada). Desta forma, denotando $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b$, conclui-se que a forma geral das equações de diferenças lineares, homogêneas de segunda ordem e com coeficientes constantes é

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2},\ a, b \in \mathbb{R},\ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Observe que a Equação (2.1) é a equação que modela o Problema 1 proposto no Capítulo 2 e tal equação assume a forma da Equação (4.2) desde que façamos pequenas considerações, pois:

(i) não existe o termo M_0,
(ii) a variação de n é dada pela condição $n \geq 3$ e não $n \geq 2$.

De modo que definindo $M_0 = 1$ e considerando $M_0 = M_1 = 1,\ n \geq 2$ na Equação (2.1), obtida na resolução do Problema 1, tal equação se classifica em linear e homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

4.2 Solução

Inicialmente tentaremos obter a solução da Equação (4.2) pelo mesmo método utilizado na resolução da equação linear e homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes, ou seja, através da recursividade. Logo:

$$y_2 = ay_1 + by_0,$$

e usando esta identidade temos

$$y_3 = ay_2 + by_1 = a(ay_1 + by_0) + by_1 = (a^2 + b)y_1 + aby_0.$$

Da mesma forma, vale

$$y_4 = ay_3 + by_2 = a[(a^2 + b)y_1 + aby_0] + b(ay_1 + by_0) = (a^3 + 2ab)y_1 + (a^2b + b^2)y_0,$$

e também

$$\begin{aligned} y_5 &= ay_4 + by_3 = a[(a^3 + 2ab)y_1 + (a^2b + b^2)y_0] + b[(a^2 + b)y_1 + aby_0] \\ &= (a^4 + 3a^2b + b^2)y_1 + (a^3b + 2ab^2)y_0. \end{aligned}$$

Também recursivamente

$$\begin{aligned} y_6 &= ay_5 + by_4 = a[(a^4 + 3a^2b + b^2)y_1 + (a^3b + 2ab^2)y_0] + b[(a^3 + 2ab)y_1 + (a^2b + b^2)y_0] \\ &= (a^5 + 4a^3b + 3ab^2)y_1 + (a^4b + 3a^2b^2 + b^3)y_0, \end{aligned}$$

$$\cdots$$

temos então uma questão: como obter y_n?

Objetivando descrever o algoritmo de determinação dos coeficientes de y_1 e y_0 referentes a cada termo da sequência em construção considere a notação:

a_i denotará o coeficiente de y_1 referente ao i-ésimo termo, y_i, da recursão;
b_i denotará o coeficiente de y_0 referente ao i-ésimo termo, y_i, da recursão.

Desta forma podemos observar que:

- a_n, coeficiente de y_1, referente ao termo y_n da sequência, é obtido multiplicando-se o coeficiente a_{n-1} (coeficiente de y_1 referente ao termo y_{n-1}) por a, e a esse resultado, somando-se o coeficiente b_{n-1} (coeficiente de y_0 referente ao termo y_{n-1}). Matematicamente escrevemos

$$a_n = aa_{n-1} + b_{n-1} \ ;$$

- para determinar-se b_n, coeficiente de y_0, referente ao termo y_n da sequência, multiplica-se o coeficiente b_{n-1} por a e adiciona-se esse resultado ao resultado da multiplicação do coeficiente b_{n-2} (coeficiente de y_0 referente ao termo y_{n-2}) por b. Em linguagem Matemática tem-se

$$b_n = ab_{n-1} + bb_{n-2}.$$

De modo que nossa tentativa em obter a solução através do processo recursivo parece não ser tão bem sucedida como no caso da equação de primeira ordem (pois obtemos duas novas equações de recorrência) e, deste modo, será necessário utilizar outro ferramental Matemático para obtermos a solução da Equação (4.2). Neste sentido, usaremos conceitos de Álgebra Linear e nosso primeiro passo é garantir a unicidade da solução.

Proposição 4.2.1 (Unicidade da solução)**.** *Uma equação de diferenças linear, homogênea de segunda ordem e com coeficientes constantes, tem solução única. Ou seja, é única a solução da equação*

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, \ a,b \in \mathbb{R}, \ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \ \textit{dados}, \end{cases} \tag{4.3}$$

caso ela exista.

Prova. Sejam (x_n) e (z_n) soluções da Equação (4.3). Logo $x_0 = z_0 = y_0$, $x_1 = z_1 = y_1$ e x_n, z_n verificam a equação de recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$, para todo $n \geq 2$.

Considere a proposição

$$p(n) : x_n = z_n, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Demonstraremos esta proposição pelo Método de Indução Finita:

(i) se $n = 2$, então $x_2 = ax_1 + bx_0 = az_1 + bz_0 = z_2$. Ou seja, $p(2)$ é verdadeira,

(ii) suponha $p(n)$ verdadeira para todo $3 \leq n \leq k$. Em particular

$$x_{k-1} = z_{k-1} \text{ e } x_k = z_k.$$

Assim

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} = az_k + bz_{k-1} = z_{k+1}.$$

Segue-se do Princípio de Indução Finita que $x_n = z_n$ para todo n, ou seja, $(x_n) = (z_n)$ e concluímos a unicidade.

□

Iremos, de agora até o fim do capítulo, desenvolver um estudo em busca da solução para as equações lineares, homogêneas de segunda ordem e com coeficientes constantes. Pela Proposição 4.2.1, sabemos que tal solução, se existir, será uma sequência numérica real única. Como nosso objetivo é justamente determinar tal solução, considere o conjunto de todas as sequências de números reais, isto é, considere o conjunto

$$\mathbb{R}^\infty = \{(y_n) = (y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots) : y_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 4.2.1. *As operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^\infty$ são respectivamente definidas por:*

(i)

$$\begin{aligned} (x_n) + (z_n) &:= (x_n + z_n) = (x_0 + z_0,\ x_1 + z_1,\ \cdots,\ x_n + z_n,\ \cdots) \\ &= (x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots) + (z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots), \end{aligned}$$

para quaisquer $(x_n), (z_n) \in \mathbb{R}^\infty$;

(ii)

$$k(x_n) := (kx_n) = (kx_0,\ kx_1,\ \cdots,\ kx_n,\ \cdots) = k(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)$$

quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$.

Note que o conjunto $\mathbb{R}^\infty$, considerando as operações de adição e multiplicação por escalar acima definidas, é um espaço vetorial. Entretanto estamos interessados em analisar apenas o subconjunto de $\mathbb{R}^\infty$ formado pelas sequências que são soluções de equações de diferenças lineares, homogêneas de segunda ordem e com coeficientes constantes.

Definição 4.2.2. *Dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, definimos o conjunto*

$$S = \{(y_n) = (y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in \mathbb{R}^\infty : y_n = ay_{n-1} + by_{n-2},\ a, b \in \mathbb{R},\ n \geq 2\}.$$

Note que o conjunto S acima definido é o conjunto solução da Equação (4.2).

Lema 4.2.1. *S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ de dimensão 2.*

Prova. No item (1) a seguir, demonstra-se que S é subespaço de $\mathbb{R}^\infty$ e no item (2) faz-se a prova referente à dimensão de S.

(1) Inicialmente, nota-se que o vetor nulo de $\mathbb{R}^\infty$ pertence ao conjunto S, pois a sequência $(y_n) = (0, 0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ é gerada pela recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$ com $y_0 = y_1 = 0$.

(i) Se $(x_n), (z_n) \in S$, então $(t_n) = (x_n) + (z_n) \in S$, pois

$$t_n = x_n + z_n = [ax_{n-1} + bx_{n-2}] + [az_{n-1} + bz_{n-2}]$$

e portanto

$$t_n = a[x_{n-1} + z_{n-1}] + b[x_{n-2} + z_{n-2}] = at_{n-1} + bt_{n-2}.$$

(ii) Se $(x_n) \in S$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k(x_n) \in S$, pois

$$a[kx_{n-1}] + b[kx_{n-2}] = k[ax_{n-1} + bx_{n-2}] = kx_n.$$

Logo S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$.

(2) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to S$ a transformação definida por

$$T(y_0, y_1) = (y_n),\ \text{em que } y_n = ay_{n-1} + by_{n-2},\ a, b \in \mathbb{R},\ n \geq 2.$$

Observa-se que T é linear, pois, considerando-se $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ com $T(x_0, x_1) = (x_n)$ e $(z_0, z_1) \in \mathbb{R}^2$ com $T(z_0, z_1) = (z_n)$, tem-se que

$$T((x_0, x_1) + k(z_0, z_1)) = T(x_0 + kz_0, x_1 + kz_1) = (x_n + kz_n)$$

e sendo assim,

$$T((x_0,x_1)+k(z_0,z_1)) = (x_n)+k(z_n) = T(x_0,x_1)+kT(z_0,z_1).$$

O Teorema do Núcleo e da Imagem (ver referência [8], páginas 141 e 142) afirma que se $T : V \to W$ é uma transformação linear, em que o espaço vetorial V tem dimensão finita, então a dimensão do Núcleo e a dimensão da Imagem dessa transformação se relacionam de acordo com a igualdade

$$\text{dim Nuc } T + \text{dim Im } T = \text{dim } V.$$

Desta forma, sendo $V = \mathbb{R}^2$, tem-se que

$$\text{dim Nuc } T + \text{dim Im } T = 2. \tag{4.4}$$

Também, nota-se que Nuc $T = \{(0,0)\}$, pois

$$T(y_0,y_1) = (0,0,0,0,\cdots,0,\cdots)$$

implica em

$$y_0 = y_1 = 0,$$

de modo que

$$\text{Nuc } T = \{(0,0)\}.$$

Logo, como Nuc $T = \{(0,0)\}$, conclui-se que dim Nuc $T = 0$ e a Equação (4.4) fornece

$$\text{dim Im } T = 2. \tag{4.5}$$

Além disso, T é sobrejetiva (o equivalente a dizer que Im $T = S$), pois para toda sequência $(x_n) \in S$ existe $(x_0,x_1) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_0,x_1) = (x_n)$. Portanto, visto que Im $T = S$, da Equação (4.5) conclui-se que

$$\text{dim } S = 2.$$

□

Pelo Lema 4.2.1, conclui-se que uma base do conjunto S é formada por 2 vetores, de modo que a solução da Equação (4.2) é alcançada ao determinarmos uma base para o conjunto S.

Como consequência de S ser subespaço temos a proposição a seguir.

Proposição 4.2.2 (Princípio da superposição)**.** *Se* (x_n) *e* (z_n) *são soluções da equação de diferenças* $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2},\ a, b \in \mathbb{R},\ n \geq 2$*, então*

$$(t_n) = k_1(x_n) + k_2(z_n) \tag{4.6}$$

também é solução, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Prova. Tem-se, para todo $n \geq 2$, que

$$at_{n-1} + bt_{n-2} = a[k_1x_{n-1} + k_2z_{n-1}] + b[k_1x_{n-2} + k_2z_{n-2}].$$

Logo

$$at_{n-1} + bt_{n-2} = k_1[ax_{n-1} + bx_{n-2}] + k_2[az_{n-1} + bz_{n-2}],$$

e portanto,

$$at_{n-1} + bt_{n-2} = k_1x_n + k_2z_n = t_n.$$

□

De agora em diante, inspirados pelo fato de que a solução das equações de diferenças lineares, homogêneas e com coeficientes constantes de primeira ordem é da forma exponencial, procuraremos por soluções também na forma exponencial, ou seja, soluções do tipo $y_n = \lambda^n$. Neste caso teríamos

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$$

e daí

$$\lambda^n = a(\lambda^{n-1}) + b(\lambda^{n-2}).$$

A equação anterior equivale a

$$\lambda^{n-2}[\lambda^2 - a\lambda - b] = 0$$

e portanto,

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

Logo,

(i) se $\lambda = 0$ temos que $y_n = 0$ para todo n. Ou seja, a solução é a trivial (que terá sentido apenas se $y_0 = y_1 = 0$);

(ii) se $\lambda \neq 0$, então $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b = 0$. O polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$ é denominado **polinômio característico** associado à equação de diferenças em estudo. As raízes do polinômio $p(\lambda)$ são denominadas autovalores e expressas por

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}. \tag{4.7}$$

De modo que, dados os valores dos coeficientes a e b da Equação (4.2) os valores λ_1 e λ_2 são unicamente determinados. Também, observando que supusemos solução da forma $y_n = \lambda^n$, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então

$$y_n^1 = \lambda_1^n \quad \text{e} \quad y_n^2 = \lambda_2^n \tag{4.8}$$

verificam a recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$.

Apresentaremos a seguir três proposições que estabelecem resultados fundamentais para escrevermos a solução procurada. Tais proposições referem-se ao polinômio $p(\lambda)$, ou melhor, são resultados que relacionam o valor de seu discriminante $\Delta = a^2 + 4b$ às suas raízes, λ_1 e λ_2.

Proposição 4.2.3. *Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, então $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\} \subset S$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para S.*

Prova. Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, as raízes do polinômio característico são valores reais e distintos. Também afirmamos ser o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ um conjunto linearmente independente. De fato, considere a equação

$$c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = 0, \text{ para todo } n.$$

Em particular, para $n = 0$ e $n = 1$, temos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0. \end{cases}$$

Como $det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$, conclui-se que a única solução do sistema é a solução trivial, $c_1 = c_2 = 0$. De modo que o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ é um conjunto linearmente independente e, desta forma, uma base para S.

□

Proposição 4.2.4. *Se $\Delta = a^2 + 4b = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\} \subset S$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para S.*

Prova. Se $a^2+4b=0$, então o polinômio característico tem uma raiz real de multiplicidade dois, dada por $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{a}{2}$. Note que $a\neq 0$ (pois, $a=0$ resulta em $\lambda=0$, o que implica na solução trivial). Também, visto que uma solução é dada por λ_1^n, objetivamos determinar uma outra solução de modo que o conjunto formado pelas mesmas seja um conjunto linearmente independente, já que desta forma teremos uma base para S.

Afirma-se que $n\lambda_1^n\in S$.

De fato, $n\lambda_1^n\in S$, se e somente se

$$n\lambda_1^n=a(n-1)\lambda_1^{n-1}+b(n-2)\lambda_1^{n-2},$$

que equivale a

$$n(\lambda_1^2-a\lambda_1-b)=-a\lambda_1-2b,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Daí

$$\begin{cases}\lambda_1^2-a\lambda_1-b=0,\ (A)\\ \quad -a\lambda_1-2b=0.\ (B)\end{cases}$$

Como $\Delta=a^2+4b=0$, tem-se de (A) que $\lambda_1=\dfrac{a}{2}$. Para concluir a prova basta verificar que esse λ_1 satisfaz (B):

$$-a\lambda_1-2b=0\Leftrightarrow -a\left(\frac{a}{2}\right)-2b=0\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}-2b=0\Leftrightarrow -\frac{a^2+4b}{2}=0$$

e essa última igualdade é verdadeira por hipótese. Concluímos, assim, que $n\lambda_1^n\in S$.

Também afirma-se que o conjunto $\{\lambda_1^n,n\lambda_1^n\}$ é um conjunto linearmente independente.

De fato, considere o sistema

$$c_1\lambda_1^n+c_2n\lambda_1^n=0,\ \text{para todo } n.$$

Como a identidade acima deve ser verificada para todo n, se $n=0$, então $c_1=0$, pois $\lambda_1\neq 0$. Logo,

$$c_2n\lambda_1^n=0\Rightarrow c_2=0.$$

De modo que $c_1\lambda_1^n+c_2n\lambda_1^n=0$, para todo n, implica em $c_1=c_2=0$. Daí o conjunto $\{\lambda_1^n,n\lambda_1^n\}$ é uma base para S, pois, é um conjunto linearmente independente.

□

Proposição 4.2.5. *Se $\Delta = a^2 + 4b < 0$, então as raízes de $p(\lambda)$ são números complexos conjugados de módulo $r \neq 0$ e de argumento θ e $-\theta$ e, $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{r^n cos(n\theta), r^n sen(n\theta)\} \subset S$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para S.*

Prova. se $a^2 + 4b < 0$, as raízes do polinômio característico são valores complexos conjugados; digamos $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Usando a **forma trigonométrica** e a **fórmula de Euler**, escrevemos

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i = r(\text{cos }\theta + i\text{sen }\theta) = re^{i\theta}$$

e

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i = r(\text{cos }\theta - i\text{sen }\theta) = re^{-i\theta},$$

em que $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e θ é tal que $\text{cos }\theta = \dfrac{\alpha}{r}$, $\text{sen }\theta = \dfrac{\beta}{r}$.

Pela **fórmula de De Moivre**, sabe-se que o produto entre os complexos

$$z_1 = r_1(\text{cos }\theta_1 + i \text{ sen }\theta_1),\ z_2 = r_2(\text{cos }\theta_2 + i \text{ sen }\theta_2),\ \ldots,\ z_k = r_k(\text{cos }\theta_k + i \text{ sen }\theta_k)$$

é dado por

$$z_1 z_2 \ldots z_k = r_1 r_2 \ldots r_k(\text{cos}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k)).$$

Dessa forma

$$(\lambda_1)^n = (r(\text{cos }\theta + i \text{ sen }\theta))^n = r^n(\text{cos}(n\theta) + i \text{ sen}(n\theta))$$

e

$$(\lambda_2)^n = (r(\text{cos }\theta - i \text{ sen }\theta))^n = r^n(\text{cos}(n\theta) - i \text{ sen}(n\theta))$$

são soluções da Equação (4.2), conforme visto na Equação (4.8).

Assim, pelo princípio da superposição (Proposição 4.2.2), conclui-se que

$$\gamma_1 = \frac{(\lambda_1)^n + (\lambda_2)^n}{2} = r^n\text{cos}(n\theta) \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{(\lambda_1)^n - (\lambda_2)^n}{2i} = r^n\text{sen}(n\theta)$$

também serão soluções da Equação (4.2).

Afirmamos ainda ser o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{r^n\text{cos}(n\theta), r^n\text{sen}(n\theta)\}$ linearmente independente. De fato, considere o sistema

$$c_1 r^n\text{cos}(n\theta) + c_2 r^n\text{sen}(n\theta) = 0, \text{ para todo } n. \tag{4.9}$$

Uma manipulação na Equação (4.9) fornece

$$[c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 r^n \text{sen}(n\theta)] \frac{\cos(n\theta)}{r^n} = 0$$

que equivale a

$$c_1 \cos^2(n\theta) + c_2 \text{sen}(n\theta)\cos\,(n\theta) = 0$$

e portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} [c_1 \cos^2(n\theta) + c_2 \text{sen}(n\theta)\cos(n\theta)]\; d\theta = 0, \text{ para todo } n.$$

De modo que

$$c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\theta)\; d\theta + c_2 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(n\theta)\cos(n\theta)\; d\theta = 0, \text{ para todo } n. \tag{4.10}$$

Como $f_1(\theta) = \cos^2(n\theta)$ é uma função par e $f_2(\theta) = \text{sen}(n\theta)\cos(n\theta)$ é uma função ímpar, da Equação (4.10) escrevemos

$$2c_1 \int_{0}^{\pi} \cos^2(n\theta)\; d\theta = 0. \tag{4.11}$$

Assim, como $\int_{0}^{\pi} \cos^2(n\theta)\; d\theta > 0$, pois $f_1(\theta) = \cos^2(n\theta)$ é uma função não negativa e não identicamente nula, a Equação (4.11) fornece $c_1 = 0$.

Substituindo $c_1 = 0$ na Equação (4.9), tem-se

$$c_2 r^n \text{sen}(n\theta) = 0, \text{ para todo } n$$

implicando em $c_2 = 0$. Deste modo, $c_1 = c_2 = 0$, e o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ = $\{r^n \cos(n\theta), r^n \text{sen}(n\theta)\}$ é linearmente independente e, portanto, uma base para S.

□

Neste momento, determinada uma base para o conjunto S, retornemos à determinação da solução geral para a Equação (4.2). Vimos que, para $\lambda = 0$, tem-se a solução trivial (desde que $y_0 = y_1 = 0$) e se $\lambda \neq 0$, então $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b = 0$, de modo que para determinar a solução procurada devemos analisar o discriminante, $\Delta = a^2 + 4b$, do polinômio característico $p(\lambda)$. Temos as possibilidades

(i) se $\Delta > 0$, pela Proposição 4.2.3 o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ forma uma base para o conjunto solução da Equação (4.2) e, portanto, a solução geral é dada por

$$y_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Exemplo 4.2.1. *Vamos determinar a solução geral da equação*

$$y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2},\ n \geq 2. \tag{4.13}$$

Temos que o polinômio característico da Equação (4.13) é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$. Portanto, a solução geral da Equação (4.13) é dada por

$$y_n = k_1(1-\sqrt{2})^n + k_2(1+\sqrt{2})^n,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

(ii) se $\Delta = 0$, pela Proposição 4.2.4 o conjunto $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\} = \left\{\left(\frac{a}{2}\right)^n, n\left(\frac{a}{2}\right)^n\right\}$ forma uma base para o conjunto solução da Equação (4.2) e nesse caso a solução geral será

$$y_n = k_1\left(\frac{a}{2}\right)^n + k_2 n\left(\frac{a}{2}\right)^n,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}; \tag{4.15}$$

(iii) se $\Delta < 0$, pela Proposição 4.2.5 o conjunto $\{r^n cos(n\theta), r^n sen(n\theta)\}$ forma uma base para o conjunto das soluções reais da Equação (4.2) e assim a solução geral real é

$$y_n = r^n(k_1\cos(n\theta) + k_2\text{sen}(n\theta)),\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.16}$$

em que r é o módulo e θ é o argumento de uma das raízes complexas do polinômio $p(\lambda)$.

Em todos os casos acima, a determinação de k_1 e k_2 é feita a partir de y_0 e y_1 (conhecidos no problema).

- No caso (i), observando que

$$n = 0 \Rightarrow y_0 = k_1 + k_2 \qquad \text{e} \qquad n = 1 \Rightarrow y_1 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2,$$

tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = y_0, \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = y_1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos

$$k_1 = \frac{det\begin{pmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \frac{y_0\lambda_2 - y_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad k_2 = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & y_0 \\ \lambda_1 & y_1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \frac{y_1 - y_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

- No caso (ii), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} k_1 = y_0, \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_1 = y_1, \end{cases}$$

cuja solução é

$$k_1 = y_0, \qquad k_2 = \frac{y_1 - y_0\lambda_1}{\lambda_1}.$$

- No caso (iii), tem-se

$$n = 0 \Rightarrow y_0 = k_1 \qquad \text{e} \qquad n = 1 \Rightarrow y_1 = r(k_1\text{cos}(\theta) + k_2\text{sen}(\theta)).$$

O que fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} k_1 = y_0, \\ k_1\text{cos }\theta + k_2\text{sen }\theta = \dfrac{y_1}{r}. \end{cases}$$

De modo que a solução é

$$k_1 = y_0, \qquad k_2 = \frac{y_1 - ry_0\text{cos }\theta}{r\text{sen }\theta}.$$

Observação 4.2.1. *Note que $r \neq 0,$ pois, caso contrário, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$ Também, se sen $\theta = 0,$ teríamos soluções reais e, portanto, deve ocorrer sen $\theta \neq 0.$*

5 Modelagem: uma aplicação na Biologia

Neste capítulo, as principais referências foram o livro [7], a apostila [2] e o endereço eletrônico [11]. Na Seção 5.1 destaca-se o que são "Plantas Anuais" e na Seção 5.2 apresenta-se um modelo matemático para Propagação de Plantas Anuais. É importante destacar que tal modelo é dado por uma equação de diferenças linear e homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes e escrita em função dos vários parâmetros a serem definidos no problema. A equação possui a forma das equações estudadas no Capítulo 4 e, portanto, aplica-se a teoria apresentada naquele capítulo. Na Seção 5.3, mostra-se uma condição sobre os parâmetros da equação-modelo, evidenciando-se o parâmetro γ (referente ao número de sementes produzidas por planta), para que seja garantida a sobrevivência da população de plantas e também serão apresentadas duas simulações do problema proposto utilizando-se o software Excel.

5.1 Plantas Anuais

Plantas Anuais (ver referência [2]) são aquelas que completam seu ciclo de vida (composto por: germinação, floração, produção de sementes e morte) em um ano. Entre essas plantas, existem aquelas que toleram as geadas (denominadas **Plantas Anuais Rústicas**) e aquelas que são danificadas ou mortas pela geada e pelas baixas temperaturas (denominadas **Plantas Anuais Semi-Rústicas**).

A principal característica das plantas anuais consiste na pouca, ou mesmo nenhuma, exigência quanto aos nutrientes do solo o que possibilita o cultivo dessas plantas juntamente com outras espécies, pois elas não interferem no bom desenvolvimento das outras plantas.

As Plantas Anuais produzem, geralmente, suas sementes no verão e o ciclo de vida dessas plantas se inicia na primavera com a germinação das sementes. Em seguida, a nova planta inicia um período de crescimento vegetativo, entrando na sua fase reprodutiva, quando atingem um determinado desenvolvimento e morrem no auge do seu estágio reprodutivo, deixando as suas sementes no solo. Uma fração dessas sementes (caso sobrevivam ao inverno e a fatores diversos, tais como: clima, ações de predadores, etc) darão origem a novas plantas.

Alguns exemplos de Plantas Anuais:

(i) na agricultura - Milho, Feijoeiro, Faveira e Tomateiro;
(ii) na ornamentação - Malmequer, Amor-perfeito e Manjerico;
(iii) plantas daninhas - Ervilhaca e Saramago.

5.2 Propagação de Plantas Anuais

A seguir apresenta-se um modelo para o problema de propagação das Plantas Anuais. Inicialmente destacamos que:

(i) para tais plantas sobreviverem como uma espécie, uma população suficientemente grande deve ser renovada a cada ano;

(ii) exige-se um sistemático acompanhamento dessas plantas e também das reservas de sementes (de várias idades) em cada instante temporal.

Observação 5.2.1. *Consideraremos que a idade das sementes é determinada pelo número de invernos que elas sobrevivem. Ou seja, sementes que sobrevivem ao primeiro inverno já serão consideradas sementes de um ano. Analogamente, sementes de dois anos são aquelas que sobrevivem a dois invernos e assim sucessivamente.*

Observação 5.2.2. *Se quisermos complicar um pouco a modelagem do problema basta considerarmos o fato de que as Plantas Anuais produzem sementes que podem ficar adormecidas por vários anos antes da potencial germinação. Entretanto iremos considerar que sementes com mais de dois anos não podem germinar e serão desprezadas na modelagem apresentada. Uma hipótese mais geral que essa deixaria a modelagem mais completa, mas tornaria a modelagem mais onerosa e fugiria dos objetivos deste trabalho.*

Etapa 1: Declaração do Problema

Visto que as estações do ano no hemisfério sul obedecem à seguinte distribuição:

- Outono - De 22 de março a 20 de junho,

- Inverno - De 21 de junho a 23 de setembro,
- Primavera - De 23 de setembro a 21 de dezembro,
- Verão - De 21 de dezembro a 21 de março,

suponha que:

1) a produção de sementes ocorre no fim do verão, digamos entre os meses de fevereiro e março. É nesse período registrado o final da temporada de crescimento das plantas que, como já mencionado, deixam suas sementes no solo antes de morrer;

2) a germinação das sementes que sobreviveram ao último inverno ocorre na primavera, digamos entre os meses de outubro e novembro. É essa germinação que originará uma nova geração de plantas;

3) a fração, ou seja a porcentagem, de sementes que germinam depende da idade das mesmas e a fração de sementes com um ano de idade que germinam é não nula.

Assim, o problema consiste na determinação da população de plantas em um dado instante de tempo.

Etapa 2: Definições e hipóteses

A seguir faz-se a descrição dos parâmetros α, β, σ e γ especificados no problema. A saber:

- α: fração de sementes de um ano que germinam,
- β: fração de sementes de dois anos que germinam,
- σ: fração de sementes que sobrevivem a um determinado inverno,
- γ: número de sementes produzidas por planta entre os meses de fevereiro e março.

Consideraremos que os parâmetros α, β, σ e γ são constantes.

Observando que o banco de sementes muda constantemente ao longo do ano devido a fatores diversos (germinação, envelhecimento e mortalidade de algumas sementes, bem como a produção de algumas novas sementes), façamos a definição das variáveis do problema. Novamente devemos observar que, para simplificação do problema, vamos pressupor que sementes com mais de dois anos não são mais viáveis e podem ser desprezadas.

Para melhor compreensão de todas as quantidades envolvidas nesse problema, apresentaremos as mesmas de forma esquemática na Figura 5.1, respeitando suas hipóteses.

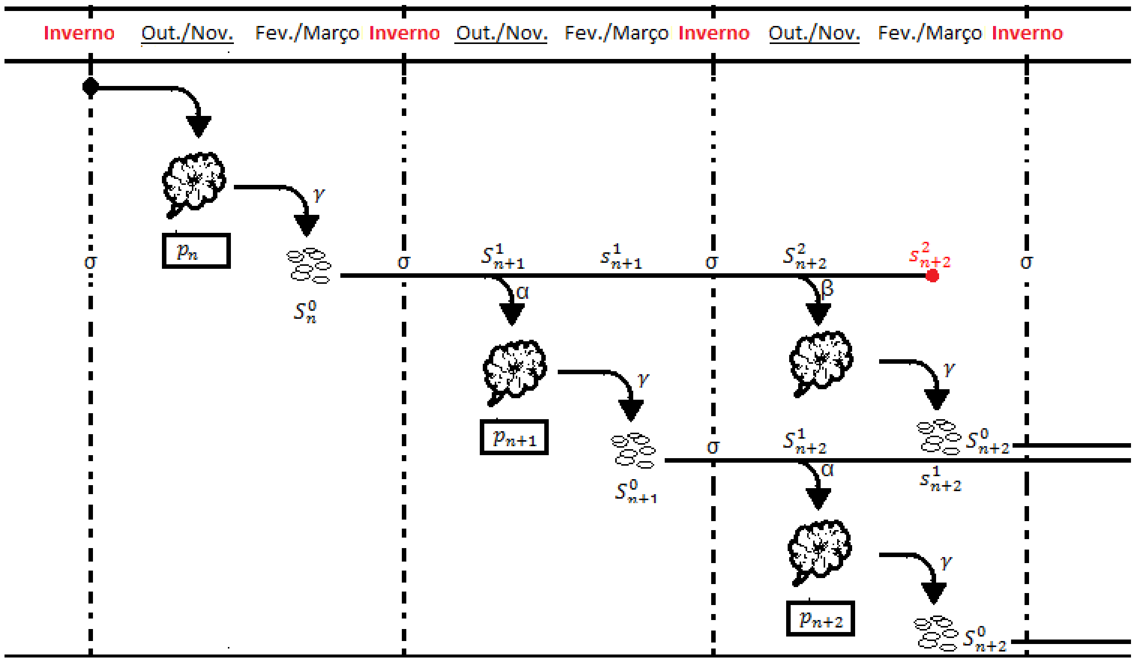

Figura 5.1: Propagação das Plantas Anuais.

Plantas anuais produzem, cada uma, γ sementes no verão (tais sementes podem permanecer no solo por até dois anos antes de germinarem). As respectivas frações α e β de sementes, de um ano e de dois anos, que germinam originarão uma nova geração de plantas.

Discussão do modelo:

A seguir são definidas todas as variáveis do problema. A saber:

- p_n: número de plantas presentes no instante n;
- S_n^0: número de novas sementes produzidas no instante n entre os meses de fevereiro e março;
- S_n^1: número de sementes com idade de um ano nos meses de outubro e novembro no instante n;
- s_n^1: número de sementes com idade de um ano no instante n que restaram após algumas germinarem;
- S_n^2: número de sementes com idade de dois anos nos meses de outubro e novembro no instante n;
- s_n^2: número de sementes com idade de dois anos que restaram após algumas germinarem (note que essas sementes serão desprezadas).

Observação 5.2.3. *Para cada variável anteriormente definida, destaca-se que o subscrito refere-se ao instante que se faz referência e, para as variáveis relacionadas ao número de sementes, os sobrescritos indicam a idade das mesmas.*

A princípio nota-se que há um grande número de variáveis nesse problema. Contudo, pelo fato de essas variáveis se relacionarem, veremos que as mesmas serão descritas em função apenas da variável p_n.

Etapa 3: As Equações

Nosso ponto de partida em busca de um modelo matemático para esse problema concentra-se na formulação da equação que gera a população de plantas, p_n, no instante n. Considerando-se a fração α (das sementes que germinam com um ano de idade) e a fração β (das sementes que germinam com dois anos de idade), nota-se que p_n é determinado pelo número de plantas originadas de sementes de um ano de idade, adicionado ao número de plantas originadas de sementes de dois anos de idade, de modo que

$$p_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2, \; n \geq 2. \tag{5.1}$$

Afirmamos anteriormente que todas as variáveis podem ser descritas em função da variável p_n. Desta forma, acompanhando a ordem sequencial dos acontecimentos esquematizados na Figura 5.1, iremos visualizar como tais variáveis se relacionam com a variável p_n e os parâmetros α, β, σ e γ.

1) S_n^0 – O número de novas sementes produzidas em março (no instante n) – é determinado multiplicando-se o parâmetro γ pela quantidade de plantas existentes naquele instante:

$$S_n^0 = \gamma p_n. \tag{5.2}$$

2) S_{n+1}^1 – O número de sementes com um ano de idade no instante $n+1$ – é determinado multiplicando-se a fração de sementes que sobreviveram ao último inverno (a constante σ) pelo número de sementes produzidas no instante n (a variável S_n^0):

$$S_{n+1}^1 = \sigma S_n^0. \tag{5.3}$$

Assim, substituindo o valor de S_n^0 dado pela Equação (5.2), tem-se que

$$S_{n+1}^1 = \sigma\gamma p_n. \tag{5.4}$$

Desse modo, a variável S_n^1 da Equação (5.1) se escreve como

$$S_n^1 = \sigma\gamma p_{n-1}. \tag{5.5}$$

3) s_{n+1}^1 – O número de sementes de um ano de idade no instante $n+1$ que restaram após algumas germinarem – é determinado multiplicando-se a fração de sementes

que não germinaram (a constante $1-\alpha$) pelo número de sementes de um ano de idade no instante $n+1$ (a variável S^1_{n+1}):

$$s^1_{n+1} = (1-\alpha)S^1_{n+1}. \tag{5.6}$$

Note que $S^0_{n+1} = \gamma p_{n+1}$.

4) S^2_{n+2} – O número de sementes de dois anos de idade no instante $n+2$ – é determinado multiplicando-se a fração de sementes que sobreviveram ao último inverno (a constante σ) pelo número de sementes que restaram após algumas germinarem no instante $n+1$ (a variável s^1_{n+1}):

$$S^2_{n+2} = \sigma s^1_{n+1}. \tag{5.7}$$

Assim, substituindo o valor de s^1_{n+1} dado pela Equação (5.6), obtém-se

$$S^2_{n+2} = \sigma(1-\alpha)S^1_{n+1}. \tag{5.8}$$

Daí, visto que o valor de S^1_{n+1} é dado pela Equação (5.4), conclui-se que

$$S^2_{n+2} = \sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_n.$$

Ou seja,

$$S^2_{n+2} = \sigma^2(1-\alpha)\gamma p_n. \tag{5.9}$$

De modo que a variável S^2_n da Equação (5.1) se escreve como

$$S^2_n = \sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-2}. \tag{5.10}$$

Logo, substituindo os resultados das Equações (5.5) e (5.10) na Equação (5.1), vê-se que

$$p_n = \alpha\sigma\gamma p_{n-1} + \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-2}. \tag{5.11}$$

Desta forma, chegamos a uma equação de diferenças que imaginamos modelar o problema. Note que a Equação (5.11) é linear, homogênea e de segunda ordem com coeficientes constantes e, deste modo, aplica-se a teoria estudada no Capítulo 4.

Agora façamos uma leitura da Equação (5.11), interpretando seus termos de acordo com as definições e suposições da Etapa 2, com o objetivo de assegurar que o modelo obtido é condizente com o problema declarado na Etapa 1. Para tal, considere a Equação (5.11) escrita de modo que sejam evidenciados os termos que nela se apresentam. Desta forma, relacionaremos esses termos com a situação descrita no problema referente à determinação da população de plantas em um dado instante (veja Figura 5.2).

$$p_n = \underbrace{\alpha \underbrace{\sigma \underbrace{\gamma p_{n-1}}_{(6)}}_{(7)}}_{(8)} + \underbrace{\beta \underbrace{\sigma \underbrace{(1-\alpha) \underbrace{\sigma \underbrace{\gamma p_{n-2}}_{(1)}}_{(2)}}_{(3)}}_{(4)}}_{(5)}$$

Figura 5.2: Modelo: Propagação das Plantas Anuais.

A interpretação da Figura 5.2 é:

(1) sementes produzidas há dois anos;
(2) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno;
(3) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno, mas não germinaram no primeiro ano;
(4) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno, não germinaram no primeiro ano e sobreviveram ao segundo inverno;
(5) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno, não germinaram no primeiro ano, sobreviveram ao segundo inverno e germinaram no segundo ano;
(6) sementes produzidas há um ano;
(7) sementes produzidas há um ano que sobreviveram ao primeiro inverno;
(8) sementes produzidas há um ano que sobreviveram ao primeiro inverno e germinaram no primeiro ano.

5.3 Sobrevivência da espécie: o parâmetro γ

Visto que a equação obtida para o modelo é descrita por vários parâmetros, façamos $a = \alpha\sigma\gamma$ e $b = \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma$ obtendo a equação

$$p_n = ap_{n-1} + bp_{n-2}. \tag{5.12}$$

Deste modo o polinômio característico associado à Equação (5.12) é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b. \tag{5.13}$$

É razoável pensar que o número de sementes produzidas por planta, bem como a fração de sementes que sobrevivem ao inverno, são maiores que zero (isto é, $\gamma > 0$ e $\sigma > 0$), pois, caso contrário, estaremos certos da extinção da espécie.

Se $\beta = 0$, então a Equação (5.11) deixa de ser uma equação de segunda ordem e a sobrevivência da espécie fica determinada pela constante α, com $\alpha > 0$. Desta forma, o modelo não se refere ao problema proposto, no qual considera-se a possibilidade da germinação das sementes tanto no primeiro quanto no segundo ano. Neste caso, estaríamos modelando um problema similar, no qual sementes que não germinam no primeiro ano são negligenciadas de modo que a equação que modela esse novo problema seria

$$p_n = \alpha\sigma\gamma p_{n-1}.$$

Desta forma, devemos ter $\beta > 0$.

As raízes do polinômio característico, ou seja, da Equação (5.13), são

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = \frac{a - \sqrt{a^2\left(1 + \frac{4b}{a^2}\right)}}{2} = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2\left(1 + \frac{4b}{a^2}\right)}}{2} = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right).$$

De modo que podemos escrever

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 - \sqrt{1+\delta}\right) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 + \sqrt{1+\delta}\right), \tag{5.14}$$

em que

$$\delta = \frac{4b}{a^2} = \frac{4\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma}{(\alpha\sigma\gamma)^2} = \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma} = \frac{4}{\gamma}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right). \tag{5.15}$$

Também parece razoável pensar em $\alpha \neq 1$, pois $\alpha = 1$ significaria que todas as sementes de um ano de idade germinam. Deste modo, $0 < \alpha < 1$ e analisando a Equação (5.15), conclui-se que

$$\delta > 0.$$

Das Equações (5.14) e (5.15), nota-se que os valores λ_1 e λ_2 são determinados através do conhecimento dos parâmetros α, β, σ e γ e assim, a expressão que nos possibilita determinar esses valores, isto é, a Equação (5.14), se apresenta um pouco carregada de informações.

Objetivamos determinar uma condição que possibilite garantir a sobrevivência da espécie e, sendo as raízes λ_1 e λ_2 reais distintas, a solução geral da equação (5.12) é

$$p_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n.$$

Visto que $\lambda_2 > 0$, tem-se que

$$p_n = (\lambda_2)^n \left[c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n + c_2 \right]. \tag{5.16}$$

Também nota-se que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, quaisquer que sejam os valores dessas raízes. De fato, da Equação (5.14) conclui-se que λ_1 é sempre negativo, de modo que

$$|\lambda_1| = -\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2} < \frac{\sqrt{a^2+4b}+a}{2} = \lambda_2 = |\lambda_2|.$$

Assim, analisando a Equação (5.16) vemos que $c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Deste modo, a condição que desejamos encontrar depende unicamente da raiz λ_2 e tal condição será evidenciada pela proposição a seguir.

Proposição 5.3.1. *Se* $\gamma > \vartheta = \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$, *então* $\lambda_2 > 1$.

Prova. Considerando as proposições $p : \gamma > \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$ e $q : \lambda_2 > 1$,

mostremos que $\sim q \Rightarrow \sim p$.

De fato, supondo $\lambda_2 \leq 1$ (na realidade $0 < \lambda_2 \leq 1$), tem-se

$$\lambda_2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sigma\gamma\alpha}{2}(1+\sqrt{1+\delta}) \leq 1 \Leftrightarrow (1+\sqrt{1+\delta}) \leq \frac{2}{\sigma\gamma\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{1+\delta} \leq \frac{2}{\sigma\gamma\alpha} - 1.$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da última inequação, e observando-se que

$$\delta = \frac{4\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma}{(\sigma\gamma\alpha)^2},$$

conclui-se que

$$1+\delta \leq \frac{4}{\sigma^2\gamma^2\alpha^2} - \frac{4}{\sigma\gamma\alpha} + 1 \Leftrightarrow \delta \leq \frac{4-4\sigma\gamma\alpha}{\sigma^2\gamma^2\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{4\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma}{(\sigma\gamma\alpha)^2} \leq \frac{4-4\sigma\gamma\alpha}{\sigma^2\gamma^2\alpha^2}.$$

Assim

$$\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma \leq 1-\sigma\gamma\alpha \Leftrightarrow [\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha]\gamma \leq 1 \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{1}{\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha}.$$

O que é a negação da proposição q e prova a proposição.

□

Observação 5.3.1. *A última equivalência acima é válida por ser* $\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha > 0$*, pois, supondo* $\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha \leq 0$ *e multiplicando-se ambos os membros dessa desigualdade por* $\frac{1}{\sigma\alpha}$ *tem-se que*

$$\beta\sigma\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) \leq -1.$$

Como $\beta\sigma > 0$*, a inequação acima será satisfeita apenas se,*

$$\frac{1}{\alpha}-1 < 0,$$

de modo que $\alpha > 1$*, que é um absurdo.*

□

Portanto se $\gamma > \vartheta$ temos por (5.16) o crescimento da população das plantas e, caso contrário, a espécie tende a se extinguir.

A seguir apresentaremos duas simulações desse problema nas quais utilizamos o software Excel para visualizarmos a evolução da população das plantas. Em ambas situações, consideraremos a introdução de uma população constituída de 100 plantas no ambiente e exatamente este momento será determinado como o instante inicial para se analisar a propagação da espécie, ou seja, este instante se refere à geração no tempo zero.

Nas planilhas descritas abaixo, a entrada dos dados do problema (ou seja, os valores dos parâmetros α, β, σ e γ) é feita pelo usuário de forma auto-instrutiva. Selecionamos também uma célula na qual será calculado o valor da quantidade $\vartheta = \dfrac{1}{\alpha\sigma+\beta\sigma^2(1-\alpha)}$ para que possamos compará-la ao parâmetro γ e assim concluir a evolução da população das plantas através da Proposição 5.3.1 e também "inserimos" as colunas abaixo descritas:

Geração - O instante temporal, ou seja, o ano i, $i \in \{0,1,2,3,\cdots\}$.

Plantas - Número de plantas presentes naquela geração.

Novas Sementes - Número de novas sementes naquela geração.

S1 - Número de sementes com um ano de idade naquela geração.

S1, Ger. - Número de sementes com um ano de idade que germinaram naquela geração.

S1, Rest. - Número de sementes com um ano de idade que restaram, após algumas germinarem, naquela geração.

S2 - Número de sementes com dois anos de idade naquela geração.

S2, Ger. - Número de sementes com dois anos de idade que germinaram naquela geração.

S2, Negl. - Número de sementes com dois anos de idade que restaram, após algumas germinarem, naquela geração (sementes a serem negligenciadas).

Ao fim de cada simulação mostra-se um ajuste gráfico para melhor visualização da evolução da população.

Simulação 1. Considerando os parâmetros $\alpha = 0,6; \beta = 0,3; \sigma = 0,8$ e $\gamma = 2$ obtemos os dados exibidos na planilha abaixo (veja Figura 5.3).

Geração	Plantas	Novas Sementes	S1	S1, Ger.	S1, Rest.	S2	S2, Ger.	S2, Negl.
0	100,0	200,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	96,0	192,0	160,0	96,0	64,0	0,0	0,0	0,0
2	107,5	215,0	153,6	92,2	61,4	51,2	15,4	35,8
3	118,0	235,9	172,0	103,2	68,8	49,2	14,7	34,4
4	129,8	259,5	188,7	113,2	75,5	55,1	16,5	38,5
5	142,7	285,4	207,6	124,6	83,0	60,4	18,1	42,3
6	156,9	313,8	228,3	137,0	91,3	66,4	19,9	46,5
7	172,6	345,1	251,1	150,6	100,4	73,1	21,9	51,1
8	189,8	379,5	276,1	165,7	110,4	80,3	24,1	56,2
9	208,7	417,3	303,6	182,2	121,4	88,3	26,5	61,8
10	229,5	458,9	333,9	200,3	133,5	97,2	29,1	68,0
11	252,3	504,7	367,1	220,3	146,9	106,8	32,1	74,8
12	277,5	555,0	403,7	242,2	161,5	117,5	35,2	82,2
13	305,2	610,3	444,0	266,4	177,6	129,2	38,8	90,4
14	335,6	671,1	488,2	292,9	195,3	142,1	42,6	99,5
15	369,0	738,0	536,9	322,1	214,8	156,2	46,9	109,4
16	405,8	811,6	590,4	354,3	236,2	171,8	51,5	120,3
17	446,3	892,5	649,3	389,6	259,7	188,9	56,7	132,3
18	490,7	981,5	714,0	428,4	285,6	207,8	62,3	145,4
19	539,6	1079,3	785,2	471,1	314,1	228,5	68,5	159,9
20	593,4	1186,9	863,4	518,1	345,4	251,3	75,4	175,9

$\alpha =$	0,6
$\beta =$	0,3
$\sigma =$	0,8

$\gamma =$ 2

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)} = 1,795977011$$

Figura 5.3: Propagação das Plantas Anuais - Evolução da espécie.

Nessa situação nota-se que haverá evolução da população e comparando a quantidade ϑ com o parâmetro γ percebe-se que $\gamma > \vartheta$ e, portanto, o autovalor λ_2 da Equação (5.13) é tal que $\lambda_2 > 1$. A seguir, na Figura 5.4, mostra-se o ajuste gráfico referente a essa simulação.

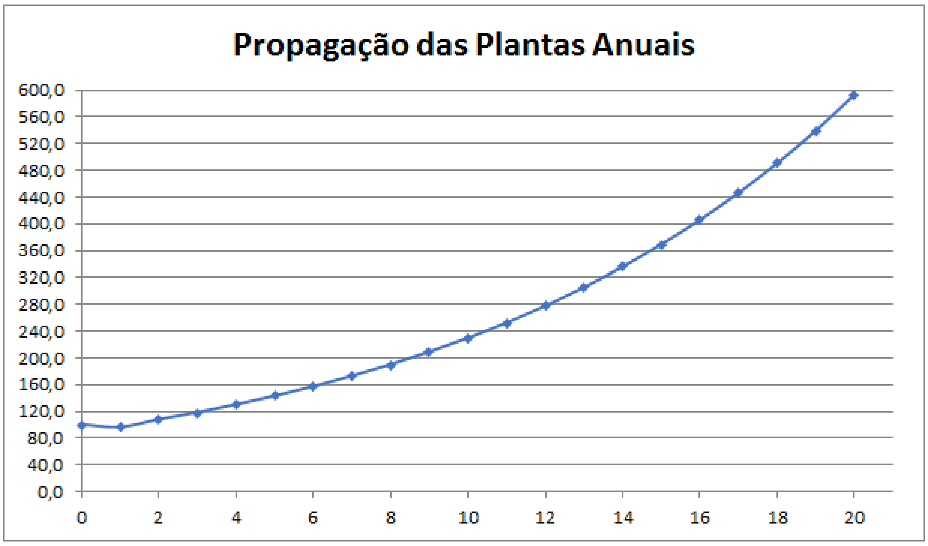

Figura 5.4: Gráfico - Evolução da espécie.

Simulação 2. Considerando os parâmetros $\alpha = 0,5; \beta = 0,25; \sigma = 0,8$ e $\gamma = 2$ podemos observar a propagação da espécie analisando os dados exibidos na Figura 5.5.

Geração	Plantas	Novas Sementes	S1	S1, Ger.	S1, Rest.	S2	S2, Ger.	S2, Negl.
0	100,0	200,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	80,0	160,0	160,0	80,0	80,0	0,0	0,0	0,0
2	80,0	160,0	128,0	64,0	64,0	64,0	16,0	48,0
3	76,8	153,6	128,0	64,0	64,0	51,2	12,8	38,4
4	74,2	148,5	122,9	61,4	61,4	51,2	12,8	38,4
5	71,7	143,4	118,8	59,4	59,4	49,2	12,3	36,9
6	69,2	138,4	114,7	57,3	57,3	47,5	11,9	35,6
7	66,8	133,7	110,8	55,4	55,4	45,9	11,5	34,4
8	64,6	129,1	107,0	53,5	53,5	44,3	11,1	33,2
9	62,3	124,7	103,3	51,6	51,6	42,8	10,7	32,1
10	60,2	120,4	99,7	49,9	49,9	41,3	10,3	31,0
11	58,1	116,3	96,3	48,2	48,2	39,9	10,0	29,9
12	56,1	112,3	93,0	46,5	46,5	38,5	9,6	28,9
13	54,2	108,4	89,8	44,9	44,9	37,2	9,3	27,9
14	52,4	104,7	86,7	43,4	43,4	35,9	9,0	26,9
15	50,6	101,1	83,8	41,9	41,9	34,7	8,7	26,0
16	48,8	97,6	80,9	40,4	40,4	33,5	8,4	25,1
17	47,1	94,3	78,1	39,1	39,1	32,4	8,1	24,3
18	45,5	91,1	75,4	37,7	37,7	31,2	7,8	23,4
19	44,0	87,9	72,8	36,4	36,4	30,2	7,5	22,6
20	42,5	84,9	70,3	35,2	35,2	29,1	7,3	21,9

$\alpha =$	0,5
$\beta =$	0,25
$\sigma =$	0,8

$\gamma =$ 2

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)} = 2{,}083333333$$

Figura 5.5: Propagação das Plantas Anuais - Extinção da espécie.

Nesse caso pode-se notar que a população tende a uma extinção. Também, comparando a quantidade ϑ com o parâmetro γ nota-se que $\gamma < \vartheta$ de modo que $\lambda_2 \leq 1$. Na Figura 5.6 apresenta-se o ajuste gráfico para essa simulação.

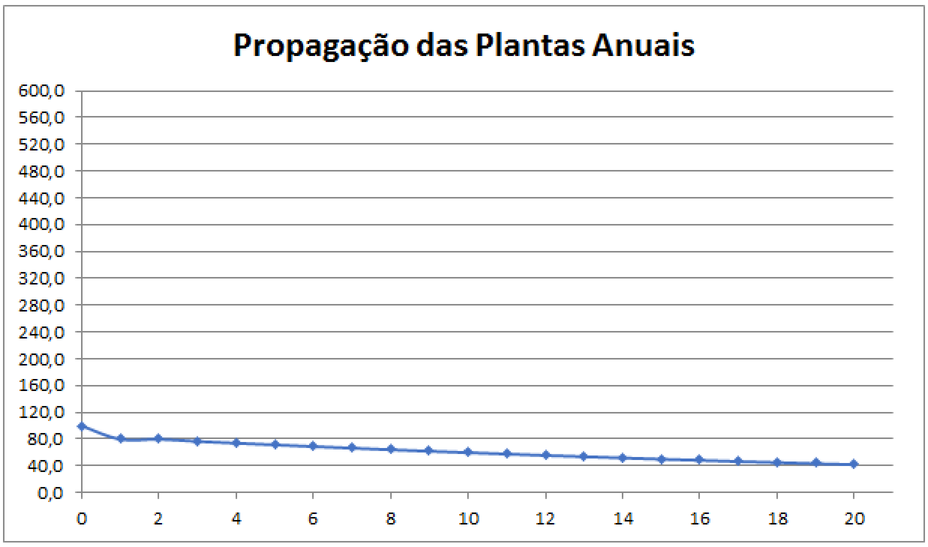

Figura 5.6: Gráfico - Extinção da espécie.

6 Alguns casos de não homogeneidade

Estuda-se, neste capítulo, algumas formas de equações de diferenças lineares, mas não homogêneas, de segunda ordem e com coeficientes constantes, em que a não homogeneidade é expressa por funções bem específicas e destaca-se que

na Seção 6.1 evidencia-se a forma dessas equações;

na Seção 6.2 apresenta-se o caso em que a não homogeneidade é dada por um polinômio de grau menor ou igual a 2;

na Seção 6.3 estuda-se a não homogeneidade quando o termo não homogêneo é do tipo exponencial.

A motivação para o desenvolvimento deste capítulo consiste no Método dos Coeficientes Indeterminados para Equações Diferencias ordinárias lineares não homogêneas com coeficientes constantes. Nossa principal referência foi o livro [3].

6.1 Equações de diferenças lineares, não homogêneas, de segunda ordem, com coeficientes constantes

As equações de diferenças lineares, não homogêneas e com coeficientes constantes, de ordem m têm a forma geral

$$\begin{cases} y_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i} \right) + \beta_n, \ \alpha_i, \ \beta_n \in \mathbb{R}, \ n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados}, \end{cases} \tag{6.1}$$

em que $\{\beta_n\} \neq \{0\}$.

A equação homogênea associada à Equação (6.1) é

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i},\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ n \geq m. \tag{6.2}$$

As equações de diferenças lineares, não homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes têm a forma da Equação (6.1), com $m = 2$. Ou seja, são equações do tipo

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + \beta_n,\ a, b, \beta_n \in \mathbb{R},\ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados,} \end{cases} \tag{6.3}$$

em que $\{\beta_n\} \neq \{0\}$.

A equação homogênea associada à Equação (6.3) é

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2},\ a, b \in \mathbb{R},\ n \geq 2. \tag{6.4}$$

No Capítulo 4 apresentamos a solução geral da Equação (6.4). Mostraremos, na Proposição 6.1.2, que a solução geral da Equação (6.3) é expressa pela soma da solução geral da equação homogênea associada e de uma solução particular da equação não homogênea. Também estudaremos algumas equações de diferenças lineares (mas, não homogêneas) de segunda ordem com coeficientes constantes, pois, desta forma, o estudo realizado no Capítulo 4, juntamente aos resultados a serem evidenciados neste capítulo nos possibilitará escrever a solução geral dessas equações.

Proposição 6.1.1. *Se Y_n^1 e Y_n^2 são soluções da Equação (6.3), então a diferença, $Y_n^1 - Y_n^2$, é uma solução da equação Equação (6.4). E, se y_n^1 e y_n^2 forem soluções linearmente independentes da Equação (6.4), então*

$$Y_n^1 - Y_n^2 = k_1 y_n^1 + k_2 y_n^2, \tag{6.5}$$

em que k_1 e k_2 são constantes reais.

Prova. Considere o operador linear

$$L[y] = y_n - ay_{n-1} - by_{n-2}.$$

Com tal definição, escrevemos a equação não homogênea (6.3) e a equação homogênea associada (6.4), respectivamente, como

$$L[y] = y_n - (ay_{n-1} + by_{n-2}) = \beta_n \quad \text{e} \quad L[y] = y_n - (ay_{n-1} + by_{n-2}) = 0.$$

Estabelecida a notação, provaremos a proposição. Se Y_n^1 e Y_n^2 forem soluções da equação não homogênea (6.3), tem-se que $L[Y_n^1] = L[Y_n^2] = \beta_n$. Logo,

$$L[Y_n^1] - L[Y_n^2] = 0. \tag{6.6}$$

Sendo L um operador linear, a Equação (6.6) resulta em

$$L[Y_n^1 - Y_n^2] = 0. \tag{6.7}$$

A Equação (6.7) nos diz que $Y_n^1 - Y_n^2$ é uma solução da Equação (6.4). Como a solução geral da Equação (6.4) é dada por

$$y_n = k_1 y_n^1 + k_2 y_n^2, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

se $Y_n^1 - Y_n^2$ é uma solução da Equação (6.4), então

$$Y_n^1 - Y_n^2 = k_1 y_n^1 + k_2 y_n^2, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Proposição 6.1.2 (Solução geral da equação de diferenças lineares e não homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes)**.** *A solução geral da equação não homogênea (6.3) pode ser escrita na forma*

$$\psi_n = k_1 y_n^1 + k_2 y_n^2 + Y_n,$$

em que $\{y_n^1, y_n^2\}$ forma uma base para o conjunto solução da equação homogênea associada (6.4), k_1 e k_2 são constantes reais arbitrárias e Y_n é uma solução particular da equação não homogênea (6.3).

Prova. Identificando, na Proposição 6.1.1, a solução ψ_n com Y_n^1 e a solução Y_n com Y_n^2, o resultado segue-se. □

Observação 6.1.1. *Objetivamos determinar uma solução particular da equação não homogênea (6.3). Inicialmente procuramos por soluções com um formato similar à β_n, porém vimos que isto implicava em restrições nos coeficientes a e b. Em nossos cálculos percebemos que para cobrir todos os casos era necessário considerar a solução particular similar à β_n, mas multiplicada por um termo n^τ com $\tau = 0, 1, 2$. Os resultados obtidos são apresentados nas seções seguintes.*

6.2 β_n, termo polinomial de grau ≤ 2

Nesta seção, faremos um estudo de equações com a forma da Equação (6.3) em que β_n é expresso por um polinômio $p(n)$ de grau menor ou igual a 2. Ou seja, consideraremos equações da forma

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + p(n), \ a,b \in \mathbb{R}, \ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados}, \end{cases} \tag{6.8}$$

em que $p(n)$ é um polinômio com valores reais, de grau menor ou igual a 2.

6.2.1 Polinômios de grau zero

Inicialmente, consideraremos o polinômio $p(n)$, da Equação (6.8), expresso por uma constante real não nula. Ou seja, analisaremos as equações do tipo

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_0, \ a,b,k_0 \in \mathbb{R}, \ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados}, \end{cases} \tag{6.9}$$

em que $k_0 \neq 0$.

Proposição 6.2.1. *Seja a equação*

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_0, \ a,b \in \mathbb{R}, \ k_0 \in \mathbb{R} - \{0\}, \ n \geq 2. \tag{6.10}$$

Então existe uma solução particular da forma $y_n = C_0 n^\tau$, com $\tau \in \mathbb{N}$ e $C_0 \neq 0$, de modo que

1. *se $a+b \neq 1$, então $\tau = 0$ e $C_0 = \dfrac{k_0}{1-(a+b)}$;*
2. *se $a+b = 1$ e $a+2b \neq 0$, então $\tau = 1$ e $C_0 = \dfrac{k_0}{a+2b}$;*
3. *se $a+b = 1$ e $a+2b = 0$, então $\tau = 2$ e $C_0 = \dfrac{k_0}{2}$.*

Prova. 1. Suponhamos $a+b \neq 1$ e que $y_n = C_0 n^\tau$, com $\tau \geq 0$ e $C_0 \neq 0$, seja uma solução particular da Equação (6.10). Assim

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_0$$

implica em

$$C_0 n^\tau = a[C_0(n-1)^\tau] + b[C_0(n-2)^\tau] + k_0. \tag{6.11}$$

Pelo desenvolvimento binomial

$$\begin{aligned}(n-a)^\tau &= \sum_{j=0}^{\tau}(-1)^j \binom{\tau}{j} n^{\tau-j}a^j \\ &= \binom{\tau}{0} n^\tau a^0 - \binom{\tau}{1} n^{\tau-1}a^1 + \binom{\tau}{2} n^{\tau-2}a^2 - \cdots + (-1)^\tau \binom{\tau}{\tau} n^0 a^\tau.\end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (6.11) temos

$$\begin{aligned}C_0 n^\tau &= (a+b)C_0 \binom{\tau}{0} n^\tau - (a+2b)C_0 \binom{\tau}{1} n^{\tau-1} + (a+4b)C_0 \binom{\tau}{2} n^{\tau-2} - \cdots \\ &\cdots + (-1)^\tau (a+2^\tau b)C_0 \binom{\tau}{\tau} + k_0.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Manipulando a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}C_0 n^\tau &= (a+b)C_0 n^\tau - (a+2b)\tau C_0 n^{\tau-1} + (a+4b)\frac{\tau(\tau-1)}{2} C_0 n^{\tau-2} - \cdots \\ &\cdots + (-1)^\tau (a+2^\tau b)C_0 + k_0.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Analisando a Equação (6.13), que representa a igualdade de dois polinômios, se $\tau \geq 1$, então conclui-se o absurdo de ser $a+b=1$. Logo, $\tau = 0$ e, deste modo, tem-se

$$C_0 = (a+b)C_0 + k_0,$$

de modo que

$$C_0 = \frac{k_0}{1-(a+b)}.$$

2. Suponha que a Equação (6.10), com $a+b=1$ e $a+2b \neq 0$, tenha uma solução particular da forma $y_n = C_0 n^\tau$. Supondo $\tau = 0$ na equação (6.13), tem-se que

$$C_0 = (a+b)C_0 + k_0,$$

implicando no absurdo $k_0 = 0$ (lembre-se que, por hipótese $k_0 \neq 0$). Logo, devemos ter $\tau \geq 1$, ou seja, $\tau = 1$ ou $\tau \geq 2$. Entretanto, considerando-se $\tau \geq 2$, na Equação (6.13), como o polinômio que antecede o sinal de igualdade não apresenta o termo de grau $\tau - 1$, conclui-se que

$$-(a+2b)\tau C_0 = 0,$$

o que forneceria $a+2b = 0$, pois $C_0 \neq 0$, o que contradiz a hipótese. Deste modo, $\tau = 1$, e sendo $a+b = 1$, a Equação (6.13) fornece

$$0 = -(a+2b)C_0 + k_0$$

o que implica

$$C_0 = \frac{k_0}{a+2b}.$$

3. Se $a+b = 1$ e $a+2b = 0$, então obtém-se o sistema

$$\begin{cases} a+b = 1, \\ a+2b = 0. \end{cases}$$

De modo que $a = 2$ e $b = -1$. Substituindo os valores determinados para a e b na Equação (6.13), obtém-se a equação

$$0 = -2\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0 n^{\tau-2} - \cdots + (-1)^{\tau}(2-2^{\tau})C_0 + k_0. \tag{6.14}$$

Desta forma, analisando a Equação (6.14), nota-se que há duas possibilidades: $\tau = 2$ ou $\tau \geq 3$ (note que para $\tau = 0$, ou $\tau = 1$, a Equação (6.14) não representa uma igualdade de polinômios). No entanto, se $\tau \geq 3$, teríamos

$$-2\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0 = 0,$$

implicando no absurdo $C_0 = 0$.

Deste modo, $\tau = 2$ e, da Equação (6.14), conclui-se que

$$0 = -2C_0 + k_0,$$

e portanto

$$C_0 = \frac{k_0}{2}.$$

$\square$

Exemplo 6.2.1. *Seja a equação* $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} + 5,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *De modo que,*

$$a = 2,\ b = 1 \text{ e } k_0 = 5.$$

Logo $a + b \neq 1$ *e pela Proposição 6.2.1 uma solução particular será* $y_n = C_0 n^0 = C_0$*, com*

$$C_0 = \frac{k_0}{1-(a+b)} = \frac{5}{1-3} = -\frac{5}{2}.$$

Verifica-se, substituindo $y_n = -\frac{5}{2}$ *na equação* $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} + 5$*, que* $y_n = -\frac{5}{2}$ *é solução. Pela Equação (4.14), (veja capítulo* 4*), a solução geral da equação homogênea associada (ou seja, da equação* $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2},\ y_0, y_1,\ n \geq 2$*) é*

$$y_n = k_1(1-\sqrt{2})^n + k_2(1+\sqrt{2})^n,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

Portanto, a solução geral da equação $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} + 5,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2,$ *é*

$$y_n = k_1(1-\sqrt{2})^n + k_2(1+\sqrt{2})^n - \frac{5}{2},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

Exemplo 6.2.2. *Seja a equação* $y_n = -y_{n-1} + 2y_{n-2} + 5,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *Neste caso,*

$$a = -1,\ b = 2 \text{ e } k_0 = 5.$$

Assim, $a + b = 1$ *e* $a + 2b \neq 0$ *e, desta forma, pela Proposição 6.2.1 uma solução particular é dada por* $y_n = C_0 n^1 = C_0 n$*, em que*

$$C_0 = \frac{k_0}{a+2b} = \frac{5}{-1+4} = \frac{5}{3},$$

ou seja, $y_n = \frac{5}{3}n$ *é uma solução particular da equação* $y_n = -y_{n-1} + 2y_{n-2} + 5.$

Exemplo 6.2.3. *Seja a equação* $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 5,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *Daí,*

$$a = 2,\ b = -1 \text{ e } k_0 = 5.$$

Desta forma, $a + b = 1$ *e* $a + 2b = 0$ *e, deste modo, pela Proposição 6.2.1, uma solução particular será* $y_n = C_0 n^2$*, com*

$$C_0 = \frac{k_0}{2} = \frac{5}{2},$$

de modo que, uma solução particular da equação $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 5$ *é* $y_n = \frac{5}{2}n^2$.

6.2.2 Polinômios de grau um

Nesta seção estudaremos as equações da forma (6.8), em que $p(n)$ é um polinômio do primeiro grau. Isto é, abordaremos as equações da forma

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_1 n + k_0, \ a,b,k_1,k_0 \in \mathbb{R}, \ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados}, \end{cases} \tag{6.15}$$

em que $k_1 \neq 0$.

Proposição 6.2.2. *Seja a equação*

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_1 n + k_0, \ a,b,k_0 \in \mathbb{R}, \ k_1 \in \mathbb{R} - \{0\}, \ n \geq 2. \tag{6.16}$$

Então existe uma solução particular da forma $y_n = (C_1 n + C_0)n^\tau$, *com* $\tau \in \mathbb{N}$ *e* $C_1 \neq 0$, *em que*

1. *se* $a+b \neq 1$, *então* $\tau = 0$ *e*

$$C_1 = \frac{k_1}{1-(a+b)}, \ C_0 = \frac{(1-(a+b))k_0 - (a+2b)k_1}{(1-(a+b))^2};$$

2. *se* $a+b = 1$ *e* $a+2b \neq 0$, *então* $\tau = 1$ *e*

$$C_1 = \frac{k_1}{2(a+2b)}, \ C_0 = \frac{(a+4b)k_1 + 2(a+2b)k_0}{2(a+2b)^2};$$

3. *se* $a+b = 1$ *e* $a+2b = 0$, *então* $\tau = 2$ *e*

$$C_1 = \frac{k_1}{6}, \ C_0 = \frac{k_1 + k_0}{2}.$$

Prova. 1. Suponha que $a+b \neq 1$ e $y_n = (C_1 n + C_0)n^\tau = C_1 n^{\tau+1} + C_0 n^\tau$, com $\tau \geq 0$ e $C_1 \neq 0$, seja uma solução particular da Equação (6.16). Daí

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_1 n + k_0$$

implica

$$\begin{aligned} C_1 n^{\tau+1} + C_0 n^\tau &= a[C_1(n-1)^{\tau+1} + C_0(n-1)^\tau] + b[C_1(n-2)^{\tau+1} + C_0(n-2)^\tau] + \\ &\quad k_1 n + k_0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Através do desenvolvimento binomial, tem-se que

$$
\begin{aligned}
C_1 n^{\tau+1} + C_0 n^{\tau} &= (a+b)C_1 \begin{pmatrix} \tau+1 \\ 0 \end{pmatrix} n^{\tau+1} - \\
& \left[(a+2b)C_1 \begin{pmatrix} \tau+1 \\ 1 \end{pmatrix} - (a+b)C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}\right] n^{\tau} + \\
& \left[(a+4b)C_1 \begin{pmatrix} \tau+1 \\ 2 \end{pmatrix} - (a+2b)C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}\right] n^{\tau-1} - \\
& \left[(a+8b)C_1 \begin{pmatrix} \tau+1 \\ 3 \end{pmatrix} - (a+4b)C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 2 \end{pmatrix}\right] n^{\tau-2} + \ \cdots \ + k_1 n + k_0.
\end{aligned}
$$

Essa equação, depois de ser manipulada, implica em

$$
\begin{aligned}
C_1 n^{\tau+1} + C_0 n^{\tau} &= (a+b)C_1 n^{\tau+1} - [(a+2b)(\tau+1)C_1 - (a+b)C_0] n^{\tau} + \\
& \left[(a+4b)\frac{(\tau+1)\tau}{2}C_1 - (a+2b)\tau C_0\right] n^{\tau-1} - \\
& \left[(a+8b)\frac{(\tau^2-1)\tau}{6}C_1 - (a+4b)\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0\right] n^{\tau-2} + \ \cdots \\
& \cdots \ + k_1 n + k_0.
\end{aligned} \tag{6.18}
$$

Como $\tau \geq 0$, temos duas possibilidades: $\tau = 0$ ou $\tau \geq 1$. Se $\tau \geq 1$, então $\tau + 1 \geq 2$, implicando em

$$C_1 = (a+b)C_1,$$

o que nos forneceria $a+b=1$, pois $C_1 \neq 0$, contradizendo nossa hipótese. Daí, $\tau = 0$ e a Equação (6.18) se escreve como

$$C_1 n + C_0 = [(a+b)C_1 + k_1]n - [(a+2b)C_1 - (a+b)C_0] + k_0,$$

que corresponde ao seguinte sistema

$$
\begin{cases}
(1-(a+b))C_1 = k_1, \ (A) \\
(1-(a+b))C_0 + (a+2b)C_1 = k_0. \ (B)
\end{cases}
$$

Sendo $a+b \neq 1$, da Equação (A) conclui-se que

$$C_1 = \frac{k_1}{1-(a+b)}.$$

O valor anteriormente determinado para C_1 substituído na Equação (B) fornece

$$C_0 = \frac{(1-(a+b))k_0 - (a+2b)k_1}{(1-(a+b))^2}.$$

2. Vamos analisar o caso $a+b=1$ e $a+2b \neq 0$. Como $b = 1-a$, podemos reescrever a Equação (6.18) em função apenas do coeficiente a, da seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& (a-2)(\tau+1)C_1 n^{\tau} + \left[(4-3a)\frac{(\tau+1)\tau}{2}C_1 + (a-2)\tau C_0\right] n^{\tau-1} + \\ & \left[(7a-8)\frac{(\tau^2-1)\tau}{6}C_1 + (4-3a)\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0\right] n^{\tau-2} + \;\cdots\; + k_1 n + k_0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Sendo $a+b=1$, suponha que a Equação (6.16) tenha uma solução particular da forma $y_n = (C_1 n + C_0)n^{\tau} = C_1 n^{\tau+1} + C_0 n^{\tau}$, com $a+b=1$ e $a+2b \neq 0$. Assim, fazendo $\tau = 0$ na Equação (6.19), que no caso $a+b=1$ equivale à Equação (6.16), conclui-se que

$$0 = k_1 n + [(a-2)C_1 + k_0],$$

o que implica no absurdo $k_1 = 0$. Logo, $\tau \geq 1$, ou melhor, $\tau = 1$ ou $\tau \geq 2$.

Se $\tau \geq 2$, então

$$(a-2)(\tau+1)C_1 = 0.$$

Como $b = 1-a$, escrever $a+2b \neq 0$ é o mesmo que $2-a \neq 0$. Dessa forma, a equação anterior fornece $C_1 = 0$, o que é, por hipótese, um absurdo. Logo $\tau = 1$, e da Equação (6.19) conclui-se que

$$0 = [2(a-2)C_1 + k_1]n + [(4-3a)C_1 + (a-2)C_0 + k_0],$$

deste modo, obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2(2-a)C_1 = k_1, \; (A) \\ (2-a)C_0 + (3a-4)C_1 = k_0. \; (B) \end{cases}$$

Visto que $2-a \neq 0$, da Equação (A) conclui-se que

$$C_1 = \frac{k_1}{2(2-a)}.$$

Substituindo esse valor obtido para C_1 na Equação (B) tem-se que

$$C_0 = \frac{(4-3a)k_1 + 2(2-a)k_0}{2(2-a)^2}.$$

Como $2-a = a+2b$ segue-se que

$$C_1 = \frac{k_1}{2(a+2b)},\ C_0 = \frac{(a+4b)k_1 + 2(a+2b)k_0}{2(a+2b)^2}.$$

3. Sendo $a+b=1$ e $a+2b=0$ vimos que $a=2$ e $b=-1$. Deste modo, a equação (6.18) se escreve como

$$0 = -(\tau+1)\tau C_1 n^{\tau-1} + [(\tau^2-1)\tau C_1 - \tau(\tau-1)C_0]n^{\tau-2} + \cdots + k_1 n + k_0. \tag{6.20}$$

Inicialmente notemos que $\tau \geq 1$, pois, $\tau = 0$ implica que a equação anterior não representa uma igualdade de polinômios. Afirmamos também que não existe solução da Equação (6.16), com $a=2$ e $b=-1$, da forma $y_n = (C_1 n + C_0)n^\tau$, com $\tau = 1$.

De fato, se consideramos $\tau = 1$ na Equação (6.20), que é equivalente à Equação (6.16), tem-se que

$$0 = -2C_1 + k_1 n + k_0,$$

de modo que chegamos ao absurdo $k_1 = 0$.

Logo devemos ter $\tau \geq 2$ e devemos considerar as possibilidades: $\tau = 2$ ou $\tau \geq 3$. Se $\tau \geq 3$, então o único termo de ordem $\tau - 1$ que aparece na Equação (6.20) deve ter coeficiente nulo, ou seja

$$-(\tau+1)\tau C_1 = 0,$$

o que implica em $C_1 = 0$, que é um absurdo. Daí $\tau = 2$, e da Equação (6.20) tem-se que

$$0 = [k_1 - 6C_1]n + [6C_1 - 2C_0 + k_0].$$

Desta forma, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 6C_1 = k_1, \\ 2C_0 = 6C1 + k_0. \end{cases}$$

Cuja solução é

$$C_1 = \frac{k_1}{6},\ C_0 = \frac{k_1 + k_0}{2}.$$

$\square$

Exemplo 6.2.4. *Seja a equação* $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} + 5n - 2,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *Deste modo,*

$$a = 2,\ b = 1,\ k_1 = 5 \text{ e } k_0 = -2.$$

Daí $a + b \neq 1$ *e uma solução particular, pela Proposição 6.2.2, será* $y_n = (C_1 n + C_0)n^0 = C_1 n + C_0$ *sendo que*

$$C_1 = \frac{k_1}{1-(a+b)} = \frac{5}{1-3} = -\frac{5}{2}$$

e

$$C_0 = \frac{(1-(a+b))k_0 - (a+2b)k_1}{(1-(a+b))^2} = \frac{(1-3)(-2)-(2+2)(5)}{(1-3)^2} = -\frac{16}{4} = -4.$$

Portanto, uma solução particular da equação $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} + 5n - 2$ *é* $y_n = -\frac{5}{2}n - 4.$

Exemplo 6.2.5. *Seja a equação* $y_n = -y_{n-1} + 2y_{n-2} + 2n,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *Neste caso,*

$$a = -1,\ b = 2,\ k_1 = 2 \text{ e } k_0 = 0.$$

Logo $a + b = 1$, $a + 2b \neq 0$ *e pela Proposição 6.2.2 uma solução particular é dada por* $y_n = (C_1 n + C_0)n^1 = C_1 n^2 + C_0 n$ *com*

$$C_1 = \frac{k_1}{2(a+2b)} = \frac{2}{2(-1+4)} = \frac{1}{3}$$

e

$$C_0 = \frac{(a+4b)k_1 + 2(a+2b)k_0}{2(a+2b)^2} = \frac{(-1+8)(2)+2(-1+4)(0)}{2(-1+4)^2} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

Logo, $y_n = \frac{1}{3}n^2 + \frac{7}{9}n$ *é uma solução particular da equação* $y_n = -y_{n-1} + 2y_{n-2} + 2n.$

Exemplo 6.2.6. *Seja a equação* $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 4n + 5,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *Assim,*

$$a = 2,\ b = -1,\ k_1 = 4 \text{ e } k_0 = 5.$$

De modo que, $a + b = 1$, $a + 2b = 0$ *e uma solução particular, pela Proposição 6.2.2, será* $y_n = (C_1 n + C_0)n^2 = C_1 n^3 + C_0 n^2$ *em que*

$$C_1 = \frac{k_1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

e

$$C_0 = \frac{k_1 + k_0}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}.$$

Desta forma, uma solução particular da equação $y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 4n + 5$ *é dada por* $y_n = \frac{2}{3}n^3 + \frac{9}{2}n^2$.

6.2.3 Polinômios de grau dois

Nesta seção consideraremos as equações da forma (6.8), em que $p(n)$ é um polinômio do segundo grau. Isto é, estudaremos as equações da forma

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_2n^2 + k_1n + k_0, \ a, b, k_2, k_1, k_0 \in \mathbb{R}, \ n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \text{ dados}, \end{cases} \tag{6.21}$$

em que $k_2 \neq 0$.

Proposição 6.2.3. *Seja a equação*

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + k_2n^2 + k_1n + k_0, \ a, b, k_1, k_0 \in \mathbb{R}, \ k_2 \in \mathbb{R} - \{0\}, \ n \geq 2. \tag{6.22}$$

Então existe uma solução particular da forma $y_n = (C_2n^2 + C_1n + C_0)n^\tau$*, com* $\tau \in \mathbb{N}$ *e* $C_2 \neq 0$*, em que*

1. *se* $a + b \neq 1$*, então* $\tau = 0$ *e*

$$C_2 = \frac{k_2}{1-(a+b)}, \ C_1 = \frac{(1-(a+b))k_1 - 2(a+2b)k_2}{(1-(a+b))^2},$$

$$C_0 = \frac{(1-(a+b))^2k_0 - (1-(a+b))(a+2b)k_1 + [(1-(a+b))(a+4b) + 2(a+2b)^2]k_2}{(1-(a+b))^3};$$

2. *se* $a + b = 1$ *e* $a + 2b \neq 0$*, então* $\tau = 1$ *e*

$$C_2 = \frac{k_2}{3(a+2b)}, \ C_1 = \frac{(a+4b)k_2 + (a+2b)k_1}{2(a+2b)^2},$$

$$C_0 = -\frac{[2(a+8b)(a+2b) - 3(a+4b)^2]k_2 - 3(a+4b)(a+2b)k_1 - 6(a+2b)^2k_0}{6(a+2b)^3};$$

3. *se* $a + b = 1$ *e* $a + 2b = 0$*, então* $\tau = 2$ *e*

$$C_2 = \frac{k_2}{12}, \ C_1 = \frac{k_1 + 2k_2}{6}, \ C_0 = \frac{6(k_0 + k_1) + 5k_2}{12}.$$

Prova. Provemos 1. Para tal, suponhamos $a+b\neq 1$ e que $y_n=(C_2n^2+C_1n+C_0)n^\tau=C_2n^{\tau+2}+C_1n^{\tau+1}+C_0n^\tau$, com $\tau\geq 0$ e $C_2\neq 0$, seja uma solução particular da equação (6.22). Logo

$$y_n=ay_{n-1}+by_{n-2}+k_2n^2+k_1n+k_0$$

implica

$$\begin{aligned} C_2n^{\tau+2}+C_1n^{\tau+1}+C_0n^\tau &= a[C_2(n-1)^{\tau+2}+C_1(n-1)^{\tau+1}+C_0(n-1)^\tau]+ \\ &\quad b[C_2(n-2)^{\tau+2}+C_1(n-2)^{\tau+1}+C_0(n-2)^\tau]+ \\ &\quad k_2n^2+k_1n+k_0. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Pelo desenvolvimento binomial, tem-se que

$$\begin{aligned} &C_2n^{\tau+2}+C_1n^{\tau+1}+C_0n^\tau= \\ &(a+b)C_2\begin{pmatrix}\tau+2\\0\end{pmatrix}n^{\tau+2}-\left[(a+2b)C_2\begin{pmatrix}\tau+2\\1\end{pmatrix}-(a+b)C_1\begin{pmatrix}\tau+1\\0\end{pmatrix}\right]n^{\tau+1}+ \\ &\left[(a+4b)C_2\begin{pmatrix}\tau+2\\2\end{pmatrix}-(a+2b)C_1\begin{pmatrix}\tau+1\\1\end{pmatrix}+(a+b)C_0\begin{pmatrix}\tau\\0\end{pmatrix}\right]n^{\tau}- \\ &\left[(a+8b)C_2\begin{pmatrix}\tau+2\\3\end{pmatrix}-(a+4b)C_1\begin{pmatrix}\tau+1\\2\end{pmatrix}+(a+2b)C_0\begin{pmatrix}\tau\\1\end{pmatrix}\right]n^{\tau-1}+ \\ &\left[(a+16b)C_2\begin{pmatrix}\tau+2\\4\end{pmatrix}-(a+8b)C_1\begin{pmatrix}\tau+1\\3\end{pmatrix}+(a+4b)C_0\begin{pmatrix}\tau\\2\end{pmatrix}\right]n^{\tau-2}\;-\;\cdots \\ &\cdots\;+k_2n^2+k_1n+k_0. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
&C_2n^{\tau+2}+C_1n^{\tau+1}+C_0n^{\tau} = \\
&\quad (a+b)C_2n^{\tau+2}-[(a+2b)(\tau+2)C_2-(a+b)C_1]n^{\tau+1} + \\
&\quad \left[(a+4b)\frac{(\tau+2)(\tau+1)}{2}C_2-(a+2b)(\tau+1)C_1+(a+b)C_0\right]n^{\tau} - \\
&\quad \left[(a+8b)\frac{(\tau+2)(\tau+1)\tau}{6}C_2-(a+4b)\frac{(\tau+1)\tau}{2}C_1+(a+2b)\tau C_0\right]n^{\tau-1} + \\
&\quad \left[(a+16b)\frac{(\tau+2)(\tau^2-1)\tau}{24}C_2-(a+8b)\frac{(\tau^2-1)\tau}{6}C_1+(a+4b)\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0\right]n^{\tau-2} - \cdots \\
&\quad \cdots + k_2n^2+k_1n+k_0.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Deste modo, visto que $\tau \geq 0$, há duas possibilidades: $\tau = 0$ ou $\tau \geq 1$. Contudo, se $\tau \geq 1$, então $\tau+2 \geq 3$. Daí

$$C_2 = (a+b)C_2,$$

de modo que $a+b=1$, pois $C_2 \neq 0$, o que contradiz nossa hipótese. Logo $\tau = 0$, e a equação (6.24) se escreve como

$$\begin{aligned}
C_2n^2+C_1n+C_0 &= [(a+b)C_2+k_2]n^2-[2(a+2b)C_2-(a+b)C_1-k_1]n + \\
&\quad [(a+4b)C_2-(a+2b)C_1+(a+b)C_0+k_0],
\end{aligned}$$

implicando no seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{r}
(1-(a+b))C_2 = k_2, \ (A) \\
(1-(a+b))C_1+2(a+2b)C_2 = k_1, \ (B) \\
(1-(a+b))C_0+(a+2b)C_1-(a+4b)C_2 = k_0. \ (C)
\end{array}\right.$$

Sendo $a+b \neq 1$, da Equação (A), tem-se que

$$C_2 = \frac{k_2}{1-(a+b)}.$$

Substituindo esse valor obtido para C_2 na Equação (B) obtém-se

$$C_1 = \frac{(1-(a+b))k_1-2(a+2b)k_2}{(1-(a+b))^2}.$$

Determinados C_2 e C_1, da Equação (C) conclui-se que

$$C_0 = \frac{(1-(a+b))^2k_0 - (1-(a+b))(a+2b)k_1 + [(1-(a+b))(a+4b)+2(a+2b)^2]k_2}{(1-(a+b))^3}.$$

Provemos agora o item 2. Novamente, objetivando simplificar nossa análise, considerando (6.24) em função unicamente do coeficiente a. Visto que se $a+b=1$, então $b=1-a$, reescreveremos a Equação (6.24) como

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & (a-2)(\tau+2)C_2n^{\tau+1} + \left[(4-3a)\frac{(\tau+2)(\tau+1)}{2}C_2 + (a-2)(\tau+1)C_1\right]n^{\tau} + \\ & \left[(7a-8)\frac{(\tau+2)(\tau+1)\tau}{6}C_2 + (4-3a)\frac{(\tau+1)\tau}{2}C_1 + (a-2)\tau C_0\right]n^{\tau-1} + \\ & \left[(16-15a)\frac{(\tau+2)(\tau^2-1)\tau}{24}C_2 + (7a-8)\frac{(\tau^2-1)\tau}{6}C_1 + (4-3a)\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0\right]n^{\tau-2} + \cdots \\ & \cdots + k_2n^2 + k_1n + k_0. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Suponhamos uma solução particular da forma $y_n = (C_2n^2 + C_1n + C_0)n^{\tau} = C_2n^{\tau+2} + C_1n^{\tau+1} + C_0n^{\tau}$, com $\tau = 0$, para a Equação (6.22) com $a+b=1$ e $a+2b \neq 0$. Assim, substituindo $\tau = 0$ na Equação (6.25), que foi obtida da equação (6.22) com $a+b=1$, tem-se que

$$0 = k_2n^2 + [2(a-2)C_2 + k_1]n + [(4-3a)C_2 + (a-2)C_1 + k_0].$$

Desta forma, concluímos que $k_2 = 0$, o que um absurdo (por hipótese). Logo $\tau \geq 1$, ou seja, $\tau = 1$ ou $\tau \geq 2$. Se $\tau \geq 2$, então o único termo de ordem $\tau+1$ deve ter coeficiente nulo, ou seja

$$(a-2)(\tau+2)C_2 = 0.$$

Como $a+2b \neq 0$ equivale a escrever $a-2 \neq 0$ (pois $b = 1-a$), da equação anterior concluímos que $C_2 = 0$, o que é um absurdo, por hipótese. Logo $\tau = 1$, e a Equação (6.25) fornece

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & [3(a-2)C_2 + k_2]n^2 + [3(4-3a)C_2 + 2(a-2)C_1 + k_1]n + \\ & (7a-8)C_2 + (4-3a)C_1 + (a-2)C_0 + k_0. \end{aligned}$$

De modo que obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3(a-2)C_2 + k_2 = 0, \; (A) \\ 3(4-3a)C_2 + 2(a-2)C_1 + k_1 = 0, \; (B) \\ (7a-8)C_2 + (4-3a)C_1 + (a-2)C_0 + k_0 = 0. \; (C) \end{cases}$$

Da Equação (A), visto que $a-2\neq 0$, tem-se que

$$C_2=-\frac{k_2}{3(a-2)}.$$

Substituindo o valor de C_2 na Equação (B), obtemos

$$C_1=\frac{(4-3a)k_2-(a-2)k_1}{2(a-2)^2}.$$

E pela substituição na Equação (C) dos valores obtidos para C_2 e C_1, concluímos que

$$C_0=\frac{[2(7a-8)(a-2)-3(3a-4)^2]k_2-3(3a-4)(a-2)k_1-6(a-2)^2k_0}{6(a-2)^3}.$$

Como $a+2b=2-a,\ a+4b=4-3a$ e $a+8b=8-7a$, segue-se que

$$C_2=-\frac{k_2}{3(a-2)}=\frac{k_2}{3(2-a)}=\frac{k_2}{3(a+2b)},$$

$$C_1=\frac{(4-3a)k_2-(a-2)k_1}{2(a-2)^2}=\frac{(4-3a)k_2+(2-a)k_1}{2(2-a)^2}=\frac{(a+4b)k_2+(a+2b)k_1}{2(a+2b)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{[2(7a-8)(a-2)-3(3a-4)^2]k_2-3(3a-4)(a-2)k_1-6(a-2)^2k_0}{6(a-2)^3}\\
&= \frac{[2(8-7a)(2-a)-3(4-3a)^2]k_2-3(4-3a)(2-a)k_1-6(2-a)^2k_0}{-6(2-a)^3}\\
&= -\frac{[2(a+8b)(a+2b)-3(a+4b)^2]k_2-3(a+4b)(a+2b)k_1-6(a+2b)^2k_0}{6(a+2b)^3}.
\end{aligned}$$

3. Vejamos a prova do terceiro caso. Se $a+b=1$ e $a+2b=0$, tem-se que $a=2$ e $b=-1$ e a equação (6.25) (que foi obtida supondo $a+b=1$, como ocorre nesse caso) se escreve como

$$\begin{aligned}
0 &= -(\tau+2)(\tau+1)C_2n^\tau+[(\tau+2)(\tau+1)\tau C_2-(\tau+1)\tau C_1]n^{\tau-1}+\\
&\quad \left[-\frac{7}{12}(\tau+2)(\tau^2-1)\tau C_2+(\tau^2-1)\tau C_1-\tau(\tau-1)C_0\right]n^{\tau-2}+\ \cdots \qquad (6.26)\\
&\quad \cdots\ +k_2n^2+k_1n+k_0.
\end{aligned}$$

Inicialmente notemos que não existe solução da equação (6.22), com $a = 2$ e $b = -1$, na forma $y_n = (C_2n^2 + C_1n + C_0)n^\tau$, com $\tau = 1$ ou $\tau = 0$. De fato, considerando $\tau = 1$ e, em seguida, $\tau = 0$ na equação (6.26), que é equivalente à equação (6.22), obtemos, respectivamente

$$0 = -6C_2n + [6C_2 - 2C_1] + k_2n^2 + k_1n + k_0$$

e

$$0 = -2C_2 + k_2n^2 + k_1n + k_0.$$

Daí, em ambos os casos, conclui-se que $k_2 = 0$, o que contraria a hipótese ($k_2 \neq 0$). Logo, devemos ter $\tau \geq 2$, isto é, $\tau = 2$ ou $\tau \geq 3$.

Se $\tau \geq 3$, então o único termo de ordem τ que aparece na Equação (6.26) deve ter coeficiente nulo, isto é

$$-(\tau + 2)(\tau + 1)C_2 = 0.$$

A identidade anterior resulta em $C_2 = 0$, que, por hipótese, é um absurdo. Portanto $\tau = 2$, e da equação (6.26) tem-se que

$$0 = [k_2 - 12C_2]n^2 + [k_1 + 24C_2 - 6C_1]n + [k_0 - 14C_2 + 6C_1 - 2C_0],$$

que fornece o seguinte sistema

$$\begin{cases} k_2 - 12C_2 = 0, \ (A) \\ k_1 + 24C_2 - 6C_1 = 0, \ (B) \\ k_0 - 14C_2 + 6C_1 - 2C_0 = 0. \ (C) \end{cases}$$

Da Equação (A),

$$C_2 = \frac{k_2}{12},$$

e substituindo-se este valor na equação (B), tem-se que

$$C_1 = \frac{k_1 + 2k_2}{6}.$$

E os valores obtidos para C_1 e C_2, substituídos na equação (C), fornecem

$$C_0 = \frac{6(k_0 + k_1) + 5k_2}{12}$$

$\square$

Exemplo 6.2.7. *Seja a equação* $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2} + 5n^2 - 2,\ y_0, y_1,$ *dados*, $n \geq 2$. *Donde,*

$$a = 2,\ b = 1,\ k_2 = 5,\ k_1 = 0 \text{ e } k_0 = -2.$$

Logo $a+b\neq 1$ *e* $y_n=(C_2n^2+C_1n+C_0)n^0=C_2n^2+C_1n+C_0$, *de acordo com a proposição 6.2.3, será uma solução particular. Sendo que*

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{k_2}{1-(a+b)} = \frac{5}{1-(2+1)} = -\frac{5}{2},\\
C_1 &= \frac{(1-(a+b))k_1-2(a+2b)k_2}{(1-(a+b))^2} = \frac{(-2))(0)-2(4)(5)}{(-2)^2} = -10
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{(1-(a+b))^2k_0-(1-(a+b))(a+2b)k_1+[(1-(a+b))(a+4b)+2(a+2b)^2]k_2}{(1-(a+b))^3}\\
&= \frac{(-2)^2(-2)-(-2)(4)(0)+[(-2)(6)+2(4)^2](5)}{(-2)^3} = -\frac{23}{2}.
\end{aligned}
$$

Desta forma, uma solução particular da equação $y_n=2y_{n-1}+y_{n-2}+5n^2-2$ *é dada por* $y_n=-\frac{5}{2}n^2-10n-\frac{23}{2}$.

Exemplo 6.2.8. *Seja a equação* $y_n=y_{n-2}+n^2+n,\ y_0,y_1,$ *dados*, $n\geq 2$. *Daí,*

$$a=0,\ b=1,\ k_2=k_1=1 \text{ e } k_0=0.$$

Logo $a+b=1,\ a+2b\neq 0$ *e, pela Proposição 6.2.3, uma solução particular é dada por* $y_n=(C_2n^2+C_1n+C_0)n^1=C_2n^3+C_1n^2+C_0n$ *com*

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{k_2}{3(a+2b)} = \frac{1}{3(0+2)} = \frac{1}{6},\\
C_1 &= \frac{(a+4b)k_2+(a+2b)k_1}{2(a+2b)^2} = \frac{(4)(1)+(2)(1)}{2(2)^2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{[2(a+8b)(a+2b)-3(a+4b)^2]k_2-3(a+4b)(a+2b)k_1-6(a+2b)^2k_0}{6(a+2b)^3}\\
&= -\frac{[2(8)(2)-3(4)^2](1)-3(4)(2)(1)-6(2)^2(0)}{6(2)^3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $y_n=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n$ *é uma solução particular da equação* $y_n=y_{n-2}+n^2+n$.

Exemplo 6.2.9. *Seja a equação* $y_n=2y_{n-1}-y_{n-2}+4n^2+7n,\ y_0,y_1,$ *dados*, $n\geq 2$. *Assim,*

$$a=2,\ b=-1,\ k_2=4,\ k_1=7 \text{ e } k_0=0.$$

Desta forma, $a+b=1,\ a+2b=0$ *e uma solução particular, pela Proposição 6.2.3, será* $y_n=(C_2n^2+C_1n+C_0)n^2=C_2n^4+C_1n^3+C_0n^2$ *de modo que*

$$C_2 = \frac{k_2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$$C_1 = \frac{k_1+2k_2}{6} = \frac{7+2(4)}{6} = \frac{5}{2}$$

e

$$C_0 = \frac{6(k_0+k_1)+5k_2}{12} = \frac{6(0+7)+5(4)}{12} = \frac{31}{6}.$$

Logo, conclui-se que uma solução particular da equação $y_n=2y_{n-1}-y_{n-2}+4n^2+7n$ *é* $y_n=\frac{1}{3}n^4+\frac{5}{2}n^3+\frac{31}{6}n^2.$

6.3 β_n, termo exponencial

Nesta seção consideraremos a não homogeneidade das equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes dada por uma função exponencial. Ou seja, estudaremos as equações da forma

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1}+by_{n-2}+\phi^n,\ a,b,\phi\in\mathbb{R},\ n\geq 2; \\ y_0,y_1\in\mathbb{R} \text{ dados}, \end{cases}$$

em que $\phi\neq 0$.

Proposição 6.3.1. *Seja a equação*

$$y_n = ay_{n-1}+by_{n-2}+\phi^n,\ a,b\in\mathbb{R},\ \phi\in\mathbb{R}-\{0\},\ n\geq 2. \tag{6.27}$$

Então existe uma solução particular da forma $y_n=C_0n^\tau\phi^n$*, com* $\tau\in\mathbb{N}$ *e* $C_0\neq 0$*, em que*

1. *se* $\phi^2-a\phi-b\neq 0$*, então* $\tau=0$ *e* $C_0=\dfrac{\phi^2}{\phi^2-a\phi-b}$;
2. *se* $\phi^2-a\phi-b=0$ *e* $a\phi+2b\neq 0$*, então* $\tau=1$ *e* $C_0=\dfrac{\phi^2}{a\phi+2b}$;
3. *se* $\phi^2-a\phi-b=0$ *e* $a\phi+2b=0$*, então* $\tau=2$ *e* $C_0=\dfrac{1}{2}$.

Prova. Provemos a situação 1. Suponha $\phi^2 - a\phi - b \neq 0$ e que $y_n = C_0 n^\tau \phi^n$, com $\tau \geq 0$ e $C_0 \neq 0$, seja uma solução particular da equação (6.27). Daí

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} + \phi^n$$

implica

$$C_0 n^\tau \phi^n = a[C_0(n-1)^\tau \phi^{n-1}] + b[C_0(n-2)^\tau \phi^{n-2}] + \phi^n,$$

ou melhor, como $\phi \neq 0$, escrevemos

$$C_0 n^\tau \phi^n = \frac{a}{\phi}[C_0(n-1)^\tau \phi^n] + \frac{b}{\phi^2}[C_0(n-2)^\tau \phi^n] + \phi^n.$$

Uma vez que $\phi^n \neq 0$, qualquer que seja n, a equação acima resulta em

$$C_0 n^\tau = \frac{a\phi}{\phi^2}[C_0(n-1)^\tau] + \frac{b}{\phi^2}[C_0(n-2)^\tau] + 1. \tag{6.28}$$

Note que a equação anterior é da forma (6.11), cujo desenvolvimento binomial é mostrado em (6.12). Neste sentido, o desenvolvimento binomial da Equação (6.28) fornece

$$\begin{aligned} C_0 n^\tau &= \frac{a\phi + b}{\phi^2} C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} n^\tau - \frac{a\phi + 2b}{\phi^2} C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} n^{\tau-1} + \frac{a\phi + 4b}{\phi^2} C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ 2 \end{pmatrix} n^{\tau-2} - \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^\tau \frac{a\phi + 2^\tau b}{\phi^2} C_0 \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix} + 1. \end{aligned}$$

Manipulando-se algebricamente a equação anterior, temos

$$\begin{aligned} C_0 n^\tau &= \left(\frac{a\phi + b}{\phi^2}\right) C_0 n^\tau - \left(\frac{a\phi + 2b}{\phi^2}\right) C_0 \tau n^{\tau-1} + \left(\frac{a\phi + 4b}{\phi^2}\right) \frac{\tau(\tau-1)}{2} 2C_0 n^{\tau-2} \\ &= \cdots + (-1)^\tau \frac{a\phi + 2^\tau b}{\phi^2} C_0 + 1. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Assim, como $\tau \geq 0$, há duas possibilidades: $\tau = 0$ ou $\tau \geq 1$. Se $\tau \geq 1$, então, da equação (6.29), conclui-se que

$$\frac{a\phi + b}{\phi^2} = 1,$$

implicando em $\phi^2 - a\phi - b = 0$, contradizendo nossa hipótese. Logo, $\tau = 0$, e a equação (6.29) fornece

$$C_0 = \left(\frac{a\phi + b}{\phi^2}\right) C_0 + 1,$$

de modo que

$$\left(1-\frac{a\phi+b}{\phi^2}\right)C_0=1.$$

Portanto, como $\phi^2-a\phi-b\neq 0$, tem-se que

$$C_0=\frac{\phi^2}{\phi^2-a\phi-b}.$$

Vejamos o caso 2. Considere o polinômio $p(\lambda)=\lambda^2-a\lambda-b$, o polinômio característico da equação homogênea associada à equação (6.27). Analisaremos neste momento o caso em que ϕ é raiz de $p(\lambda)$, ou seja $p(\phi)=\phi^2-a\phi-b=0$ e $a\phi+2b\neq 0$. Se $\phi^2-a\phi-b=0$, então $a\phi+b=\phi^2$ e assim a equação (6.29) se reduz a

$$0=-\left(\frac{a\phi+2b}{\phi^2}\right)\tau C_0 n^{\tau-1}+\left(\frac{a\phi+4b}{\phi^2}\right)\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0 n^{\tau-2}+\ \cdots\ +1. \tag{6.30}$$

Logo, da Equação (6.30), conclui-se que $\tau\geq 1$ (note que se $\tau=0$, então o membro à direita da Equação (6.30) não representa um polinômio). Ou seja, tem-se que $\tau=1$ ou $\tau\geq 2$.

Se $\tau\geq 2$, então

$$\frac{a\phi+2b}{\phi^2}=0,$$

de modo que $a\phi+2b=0$, contradizendo nossa hipótese. Assim $\tau=1$ e a Equação (6.30) fornece

$$0=-\left(\frac{a\phi+2b}{\phi^2}\right)C_0+1.$$

Desta forma

$$C_0=\frac{\phi^2}{a\phi+2b}.$$

Vejamos o terceiro caso. Se $\phi^2-a\phi-b=0$ e $a\phi+2b=0$, então

$$\begin{cases} a\phi+b=\phi^2, \ (A)\\ a\phi+2b=0. \ (B)\end{cases}$$

A operação $2(A)-(B)$, sobre as linhas do sistema, resulta em $a\phi=2\phi^2$. Logo,

$$a=2\phi.$$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações do sistema, conclui-se que

$$b=-\phi^2,$$

e a Equação (6.30) se escreve como

$$0 = -2\frac{\tau(\tau-1)}{2}C_0 n^{\tau-2} + \cdots + 1. \tag{6.31}$$

Deste modo, $\tau \geq 2$. Contudo, nota-se que $\tau \geq 3$ implica $C_0 = 0$, o que é um absurdo. Deste modo, $\tau = 2$ e, da Equação (6.31), obtém-se que

$$0 = -2C_0 + 1.$$

Portanto,

$$C_0 = \frac{1}{2}.$$

□

Exemplo 6.3.1. *Seja a equação $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2} + (4)^n$. Logo,*

$$a = 5,\ b = -6 \text{ e } \phi = 4.$$

Assim $\phi^2 - a\phi - b = (4)^2 - 5(4) - (-6) \neq 0$ e uma solução particular, conforme a Proposição 6.3.1, será $y_n = C_0 n^0 (4)^n = C_0 (4)^n$ com

$$C_0 = \frac{\phi^2}{\phi^2 - a\phi - b} = \frac{(4)^2}{(4)^2 - 5(4) - (-6)} = 8,$$

e, portanto, uma solução particular da equação $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2} + (4)^n$ é $y_n = 8(4)^n$.

Exemplo 6.3.2. *Seja a equação $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2} + (2)^n$. Daí,*

$$a = 5,\ b = -6 \text{ e } \phi = 2,$$

de modo que $\phi^2 - a\phi - b = (2)^2 - 5(2) - (-6) = 0$, $a\phi + 2b = 5(2) + 2(-6) \neq 0$ e, portanto, de acordo com a Proposição 6.3.1, uma solução particular será $y_n = C_0 n^1 (2)^n = C_0 n (2)^n$ em que

$$C_0 = \frac{\phi^2}{a\phi + 2b} = \frac{(2)^2}{5(2) + 2(-6)} = -2.$$

Verifica-se que uma solução particular da equação $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2} + (2)^n$ é dada por $y_n = -2n(2)^n$.

Exemplo 6.3.3. *Seja a equação $y_n = 4y_{n-1} - 4y_{n-2} + (2)^n$. Neste caso,*

$$a = 4,\ b = -4 \text{ e } \phi = 2.$$

De modo que: $\phi^2 - a\phi - b = (2)^2 - 4(2) - (-4) = 0$ *e* $a\phi + 2b = 4(2) + 2(-4) = 0$ *e, portanto, de acordo com a Proposição 6.3.1, uma solução particular será* $y_n = C_0 n^2 (2)^n$ *sendo que*

$$C_0 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $y_n = \frac{1}{2} n^2 (2)^n$ *é uma solução particular da equação* $y_n = 4y_{n-1} - 4y_{n-2} + (2)^n$.

Observação 6.3.1. *Dados* $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$*, considerando-se a equação*

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} - \phi^n, \ a, b \in \mathbb{R}, \ \phi \in \mathbb{R} - \{0\}, \ n \geq 2, \tag{6.32}$$

verifica-se, de modo análogo à Proposição 6.3.1, que a Equação (6.32) tem uma solução particular da forma $y_n = C_0 n^\tau \phi^n$, *com* $\tau = 0, 1$ *ou* 2 *e* $C_0 \neq 0$. *Neste caso, tem-se que*

- *se* $\phi^2 - a\phi - b \neq 0$*, então* $\tau = 0$ *e* $C_0 = -\dfrac{\phi^2}{\phi^2 - a\phi - b}$;
- *se* $\phi^2 - a\phi - b = 0$ *e* $a\phi + 2b \neq 0$*, então* $\tau = 1$ *e* $C_0 = -\dfrac{\phi^2}{a\phi + 2b}$;
- *se* $\phi^2 - a\phi - b = 0$ *e* $a\phi + 2b = 0$*, então* $\tau = 2$ *e* $C_0 = -\dfrac{1}{2}$.

7 Considerações finais

Apesar que o tema equações de diferenças transmita uma ideia de um conteúdo da Matemática estudado exclusivamente em níveis superiores, nota-se que essas estruturas Matemáticas são, geralmente, abordadas no Ensino Médio ao iniciar-se o estudo das progressões aritméticas e geométricas, que são casos particulares de equações de diferenças. O Capítulo 2 foi desenvolvido justamente com o propósito de ser um texto acessível para alunos do Ensino Médio, pois apresentamos o conceito através de um problema de Geometria Plana. A ideia foi direcionar os alunos a uma melhor compreensão do que são as equações de diferenças e, em seguida, foi desenvolvida uma formalização do conceito e as classificações dessas estruturas.

O capítulo 3, bem como uma seleção e adequação menos rigorosa de conteúdos dos Capítulos 4 e 5, podem ser trabalhados com alunos do Ensino Médio.

Mais especificamente, com relação ao capítulo 5, objetivando trabalhar a interdisciplinaridade, pode-se formar uma equipe de trabalho com os professores de Biologia para que o problema de propagação de Plantas Anuais não seja apenas apresentado de forma superficial, pelo professor de Matemática, mas sim estudado mais detalhadamente. O mesmo problema também evidencia a possibilidade de se abordar outros conteúdos. Note que o simples questionamento sobre fatores favoráveis à ocorrência das Plantas Anuais possibilita trabalhar com a Geografia no estudo de condições climáticas, tipo de relevo em que mais ocorre tal espécie de plantas, pluviosidade adequada à ocorrência da espécie, entre outros. Também, pode-se trabalhar com as simulações desse problema através da implementação de uma planilha eletrônica, o que exige apenas uma total compreensão das suposições para que sejam construídas as funções que integrarão a planilha e destaca-se que tal implementação possibilitará a visualização de diversos cenários para o problema (tomando-se o cuidado de não cair no rigor da dedução das equações).

Finalmente, apesar de o estudo desenvolvido no presente trabalho se referir às equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes reais e constantes, enfatizamos que um estudo similar pode ser realizado considerando-se equações de diferenças lineares de ordens superiores. Entretanto, a manipulação algébrica, ao considerarmos uma equação de ordem m, com $m = 3$ ou $m = 4$, torna-se bem mais trabalhosa. No caso $m \geq 5$, obtém-se como polinômio característico uma equação que não possui uma "fórmula fechada" para se determinar as suas raízes, o que torna a abordagem apresentada aqui inviável. Ainda com relação à esse comentário, no Capítulo 5 abordamos o problema referente à propagação de Plantas Anuais, considerando-se que as sementes com mais de dois anos de idade eram negligenciadas (pois não mais poderiam germinar). Desta forma, podemos observar que um problema similar poderia ser modelado, considerando-se a possibilidade de germinação de uma semente até m anos de idade, $m \geq 3$ e, deste modo, obteríamos uma equação-modelo de ordem m (o que tornaria o algebrismo matemático um pouco mais complicado).

8 Apêndice

8.1 Conjunto Discreto

Definição 8.1.1. *Dizemos que* $X \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto discreto se* $\forall a \in X$ *existir* $\delta > 0$ *tal que*

$$(a-\delta, a+\delta) \cap X = \{a\}.$$

8.2 Solução da equação: $y_n = ay_{n-1} + b,$ com y_0 dado e $n \geq 1$

Afirmamos que a solução da equação linear e não homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \ n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ dado} \end{cases}$$

é dada por

$$y_n = \begin{cases} y_0 + bn, \text{ se } a = 1; \\ \\ y_0 a^n + b\dfrac{1-a^n}{1-a}, \text{ se } a \neq 1. \end{cases}$$

Resolução. De fato, pelo processo recursivo tem-se que

$$y_1 = ay_0 + b,$$

$$y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2 y_0 + b(a+1),$$

$$y_3 = ay_2 + b = a(a^2 y_0 + b(a+1)) + b = a^3 y_0 + b(a^2 + a + 1),$$

$$y_4 = ay_3 + b = a(a^3 y_0 + b(a^2 + a + 1)) + b = a^4 y_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1),$$

$$\cdots$$

$$y_n = a^n y_0 + b(a^{n-1} + \cdots + a + 1). \tag{8.1}$$

Agora, considerando o polinômio $p(r) = r^n - 1$, temos que $p(r)$ é divisível por $r-1$, pois 1 é raiz de $p(r)$. Daí

$$(r^n - 1) = (r-1)(r^{n-1} + \cdots + r + 1).$$

Da Equação (8.1), se $a \neq 1$, conclui-se que

$$y_n = a^n y_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

No caso $a = 1$, a Equação (8.1) fornece

$$y_n = (1)^n y_0 + b((1)^{n-1} + \cdots + (1) + 1) = y_0 + bn.$$

$\square$

8.3 Números complexos: forma trigonométrica

.

Seja o complexo não nulo $z = x + yi$. Para fixar as ideias consideremos, por exemplo, $x < 0$ e $y < 0$. Geometricamente temos

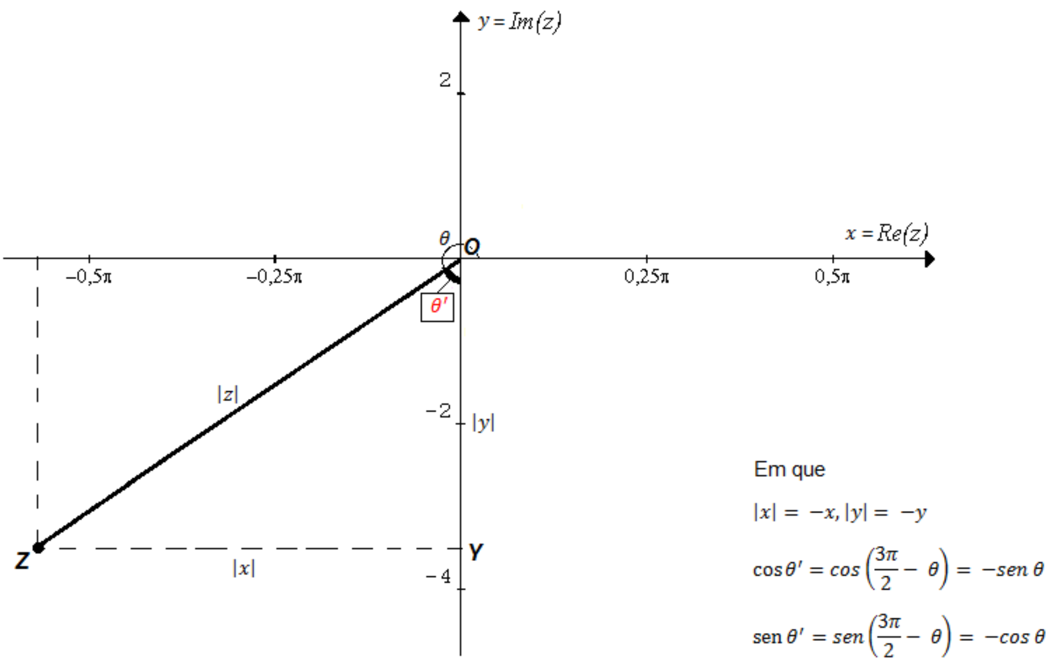

Figura 8.1: Representação do complexo z no Plano de Argand-Gauss.

De modo que

$$\text{sen } \theta' = \frac{|x|}{|z|} \Rightarrow -\cos \theta = \frac{-x}{|z|} \Rightarrow x = |z|\cos \theta, \ (A)$$

$$\cos \theta' = \frac{|y|}{|z|} \Rightarrow -\text{sen } \theta = \frac{-y}{|z|} \Rightarrow y = |z|\text{sen } \theta. \ (B)$$

Assim, das Equações *(A)* e *(B)* conclui-se que

$$z = x + yi = |z|(\cos \theta + i \text{ sen } \theta). \tag{8.2}$$

Observação 8.3.1. *Consideramos $z = x + yi$ no terceiro quadrante, mas resultado análogo é obtido considerando-se o complexo z em qualquer quadrante, desde que z não pertença ao eixo $Re(z)$ ou ao eixo $Im(z)$. Caso z seja real ou z seja imaginário puro, não existe o triângulo **ZOY** na representação do complexo z no plano de Argand-Gauss, mas a Equação (8.2) é verificada.*

Exponencial complexa: a fórmula de Euler

Afirmamos que $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Inicialmente observamos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois pelo teste da razão tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Agora, sendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, mostremos que $f(x) = e^x$.

Considerando $x^0 = 1$ (por conveniência, mesmo quando $x = 0$), tem-se que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ \cdots \tag{8.3}$$

Da Equação (8.3) conclui-se que a derivada de f é dada por:

$$f'(x) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \cdots \tag{8.4}$$

Desta forma, analisando as Equações (8.3) e (8.4) conclui-se que $f(x) = f'(x)$ e, então, a função $y = f(x)$ satisfaz a equação diferencial $y = \frac{dy}{dx}$. Deste modo

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int 1dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + C \Rightarrow |y| = e^{x+C}$$

Ou seja, $f(x) = e^C e^x$, implicando que $f(0) = e^C$. Novamente analisando a Equação (8.3) tem-se que $f(0) = 1$.

Logo $e^C = 1$ e, portanto, $f(x) = e^x$.

Considere agora o complexo $z = x + yi$. Definimos e^z por

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi}.$$

Pela afirmação acima, sabe-se que a expressão e^x, $x \in \mathbb{R}$, é familiar. Digamos que pelo fato de a quantidade e^x ser expressa por uma soma, tentaremos buscar uma interpretação para a quantidade desconhecida e ainda sem nenhum significado e^{yi}, manipulando essa soma. Ou seja, supondo ser

$$e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = 1 + \frac{(yi)^1}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \frac{(yi)^6}{6!} + \cdots$$

E observando que $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i,\ n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - \cdots\right) \tag{8.5}$$

Analisando a Equação (8.5), sabemos que as somas entre parênteses são conhecidas, e expressam, respectivamente, cos y e sen y. Desta forma, a expressão e^{yi} ganhou um significado que é conhecido como **fórmula de Euler**: $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$.

Assim, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Bibliografia

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. 3ªed., São Paulo: Contexto, 2013.

[2] BICHO, J., TORRES, N. e CRUZ, S. *Plantas Anuais e Bienais (Material Vegetal)*, 2008.

[3] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ªed., Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[4] Canal do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. PAPMEM: Recorrência — Prof Luciano M. Castro. 2015. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=nEXLM5U0DiI. Acesso em: 2 de junho de 2017.

[5] CAPILUPE, A. R. *Equações de Diferenças: Aplicações em Conteúdos do Ensino Médio e em Modelos Populaçionais*. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) — Universidade Federal de São João del Rei, 2017.

[6] CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve História*. Volume I, 4ªed., São Paulo: LF EDITORIAL, 2012.

[7] EDERLSTEIN-KESHET. *Mathematical Models in Biology*. 1ªed., New York: SIAM, 2005.

[8] HEFEZ, A. e FERNANDEZ, C. S. *Introdução à Álgebra Linear*, Rio de Janeiro: SBM, 2012, (COLEÇÃO PROFMAT).

[9] NOVAKI, C. *Equações de Diferenças na Projeção de Populações*. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

[10] OLIVEIRA, I. P. *Equações de Recorrência: Uma Análise e Proposta para o Orçamento Familiar*. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

[11] Sogeografia. Disponível em: http://www.sogeografia.com.br/Conteudos/Astronomia/?pg=2. Acesso em: 2 de junho de 2017.

[12] VASCONCELOS, C. F. *Modelagem Matemática no Ensino Médio por meio de Sequências e Séries Numéricas*. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" , 2016.