Universidade Federal de Ouro Preto

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO ESTUDO DE FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS

Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP

Rieuse Lopes Pinto

Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Ouro Preto, 2014

P659r Pinto, Rieuse Lopes.

Representação gráfica no estudo de funções e suas derivadas / Rieuse Lopes Pinto. Ouro Preto: UFOP, 2014.

62p.: il.; color.; grafs.; tab.

Orientador: Prof. Dr. Dale William Bean.

Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

1. Interacionismo simbólico - Teses. 2. Cálculo – Teses.
3. Aprendizagem – Teses. 4. Matemática- Estudo e ensino – Teses.
I. Bean, Dale William. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título

CDU: 51:37.011.3

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

SUMÁRIO

Prezado colega,

Nas últimas décadas, muito se tem pesquisado e discutido a respeito de temas relacionados ao ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo. Trata-se de um conteúdo que tem trazido inquietações e questionamentos sobre métodos mais eficientes que garantam o aprendizado de forma significativa para o aluno. Questionar, argumentar, investigar e refletir são atitudes que gostaríamos de ver em nossos alunos, pois são imprescindíveis para a aprendizagem, por isso buscamos caminhos e metodologias que possam desencadear tais atitudes em nossos alunos, e, dessa forma, minimizem-se as dificuldades na disciplina. Buscando essa melhoria no ensino e aprendizagem do Cálculo, apresentamos este material, fruto de nossa dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, intitulada *Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo*.

Neste material, apresentamos uma sequência de oito atividades que foram elaboradas com o intuito de analisar e interpretar relações gráficas entre funções e suas derivadas, bem como as propriedades dessas funções, e aplicadas em uma turma de alunos do Cálculo I. A maioria dessas atividades foi realizada com o auxílio do *software GeoGebra*, que possui recursos de representação gráfica dinâmica para a articulação entre a visualização e a manipulação algébrica. Trata-se de uma sugestão de possibilidades e aqui estão apresentadas com modificações realizadas com base na pesquisa e nada impede de serem adaptadas a outras realidades. Descrevemos o desenvolvimento de três dessas oito atividades, com o intuito de esclarecer como foram conduzidas durante a pesquisa, quais os objetivos traçados, aspectos relacionados com o marco teórico e alguns resultados obtidos.

Foram elaboradas para abordar conceitos ensinados pelo professor em aulas expositivas que antecederam as atividades e para atender aos questionamentos e dúvidas da turma no contexto das aulas expositivas e das próprias atividades. Dessa forma, as atividades foram realizadas para complementar as aulas expositivas da disciplina, enfatizando representações gráficas de funções e suas derivadas elaboradas por meio do *software*.

O fato de as atividades terem sido modificadas após sua utilização na pesquisa de campo é devido às apreciações a respeito de sua eficácia na aprendizagem do Cálculo, que se fundamentam nas teorias de pensamento matemático avançado e interacionismo simbólico. Nossas apropriações dessas teorias em relação às atividades também serão apresentadas de forma resumida neste material.

A utilização do *software* de representação gráfica dinâmica favoreceu um diferencial para nosso trabalho, pois proporcionou mais dinamismo às aulas, interação entre alunos, além de permitir ao professor assumir um papel de mediador da aprendizagem dos estudantes.

Esperamos que este material contribua de forma significativa para sua prática pedagógica, bem como proporcione reflexões a respeito das interações ocorridas em sala de aula, propiciadas pelo uso de *softwares*.

Rieuse Lopes Pinto

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o intuito de contribuir para o desenvolvimento da prática pedagógica ao introduzirem-se conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, e refere-se a um domínio em particular: os conceitos de funções e suas derivadas. Em minha prática docente nessa disciplina, pude perceber que os estudantes realizam, com certo êxito, manipulações algébricas em atividades envolvendo derivadas de funções, sem precisar atribuir muitos significados conceituais. Então, pude constatar que os alunos apresentam dificuldades na compreensão desses conceitos. Assim, considerei importante pesquisar sobre o conceito de funções e suas derivadas, que é parte do conteúdo programático de Cálculo Diferencial e Integral, visto que seu ensino recai no cálculo mecânico e excessivo de operações e técnicas algébricas, em detrimento da compreensão.

Em muitas universidades do Brasil e do exterior, o Cálculo é uma das disciplinas cujos índices de reprovação, evasão e repetência são elevados. Diversos pesquisadores (IGLIORI, 2009; REZENDE, 2003; NASSER, 2009; BARUFI, 1999; FROTA, 2006) apontam problemas que vêm se acumulando desde o ensino básico até o ensino superior. Nesse sentido, Igliori afirma que:

> No que tange às especificidades das áreas da Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado parte significativa das pesquisas. Isso se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na forma do pensamento avançado em Matemática. (2009, p. 13).

Frota (2006, p. 2) aponta que “a sala de aula de Cálculo tem sido afetada por fatores decorrentes, em parte, de um ensino universitário de massa: excessivo número de alunos, grande parte deles desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica”. Entendemos que o papel do professor de Cálculo vai além da simples transmissão de conhecimentos: ele deve priorizar o desenvolvimento do raciocínio e a articulação de conteúdos, além de conhecer as estratégias de aprendizagem de seus alunos, bem como suas habilidades em abstrair a partir de situações matemáticas. É de responsabilidade do professor fornecer contextos e ambientes de aprendizagem para que o estudante desenvolva a capacidade de conjecturar, questionar, estabelecer relações e investigar, bem como a habilidade de realizar abstrações a partir de situações matemáticas, e isso também é alvo de pesquisas. Nessa perspectiva, Dreyfus corrobora essa ideia:

> Se um aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático. Atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada. (1991, p. 34, tradução nossa[1]).

O estudo de conceitos básicos do Cálculo, muitas vezes, é introduzido através de uma aula expositiva, em que o professor apresenta as definições, propriedades e exemplos e, por sua vez, os alunos resolvem listas de exercícios. Essa dinâmica utilizada para a construção e compreensão de conceitos e a preparação dos egressos nessas disciplinas são temas recorrentes de discussão, sendo que esse aspecto algorítmico e repetitivo aparece na conclusão do estudo de Frota:

> Parece haver consenso que o ensino da matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz à aprendizagem de procedimentos e não incentiva o conhecimento matemático relacional que leva o indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados (2001, p. 91).

As aulas expositivas, em consonância com a realização de atividades com resolução de situações-problema, que utilizam o computador como ferramenta metodológica, podem facilitar a compreensão de conceitos e propiciar ao aluno a construção de seu próprio conhecimento. Dessa forma, acreditamos que a aprendizagem de conceitos matemáticos, num contexto de atividades desenvolvidas com o auxílio de *softwares* de representação gráfica dinâmica, pode desenvolver capacidades, como a criatividade, a interpretação, e a visualização gráfica e algébrica.

Para servir como subsídios para professores que pretendem utilizar esse tipo de atividade em suas aulas, apresentamos, neste material, algumas considerações baseadas na coleta de dados da pesquisa, que foi realizada no primeiro semestre letivo de 2013, na turma Sistemas de Informação de uma universidade pública. As atividades da pesquisa aconteceram na sala de aula e no laboratório de informática com a utilização do s*oftware GeoGebra*. Escolhemos o *GeoGebra*, por se tratar de um *software* livre, por sua interface amigável, e pela facilidade e possibilidade manipulativa e dinâmica.

No desenvolvimento da pesquisa de campo, o planejamento das atividades baseou-se nas aulas expositivas do professor, referentes aos conceitos de funções, limites e derivadas, e

---

[1] "If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking. Achieving this capability to abstract may well be the single most important goal of advanced mathematical education."

no estabelecimento de relações entre funções e suas derivadas. A proposta de trabalho teve como objetivo principal analisar a compreensão dos alunos sobre funções e suas derivadas, no entanto constatamos algumas dificuldades dos estudantes com o uso de definições matemáticas formais relacionadas com funções e suas derivadas. Além do desenvolvimento das oito atividades, propusemos aos alunos um trabalho a ser realizado em grupo, com o objetivo principal de analisar a compreensão dos alunos sobre funções e suas derivadas, e as interações ocorridas em seu desenvolvimento e culminância. As conclusões de seus estudos, baseados nos conceitos abordados nas oito atividades realizadas e estratégias utilizadas, foram apresentadas em um seminário. Neste material, apresentaremos o desenvolvimento de uma sequência de oito atividades desenvolvidas para promover o aprendizado de conceitos de funções e suas derivadas, quatro delas com a utilização do *software GeoGebra*.

A análise da eficácia das atividades em termos dos conceitos matemáticos sendo abordados foi feita na ótica do pensamento matemático avançado (TALL, 1991; VINNER, 1991; DREYFUS, 1991). Tomando como referência principal os estudos de Tall (1991) e Vinner (1991), utilizaremos os construtos *imagens conceituais* e *definições conceituais* – *pessoal* e *formal* para desenvolver uma compreensão a respeito dos conhecimentos dos estudantes sobre funções e suas derivadas, com ênfase no uso de definições matemáticas.

A análise também levou em consideração as interações ocorridas em sala de aula, sob a ótica do interacionismo simbólico (BLUMER, 1980; GODINO; LLINARES, 2000), e mostrou que o pensamento matemático manifestado pelos estudantes sobre os conceitos referentes às funções e suas derivadas evoluiu a partir das interações produzidas entre os estudantes e professores.

Dessa forma, apresentamos uma possiblidade para o desenvolvimento de atividades de ensino de funções e suas derivadas para alunos do 1º ano de Cálculo Diferencial e Integral, com a pretensão de contribuir para o campo de discussões sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente sobre a importância das definições matemáticas na compreensão dos conceitos de funções e suas derivadas em contextos de discussões e debates em sala de aula. Para fundamentar essa proposta, no primeiro momento, delineamos o marco teórico referencial sobre o pensamento matemático avançado e interacionismo simbólico.

A seguir, ressaltamos nossas reflexões sobre as interações ocorridas em sala de aula, bem como a importância das definições utilizadas pelos alunos. As atividades desenvolvidas com o *GeoGebra* serão apresentadas de maneira prática, com o objetivo de serem utilizadas como complementação da aula teórica e para potencializar o estudo de funções e suas derivadas. Algumas de nossas reflexões e conclusões propiciadas em nossa análise de dados serão mostradas nas considerações finais.

2 APORTES E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Dividimos esta seção em três subseções. Na primeira, sintetizamos as principais ideias presentes na linha do Pensamento Matemático Avançado (PMA), que foram utilizadas em nossa pesquisa; na segunda, apresentamos um resumo das principais características do interacionismo simbólico e seu posicionamento em relação à aprendizagem, à noção de significado, ao papel do sujeito como um ser social e à interpretação dos significados; e, na terceira, discorremos sobre o olhar que essas duas concepções têm sobre o sujeito e a aprendizagem, ou seja, as interações em sala de aula sob a ótica do Pensamento Matemático Avançado.

Em relação às características do Pensamento Matemático Avançado (PMA), discutimos as noções teóricas de *imagem conceitual e definição conceitual*, e a importância das definições em matemática. Esse marco teórico vem sendo largamente utilizado nas investigações realizadas no contexto da matemática universitária, no qual está centrada esta pesquisa, relacionada com o estudo de funções e suas derivadas.

O interacionismo simbólico serviu como base teórica para estudar e analisar a forma como percebemos o uso de definições matemáticas pelos alunos na realização de atividades relacionadas ao estudo de funções, limites e derivadas, cujas questões foram elaboradas com o intuito de explorar a construção de conceitos de funções e suas derivadas, com o auxílio de um *software* com recursos de representação gráfica dinâmica para a articulação entre a visualização e a manipulação algébrica.

2.1 Características do pensamento matemático avançado

Existem diversas linhas de pesquisa sobre os processos de aprendizagem, e, em geral, as discussões recaem sobre o perfil da pessoa que se deseja formar. Por isso, as concepções de ensino e aprendizagem são fundamentais, uma vez que fornecem diretrizes para a prática do educador que se preocupa com o objeto de estudo, com as estratégias de ensino e com o pensamento matemático desenvolvido pelos alunos no processo de aprendizagem. O desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, desde o nível básico até o superior, tem sido foco de distintas pesquisas (TALL, 1991; VINNER, 1991; DREYFUS, 2002; SFARD, 2007; GRAY, 1999; DUBINSKY, 2002; DOMINGOS, 2006; COSTA, 2002; RESNICK, 1987).

Corroboramos com Domingos (2006), ao considerar que tanto as dificuldades quanto o elevado nível de fracasso escolar apresentados pelos estudantes na área de Matemática podem ser explicados pela baixa compreensão de conceitos matemáticos, desde a educação básica até o ensino superior. Devido à complexidade existente na compreensão de conceitos matemáticos, tais como funções e derivadas, buscamos um referencial teórico que nos permita analisar, descrever e explicar, de uma perspectiva cognitiva, como os estudantes universitários manifestam sua compreensão relativa aos conceitos matemáticos.

Tall (1995) considera que o pensamento matemático inicia-se pela percepção dos objetos do mundo externo e pelas ações exercidas sobre eles. Esse pensamento também se desenvolve simultaneamente por meio dos processos orientados à inspiração de um pensamento criativo baseado na definição formal e na demonstração sistemática dos conceitos matemáticos. À medida que o pensamento se desenvolve, tornando-se mais complexo, as ações sobre o objeto conduz um pensamento matemático elementar ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas.

Segundo Tall (1991, p. 3), a caracterização do ciclo de atividades no pensamento matemático avançado conduz "desde a atitude produtiva de considerar a contextualização de um problema numa investigação matemática até a formulação produtiva de conjecturas e a etapa final de refinamento e demonstração".

As noções teóricas de *imagem conceitual* e *definição conceitual* foram introduzidas na literatura especializada, segundo Tall (1992), pelo trabalho de Vinner e Hershkowitz (1980) e, mais tarde, Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991). A síntese dessas noções, que realizamos, está baseada principalmente no trabalho de Vinner (1991).

Segundo Vinner (1991), quando se vê ou se ouve uma palavra associada a um conceito matemático, algo como o nome do conceito é evocado na memória. Isso faz parte do que é denominado *imagem conceitual*. Portanto, a *imagem conceitual*, de acordo com Tall e Vinner (1981), corresponde ao que está associado ao conceito na mente do indivíduo e inclui todas as imagens mentais, processos e propriedades ligadas ao mesmo. Nesse sentido, esses autores consideram que:

> A imagem conceitual é algo não verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. Mas é importante lembrar que essas formas verbais não são a

> primeira coisa evocada em nossa memória. Elas acontecem em estágio posterior. [...] Quando você ouve a palavra “função” por outro lado, você pode lembrar-se da expressão “y = f(x)”, você pode visualizar o gráfico de uma função, você pode pensar sobre funções específicas como $y = x^2$ ou *y = sen(x)*, *y = lnx* etc. Do que nós dissemos, está claro que só é possível falar de imagem conceitual em relação a um indivíduo específico. Além disso, o mesmo indivíduo poderia reagir de modo diferente a um certo termo (nome do conceito) em situações diferentes. Em Tall & Vinner (1981) o termo “imagem conceitual evocada” é introduzido para descrever a parte da memória evocada num dado contexto. Isso não é, necessariamente, tudo que um certo indivíduo sabe sobre uma certa noção [...]. (VINNER, 1991, p. 6).

Quando os alunos, na realização de atividades, transitam entre as representações algébrica e gráfica utilizando o *GeoGebra* e apresentavam concepções fundamentadas nessas representações, a imagem conceitual é evocada. Para nós, essa transição entre as representações é fundamental para a formação da imagem conceitual, pois, segundo Tall e Vinner (1981), o desenvolvimento cognitivo de um sujeito, associado a um conceito matemático, provém da soma de todas as experiências, integradas a esse conceito, ou seja, um conceito matemático não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como única referência pedagógica sua definição formal. É necessária uma variedade de ideias, todas associadas a ele, para que se forme o que chamam de imagem conceitual.

Por outro lado, a definição conceitual consiste na definição em palavras ou símbolos de um conceito de maneira exata e não circular (VINNER, 1983). Tall e Vinner (1981) fazem a distinção entre uma definição conceitual formal, que é a definição exata e precisa, e a definição conceitual pessoal, que é o entendimento verbal da definição formal de uma pessoa. A definição conceitual, geralmente utilizada para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos no ensino universitário, compreende a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal. Nesse sentido, Tall e Vinner afirmam que:

> A definição conceitual (se o indivíduo a possuir) é uma questão completamente diferente. Consideramos que a *definição conceitual* é uma forma de palavras usada para especificar esse conceito. Ela pode ser aprendida por um indivíduo de forma mecânica ou de forma mais significativa relacionando-a em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal feita pelo aluno a partir de uma definição. Constitui-se numa forma de palavras que o aluno usa para a própria explicação de sua imagem conceitual (evocada). Se a definição conceitual é dada para o estudante ou construída por ele mesmo, ele pode variá-la de vez em quando. Nesse sentido, uma definição conceitual *pessoal* pode diferir de uma definição conceitual *formal*, sendo esta última uma

> definição conceitual aceita pela comunidade matemática em geral. (1981, p. 152, tradução nossa[2]).

Tomando como referência o trabalho de Tall e Vinner (1981), Meyer (2003) considera que a definição conceitual pode constituir-se também numa “reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenha necessariamente significados coincidentes. Nesse caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual (evocada)” (MEYER, 2003, p. 6 apud ABREU, 2011, p. 57).

Conforme afirma Vinner (1991, p. 6), “adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. [...] Entender, como acreditamos, significa ter uma imagem conceitual. Certos significados devem ser associados com as palavras”. Vinner desenvolveu um modelo que está baseado na existência de duas células (não relacionadas com o conceito biológico): uma para a *imagem conceitual* e a outra para a *definição conceitual*. Qualquer uma dessas células pode estar vazia quando não se associa significado algum ao conceito. Ainda que cada célula possa constituir-se de maneira independente, o referido modelo sugere que haja interações entre elas. A exemplificação desse modelo será apresentada à continuação segundo o trabalho de Vinner (1991).

Inicialmente, o autor considera o processo pelo qual se introduz um conceito por meio de uma definição. Nesse caso, a célula da imagem conceitual inicialmente vazia é gradualmente desenvolvida a partir dos exemplos e explicações realizados pelo professor, consultas em livros, discussões com colegas, pesquisas na internet etc.

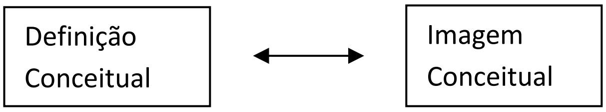
Inicialmente, o autor considera o processo pelo qual se introduz um conceito por meio de uma definição. Nesse caso, a célula da imagem conceitual inicialmente vazia é gradualmente desenvolvida a partir dos exemplos e explicações realizados pelo professor, consultas em livros, discussões com colegas, pesquisas na internet etc.

Quando um professor propõe aos alunos a resolução de exercícios do tipo: “Encontre a reta tangente à curva $y = x^3$ nos pontos onde $x = 0$ e $x = -1$, e calcule a inclinação (coeficiente angular m) da reta tangente à curva traçada nestes pontos”, o aluno pode

[2] “The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the *concept definition* to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a *personal* concept definition can differ from a *formal* concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large.”

visualizar o gráfico da função e da reta tangente a essa curva traçada, e esse mesmo aluno pode reagir de modo diferente ao conceito de reta tangente. Para a resolução do problema, parte de sua memória é evocada e, nesse contexto, as representações visuais, impressões e experiências ligadas a esse conceito são manifestadas: isto é sua imagem conceitual. Há um intercâmbio entre as definições conceituais apresentadas pelo professor (função polinomial de terceiro grau, reta tangente, coeficiente angular, e outros) e a imagem conceitual do aluno. Vinner (1991) apresenta esse intercâmbio na Figura 1.

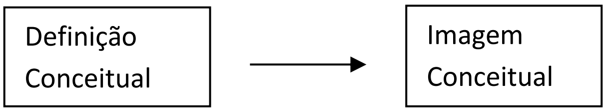
Figura 1 – Intercâmbio entre imagem conceitual e definição conceitual



Fonte: VINNER, 1991, p. 9.

Vinner (1991) considera que o esquema representado pela Figura 1 refere-se aos processos de formação de conceito a serem desenvolvidos em longo prazo, conforme ilustrado pela Figura 2.

Figura 2 – O desenvolvimento cognitivo do conceito formal

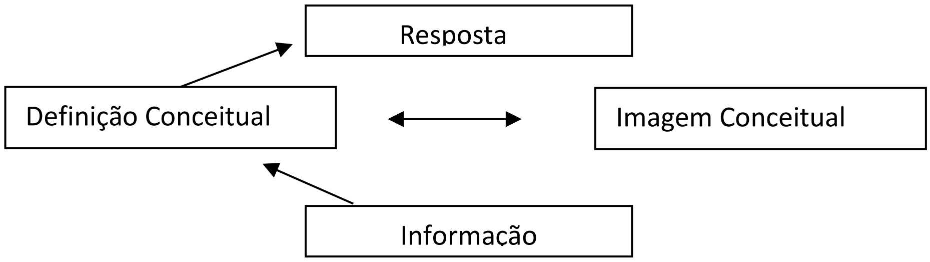


Fonte: VINNER, 1991, p. 10.

No que se refere aos processos de resolução de problemas e de desempenho em atividades, o autor considera que:

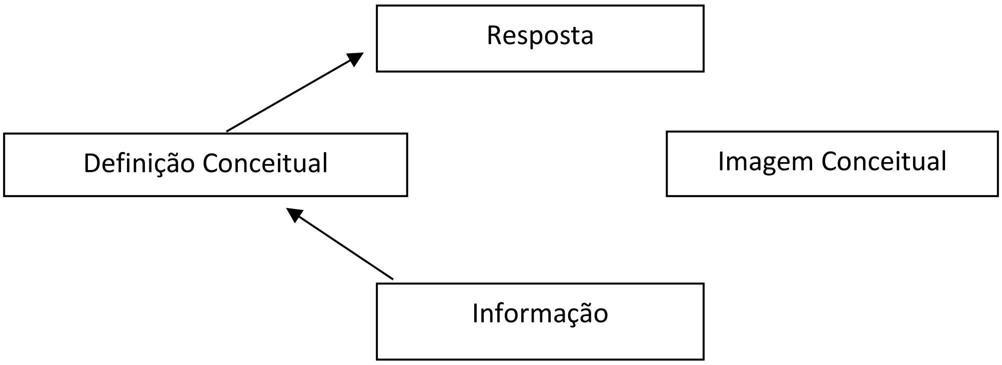
> Quando uma tarefa cognitiva é colocada para um estudante, espera-se que as células da imagem conceitual e da definição conceitual sejam ativadas. Novamente, parece-nos que muitos professores na escola secundária e no college esperam que os processos intelectuais envolvidos na performance de uma dada tarefa intelectual deveriam ser esquematicamente expressos por uma das três figuras [figuras 3,4 e 5 nesta redação] seguintes (as figuras representam somente o aspecto da imagem conceitual e da definição conceitual envolvida no processo). As setas nas figuras representam maneiras diferentes pelas quais um sistema cognitivo deveria funcionar. (VINNER, 1991, p. 10).

Figura 3 – Intercâmbio entre definição e imagem



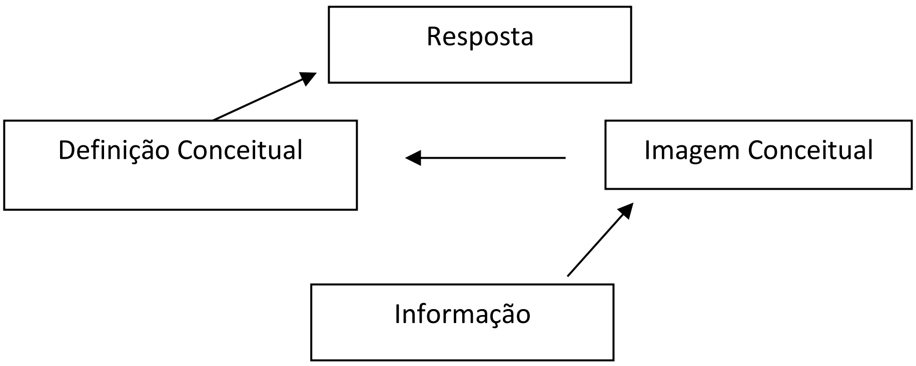
Fonte: VINNER, 1991, p. 10.

Figura 4 – Dedução puramente formal



Fonte: VINNER, 1991, p. 11.

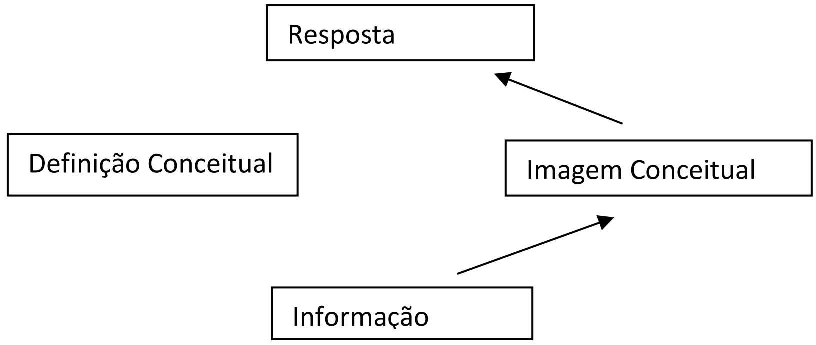
Figura 5 – Dedução seguindo pensamento intuitivo



Fonte: VINNER, 1991, p. 11.

Nos processos ilustrados pelas Figuras 3-5, Vinner (1991, p. 11) considera que "não importa como seu sistema de associação reaja quando um problema lhe é colocado em um contexto técnico, não se espera que você formule sua solução antes de consultar a definição conceitual. Isso é, naturalmente, o processo desejável". Entretanto, o autor reconhece que isso não corresponde ao que o estudante realiza na prática. Assim, propõe o seguinte modelo (Figura 6) para a prática:

Figura 6 – Resposta intuitiva



Fonte: VINNER, 1991, p. 11.

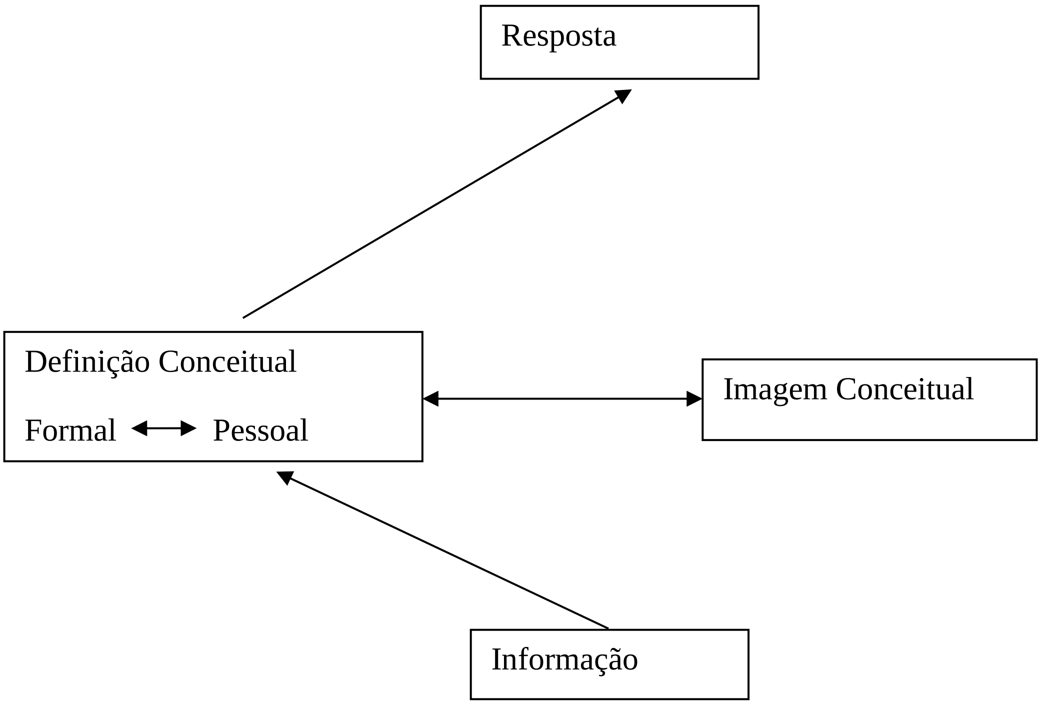
Vinner (1991, p. 12) esclarece que, no que se refere à ilustração realizada por meio da Figura 6,

> a célula da definição conceitual, mesmo se não vazia, não é evocada durante o processo de resolução do problema. Os hábitos de pensamento cotidianos se sobrepõem e o respondente está inconsciente da necessidade de consultar a definição formal. Não é preciso dizer que, na maioria dos casos, a referência à célula da imagem conceitual será bem-sucedida. Esse fato não encoraja as pessoas a se referirem à célula da definição conceitual. Apenas em problemas de não rotina, nos quais imagens conceituais incompletas poderiam ser ambíguas, pode-se encorajar as pessoas a se referirem à imagem conceitual. Tais problemas são raros e, quando dados aos estudantes, são tidos como injustos. Então, não há nenhuma força aparente que possa mudar os hábitos de pensamento comuns que são, em princípio, inapropriados para contextos técnicos.

A diferença, portanto, que se percebe entre os processos representados pelas Figuras 5 e 6, fundamentados por Vinner (1991, p. 11), é que naquele o indivíduo responde através de uma imagem conceitual, estabelecendo uma relação também com a definição conceitual; nesse, não há relação com a definição conceitual, daí chamá-la de resposta intuitiva.

Vinner considera que os modelos, citados por ele, e implicitamente assumidos pelos professores podem ser descritos por meio das ações ilustradas anteriormente. Ressaltamos que Vinner considera que tanto a *imagem conceitual* quanto a *definição conceitual* são centrais para a explicação do processo cognitivo de formação dos conceitos. Tall e Vinner (1981) fazem a distinção entre a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal, a qual consideramos relevante no desenvolvimento das atividades aqui descritas, por isso, elaboramos um esquema, compreendido pela Figura 7, no qual destacamos os intercâmbios propostos no modelo indicado por Vinner (1991), por meio da Figura 3, bem como detalhamos a definição conceitual formal e a pessoal, de acordo com Tall e Vinner (1981).

Figura 7 – Intercâmbio entre definições (formais e pessoais) e imagens conceituais



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Esclarecemos que, no que se refere à ilustração realizada por meio da Figura 7, compreendemos que é possível que a célula da definição conceitual, tanto pessoal quanto formal, seja evocada durante o processo de resolução de um problema. Também pode haver intercâmbio entre essas definições, bem como entre elas e a imagem conceitual. De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual pessoal é o entendimento verbal da definição conceitual formal de uma pessoa. A resposta dada pelo indivíduo a uma situação-problema pode partir da definição conceitual pessoal em conexão com a imagem conceitual do objeto em estudo.

Para compreender como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas pelos estudantes nas representações gráficas e algébricas das funções e suas derivadas, buscamos também uma fundamentação teórica nos estudos de Edwards e Ward (2004), que corroboram com Tall e Vinner (1981), no entendimento das definições matemáticas, mas consideram que as definições conceituais podem ser estipuladas ou extraídas. Esses autores analisaram a compreensão dos alunos sobre as definições matemáticas e qual o entendimento que eles têm do papel desempenhado pelas definições formais na matemática. Uma das conclusões obtidas na pesquisa que realizaram foi que alguns alunos com formação matemática avançada não entendem completamente a natureza e o papel das definições matemáticas. Muitos alunos explicam as definições, mas não as usam corretamente, e alguns estudantes apresentam concepções errôneas e/ou incompletas tanto sobre as definições matemáticas quanto sobre o papel que estas desempenham no âmbito da matemática. Em seu estudo sobre as definições matemáticas nos cursos superiores de Matemática, os autores utilizam duas categorias para as definições: definições extraídas e definições estipuladas.

De acordo com Edwards e Ward (2008), as definições matemáticas são estipuladas, e se apoiam em Landau (2001) e Robinson (1962) para explicitá-las. Os autores afirmam que as definições estipuladas são uma “construção explícita e autoconsciente da relação de significado entre uma palavra e algum objeto, o ato de designar a um objeto um nome (ou um nome a um objeto)”. (ROBINSON, 1962 apud EDWARDS; WARD, 2008, p. 224). Essas definições conceituais matemáticas formais, de acordo com Tall e Vinner (1981), utilizam-se de linguagem ou símbolos para se referir a conceitos. Uma definição matemática estipulada é uma definição cujos significados em relação ao conceito são designados ou estipulados pela comunidade matemática e comunicado por esses símbolos, ou seja, pela definição formal. Por exemplo, de acordo com a comunidade matemática, uma definição formal para a função exponencial é dada por $f : R \rightarrow R_{+}^{*}$, tal que $f(x) = a^{x}$, em que a ϵ R, $a > 0$ e $a \neq 1$. Para cada símbolo dessa definição, é estipulado um significado específico. Por exemplo, pela definição, a base a ϵ R, a > 0 e a ≠ 1. Para definições estipuladas, os significados para o conceito são designados aos símbolos e assim determinam o uso do conceito que é referenciado por sua definição.

Por sua vez, as definições extraídas referem-se a conceitos cujo uso em uma variedade e contextos específicos permite uma extração ou atribuição de significados para esses conceitos, os quais são referenciados por suas definições. São “definições que são baseadas em exemplos reais, definições extraídas de um corpo de evidências”. (LANDAU, 2001 apud EDWARDS; WARD, 2008, p. 224, tradução nossa). De acordo com os autores, a maioria das definições da “linguagem cotidiana” para conceitos não científicos são definições extraídas, nas quais os conceitos são atribuídos de significados conforme o seu uso. Por exemplo, uma criança, ao desenvolver significados a respeito do conceito “cachorro” a partir do animal de estimação da família, vai experimentando esse conceito ao empregar a palavra cachorro a outros animais. Com orientação de acerto ou erro, vai ajustando significados, guardando aqueles que aplicam e eliminando aqueles que não aplicam[3]. Usando a palavra para nomear uma variedade de animais, os significados como quatro patas, rabo etc., ou seja, sua imagem conceitual a respeito do que é um cachorro caracteriza para a criança esse animal. Em outras palavras, o uso do termo cachorro em uma variedade de situações contribui à significação desse conceito. Isto é, os significados em relação ao conceito são extraídos do seu uso.

Em termos de definições matemáticas, considere a definição conceitual pessoal de um aluno (conforme transcrição desta pesquisa) para a função exponencial: uma função que "*tem uma base e a variável está no expoente*". Com base nesse entendimento, o estudante afirma coerentemente que a função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ é uma função exponencial. A definição pessoal do estudante é fundamentada, direta ou indiretamente, na definição formal, entretanto sem entendimento do significado específico estipulado ao expoente x; e assim exemplifica uma função exponencial como uma função que não atende à definição formal. Argumentos baseados em sua imagem conceitual a respeito do que é uma função exponencial surgiram de uma variedade de contextos de uso, com coerência ou não, com especificidade da definição formal. Assim, o estudante, sem compreender o significado estipulado para o expoente x para o conceito de função exponencial, está atribuindo significados ao conceito de forma similar ao processo de extrair significados em relação a uma definição.

Destacamos que, de acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual consiste na forma simbólica para especificar um conceito, e nesse sentido, fazem distinção entre a definição conceitual formal e pessoal. Para os autores, uma definição formal na matemática é uma construção simbólica aceita pela comunidade matemática, e a definição conceitual pessoal, compreendida como uma construção pessoal da definição formal remete à imagem conceitual, e, por ser pessoal, pode diferir da definição formal.

Compreendemos que a definição conceitual, de acordo com Tall e Vinner (1981), relaciona-se com as duas definições apresentadas por Edwards e Ward (2008), uma vez que entendemos que a definição conceitual pode ser estipulada ou extraída. As definições matemáticas formais possuem significados estipulados para os conceitos que eles referem. Quando os significados de um conceito matemático são evocados de uma definição formal, são específicos ao conceito e seu uso se refere a essa especificidade, compreendemos como definições estipuladas. A definição estipulada transmite um significado elementar, guia uma

[3] Esse exemplo da significação do conceito de cachorro é de Dewey (1959), que aponta que conceitos no seu uso se tornam mais definidos.

discussão específica e é utilizada para servir a um propósito. A definição estipulada faz surgir os usos de conceitos, ao passo que a extraída surge dos usos e conceitos.

2.2 Interacionismo simbólico

Nesta seção, apresentamos um resumo das principais características do interacionismo simbólico e seu posicionamento em relação à aprendizagem, noção de significado, papel do sujeito como um ser social, interpretação dos significados. Em nosso estudo, o interacionismo simbólico servirá como base teórica para estudar e analisar a forma como percebemos o uso de definições matemáticas pelos alunos num contexto de discussão em sala de aula e na apresentação de trabalhos em grupos. No contexto da ótica do interacionismo simbólico, nosso foco estará nas relações entre professores e alunos, fundamentado nas noções de imagem conceitual e definição conceitual de Tall e Vinner (1981) e definições estipuladas e extraídas de acordo com Edwards e Ward (2008).

Como um dos principais elementos no processo ensino e aprendizagem na sala de aula é a interação entre professores e alunos e entre alunos e alunos, que se tornaram o objeto de uma parte substancial da pesquisa em educação matemática, passamos a observar as relações entre professores e alunos durante as aulas na realização de tarefas matemáticas. (GODINO; LLINARES, 2000).

No contexto histórico, Haguette (1997, p. 25) afirma que, embora o termo interacionismo simbólico tenha sido cunhado por Herbert Blumer em 1937, a escola de interação simbólica teve sua origem no final do século XIX, com clássicos da sociologia como Charles Horton Cooley (1864-1929), W. I. Thomas (1863-1947) e George Herbert Mead (1863-1931). Mead, filósofo, psicólogo e cientista social, professor de filosofia da Universidade de Chicago entre 1894 e 1931, entende a sociedade como um sistema de comunicações interindividuais significantes. No seu livro *Mind, Self and Society* (1934), desenvolve a ideia de que a sociedade não é algo dado, antes é construída permanentemente na dinâmica dos atores sociais, isto é, nas suas interações. De acordo com Haguette (1997, p. 25), coube a Blumer sistematizar os pressupostos básicos da abordagem interacionista através de seus escritos iniciados em 1937, em que ele apresenta e discute os mais importantes aspectos da interação simbólica, tentando ser fiel ao pensamento de Mead.

Segundo Blumer (1980, p. 119), o interacionismo simbólico baseia-se em três premissas:

> A primeira estabelece que os seres humanos agem em relação ao mundo fundamentando-se nos significados que este lhes oferece. [...] A segunda premissa consiste no fato de os significados de tais elementos serem provenientes da ou provocados pela interação social que se mantém com as demais pessoas. A terceira premissa reza que tais significados são manipulados por um processo interpretativo (e por este modificados) utilizado pela pessoa ao se relacionar com os elementos com que entra em contato.

As premissas apresentadas por Blumer nos mostram que a maneira como as pessoas interpretam os fatos e agem perante outros indivíduos ou coisas depende dos significados que elas atribuem às coisas, ou seja, em vez de somente reagir às ações um do outro, as pessoas interagem umas com as outras por meio de interpretação mútua das ações. De forma interativa, as pessoas interpretam o mundo que os cercam, e essa interação social é contínua e mediada pelo uso de símbolos e significados. Para Blumer (1980, p. 121), “o significado é produzido a partir do processo de interação humana”, ou seja, é resultado dos processos de interação, provenientes ou provocados pela interação social, que podem sofrer mudanças ao longo do tempo, pois, mediante um processo interpretativo desenvolvido pelo indivíduo ao se relacionar com os objetos que o cercam, podem ser manipulados e modificados. Assim, Blumer (1980, p. 121), afirma que “o interacionismo simbólico considera os significados produtos sociais, criações elaboradas em e através das atividades humanas determinantes em seu processo interativo”.

Na pesquisa que gerou esse produto, analisamos a imagem conceitual de alguns alunos em relaçao ao conceito “Parábola”, quando apresentaram em grupo as conclusões de estudos sobre funções polinomiais e suas derivadas. Esse grupo apresentou diversas representações gráficas de funções polinomiais com o auxílio do *Geogebra* e afirmaram que a função de quarto grau era uma parábola, devido sua forma. Nas discussões ocorridas durante a apresentação e nas interações entre professores e colegas, os estudantes foram modificando suas conclusões de acordo com os argumentos do grupo e dos colegas e professores. Baseados na afirmação de Godino e Llinares (2000), de que o aspecto central da perspectiva interacionista em relação ao significado é desenvolvido através da interpretação e interação. Nos diálogos transcritos, percebemos que o significado que uma das alunas tinha em relação ao conceito de parábola foi modificado durante a discussão em grupo, quando ela afirma: “Eu achei que tudo era parábola”. Para Blumer, o ser humano conhece as coisas pelos seus significados e esses são criados e modificados pela interação social. Nesse sentido, ele considera que:

> A peculiaridade consiste no fato de que os seres humanos interpretam as ações dos outros ao invés de meramente reagirem às ações dos outros. Suas respostas não são feitas diretamente à ação, mas, sim, baseadas no significado que dão a essa ação. (BLUMER, 1980, p. 19).

As perspectivas interacionistas concentram-se nos processos de interação social que ocorrem entre as pessoas, mediados por relações simbólicas, ou seja, enfatizam os processos individuais e os sociais, e o desenvolvimento da compreensão pessoal dos indivíduos é concebido por meio de sua participação. De acordo com Godino e Llinares (2000, p. 3), "o aspecto central da perspectiva interacionista em relação ao significado é que esse é desenvolvido através da interpretação e interação", e enfatiza que

> os princípios interacionistas podem ser classificados em: professores e estudantes constituem uma cultura interativa na sala de aula, as convenções relativas a cada disciplina emergem interativamente, e o processo de comunicação se apoia nas negociações e nos significados compartilhados.

Quando o conceito de derivada, por exemplo, é formalizado e sua definição como limite é explorada pelo professor, geralmente os alunos começam a calcular derivada de funções por meio de algumas fórmulas, ou seja, usam regras de derivação tipo: $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$, $\left(cf\right)' = cf'$, $\left(fg\right)' = fg' + f'g$, $\left(f+g\right)' = f' + g'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$, $\left(f-g\right)' = f' - g'$, $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$. A interpretação de cada símbolo dessas regras não deve ser considerada como uma mera aplicação automática, mas sim como um processo formativo em que os significados são utilizados para orientar e formar ações.

Para Blumer (1980), o objeto passa a ter significado para a pessoa quando há uma interpretação consciente desse objeto, quando se reflete e se pensa sobre ele, quando se passa por um processo de autointeração, quando seleciona, confere, reagrupa, suspende, quando transforma os significados à luz da situação em que está colocado. O autor afirma:

> O agente seleciona, modera, susta, reagrupa e transforma os significados sob o ponto de vista da situação em que se encontra e da direção de seus atos. Por conseguinte, a interpretação não deveria ser considerada como uma mera aplicação automática de significados existentes, mas sim como um processo formativo em que os significados são utilizados e trabalhados para orientar e formar as ações. Deve-se levar sempre em consideração que os significados desempenham seu papel na ação por intermédio de um processo de autointeração. (BLUMER 1980, p. 122).

De acordo com o autor, o interacionismo simbólico considera que o significado é produzido a partir do processo de interação humana, como produto social, e que o “uso de significados por alguém em plena ação envolve um processo interpretativo”. Para Haguette (1997, p. 32), “a mente é concebida por Mead como um processo que se manifesta sempre que o indivíduo interage consigo próprio usando símbolos significantes”.

O interacionismo simbólico fundamenta-se em uma série de conceitos básicos ou “imagens-raiz”, como Blumer (1980, p. 123) prefere denominar, que servem de base à compreensão das ideias meadianas. São eles: grupos ou sociedades humanas, a interação social, o homem como agente, os objetos e seus significados, a atividade humana e a conjugação das linhas de ação. Tais imagens-raiz, tomadas em conjunto, são importantes para saber a maneira como o interacionismo simbólico considera a sociedade e o comportamento humano. Considerando sua importância nas interações ocorridas entre estudantes e professores, descreveremos sucintamente cada uma delas.

Em relação à natureza da sociedade humana, Blumer (1980), afirma que os grupos ou sociedades humanas são constituídos por pessoas empenhadas em agir, que passam por todo o percurso de sua vida realizando uma infinidade de atividades, e isso acontece por meio da interação social. Nosso estudo levou em consideração as ações de um grupo de pessoas, no caso estudantes na sala de aula, empenhados em agir, em que a interação se fez necessária durante as discussões ocorridas para o encadeamento de ideias fundamentadas nas definições matemáticas de funções e suas derivadas.

Sobre a interação social, Blumer (1980, p. 124) nos diz que “uma sociedade é constituída de indivíduos que interagem uns com os outros. Suas atividades ocorrem predominantemente umas em reação às outras”. Fundamentados nessa perspectiva, de que as pessoas são vistas como atores que se relacionam, comunicam-se e interpretam uns aos outros, percebemos a importância das interações ocorridas entre estudantes e professores em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Isso porque, quando interagimos, tornamo-nos objetos sociais uns para com os outros, engajamo-nos em ação mental, tomamos decisões, mudamos direções, compartilhamos perspectivas, definimos a realidade e assumimos o papel do outro.

O ser humano é conceituado por Blumer (1980, p. 129) “como um organismo que não apenas reage a outrem no nível não simbólico como também lhes fornece indícios e interpreta suas indicações”. O autor afirma que o fato de o ser humano possuir um eu o capacita a interagir consigo próprio, e que “essa interação é social – uma forma de comunicação, com o indivíduo dirigindo-se a si mesmo como a um indivíduo e a isto reagindo”.

Para o autor, o indivíduo empenhado na autointeração não é um mero respondente, mas sim um organismo agente que necessita elaborar uma linha de ação de acordo com os elementos que verifica. Consideramos importante essa autointeração, visto que o desenvolvimento do pensamento matemático, do elementar para o avançado, depende de reflexões internas e pessoais.

No interacionismo simbólico, Blumer (1980, p. 127) afirma que "objeto é qualquer coisa passível de ser indicada ou referida", e que sua natureza compreende o significado que esse objeto possui para a pessoa, pois pode possuir diversos significados para diferentes pessoas. O significado dos objetos para cada pessoa é gerado a partir da maneira pela qual é definido pelas pessoas com quem interage, ou seja, o significado é produzido a partir do processo de interação humana. Para um indivíduo, o significado de um elemento nasce da maneira como outras pessoas agem em relação a si no tocante ao elemento. Todas as suas ações preocupam-se em defini-lo para o indivíduo. Dessa forma, o interacionismo simbólico considera os significados produtos sociais, criações elaboradas em e através das atividades humanas determinantes em seu processo interativo.

Toda atividade realizada em grupo se baseia no comportamento cooperativo, que envolve uma resposta às intenções dos outros, e essas intenções são transmitidas através de gestos que se tornam simbólicos, passíveis de serem interpretados. De acordo com Blumer (1980, p. 131-132), "a capacidade do homem de proceder a indicações a si mesmo empresta um caráter distintivo à ação humana. Isto significa que o homem defronta-se com um mundo que deve interpretar a fim de poder agir, ao invés de estar em contato com um ambiente ao qual reage devido à sua organização". O ser humano deve ser capaz de enfrentar situações em que é chamado a agir, e, para isso, deve elaborar uma linha de ação. Quando essa ação é conjunta, não perde a característica de ser elaborada através de um processo interpretativo e interativo. Para o autor:

> Tal processo interativo consiste na confecção de indícios destinados ao outro, sobre como proceder e na interpretação das indicações feitas por este. [...] os objetos de si mesmos, são formados, sustados, enfraquecidos e transformados no processo interativo mútuo (BLUMER 1980, p. 137).

Levamos em conta os diversos significados formados e transformados por meio das interações dos participantes, significados baseados nas definições estipuladas e extraídas e nas imagens conceituais de funções e suas derivadas.

A partir do sucinto esboço dessas "imagens-raiz", juntamente com os conceitos abordados por Tall e Vinner em relação ao pensamento matemático, estabelecemos, a seguir, importantes conexões que irão possibilitar ao professor reflexões importantes sobre a realização de trabalhos em grupos como forma de intermediar a aprendizagem.

2.3 Interações em sala de aula e pensamento matemático avançado

O interacionismo simbólico tem uma perspectiva de olhar a aprendizagem e o sujeito de uma forma diferente da forma em se que baseiam os estudos do Tall e Vinner. Para Blumer, o sujeito é um ser social, e a aprendizagem ocorre por meio de interações entre duas ou mais pessoas, a partir dos significados interpretados. Baseando-nos nas três premissas do interacionismo simbólico, podemos inferir que a ação dos indivíduos deriva dos significados que surgem das interações sociais, e que podem ser modificados devido às interpretações. Para Tall e Vinner, o sujeito é um ser individual, e seus estudos mostram uma relação do sujeito com o objeto. O interacionismo simbólico não mostra uma relação direta do sujeito com o objeto, e sim uma relação do sujeito e o objeto mediada pela sociedade. Mesmo diante de duas concepções entendendo o sujeito e a aprendizagem de forma diferente, percebemos semelhanças passíveis de serem analisadas. Nossos dados nos mostraram o pensamento dos estudantes sendo desenvolvido nas interações. A interação é um processo social, e, apesar de concordar que os alunos individualmente vão ter diversas imagens conceituais, as quiais são produzidas socialmente. As discussões ocorridas, as argumentações dos colegas e professores, a compreensão das definições não ocorreram individualmente; pelo contrário, vão aparecendo de diversas formas num encadeamento de ideias, e não das reflexões do sujeito sobre o objeto, por isso focamos nossas atenções nas interações.

A importância dos significados reside na forma como os estudantes manifestam sua compreensão relativa aos conceitos matemáticos abordados, pois, de acordo com Tall (1995), a sistematização do pensamento matemático na perspectiva cognitivista pode ser realizada por meio de três componentes da atividade humana: a *percepção* como entrada, o *pensamento* como processamento interno e a *ação* como saída. Considera que o pensamento matemático inicia-se pela percepção dos objetos do mundo externo e pelas ações sobre eles. À medida que o pensamento se desenvolve, tornando-se mais complexo, as ações sobre o objeto conduz ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas. Assim, tanto o pensamento matemático elementar quanto o pensamento matemático avançado se referem à maneira como processamos internamente a informação.

Os conceitos do interacionismo simbólico e os significados que os estudantes manifestaram nas interações ocorridas em sala de aula em relação às definições de funções e suas derivadas nos levaram a considerar a abordagem interacionista fundamental. Tanto o interacionismo simbólico como os conceitos do pensamento matemático avançado estão relacionados com o processo interpretativo em que as pessoas, de forma isolada ou coletiva, conduzem a si mesmas pela definição de um objeto, processo que revela e aponta o significado que as coisas têm para os estudantes quando interagem uns com os outros.

3 DESCRIÇÃO DA REALIZAÇÃO DE TRÊS ATIVIDADES

Descrevemos, detalhadamente, o desenvolvimento de três atividades, com o intuito de esclarecer como foram conduzidas, quais os objetivos traçados, aspectos relacionados com o marco teórico e alguns resultados obtidos. Pretende-se, assim, apresentar sugestões e estratégias de ensino e aprendizagem de funções e suas derivadas. As atividades enfocaram conceitos matemáticos relacionados a esse conteúdo e foram realizadas com o auxílio de um *software* com recursos de representação gráfica dinâmica para a articulação entre a visualização e a manipulação algébrica. Ressaltamos que cada atividade foi elaborada com o objetivo de contribuir para a compreensão dos conceitos relacionados com funções e suas derivadas no contexto das aulas de Cálculo.

Nosso propósito consiste em apresentar essas atividades como uma possibilidade para os professores de Cálculo, salientando a importância de adaptá-las aos contextos dos estudantes e às demandas institucionais e pessoais dos acadêmicos de Cálculo.

Oito atividades foram aplicadas na pesquisa, e todas elas se encontram no capítulo 4, entretanto, nesta seção descreveremos apenas três delas. A primeira atividade (segunda da sequência) tem como objetivo estabelecer relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função em que $x = a$. A segunda (atividade 3 da sequência) foi realizada em sala de aula com a utilização de lápis e papel quadriculado para traçar uma reta tangente a um gráfico num dado ponto, e consiste em estabelecer conexões entre a função e sua derivada. Nela propomos a construção e a exploração de conceitos de três funções: $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$. A terceira (atividade 4 da sequência) também foi feita utilizando a malha quadriculada, sem o auxílio do *software GeoGebra*, e teve como objetivo principal a construção do gráfico da derivada a partir do gráfico da função, sem o conhecimento da forma algébrica da função.

3.1 Primeira atividade

Para a primeira atividade, propomos a seguinte situação-problema:

Um mergulhador salta de um trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura h em metros, o tempo t em segundos e sua velocidade inicial de 9,8 metros por segundo, sua função posição é

$$h(t) = -4{,}9\ t^2 + 9{,}8\ t + 14{,}7$$

Na aula anterior, o professor regente corrigiu exercícios referentes aos conceitos de limites laterais e continuidade e abordou aspectos da derivada relacionados à taxa de variação, inclusive com exemplos sobre velocidade média. Pelo fato de termos optado explorar os recursos do *GeoGebra* sem orientação passo a passo, os alunos apresentaram dificuldades em responder aos itens da atividade, e ficaram mais preocupados em aprender a manipular as ferramentas do *software* do que interpretar as informações no gráfico construído em relação aos conceitos apresentados em sala de aula. Sugerimos que os professores de Cálculo desenvolvam previamente algumas atividades com a finalidade de possibilitar aos alunos um primeiro contato com as ferramentas do *software* para que eles possam ter um melhor aproveitamento na realização da atividade. Outra sugestão é iniciar os trabalhos com o *software*, utilizando menos recursos e/ou recursos mais simples, a fim de que os alunos possam conhecer a ferramenta gradativamente, facilitando, assim, os futuros trabalhos a serem propostos pelo professor.

Esclarecemos que elaboramos a segunda atividade da sequência com a mesma situação-problema, porque percebemos que após a realização da primeira atividade, os alunos adquiriram mais habilidade na utilização das ferramentas do software, e dessa forma direcionaram seus questionamentos para os conceitos que queríamos que compreendessem em relação à aplicação da derivada na resolução de problemas envolvendo taxa de variação. O professor regente da turma ministrou em sala de aula, antes da realização dessa segunda atividade, duas aulas sobre derivada. Os alunos resolveram exercícios do tipo: “Encontre a reta tangente à curva $y = x^3$nos pontos onde $x = 0$ e $x = -1$, e calcule a inclinação (coeficiente angular *m*) da reta tangente à curva traçada nestes pontos”.

O conceito de derivada já havia sido formalizado, sua definição como limite já havia sido explorada e os alunos sabiam calcular a derivada de funções por meio de algumas fórmulas, ou seja, usavam regras de derivação tipo: $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$, $\left(cf\right)' = cf'$, $\left(fg\right)' = fg' + f'g$, $\left(f+g\right)' = f' + g'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$, $\left(f-g\right)' = f' - g'$, $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$.

O professor seguiu a abordagem do livro-texto, mostrando que “o problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite” (STEWART, 2010, p. 130). As seguintes definições de acordo com o mesmo autor também foram exploradas:

DEFINIÇÃO: A **reta tangente** a uma curva *y = f(x)* em um ponto ***P****(a, f(a))* é a reta por ***P***, que tem a inclinação $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, desde que esse limite exista.

DEFINIÇÃO: A **derivada de uma função *f* em um número *a***, denotada por *f'(a)*, é $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se o limite existir.

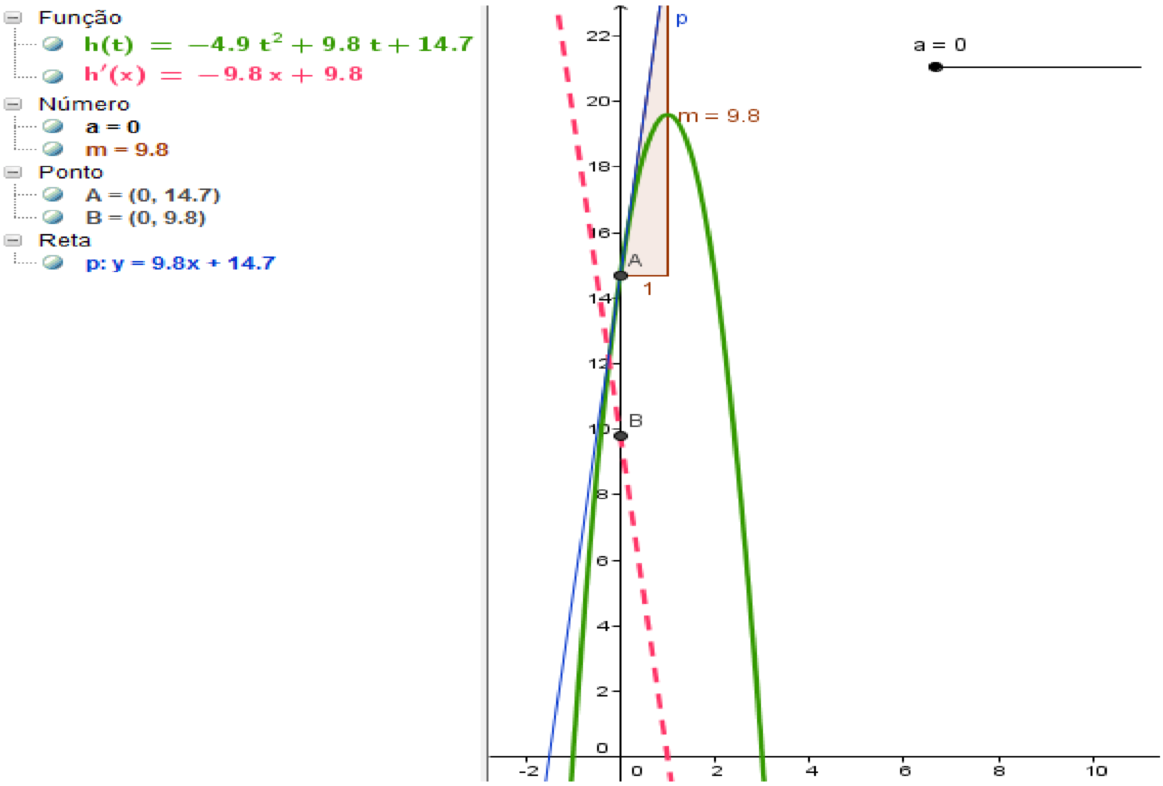
Essa atividade foi rápida, eficiente e com articulação entre a visualização e a manipulação algébrica. Apresentamos o processo de construção e exploração de conceitos e alguns aspectos observados durante sua realização.

Processo de construção/exploração de conceitos:

1.1. Abra o *GeoGebra* e crie o arquivo: a2_cal_si_nome_data.
1.2. Plote a função *h(t).*
1.3. Crie um controle deslizante **a** e configure-o no intervalo [0, 3] e incremento 0.5.
1.4. Insira o ponto A no gráfico, colocando na caixa de entrada a expressão A = (a, h(a)).
1.5. Utilizando a opção reta tangente (4ª janela), *tecle* no gráfico da função e no ponto A; assim obterá a reta tangente (b) ao gráfico neste ponto. Em propriedades, renomeie a reta tangente para t.
1.6. Na opção inclinação (8ª janela), *tecle* na reta tangente; assim obterá o valor de a1 que corresponderá à sua inclinação neste ponto. Renomeie para m.
1.7. Na caixa de entrada, insira o ponto B com as seguintes coordenadas (a, m). Com o botão direito do mouse no ponto B, ative a opção habilitar rastro.
1.8. Movimente o parâmetro **a** com a opção mover, e observe os pontos obtidos pelo rastro deixado.

Na Figura 8 desta seção, apresentamos o gráfico que pode ser obtido através do processo de construção apresentado. O controle deslizante a corresponde ao ponto A (a, h(a)).

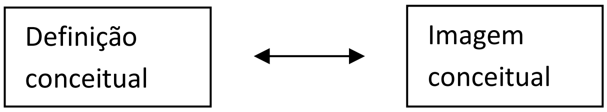
Figura 8 – Gráfico da função $h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$, construído na atividade 1.



Fonte: Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

A maioria dos alunos não apresentou dificuldades em construir o gráfico da função, criar o controle deslizante e habilitar rastro, ou seja, já manipulava com eficiência os recursos do *software*. Queríamos nessa atividade que os alunos percebessem que a reta tangente à função em um ponto dado é a reta cuja inclinação é igual à derivada da função. Para isso, ativaram o controle deslizante que, quando animado, mostra a reta tangenciando a curva, deixando como rastro pontos no esboço da função derivada. Preocupados com a possibilidade de alguns alunos não estabelecerem relações da forma visual da função com sua forma algébrica, elaboramos a Tabela 1. Nessa tabela, queríamos que estabelecessem relações entre a equação da reta tangente à curva $h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$, o ponto A, o ponto B e o valor do coeficiente angular da reta tangente. Considerando a definição conceitual e imagem conceitual de Vinner (1991), essa atividade exemplifica a ideia de que, quando se introduz um conceito por meio de uma definição, no início, a célula da imagem conceitual encontra-se vazia, e gradualmente é desenvolvida e preenchida, a partir dos exemplos, explicações, exercícios e atividades realizadas pelo professor.

Figura 9 – Intercâmbio entre imagem conceitual e definição conceitual



Fonte: VINNER, 1991, p. 9.

Conforme afirma Vinner (1991, p. 6), “adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber a definição conceitual de cor não garante o entendimento do conceito. Entender, como acreditamos, significa ter uma imagem conceitual. Certos significados devem ser associados com as palavras”. Segundo Vinner (1991), quando se vê ou se ouve uma palavra associada a um conceito matemático, algo como o nome do conceito é evocado na memória. Isso faz parte do que é denominado *imagem conceitual*. De acordo com Tall e Vinner (1981), a *imagem conceitual* corresponde ao que está associado ao conceito na mente do indivíduo e inclui todas as imagens mentais, processos e propriedades ligadas ao mesmo. Assim, sugerimos que os alunos recorressem à animação do controle deslizante para completar a Tabela 1, e respondessem aos questionamentos que se seguem. Aqui mostramos a Tabela 1 já completada.

Tabela 1 – Relação entre os pontos de uma função e os pontos de sua derivada

Instante	Ponto A=(a,h(a)) que representa a interseção entre a reta tangente (t)e a função h(t)	Equação da reta tangente (t) à função h(t)	Valor (m) do coeficiente angular da reta tangente (t)	Ponto B=(a,m) da função h’(t)
0	(0, 14.7)	Y=9.8x+14.7	9.8	(0, 9.8)
0.5	(0.5, 18.38)	Y=4.9x + 15.93	4.9	(0.5, 4.9)
1	(1, 19.6)	Y=19.6	0	(1,0)
1.5	(1.5, 18.38)	Y=-4.9x + 25.73	-4.9	(1.5, -4.9)
2	(2, 14.7)	Y=-9.8+34.3	-9.8	(2, 9.8)
2.5	(2.5, 8.58)	Y=-14.7 + 45.33	-14.7	(2.5, -14.7)
3	(3, 0)	Y=-19.6 + 58.8	-19.6	(3, -19.6)

Fonte: A pesquisadora.

Após o preenchimento da Tabela 1, os estudantes deveriam realizar as seguintes tarefas:

1.9. Use esses dados para completar a Tabela 1, que relaciona a altura *(h*) do mergulhador com o tempo (*t*) nos instantes especificados.
1.10. No contexto do problema, o que o coeficiente angular **m** representa?
1.11. Qual o significado de **m** ser positivo? E negativo? Quando ele é nulo? Por quê?

1.12. Calcule a derivada de h(t) e verifique se as coordenadas dos pontos gerados pelo rastro de B= (a,m) pertencem a essa função.
1.13. O que representa as coordenadas do ponto B?
1.14. Elabore e responda a uma pergunta no contexto dessa situação-problema.

Alguns resultados:

Os estudantes, cujos nomes são pseudônimos, preencheram a tabela e fizeram observações pertinentes entre a tabela e o gráfico plotado no *GeoGebra*. Mostramos, a seguir, a transcrição da conversa entre alunos em torno do item 1.10, “No contexto do problema, o que o coeficiente angular **m** representa?”

Carlos:	*Ô José, o que você colocou na 1.10?*
José:	*Olha na tabela, moço. É o mesmo coeficiente que está na equação da reta tangente.*
Carlos:	*Você está olhando na tabela? Eu estou olhando no gráfico.* [O aluno olhava o valor do coeficiente angular ***m*** registrado no gráfico, aparentemente sem nenhuma análise.]
José:	*Mas é a mesma coisa. Eu achei mais fácil olhar na tabela.*
Carlos:	*É mais fácil mesmo, mas eu queria entender isso aqui no gráfico. Ô Professora, eu estou vendo que o x do ponto A é o mesmo x do B, e que m é o valor perto de x na equação da reta tangente, mas eu queria saber o que ele significa na reta.* [perto de x significa coeficiente numérico de x da reta f(x) = mx+b]
Pesquisadora:	*Coloca sua reta tangente paralela ao eixo x, com m=0. O que você observa olhando a reta no gráfico e na tabela?*
Carlos:	*No gráfico, eu vejo que a reta não toca o eixo x; ela não está inclinada. Esse m é a inclinação? Derivada tem a ver o que com reta tangente?*
José:	*Na tabela, a gente vê que esse m é o coeficiente angular da reta tangente. Essa reta é a derivada da função naquele ponto lá.*

Nesse diálogo, podemos observar que os alunos recorriam à animação do controle deslizante e aos dados da Tabela 1 para concluirem a atividade proposta. Observamos que o aluno José compreendia o conceito de derivada, mas chamava a reta tangente de derivada da função no ponto. Os alunos transitavam entre as representações algébrica e gráfica utilizando o *GeoGebra* e apresentavam concepções fundamentadas nessas representações. Para nós, essa transição entre as representações é fundamental para a formação da imagem conceitual, pois, segundo Tall e Vinner (1981), o desenvolvimento cognitivo de um sujeito, associado a um conceito matemático, sucede da soma de todas as experiências, integradas a esse conceito, que tal sujeito acumula, ou seja, um conceito matemático não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como única referência pedagógica sua definição formal. É necessária uma variedade de ideias, todas associadas a ele, para que se forme o que chamam de imagem conceitual.

Mesmo com todos os aspectos que consideramos positivos em relação à realização da atividade, observamos que o aluno José compreendia o conceito de derivada, mas chamava a reta tangente de derivada da função no ponto. Ainda existiam aspectos da função derivada que deveriam ser retomados, por isso torna-se importante o papel mediador do educador em relação à aprendizagem, que, por meio de questionamentos e argumentos, pode fazer intervenções que possibilitem aos alunos a utilização dos conceitos de forma crítica e ativa, atribuindo-lhes um significado. O educador deve atuar como mediador do conhecimento, de forma que os alunos participem ativamente na produção e assimilação dos conhecimentos referentes ao conteúdo em interação com os demais estudantes e com o professor e não passivamente, por meio de uma transmissão de informações e conceitos. Cabe ao professor colocar-se como ponte entre aluno e conhecimento e cabe ao aluno participar ativamente desse processo, pois ensinar não é transferir conhecimento, mas sim possibilitar a construção dele de forma interativa. Godino e Llinares (2000, p. 3) corroboram essa ideia quando afirmam que as atuações de professores e alunos devem cumprir as seguintes expectativas: o professor deve criar condições suficientes para que os alunos se apropriem de certo conhecimento, e deve assegurar que o conhecimento anterior e as novas condições criadas possibilitem oportunidades aos alunos de apropriar-se do conhecimento. Nessa interação, os alunos devem cumprir as condições estabelecidas pelo professor. Assumindo esse papel mediador, percebemos que, mesmo preenchendo a tabela corretamente e fazendo observações pertinentes entre a tabela e o gráfico plotado no *GeoGebra*, alguns alunos ainda não haviam compreendido o conceito geométrico da derivada. Queríamos que os alunos estabelecessem relações entre taxa de variação e coeficientes angulares de retas tangentes a curvas, atribuindo, assim, significado ao conceito de derivada, pois a utilização de uma ferramenta computacional viabiliza a visualização gráfica e possível atribuição de significado ao conteúdo que está sendo desenvolvido.

Entretanto, percebemos que a utilização do *software* sem o conhecimento matemático adequado poderia levar os estudantes a obterem conclusões equivocadas, por isso resolvemos planejar a próxima atividade, segunda a ser descrita nesta seção, cujo objetivo consiste em estabelecer conexões entre a função e sua derivada.

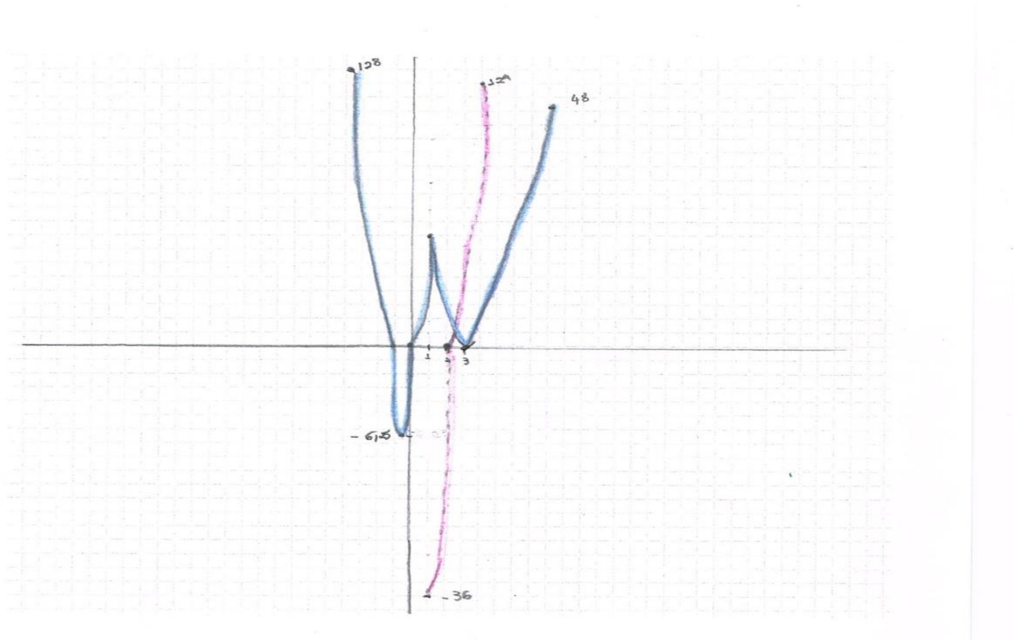
3.2 Segunda atividade

Essa atividade foi realizada em sala de aula com a utilização de lápis e papel quadriculado para traçar uma reta tangente a um gráfico num dado ponto. Propomos a construção e a exploração de conceitos de três funções: $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$. As funções foram elaboradas pela própria pesquisadora, e cada uma delas apresentava um diferente nível de complexidade para sua construção. Os conceitos explorados foram: pontos onde a curva das funções *f(x)*, *g(x)* e *h(x)* interceptam o eixo x e o eixo y, intervalo de crescimento e decrescimento de cada uma delas, domínio, imagem, e grau da função e de sua derivada, cálculo algébrico da função derivada de *f*, de *g* e de *h* e construção do gráfico das funções e de suas respectivas derivadas no plano cartesiano.

No primeiro momento, a construção dos gráficos foi feita na malha quadriculada, em sala de aula, e sem auxílio de ferramentas tecnológicas, e, no segundo momento, a mesma atividade foi realizada com o auxílio do *software* no laboratório de informática. Recolhemos as folhas de resolução e entregamos aos alunos na aula seguinte, para que comparassem suas construções gráficas realizadas no papel quadriculado com as construções feitas no *GeoGebra*. Os alunos não apresentaram dificuldades para construir o gráfico das funções $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = x^3$ na malha quadriculada, e a maioria deles recorreu à estratégia de atribuir valores à variável x, organizando em uma tabela os valores de x e de y. Calcularam a derivada das funções de forma algébrica com relativa facilidade e construíram o gráfico da derivada utilizando o mesmo procedimento anterior. Determinaram o domínio e a imagem das funções, bem como os pontos de intercessão com o eixo x e com o eixo y. Na função quadrática, alguns alunos resolveram a equação $x^2 - 9 = 0$ para encontrar suas raízes, com a finalidade de visualizar os zeros da função.

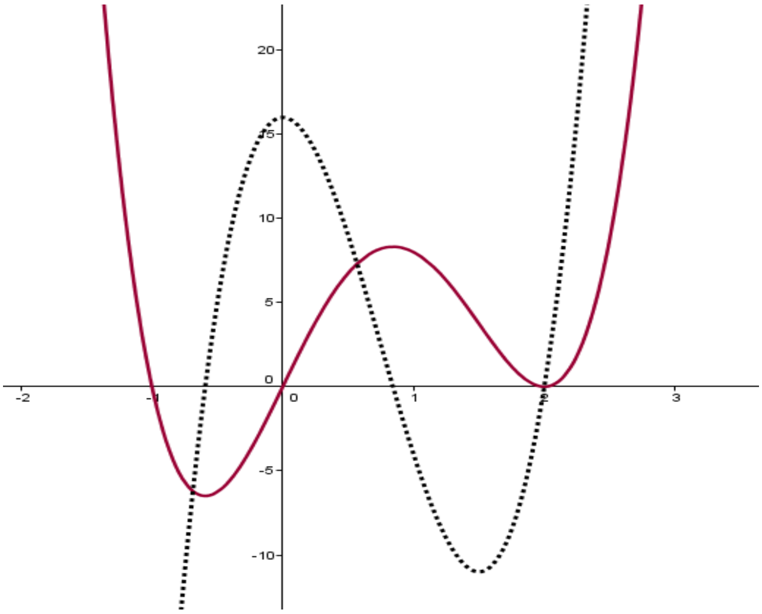
As dúvidas vieram quando tentaram construir o gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$, pois recorreram ao mesmo processo anterior, ou seja, atribuindo valores à variável x. Nosso intuito era o de que os alunos percebessem que, para construir a função *h(x)*, seria viável uma estratégia diferente da utilizada para construir *f(x)* e *g(x)*, ou seja, objetivava-se explorar com os alunos outras formas para a construção de gráficos de funções na malha quadriculada. Apenas um deles, Marcelo, conseguiu realizar o esboço do gráfico de h(x). Portanto, a maioria não respondeu, nessa aula, aos questionamentos referentes ao domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento. Apresentamos, para efeito de comparação, na Figura 10 o gráfico da função *h(x)* e sua derivada na folha quadriculada, feito pelo aluno Marcelo, e na Figura 11 a construção da mesma função e sua derivada feita pela pesquisadora no *GeoGebra.*

Figura 10 – Gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$ e *h'(x)* na malha quadriculada



Fonte: Gráfico feito pelo aluno Marcelo.

Figura 11 – Gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$ e *h'(x)* pontilhada



Fonte: A pesquisadora.

Os estudantes apresentaram dificuldades para esboçar o gráfico dessa função e ficaram curiosos quanto à sua construção. Houve uma discussão acerca das relações de uma função e sua derivada, e alguns alunos estabeleceram relações importantes entre pontos máximos e mínimos da função e o significado desses pontos com as raízes da função derivada. Perceberam que a função polinomial *h'* possuía um grau a menos que o da função *h*, comentaram sobre o domínio e a imagem, sobre intervalos de crescimento e decrescimento da função, e perceberam a importância do gráfico da derivada para a construção do gráfico da função. Entretanto, essas observações foram feitas na visualização dos gráficos das funções *f(x)* e *g(x)*, pois não conseguiram construir o gráfico de *h(x)*.

Na aula seguinte, a resolução dessa atividade aconteceu no laboratório de informática com o auxílio do *GeoGebra*, facilitando a visualização dos gráficos que haviam sido construídos na malha quadriculada da aula anterior. Dessa forma, os estudantes tiveram a oportunidade de comparar o que haviam construído na malha quadriculada com o gráfico plotado no *GeoGebra*. Fizeram observações pertinentes a respeito das relações entre os pontos máximos e mínimos da função *h(x)* e as raízes da função *h'(x)*, pois agora podiam visualizar o gráfico construído no *GeoGebra*.

Houve questionamentos também a respeito do número de raízes da função *h(x)*, pois, de acordo com os alunos, sendo de quarto grau, a equação deveria ter quatro raízes, entretanto, mesmo com essa observação, não conseguiram perceber a duplicidade na raiz para x=2. A forma fatorada foi apresentada no quadro pelo professor, ou seja, $4x^4 - 12x^3 + 16x = 4x(x+1)(x-2)^2$.

Dos diálogos ocorridos nas interações entre alunos, destacamos o questionamento feito pelo aluno Ivo, e a resposta do aluno Guto:

> Ivo: *Ô Professora, me ocorreu uma dúvida aqui agora. Você nos deu uma função e pediu o gráfico dela e de sua derivada. É possível o contrário? Do gráfico da derivada construir o da função?*
>
> Pesquisadora: *Vocês entenderam a pergunta de Ivo? O que a turma acha, é possível ou não?*
>
> Alunos: *Acho que não.*
>
> Guto: *Eu acho que dá pela integral, só que não fica perfeito, pois a integral não usa constante e eu não sei o que aconteceria com o número menos 9.* [Guto é aluno repetente; esclarecemos que a integral tem uma constante de integração e o – 9 refere-se ao valor c da função $f(x) = x^2 - 9$].

Devido aos questionamentos ocorridos durante as explicações da atividade e às conclusões alcançadas pelos alunos, às regularidades observadas, e, principalmente, à fala de Ivo e de Guto, elaboramos a terceira atividade, desenvolvida em sala de aula sem o auxílio do *software*, que sugeriu esboçar o gráfico de uma função a partir do gráfico da sua função derivada. Entretanto, propusemos a construção do gráfico da função derivada a partir do gráfico de uma função dada, pois supúnhamos ser mais fácil estabelecer relações entre a função e sua derivada visualizando uma função representada por meio de um gráfico. Com o intuito de focalizar aspectos gráficos, o ponto de partida foi um esboço do gráfico da função sem fornecer sua forma algébrica. Segue-se a descrição dessa atividade, que também foi feita utilizando a malha quadriculada, sem o auxílio do *software GeoGebra*.

3.3 Terceira atividade

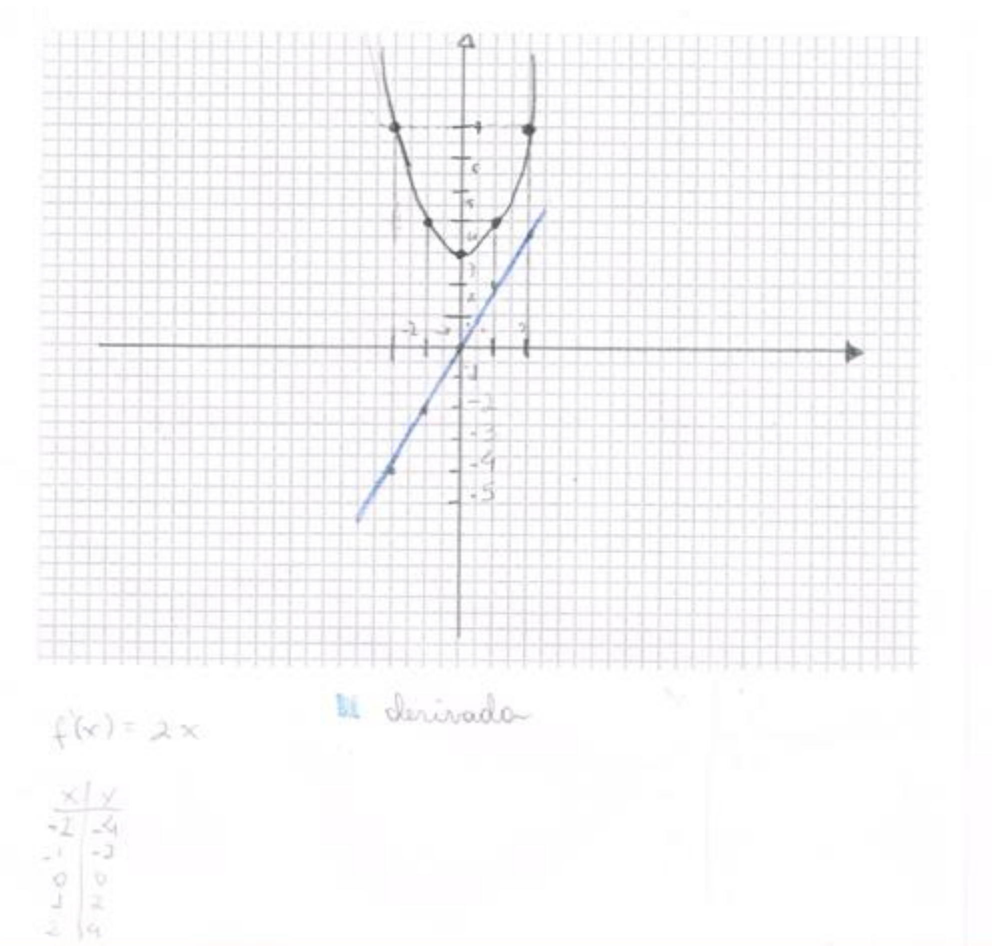
Essa atividade teve como objetivo principal a construção do gráfico da derivada a partir do gráfico da função, sem o conhecimento da forma algébrica da função. Para isso, propusemos aos alunos as tarefas que foram realizadas da seguinte forma: primeiramente cada aluno recebeu uma folha na qual deveria elaborar uma função, determinar seu domínio e registrar o cálculo de sua derivada, bem como esboçar na malha quadriculada seu gráfico e o de sua derivada. Essa folha foi assinada pelos alunos, recolhida, codificada e reservada para posterior comparação. Em segundo lugar, os alunos receberam outra folha com uma malha quadriculada, na qual esboçaram novamente o gráfico da função que haviam elaborado na primeira tarefa, mas, dessa vez, não registraram a forma algébrica da função e tiveram o cuidado de não assinar a tarefa, ou seja, na folha constava apenas o esboço do gráfico de uma função sem identificar quem o havia esboçado. Essa folha também foi recolhida, codificada de acordo com o nome do aluno que estava na folha recolhida anteriormente. Essa codificação foi necessária para que não fosse identificada, pelo colega, a autoria do gráfico.

Processo de construção/exploração de conceitos:

1. Escreva uma função *f(x)* e determine seu domínio.
2. Determine a derivada dessa função.
3. Esboce o gráfico de *f(x)* e de *f'(x)* na mesma malha quadriculada.

f(x) =
f '(x)=

Figura 12 – Gráfico de uma função quadrática e de sua derivada, construído por alunos na atividade IV



Fonte: Gráfico feito pela aluna Jane.

Em terceiro, os alunos receberam o gráfico construído pelo colega na malha quadriculada, no qual deveriam determinar pontos de intercessão com os eixos, domínio, imagem e grau da função. Foi proposto, ainda, que construíssem o gráfico da derivada no mesmo plano cartesiano em que estava construído o gráfico da função.

4. Na malha quadriculada, você tem o esboço do gráfico de uma função que foi elaborado por um de seus colegas.

5.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?
5.2. Em quais intervalos a curva é crescente? E decrescente?
5.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.
5.4. Qual é o grau de *f(x)*? E de sua derivada?
5.5. Construa o gráfico de *f’* no mesmo plano cartesiano.

Por fim, recolhemos todas as folhas, organizamo-las de acordo com o nome do aluno que havia elaborado as funções, e as entregamos novamente para os alunos, de forma que cada estudante tinha em mãos o que havia elaborado e o que o colega havia feito. Assim, iniciou-se a discussão sobre as relações gráficas que havia entre uma função e sua derivada, e cada aluno pôde comparar o que havia feito com o que fez o colega.

Alguns resultados:

Esclarecemos que a atividade foi realizada de forma individual, sem consulta em cadernos ou livros, e sem utilização de calculadora e de *softwares.* Também não permitimos o diálogo entre os alunos até a construção dos gráficos, pois queríamos que elaborassem estratégias para a construção de gráficos de funções derivadas por meio da função representada graficamente. No início, os alunos ficaram sem saber o que fazer, dizendo ser impossível a construção da função derivada sem a forma algébrica da função dada. Todos eles usaram a estratégia de elaborar a função algebricamente e foram testando os gráficos até achar um esboço parecido com o que eles tinham em mãos, ou determinaram a função pelos pontos constantes nos gráficos. Mesmo relembrando com eles, antes da realização da atividade, a existência de funções exponenciais, trigonométricas, irracionais, polinomiais e logarítmicas, apenas quatro alunos elaboraram uma função polinomial de terceiro grau, um aluno elaborou uma função trigonométrica *(f(x) = sen x)* e todos os outros elaboraram funções polinomiais de segundo grau. Os diálogos que estão transcritos logo a seguir aconteceram durante a realização da atividade, em sala de aula.

> Jonas: *Ô Professora, acho que quem fez esse gráfico aqui se esqueceu de escrever a lei de f(x).*
> Pesquisadora: *Esqueceu não, é isso mesmo.*
> Jonas: *Você quer que eu desenhe o gráfico da derivada sem a função algébrica?*
> Professor: *Essa é a ideia.*
> Pedro: *Não sei nem de onde começar. Acho que é impossível.*
> Marcelo: *É só descobrir a função, gente.*
> Pesquisadora: *Gostaria muito que vocês não comentassem suas descobertas e estratégias de resolução até a conclusão da atividade.*

Após a ideia de Marcelo, todos os alunos começaram a procurar qual era a lei que definia a função. Em alguns gráficos cujos pontos não estavam tão nítidos, os alunos ficaram sem saber o que fazer, e depois começaram a testar possibilidades gráficas de funções escritas algebricamente:

> Guto: *Ô Professora, pede à pessoa que desenhou esse aqui para definir direitinho os pontos. Do jeito que está aqui não tem jeito.*
> Pesquisadora: *Você está querendo descobrir a lei para desenhar o gráfico da função derivada? Faz esse gráfico através do gráfico da função.*
> Guto: *Isso é impossível. Vou desenhar várias aqui até descobrir qual a pessoa usou.*

Mesmo sugerindo a construção do gráfico sem recorrer à lei que a definia, Guto preferiu testar vários exemplos de funções até achar uma função que se parecesse com o esboço que tinha. O aluno que recebeu o esboço da função trigonométrica descobriu que se tratava da função seno e, assim, traçou a derivada, também recorrendo à regra algébrica. Após a construção dos gráficos, permitimos aos alunos que comparassem o gráfico que haviam feito, sem ter referência da lei da função com um gráfico elaborado a partir da lei da função. Esse momento de interação entre eles foi muito importante devido ao elevado nível de discussão a respeito dos resultados dos conceitos abordados. Durante a correção da atividade, fomos aos poucos, como professores mediadores, conduzindo-os para a observação de regularidades, e interagindo com toda a turma.

Consideramos de fundamental importância para a aprendizagem a interação entre alunos e entre alunos e professores. Para o interacionismo simbólico, as pessoas interagem umas com as outras por meio de interpretação mútua das ações, em vez de somente reagir às ações uma do outra Suas respostas não são dadas diretamente às ações um do outro, mas baseadas no significado que atribuem a tais ações. Assim, interação humana é mediada pelo uso de símbolos e significados, através de interpretação, ou determinação do significado das ações um do outro. (BLUMER, 1962). As perspectivas interacionistas enfatizam os processos individuais e os sociais, e o desenvolvimento da compreensão pessoal dos indivíduos é concebido por meio de sua participação. De acordo com Godino e Llinares (2000), o aspecto central da perspectiva interacionista, em relação ao significado, é que esse é desenvolvido através da interpretação e interação. A importância da participação do aluno José no momento da discussão abriu espaço para a observação de regularidades e retomada de conceitos abordados anteriormente. Notamos que o aluno Pedro, até então, acreditava não ser possível esboçar a função derivada sem a forma algébrica da função que a definia.

Pesquisadora:	*Todo mundo recorreu à lei da função. Vocês não pensaram em outra estratégia?*
Pedro:	*Acho que não tem jeito de ser diferente.*
José:	*Ô Professora, mas tem algumas coisas aqui que podem ser observadas. Se fosse o gráfico de uma polinomial de terceiro grau, a derivada seria uma parábola. Se fosse uma parábola, a derivada seria uma reta, que foi o que fizemos aqui.*
Jane:	*É mesmo, e se fosse uma tipo f(x)=2x a derivada seria 2.*
Jonas:	*Aí seria um ponto.*
Pesquisadora:	*Seria um ponto gente?*
Marcelo:	*Não, seria uma reta paralela ao eixo x.*
Pesquisadora:	*Essa função tem nome?*
Marcelo:	*Função constante.*

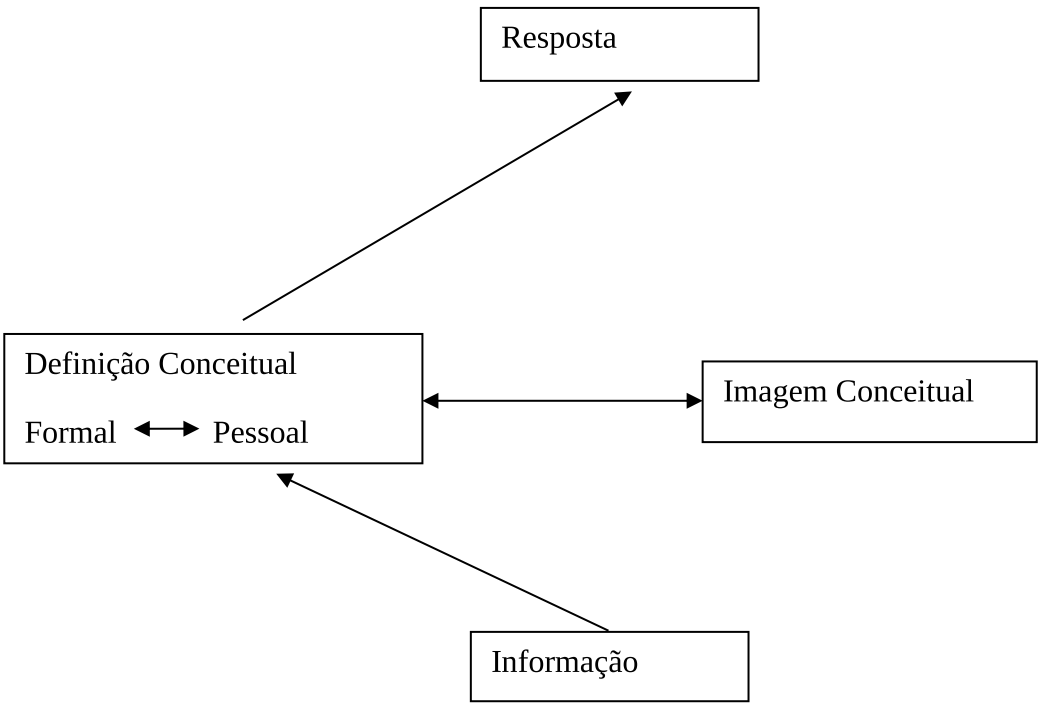
Jonas afirmou que a função *f(x)=2* seria representada por um ponto no plano cartesiano, e Marcelo imediatamente esclarece que seria uma reta paralela ao eixo x. Para Blumer, o ser humano conhece as coisas pelos seus significados, os quais são criados e modificados pela interação social. Nesse sentido, ele considera que:

> A peculiaridade consiste no fato de que os seres humanos interpretam as ações dos outros ao invés de meramente reagirem às ações dos outros. Suas respostas não são feitas diretamente à ação, mas, sim, baseadas no significado que dão a essa ação. (BLUMER, 1969, p. 19).

Os alunos não estabeleceram conexões para esboçar o gráfico da derivada sem a lei da função, mas manifestaram importantes conclusões sobre os tipos de funções e suas derivadas.

Nota-se que o aluno José estabeleceu relações entre a representação gráfica das funções polinomiais e suas derivadas. Podemos inferir que nesse momento esse aluno recorreu à definição formal e pessoal como estratégia de resolução para o questionamento feito pela pesquisadora. As interações ocorridas entre os integrantes do grupo e professores e os argumentos utilizados nas discussões nos remetem às afirmações de Vinner (1991). O autor desenvolveu um modelo baseado na existência de duas células: uma para a *imagem conceitual* e a outra para a *definição* conceitual (ver figuras 1 a 6), e considera que são centrais para a explicação do processo cognitivo de formação do conceito. Vinner (1991, p. 11) considera que "não importa como seu sistema de associação reaja quando um problema lhe é colocado em um contexto técnico, não se espera que você formule sua solução antes de consultar a definição conceitual". Isso é, naturalmente, o "processo desejável", entretanto o autor reconhece que isso não corresponde ao que o estudante realiza na prática. Para Tall e Vinner (1981), a definição conceitual, geralmente utilizada para o desenvolvimento de conceitos matemáticos no ensino universitário, compreende a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal. De acordo com essa distinção, que consideramos relevante, elaboramos um esquema, compreendido pela Figura 13, no qual destacamos os intercâmbios propostos no modelo indicado por Vinner (1991), bem como explicitamos um intercâmbio entre a definição conceitual formal e a pessoal dentro da célula definição conceitual de Vinner (1991, p. 11) conforme evidenciado nos dados da pesquisa. Resssaltamos que os dados de nossa pesquisa evidenciarm intercâmbios entre o uso da definição conceitual formal e pessoal.

Figura 13 – Intercâmbio entre definições (formais e pessoais) e imagens conceituais



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Esclarecemos que, no que se refere à ilustração realizada por meio da Figura 13, compreendemos que é possível que a célula da definição conceitual, tanto pessoal quanto formal, seja evocada durante o processo de resolução de um problema. Também pode haver intercâmbio entre essas definições, bem como entre elas e a imagem conceitual. De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual pessoal é o entendimento verbal da definição conceitual formal de uma pessoa. A resposta dada pelo indivíduo a uma situação-problema pode partir da definição conceitual pessoal.

Destacamos que no início do diálogo, o aluno Pedro diz*: "Acho que não tem jeito de ser diferente"*. A partir dos exemplos e argumentos realizados pelos professores e colegas, a célula da imagem conceitual sobre a representação gráfica de função polinomial do aluno Pedro pode ter sido ressignificada, pois no primeiro momento ele acreditava não ser possível traçar o gráfico de uma função derivada sem a lei dessa função. De acordo com Vinner (1991), muitos professores têm a expectativa de um processo de mão única para a formação do conceito. Eles esperam que a imagem conceitual seja formada por meio da definição conceitual formal e seja completamente controlada por esta.

Revisamos o conteúdo relacionado à diferença entre a representação de ponto no plano cartesiano e da função constante. Um dos alunos, que não é repetente, falou sobre o ponto máximo e mínimo, assunto abordado apenas pelos alunos repetentes na aula anterior, da seguinte maneira:

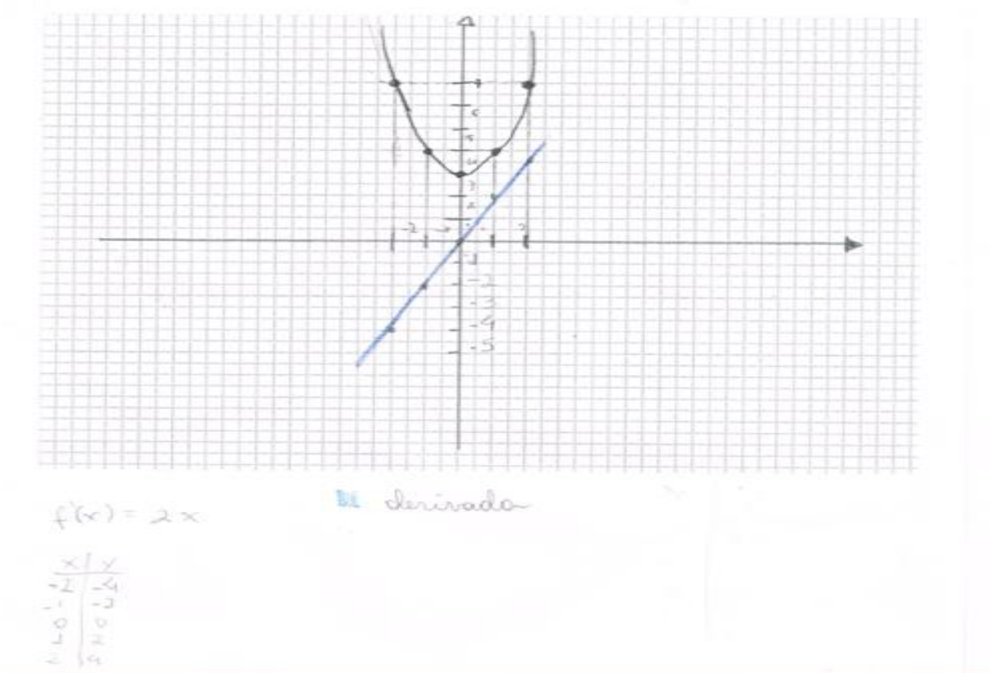
Ivo:	*Se achar a raiz da derivada tem como achar o ponto máximo ou mínimo da função*. [Pode ser um ponto de inflexão].
Pesquisadora:	*Vocês conseguiram enxergar o que Ivo está falando?*

Nesse momento, os alunos pegaram os esboços dos gráficos e procuraram observar o que o colega estava falando. Podemos exemplificar este fato por meio do diálogo seguinte.

Pesquisadora:	*Ivo está dizendo que o ponto máximo ou mínimo da função é exatamente no ponto onde o gráfico da derivada corta o eixo x, ou seja, é a raiz da derivada. Isso está acontecendo no gráfico de vocês?*
José:	*É verdade. De certa forma é onde a reta tangente é paralela ao eixo x, por isso que é a raiz da derivada, a inclinação é zero.*

Nas funções polinomiais de segundo grau, conseguiram identificar a raiz da função derivada como ponto máximo ou mínimo da função. Na Figura 14, temos o esboço de uma função de segundo grau e de sua derivada. Um aluno elaborou o gráfico de *f(x)*, e outro esboçou *f'(x).*

Figura 14 – Gráfico de uma função quadrática e de sua derivada, construído por alunos na atividade IV



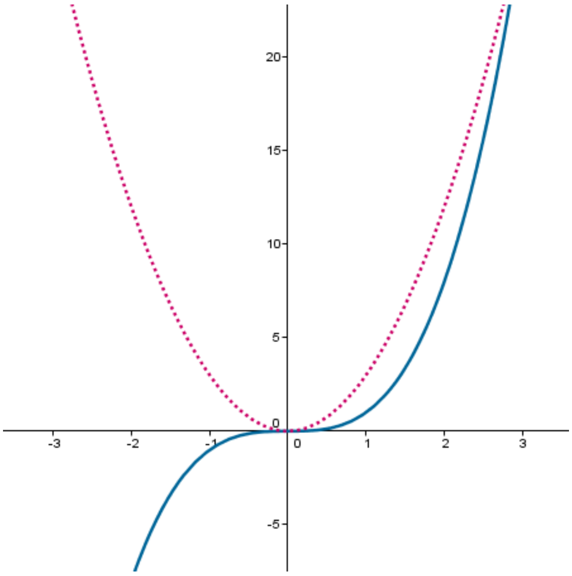
Fonte: Gráfico feito pelo aluno José.

Os alunos que estavam com o esboço da função polinomial de terceiro grau observaram intervalos de crescimento e decrescimento na função derivada e estabeleceram relações importantes com a função. Perceberam o comportamento da função derivada nos pontos máximos e mínimos da função, bem como a inclinação da reta tangente quando paralela ao eixo das abscissas. Durante a discussão, Caio fez o seguinte questionamento:

Caio: *Ô Professora, percebi aqui que, quando a derivada é decrescente, a função é negativa, e, quando a derivada cresce, a função é positiva.*

O aluno está dizendo que, no intervalo onde *f ’* era decrescente, a imagem de *f* era negativa, e, onde era crescente, a imagem era positiva. Questionamos com toda a turma se o que Caio estava falando podia ser generalizado. Como já havíamos explorado funções polinomiais de terceiro grau, foi fácil perceber que essa conclusão não se aplica a todas as funções. A continuação dessa aula ocorreu no laboratório de informática, e, neste momento, os alunos tinham acesso às ferramentas do *GeoGebra*. Na figura 15, podemos apreciar o que Caio estava visualizando.

Figura 15 – Gráfico de $f(x) = x^3$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2$ (pontilhada)



Fonte: Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

Essa observação havia sido feita por Marcelo anteriormente:

Marcelo: *Se for $f(x) = -x^2$ a reta da derivada fica decrescente. No $f(x) = x^3$, percebo também que, quando a parábola* [a derivada $f'(x) = 3x^2$] *está decrescendo, a função tem valores negativos, e, quando a parábola é crescente, a função está em sua parte positiva.*

Exploramos intervalos de crescimento e decrescimento utilizando o gráfico da Figura 15, e sentimos necessidade de fundamentar todas as conclusões obtidas por meio de definições, pois a imagem conceitual de alguns alunos, além de Caio e Marcelo, é a de que a função era decrescente quando sua representação gráfica estava no terceiro ou quarto quadrante do plano cartesiano.

As conclusões de Caio e Marcelo mostram evidências de definições extraídas e compreendemos as definições formais como definições estipuladas. (EDWARDS; WARD, 2008). De acordo com os autores, as definições matemáticas são estipuladas, ao passo que a maioria das definições na “linguagem cotidiana” são extraídas, e os conceitos são atribuídos a partir do uso de significados em diversas situações e contextos. As definições conceituais matemáticas formais utilizam-se de símbolos para se referir a esses conceitos. Na definição estipulada, são designados ou estipulados significados aos conceitos comunicados por estes símbolos. Por sua vez, as definições extraídas referem-se ao uso de conceitos em uma variedade de contextos específicos.

Devido as dúvidas surgidas em relação a definição de função crescente e decrescente, solicitamos aos alunos que fizessem a leitura, retirada do livro texto (STEWART, 2010, p. 11).

Definição de função crescente:

> Uma função ***f*** é chamada **crescente** em um intervalo ***I*** se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***. Ela é denominada **decrescente** em ***I*** se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I.***

Questionamos quem era x_1, $f(x_1), x_2$ e $f(x_2)$, e para isso usamos novamente a tela do *GeoGebra* com a função $f(x) = x^3$ e sua derivada (Figura 14). Dessa forma, foram estipulados significados aos símbolos da definição formal de função crescente e função decrescente. Portanto, compreendemos a definição formal como definição estipulada, pois foram atribuidos significados aos símbolos.

Para Caio e Marcelo, a representação gráfica da função e de sua derivada no *GeoGebra* sugere intervalos de crescimento e decrescimento relacionados com o conjunto imagem das funções. Mesmo incoerente com a definição formal de função crescente e função decrescente, é o que faz parte da imagem conceitual em relação a esse conceito. Através de experiências prévias, os alunos atribuíram significados ao conceito conforme o seu uso em diversas situações e contextos, por isso compreendemos como definições extraídas.

À guisa de conclusão, consideramos que as atividades complementares que desenvolvemos em sala de aula, e especialmente no laboratório de informática, tiveram um papel essencial nas interações ocorridas entre os estudantes e desses com o professor e a pesquisadora. Essas atividades estavam centradas na construção do conhecimento sobre funções e suas derivadas pelos estudantes, a partir da visualização das atividades desenvolvidas por meio do *GeoGebra*. As inquietudes e questionamentos manifestados pelos estudantes foram utilizados como suporte para a elaboração das atividades seguintes. A partir das dificuldades que emergiram dos estudantes no tocante à elaboração de conceitos e de definições, sentimos a necessidade de desenvolver nossa pesquisa relacionada com a utilização das definições no contexto das aulas de Cálculo.

4 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM O *GEOGEBRA* PARA POTENCIALIZAR O ESTUDO DE FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS

Nesta seção apresentamos a sequência de atividades que foram elaboradas com o intuito de analisar e interpretar relações gráficas entre funções e suas derivadas, bem como as propriedades dessas funções. A maioria delas foi desenvolvida com a utilização de um *software* de representação gráfica dinâmica, o *GeoGebra*.

O *software Geogebra*, desenvolvido por Markus Hohenwarte na Universidade e Salzburg, é um *software* livre, de interface amigável e de fácil manipulação, que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Por ter sido desenvolvido em Java, pode ser instalado nas plataformas Windows e Linux, e, para isso, basta fazer o *download* do *software* no *site* (http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/). Nesse *site*, é possível também adquirir todas as informações de instalação e o tutorial contendo instruções de uso e exemplos de atividades.

Seguem, agora, possibilidades de atividades que podem ser realizadas com os estudantes, e que visam à construção de conceitos de funções e suas derivadas. Estas atividades foram realizadas durante a pesquisa de campo, e foram testadas com alunos de uma turma de Cálculo de uma universidade publica. Aqui estão apresentadas com ajustes que julgamos pertinentes, e, como se trata de uma sugestão, nada impede de serem adaptadas a outras realidades, pois foram elaboradas de acordo com os objetivos da pesquisa que originou este produto e diante dos objetivos específicos de cada atividade.

Em cada atividade, apresentamos o tema, os conceitos e definições necessários para a compreensão do assunto, alguns objetivos alcançados, e o processo de construção e exploração de conceitos, Na atividade 1 e 2 apresentamos uma tela do *GeoGebra*, com a visualização da atividade após a construção. Para cada atividade, sugerimos a seguinte preparação:

a) abra o *GeoGebra* e crie o arquivo “Atividade1_seunome_data”;

b) deixe as janelas Algébrica e de Visualização do *GeoGebra* ativadas;

c) deixe visíveis os eixos;

d) utilize o Campo de Entrada digitando os dados diretamente.

ATIVIDADE 1: TAXA DE VARIAÇÃO

OBJETIVOS: Estabelecer relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função onde $x=a$, no gráfico.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Velocidade média e instantânea, taxa de variação e conceito de derivada no ponto.

SITUAÇÃO-PROBLEMA:

Um mergulhador salta de um trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura *h* em metros, o tempo *t* em segundos e sua velocidade inicial de 9,8 metros por segundo, sua função posição é

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$$

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

1.3. Plote a função *h(t)*.
1.4. Crie um controle deslizante **a** e configure-o no intervalo [0, 3] e incremento 0.5.
1.5. Crie o ponto A=(a, h(a)). Habilite o rastro de A e, em seguida, animação.
1.6. Use esses dados para completar a Tabela 1 que relaciona a altura *(h)* do mergulhador com o tempo (*t*) nos instantes especificados.

Tabela 1 – Altura do mergulhador em função do tempo

***t*(segundos)**	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
***h*(metros)**							

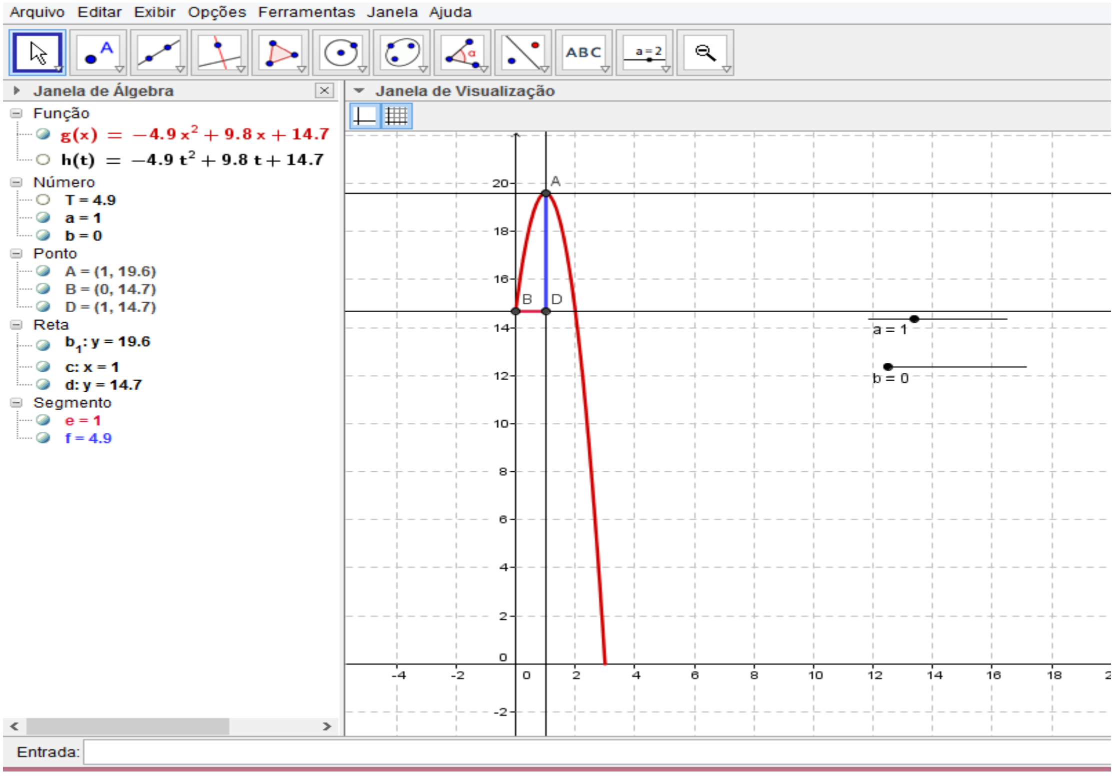
1.7. De acordo com a Tabela 1, em que instante o mergulhador atinge a água?
1.8. Qual a velocidade média do mergulhador entre 1 e 3 segundos?
1.9. Qual a velocidade instantânea do mergulhador no momento em que ele atinge a água?
1.10. Crie um controle deslizante **b** e configure-o no intervalo [0, 0.999] e com incremento 0.001.
1.11. Crie um ponto B=(b, h(b)).
1.12. Trace a reta x=1.
1.13. Determine uma reta *r* perpendicular a x=1, passando por B, e encontre a interseção D entre ambas. Oculte as duas retas.
1.14. Utilizando a ferramenta "segmento definido por dois pontos", defina os segmentos BD e AD. Em propriedades configure as cores dos segmentos para vermelho e azul, respectivamente. Use o estilo 5.
1.15. No campo de entrada, digite "se 0<=x<=3, -4.9x^2+9.8x+14.7". Configure a cor marrom para a função e estilo 5.
1.16. Oculte a função *h(t)* e ative animação do controle deslizante b. Observe o que acontece.
1.17. Digite no campo de entrada T = (19.6-h(b))/(1-b). Ative a animação de b e explique o que o valor de T representa.
1.18. Qual a velocidade instantânea do mergulhador quando ele atinge a altura máxima do pulo?

1.19. Qual a derivada de *h(t)* no instante em que o mergulhador atinge a água? Explique.

1.20. Que relação você pode estabelecer entre os conceitos abordados nesta atividade e o conceito de derivada de uma função em um número ***a***?

1.21. Apresente sua opinião sobre as possíveis contribuições desta atividade para a compreensão dos conceitos estudados. As críticas e sugestões são bem-vindas.

Figura 16 – Gráfico da função $h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$, construído de acordo com as instruções da atividade 1 da sequência.



Fonte: Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

ATIVIDADE 2: DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NO PONTO

OBJETIVOS: Estabelecer relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função onde $x=a$, por meio de gráficos e tabela.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Velocidade média e instantânea, taxa de variação, representação analítica e coeficiente angular de reta tangente à função. Gráfico da função derivada.

SITUAÇÃO-PROBLEMA:

Um mergulhador salta de um trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura *h* em metros, o tempo *t* em segundos e sua velocidade inicial de 9,8 metros por segundo, sua função posição é

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$$

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

1.22. Abra o *GeoGebra* e crie o arquivo: a2_cal_si_nome_data.
1.23. Plote a função *h(t)*.
1.3. Crie um controle deslizante **a** e configure-o no intervalo [0, 3] e incremento 0.5.
1.4. Insira o ponto A no gráfico, colocando na caixa de entrada a expressão A = (a, h(a)).
1.5. Utilizando a opção reta tangente (4ª janela), *tecle* no gráfico da função e no ponto A; assim obterá a reta tangente (b) ao gráfico neste ponto. Em propriedades, renomeie a reta tangente para t.
1.6. Na opção inclinação (8ª janela), *tecle* na reta tangente; assim obterá o valor de a1 que corresponderá à sua inclinação neste ponto. Renomeie para m.
1.7. Na caixa de entrada, insira o ponto B com as seguintes coordenadas (a, m). Com o botão direito do mouse no ponto B, ative a opção habilitar rastro.
1.8. Movimente o parâmetro **a** com a opção mover, e observe os pontos obtidos pelo rastro deixado.
1.9. Use esses dados para completar a Tabela 1 nos instantes especificados.

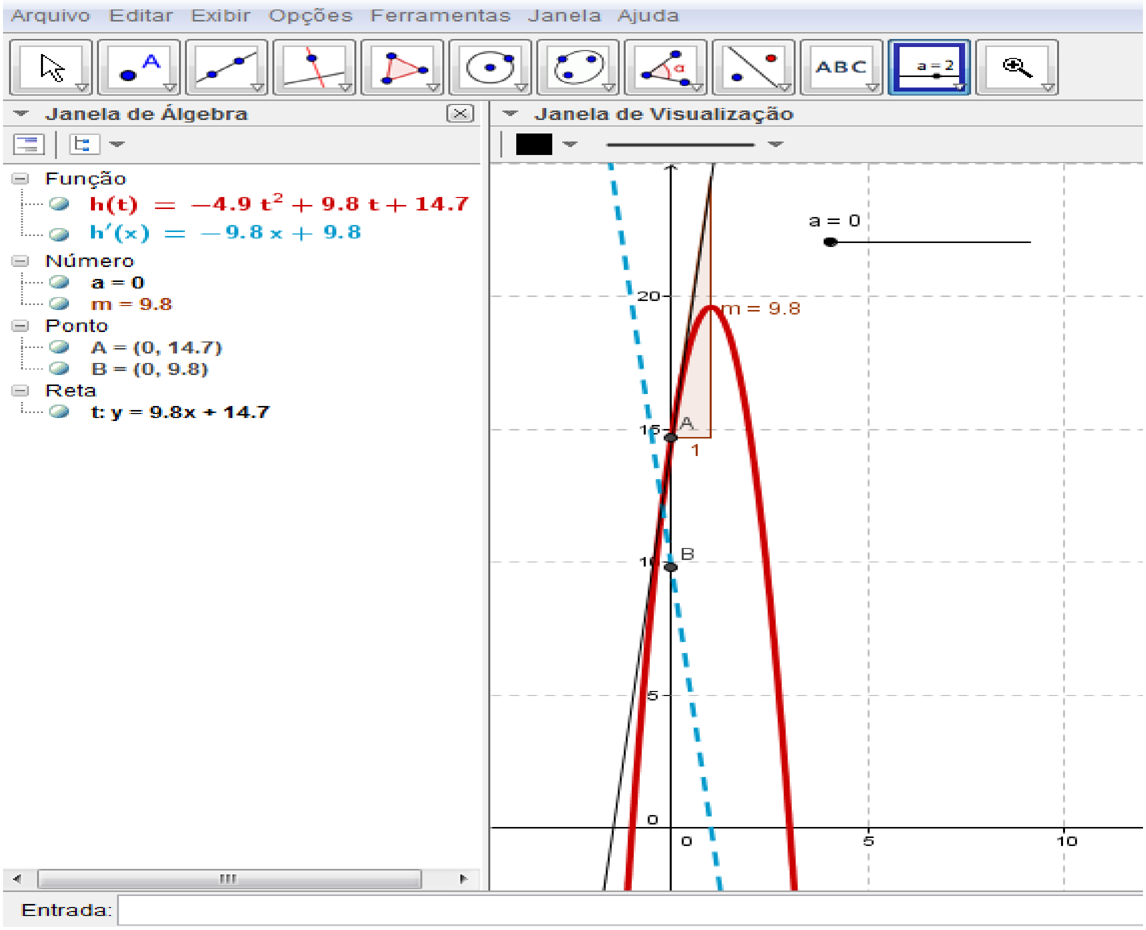
Tabela 1 – Relação entre os pontos de uma função e os pontos de sua derivada

Ponto A=(a,h(a)) que representa a interseção entre a reta tangente t e a função h(t)	Equação da reta tangente t à função h(t)	Valor (m) do coeficiente angular da reta tangente t	Ponto B=(a,m) da função h'(t)
(0, 14.7)	Y=9.8x+14.7	9.8	(0, 9.8)
(0.5, 18.38)			

1.10. No contexto do problema, o que o coeficiente angular **m** representa?
1.11.Qual o significado de **m** ser positivo? E negativo? Quando ele é nulo? Por quê?

1.12. Calcule a derivada de h(t) e verifique se as coordenadas dos pontos gerados pelo rastro de B= (a,m) pertencem a essa função.
1.13. O que representa as coordenadas do ponto B?
1.14. Elabore e responda uma pergunta no contexto dessa situação-problema.

Figura 17 – Gráfico da função $h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$, construído de acordo com as instruções da atividade 1 da sequência.



Fonte: Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

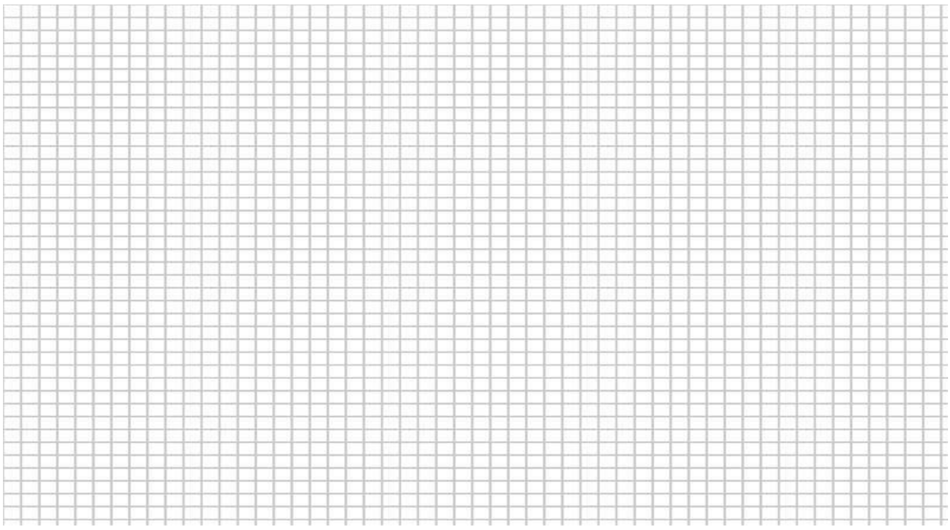
ATIVIDADE 3: CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO POLINOMIAL E DE SUA DERIVADA

OBJETIVOS: Esboçar gráfico de função polinomial de segundo, terceiro e quarto grau, e de sua derivada na malha quadriculada.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Gráficos, grau de função, intervalos em que a função é crescente ou decrescente, domínio e imagem, cálculo algébrico de derivada.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ na malha quadriculada.
1.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?
1.2. Em qual intervalo a curva é crescente? E decrescente?
1.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.
1.4. Calcule algebricamente a derivada de *f*, *e* construa o gráfico de *f'* no mesmo plano cartesiano.
1.5. Qual é o grau de *f(x)*? E de sua derivada?



2. Esboce o gráfico da função $g(x) = x^3$ na malha quadriculada.
2.1. Em qual ponto essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?
2.2. Em qual intervalo a curva é crescente? E decrescente?
2.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.
2.4. Calcule algebricamente a derivada de *g*, *e* construa o gráfico de *g'* no mesmo plano cartesiano.
2.5. Qual é o grau de *g(x)*? E de sua derivada?

3. Esboce o gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$ na malha quadriculada.

3.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?

3.2. Em quais intervalos a curva é crescente? E decrescente?

3.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.

3.4. Calcule algebricamente a derivada de *h*, e construa o gráfico de *h'* no mesmo plano cartesiano.

3.5. Qual é o grau de *h(x)*? E de sua derivada?

ATIVIDADE 4: CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO E DE SUA DERIVADA

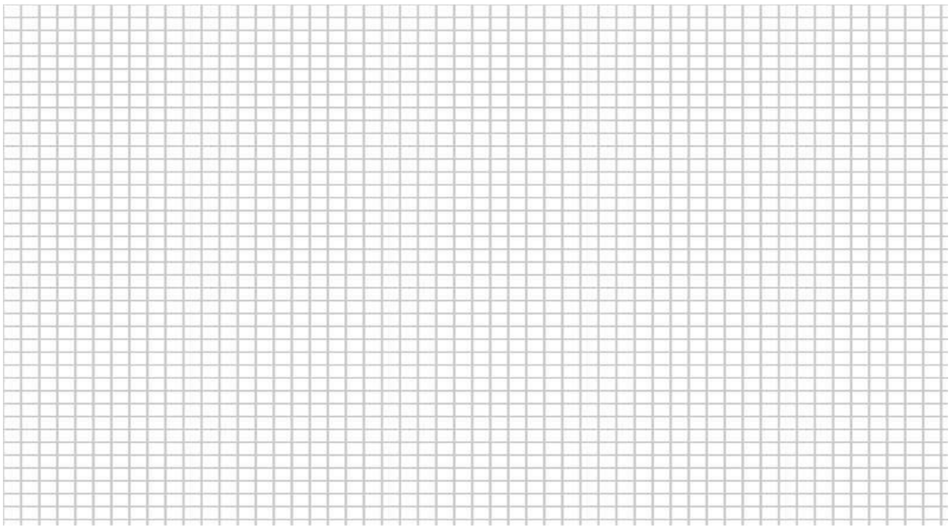
OBJETIVOS: Construir o esboço do gráfico de *f'* através do esboço do gráfico de *f* na malha quadriculada.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Gráficos, grau de função, intervalos em que a função é crescente ou decrescente, domínio e imagem, cálculo algébrico de derivada.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

1. Escreva uma função *f(x)* e determine seu domínio.
2. Determine a derivada dessa função.
3. Esboce o gráfico de *f(x)* e de *f'(x)* na mesma malha quadriculada.

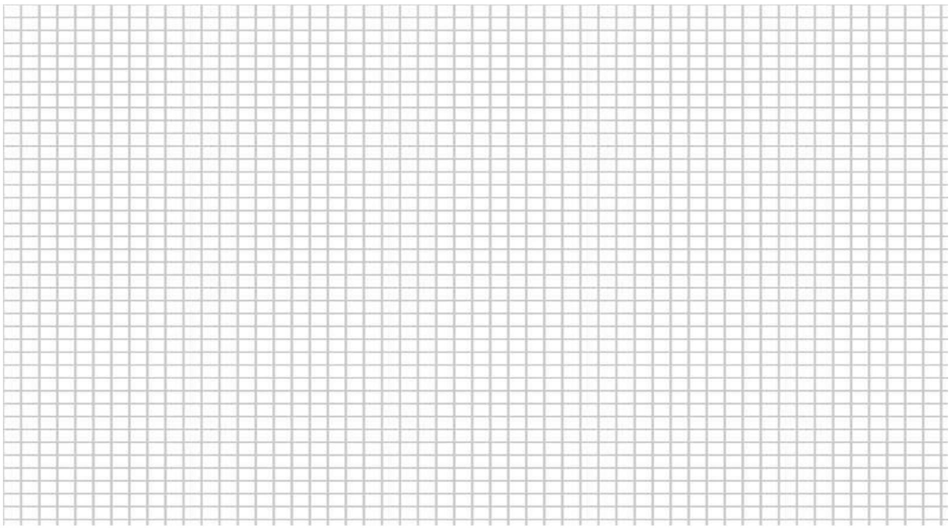
f(x)=
f'(x)=



4. Na malha quadriculada a seguir, esboce novamente o gráfico da função *f* que você criou.

CONTINUAÇÃO DA ATIVIDADE 4: SEGUNDO MOMENTO

5. Na malha quadriculada, você tem o esboço do gráfico de uma função que foi elaborado por um de seus colegas.



5.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?
5.2. Em quais intervalos a curva é crescente? E decrescente?
5.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.
5.4. Qual é o grau de *f(x)*? E de sua derivada?
5.5. Construa o gráfico de *f’* no mesmo plano cartesiano.

ATIVIDADE 5: O QUE *F* ’ NOS DIZ SOBRE *F*

OBJETIVOS: Analisar gráfico de uma função derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Intervalos em que a função é crescente ou decrescente, valor máximo ou valor mínimo de uma função.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

Definição de função crescente

Uma função ***f*** é chamada **crescente** em um intervalo ***I*** se
$f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***
Ela é denominada **decrescente** em ***I*** se
$f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***

1. Abra o *GeoGebra* e crie o arquivo: a5_cal_si_nome_data.
2. Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** que apresente intervalo(s) de crescimento e decrescimento.
3. Obtenha o domínio e a imagem de ***f***.
4. Determine algebricamente o(s) intervalo(s) onde ***f*** é crescente.
5. Determine algebricamente o(s) intervalo(s) onde ***f*** é decrescente.
6. Calcule algebricamente sua derivada.
7. Plote o gráfico de ***f’*** e, em propriedades, mude sua cor para vermelho.
8. Em qual intervalo ou quais intervalos ***f’*** é crescente? E decrescente?
9. Para quais valores de x a derivada é negativa? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
10. Para quais valores de x a derivada é positiva? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
11. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo?
12. Escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.

ATIVIDADE 6: O QUE *F* ’ NOS DIZ SOBRE *F*

OBJETIVOS: Estabelecer relações entre uma função e sua derivada, através do gráfico de vários tipos de funções, observando intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Domínio, imagem, cálculo algébrico de derivada, função crescente e decrescente, valor máximo e mínimo de função, função trigonométrica, função polinomial de grau 3 e de grau 4, função racional, função exponencial e função logarítmica.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

1. Abra o *GeoGebra* e crie o arquivo: a6_cal_si_nome_data.
2. Elabore as seguintes funções:
   - 2.1. Trigonométrica $t(x)=$
   - 2.2. Polinomial de grau 3 $f(x)=$
   - 2.3. Polinomial de grau 4 $p(x)=$
   - 2.4. Racional $r(x)=$
   - 2.5. Exponencial $e(x)=$
   - 2.6. Logarítmica $l(x)=$

3. Determine o domínio e a imagem de cada um delas.
4. Determine algebricamente a derivada de cada função que você elaborou.

$t'(x)=$
$f'(x)=$
$p'(x)=$
$r'(x)=$
$e'(x)=$
$l'(x)=$

5. Plote no *GeoGebra* as funções e suas derivadas (em vermelho), e, observando o gráfico de cada função e sua respectiva derivada, responda:

5.1. Em qual intervalo ou quais intervalos as funções são crescentes? E decrescentes?
5.2. Para quais valores de x a derivada é negativa? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
5.3. Para quais valores de x a derivada é positiva? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
5.4. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo?
5.5. Escreva com suas palavras o que você entende por função crescente e função decrescente.
5.6. De acordo com o tipo de funções que você elaborou, escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.
5.7. Suas conclusões servem para qualquer tipo de função?

ATIVIDADE 7: O QUE *F '* NOS DIZ SOBRE *F*

OBJETIVOS: Estabelecer relações entre uma função e sua derivada, através do gráfico de vários tipos de funções, observando máximos, mínimos e números críticos.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Máximo e mínimo, número crítico.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

Definições:

Definição 1: Uma função ***f*** tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* em D, em que D é o domínio de *f*. O número *f(c)* é chamado **valor máximo** de *f* em D. Analogamente, *f* tem um **mínimo absoluto** em *c* se para $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* em D, e o número *f(c)* é denominado **valor mínimo** de *f* em D. Os valores máximo e mínimo de *f* são chamados valores extremos de *f*.

Definição 2: Uma função *f* tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em *c* se $f(c) \geq f(x)$ quando *x* estiver nas proximidades de *c*.[Isso significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* em algum intervalo aberto contendo *c*]. Analogamente, *f* tem um **mínimo local** em *c* se $f(c) \leq f(x)$ quando *x* estiver próximo de *c*.

Definição 3: Um **número crítico** de uma função *f* é um número *c* no domínio de *f* em que ou *f'(c)*=0 ou *f'(c)* não existe.

1. Abra o *GeoGebra* e crie o arquivo: a7_cal_si_nome_data.
2. Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** que seja contínua em [-4,4] e tenha máximo absoluto em -2 e mínimo absoluto em 2.
3. Determine algebricamente a função ***f*** e sua derivada.
4. Em vermelho, plote no *GeoGebra* ***f '***.
5. Obtenha o domínio e a imagem de ***f*** e de ***f '***.
6. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo? Por quê?
7. Sua função tem pontos críticos? Quais?
8. Escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.
9. Verifique se as relações que você estabeleceu são válidas para outros tipos de funções. Para isso, você deve elaborar e plotar no *GeoGebra* as seguintes funções e suas respectivas derivadas:

9.1. Trigonométrica	*t(x)=*	*t'(x)=*
9.2. Polinomial de grau 3	*f(x)=*	*f'(x)=*
9.3. Polinomial de grau 4	*p(x)=*	*p'(x)=*
9.4. Racional	*r(x)=*	*r'(x)=*
9.5. Exponencial	*e(x)=*	*e'(x)=*
9.6. Logarítmica	*l(x)=*	*l'(x)=*

10. Suas conclusões servem para qualquer tipo de função?

ATIVIDADE 8: O QUE *F ’’* NOS DIZ SOBRE *F*

OBJETIVOS: Estabelecer relações entre uma função e sua derivada primeira e segunda, através do gráfico de vários tipos de funções, observando concavidades e pontos de inflexão.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES: Concavidade e ponto de inflexão.

PROCESSO DE CONSTRUÇÃO/EXPLORAÇÃO DE CONCEITOS:

Definições:

Definição 1: Se o gráfico de ***f*** estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo ***I*,** então ele é dito **côncavo para cima** em I. Se o gráfico de ***f*** estiver abaixo de todas as suas tangentes em ***I***, é dito **côncavo para baixo** em ***I***.

Definição 2: Um ponto ***P*** na curva *y=f(x)* é chamado **ponto de inflexão** se ***f*** é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em ***P***.

1. Abra o *GeoGebra* e crie o arquivo: a8_cal_si_nome_data.
2. Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** cujo esboço do gráfico apresente concavidade para cima, concavidade para baixo, e um ou mais pontos de inflexão. Limite seu gráfico em um intervalo ***I***.
3. Determine algebricamente a função ***f*** .
4. Determine algebricamente a função ***f ’***.
5. Determine algebricamente a função ***f ’’***.
6. Em vermelho, plote no *GeoGebra* ***f ’***.
7. Em azul, plote no *GeoGebra* ***f ’’***.
8. Obtenha o domínio e a imagem de ***f*** ,de ***f ’*** e de ***f ’’***.
9. Em qual (ou quais) intervalos a função ***f*** apresenta concavidade para cima? E para baixo?
10. Determine o ponto de inflexão.
11. Quando ***f ’’*** for positiva, ***f*** tem concavidade para cima ou para baixo?
12. E quando ***f ’’*** for negativa?
13. Estabeleça uma relação entre ***f ’’*** e ***f*** que responda o que ***f ’’*** nos diz sobre ***f***.
14. De acordo com o que foi explorado nessa atividade, escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função, sua primeira derivada, e sua segunda derivada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste material, apresentamos a descrição de uma sequência de atividades desenvolvidas para promover o aprendizado de conceitos de funções e suas derivadas, utilizando o *software GeoGebra*, com o intuito de contribuir para o desenvolvimento da prática pedagógica ao introduzirem-se conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Essas atividades foram desenvolvidas com o objetivo de serem usadas como complementação de aulas teóricas e também para potencializar o estudo de funções e suas derivadas.

A partir de um processo de construção, os estudantes visualizavam, de maneira dinâmica e interativa, os procedimentos relacionados aos conceitos de funções e suas derivadas e eram incentivados a enunciarem, verbalmente ou por escrito, suas conclusões sobre as questões propostas nas referidas atividades, bem como sobre os conceitos contemplados nelas. Ressaltamos o uso do computador e de *softwares* de representação gráfica dinâmica como ferramenta auxiliar no ensino de Cálculo, com destaque para a questão da visualização e da possibilidade de trabalhar com múltiplas representações.

A utilização das tecnologias aplicadas ao ensino e aprendizagem de funções e suas derivadas foi considerada importante tanto para a visualização das questões propostas por meio das atividades elaboradas quanto para os questionamentos e interações realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento dessas atividades. Utilizamos também construções gráficas em papel quadriculado, pois percebemos, no momento, a necessidade de proporcionar aos alunos uma reflexão mais detalhada por meio do cálculo algébrico. Acreditamos que a utilização de *software* sem o conhecimento matemático adequado pode levar os estudantes a obterem conclusões equivocadas.

Observamos que as interações ocorridas entre estudantes e professores durante a realização das atividades foram relevantes e evidenciaram algumas dificuldades dos estudantes relacionadas ao uso das definições matemáticas. Isso nos motivou a realizar uma análise sob a ótica do pensamento matemático avançado e interacionismo simbólico, sobre a compreensão dos estudantes aos conceitos referentes às funções e suas derivadas. Foi possível concluir que o pensamento matemático manifestado pelos estudantes sobre os conceitos referentes às funções e suas derivadas evoluiu a partir das interações produzidas entre os estudantes e professores. Nesse sentido, entendemos que as discussões ocorridas, as argumentações dos estudantes, as intervenções do professor da turma e da pesquisadora foram fundamentais para a compreensão das definições pelos estudantes. Assim, a compreensaõ das definições sendo evidenciada a partir de um encadeamento de ideias compartilhadas por meio das interações entre os sujeitos e não estreitamente por meio da interação indivíduo e objeto.

Consideramos que a interação é um processo social, e, apesar de que os alunos individualmente vão ter diversas imagens conceituais, essas são produzidas socialmente e podem ser modificadas pelo estudante durante as interações produzidas em um contexto específico. Através das interações, os alunos foram estimulados a ressignificar seus conhecimentos e a construirem novos saberes.

Todas essas considerações nos remetem à importância do papel mediador do professor no ensino e aprendizagem de funções e suas derivadas. Isso possibilitou que estudantes, em diversos momentos durante as aulas de Cálculo, refletissem sobre os conceitos abordados, chegando à sua ressignificação. Nesse sentido, entendemos que os estudantes atribuíram significados aos distintos termos e símbolos utilizados na definição conceitual formal de conceitos relacionados a funções e suas derivadas, chegando à definição estipulada desses conceitos, no sentido proposto por Edwards e Ward (2008).

Finalmente, consideramos que o educador matemático deve atuar como mediador do conhecimento, de forma que os estudantes possam ser submetidos a um processo ativo de aprendizagem, permeado pelas distintas interações que conduzam a uma aprendizagem significativa dos conceitos de Cálculo. Corroboramos com Godino e Llinares (2000, p. 3), ao considerarem que o professor deve criar condições suficientes para que os estudantes se apropriem de certo conhecimento, e deve assegurar que o conhecimento anterior e as novas condições criadas no contexto das aulas possibilitem oportunidades para os estudantes apropriarem-se do conhecimento, cabendo aos estudantes uma atuação interativa e o cumprimento das condições acordadas com o professor.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I.** 2011. 99p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BLUMER, H. "A natureza do interacionismo simbólico". In: MORTENSEN, C.D. **Teoria da comunicação**: textos básicos. São Paulo: Mosaico, 1980, pp. 119–138.

COSTA, C. **Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização.** XI Encontro de Investigação em Educação Matemática SPCE – Grupo de trabalho 4 – O desenvolvimento do raciocínio matemático avançado. Coimbra, 2002. p.s. 257 – 273. Disponível em: < http://www.spce.org.pt/sem/17conceicao-costa.pdf>. Acesso em: 01 jan. 2014.

DEWEY, J. **Como pensamos***:* como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo (uma reexposição). 4. ed. Tradução de Haydée Camargo Campos. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In: **XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Setúbal, 2006.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 25-41.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 95-123.

EDWARDS, B.S.; WARD, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. **The American Mathematical Monthly**, 111, p. 411-424.

_______. The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (Eds.). **Making the Connection:** Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education MAA Notes #73, Washington, DC: Mathematics Association of America, 2008, p. 223-232.

FROTA, M. C. R. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 89-122.

FROTA, M. C. R. Investigações na sala de aula de Cálculo. In: **Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, X. Anais...** São Paulo: ANPED, 2006.

GODINO, J. D.; LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. **Revista Educación Matemática**, México, D. F., v. 12, n. 1, p. 70-92, 2000. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/Godino_Llinares_Interaccionismo.PDF>. Acesso em: 01 jan. 2014.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, p. 111-133, 1999.

HAGUETTE, T. M. F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 3. ed. rev. E ampl..Petrópolis, Vozes, 1997

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 11-26.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.

RESNICK, L. B. **Education and Learning to Think**. Washington, DC: National Academy Press, 1987.

REZENDE, W. M. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, N.; CUNHA, M. (Org.). **Linguagem, Conhecimento, Ação** – ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003, v.1, p. 313-336.

SFARD, A. When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. **The Journal of The Learning Sciences**, Mahwah, NJ, US, v. 16 n. 4, p. 567 - 615, 2007.

SKEMP, R. **Intelligence, learning and action**. London: Wiley, 1979.

STEWART, J. **Cálculo**. Trad. Antonio Carlos Moretti. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v. 2.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 3-21.

_______. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In: GROWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan Publishing Company, 1992, p. 496.

_______. A Transição para o Pensamento Matemático Avançado: funções, limites, infinito e prova. In: **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Macmillan, New York, p. 495-511, 1992. Trad. PINTO, M. M. F.

_______. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In**: Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife, Brasil, 1995. p. 61-75. v. I.

_______. Concept image and concept definition. Em **David Tall Home Page**. 2003. Disponível: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html>. Acesso em: 15 jan. 2014.

_______; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: **Published in Educational Studies in Mathematics**. University of Warwick. 1981. p. 151–169. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2013.

VINNER, S. ‘Concept definition, concept image and the notion of function’, **The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 14, p. 293-305, 1983.

_______; DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20, p. 356-366, 1989.

_______; HERSHKOWITZ, R. ‘Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts’, **Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,** Berkeley, p. 177-184, 1980.

_______.O papel das definições no ensino e aprendizagem de Matemática. Tradução de Márcia Maria Fusaro Pinto e Jussara de Loiola Araújo. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 1991.