UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

RIEUSE LOPES PINTO

DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS SOBRE FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS COMO UM EIXO DE DISCUSSÃO PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO

OURO PRETO
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

RIEUSE LOPES PINTO

DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS SOBRE FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS COMO UM EIXO DE DISCUSSÃO PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Ouro Preto, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

OURO PRETO
2014

P659d Pinto, Rieuse Lopes.

Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de

discussão para o ensino e a aprendizagem do Cálculo [manuscrito] / Rieuse

Lopes Pinto – 2014.

143f.: il.; color.; graf.; tab.

Orientador: Prof. Dr. Dale William Bean.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Área de concentração:Educação Matemática.

1. Interacionismo simbólico - Teses. 2. Cálculo – Teses.

3. Aprendizagem – Teses. 4. Matemática- Estudo e ensino – Teses. I. Bean, Dale William.

II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 51:37.011.3

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS SOBRE FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS COMO UM EIXO DE DISCUSSÃO PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CÁLCULO

Autor: Rieuse Lopes Pinto

Orientador: Dale William Bean

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Rieuse Lopes Pinto e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 29/08/2014

Dale Bean
....
Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Dale Bean

Prof. Dr. Dale William Bean

Prof. Dr. Airton Carrião Machado

Dilhermando Ferreira Campos

Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos

OURO PRETO
2014

DEDICATÓRIA

À minha mãe Lídia Lopes, meu amor maior, que tornou possível a realização desse sonho, disponibilizando parte de seu salário de educadora, para financiar as inúmeras viagens de Montes Claros a Ouro Preto.

AGRADECIMENTOS

A Deus, razão de minha existência. Durante todo esse tempo que passei “ausente” apenas uma coisa me manteve eme sustentou todos os dias: o compromisso que tenho com Jesus, o elo, o vínculo indissolúvel que tornou possível toda essa dolorida ausência.

A Dale, meu orientador, que, aos poucos foi-se tornando amigo, pelo exemplo, dedicação, competência e responsabilidade, mas, principalmente, por me entender, mostrando toda sua paciência e todo seu profissionalismo em prol da pesquisa científica.

A Hermes, meu marido, por ser suporte nos momentos difíceis,e às minhas filhas, Jennifer, Vanessa, Brunna e Andressa, pelo amor incondicional.

A meu genro Leandro Andrade, pelo serviço, cuidado e carinho.

A Edson Crisostomo, amigo verdadeiro, por ter sido o apoio constante em todo e cada momento deste trabalho.

A Elisângela Maia, que muito contribuiu para a redação desta Dissertação.

Às minhas sobrinhas Carolina e Denise, pelo amor e hospitalidade.

Aos meus amigos, familiares e irmãos em Cristo, pelo incentivo.

Ao Professor DoutorAirton Carrião Machado, pela participação na Qualificaçãoe na Banca Examinadora e pelas sugestões que muito contribuíram para o enriquecimento e conclusão desta Dissertação.

Ao Professor DoutorDilhermando Ferreira Campos que prontamente aceitou fazer parte da Banca Examinadora.

Aos professores do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, pelos ensinamentos que propiciaram importantes mudanças na minha prática profissional.

Aos meus colegas conquistados no Mestrado, amigos do “cafofo” pelos momentos divididos juntos.

Obrigada.

Se, na verdade, não estou no mundo para simplesmente a ele me adaptar, mas para transformá-lo; se não é possível mudá-lo sem um certo sonho ou projeto de mundo, devo usar toda possibilidade que tenha para não apenas falar de minha utopia, mas participar de práticas com ela coerentes.

(Paulo Freire)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo compreender as possíveis contribuições de discussões realizadas por grupos de estudantes referentes aos estudos sobre funções e suas derivadas para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, considerando o uso de definições matemáticas, utilizando um *software* de representação gráfica dinâmica. Trata-se de uma pesquisa qualitativa desenvolvida no contexto de ensino e aprendizagem de Cálculo com estudantes de uma universidade pública. Os dados utilizados para a análise foram coletados por meio de gravações em áudio e vídeo e notas de campo da pesquisadora. Os dados foram analisados a partir dos métodos e procedimentos de codificação e categorização (CHARMAZ, 2009) e da análise de conteúdo qualitativa (GRANEHEIM; LUNDMAN, 2004), com interpretações fundamentadas em Pensamento Matemático Avançado (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991) e InteracionismoSimbólico (BLUMER, 1980). Entre os principais resultados, destacamos uma ressignificação de funções e suas derivadas a partir das interações ocorridas durante as atividades desenvolvidas nas aulas de Cálculo, bem como do avanço na compreensão das definições formais na concepção do Pensamento Matemático Avançado.

Palavras-chave: Cálculo. Funções. Derivadas. Definições. Pensamento matemático avançado. Interacionismosimbólico.

ABSTRACT

This research aims to understand the possible contributions of student discussions concerning group studies of functions and their derivatives for the development of advanced mathematical thinking, considering the use of mathematical definitions and using dynamic graphic representation software. It is a qualitative research developed in the context of theteaching and learning ofCalculus with students from a public university. The data used for the analysis were collected through the recordings of video and audio as well as the researcher's field notes. The data were examined using the methods and procedures of coding and categorization (CHARMAZ, 2009) as well as a qualitative content analysis (GRANEHEIM; LUNDMAN, 2004) with interpretations based on Advanced Mathematical Thinking (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991) and Symbolic Interactionism (BLUMER, 1980). Among the main results, we highlight the resignification of functions and their derivatives that occurred through interactions during activities in theCalculus class, as well as an advance in the understanding of formal definitions in the conception of Advanced Mathematical Thinking.

Keywords: Calculus. Functions. Derivatives. Definitions. Advanced mathematical thinking. Symbolic interactionism.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Apresentamos nesta introdução minha trajetória pessoal, bem como um panorama geral da pesquisa e motivações para a mesma. Destacamos alguns antecedentes de minha carreira profissional, como discente e docente, que certamente colaboraram para a realização desse estudo. Pontuamos alguns questionamentos em relação ao ensino do Cálculo como forma de obter elementos que justifiquem o objetivo da pesquisa e sua relevância.

1.1 Minha trajetória pessoal e motivações para a pesquisa

Em 1981, com o intuito de formar-me professora, ingressei no curso deMagistério. Vários foram os motivos que me levaram a essa opção, e um deles foi o fato de meus pais serem professores e me motivarem a seguir o mesmo caminho. Nesse curso, não havia no currículo as disciplinas de Matemática, Física, Química e Biologia. Em 1984, ingressei na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Norte de Minas, no curso de Ciências/habilitação Matemática, quando, no primeiro semestre, deparei-me com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Assustada com tamanha defasagem, e sem conseguir compreender conceitos básicos, imprescindíveis para o Cálculo Diferencial, matriculei-me novamente no Ensino Médio como forma de resgatar tais conceitos, pois dessa vez o curso contemplava as disciplinas de Matemática, Física, Química e Biologia sem os quais seria difícil o processo de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial na graduação.Assim, conciliava os estudos de conteúdos de Ensino Médio pela manhã, na Rede Pública de Ensino, e a graduação à noite. Não havia outra escolha, na época, já que não existiam, como hoje, cursos específicos ao ensino da Matemática. A dupla jornada chamou a atenção de professores, entre eles uma em especial, Francisca, que carinhosamente chamávamos de Chiquita. Ela me ajudou de uma forma mais específica, garantindo, assim, o aprendizado necessário para o sucesso pretendido durante a graduação.

Essas reflexões sobre minha aprendizagem nesse conteúdo instigaram-me a pesquisar estratégias diferenciadas de ensino da Matemática e, sobretudo, de como colocá-las em prática na realidade e no contexto social da educação brasileira no ensino básico. Já no início de minha prática docente, no ensino fundamental e médio, buscava formas de ensino e de aprendizagem mais eficientes e significativas para o aluno e procurava gerar em minha sala de aula um ambiente questionador e contextualizado, no intuito de promover a construção do conhecimento matemático. No entanto, não possuía o conhecimento de meios e estratégias necessários para garantir essa prática pedagógica,por isso, durante alguns anos, reproduzi em minha sala de aula uma abordagem baseada em exposição de conteúdos e resolução de exercícios e provas.

Em minha busca por um desenvolvimento profissional, ingressei, em 1996, no Curso de Especialização “Lato Sensu” em Matemática Superior na Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES. Após essa especialização, passei a ministrar aulas nos cursos de graduação da UNIMONTES, assumindo disciplinas de Geometria Analítica, Estatística, Matemática Financeira, História da Matemática, Álgebra Linear, Cálculo, Matemática e Prática de Ensino em Matemática.

Foi como professora de Prática de Ensino nos chamados “cursos emergenciais” de licenciatura em Matemática em diversas cidades da região do Norte de Minas que comecei a estudar e a discutir a Educação Matemática. Esses cursos eram oferecidos pela Universidade para atender a uma demanda de profissionais na região, e as aulas eram ministradas em módulos. Entrei diversas vezes em contradição nas aulas que ministrava, pois, como professora de Prática, pregava e defendia o discurso de aplicar metodologias diferenciadas para a construção de conceitos matemáticos de forma significativa, e, como professora de Álgebra Linear, não conseguia uma aproximação plausível entre discurso teórico e prática. Tamanha responsabilidade levou-me a estudar e a fazer experiências em minha própria sala de aula como docente, inclusive no ensino fundamental e médio.

Nesse período, minha formação profissional incluía a participação em seminários, cursos de capacitação, minicursos e encontros de escolas parceiras da rede Pitágoras, quando tínhamos oportunidade de discutir com outros profissionais a respeito de metodologias aplicáveis em sala de aula, capazes de permitir que os alunos construíssem seu próprio conhecimento. Nesse contexto, e em busca de respostas para tais inquietações, decidi cursar o Mestrado Profissional em Educação Matemática na UFOP.

Para o processo seletivo do mestrado, apresentei um anteprojeto cuja temática estava relacionada com a transição dos conceitos matemáticos do ensino médio para o ensino superior, pois supunha que uma preparação satisfatória dos estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores, de cuja estrutura curricular o Cálculo faz parte, deve ser propiciada ainda durante o ensino médio. Pretendia fazer uma análise do processo de transição dos conceitos da Matemática do ensino médio para o ensino superior, considerando a apreensão, por parte do aluno, dos conceitos abordados no cálculo, pois o desenvolvimento e a contextualização de conceitos matemáticos necessários para um bom desempenho na disciplina de Cálculo nos distintos cursos de graduação consistem em um tema que poderia ser pesquisado. Nesse sentido, a pesquisa foi se desenvolvendo com outras nuances, mas com o mesmo objetivo de contribuir com estudos que apontassem soluções para minimizar o alto índice de reprovações nessa disciplina. Para isso, buscou-se refletir a prática de ensino e aprendizagem de Cálculo no ensino superior, visando ao aperfeiçoamento de estratégias significativas de ensino.

1.2 A pesquisa

O Cálculo Diferencial e Integral é conteúdo de diversas disciplinas de cursos universitários que formam profissionais com os mais diferentes perfis, como: Engenharia, Física, Biologia, Sistema de Informação, licenciatura em Matemática, além das ciências econômicas e sociais, entre outros. Diante da dificuldade dos alunos de cursos de graduação para o aprendizado de Cálculo, percebi a defasagem de aprendizagem de conceitos básicos da matemática.Além disso, observa-se elevado índice de reprovação e de desistência nessa disciplina, sinalizando a existência de problemas no processo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, pesquisas em Educação Matemática têm sido desenvolvidas na tentativa de diagnosticar tais problemas e novas práticas metodológicas têm sido testadas e analisadas, sob diversas perspectivas e dentro de diversos contextos, como, por exemplo, o uso de computadores e de calculadoras gráficas, numa tentativa de contribuir para a melhoria do quadro acima observado.

Esta pesquisa tem ointuito de contribuir para o desenvolvimento da prática pedagógica ao introduzirem-se conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, e refere-se a um domínio em particular: os conceitos de funções e suas derivadas. Em minha prática docente nessa disciplina, pude perceber que os estudantes realizam, com certo êxito, manipulações algébricas em atividades envolvendo derivadas de funções, sem precisar atribuir muitos significados conceituais. Então, pude constatar que os alunos apresentam dificuldades na compreensão desses conceitos. Assim, considerei ser importante pesquisar sobre o conceito de funções e suas derivadas, visto que seu ensino recai no cálculo mecânico e excessivo de operações e técnicas algébricas, em detrimento da compreensão.

Em muitas universidades do Brasil e do exterior, o Cálculo é uma das disciplinas cujos índices de reprovação, evasão e repetência são elevados. Diversos pesquisadores (IGLIORI, 2009; REZENDE, 2003; NASSER, 2009; BARUFI, 1999; FROTA, 2006) apontam problemas que vêm se acumulando desde o ensino básico até o ensino superior. Nesse sentido, Igliori (2009, p. 13) afirmaque:

> No que tange às especificidades das áreas da Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado parte significativa das pesquisas. Isso se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na forma do pensamento avançado em Matemática.

Frota (2006, p. 2) aponta que “a sala de aula de Cálculo tem sido afetada por fatores decorrentes, em parte, de um ensino universitário de massa: excessivo número de alunos, grande parte deles desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica”. Entendemos que o papel do professor de Cálculo vai além da simples transmissão de conhecimentos; ele deve priorizar o desenvolvimento do raciocínio e a articulação de conteúdos, além de conhecer acerca das estratégias de aprendizagem de seus alunos. É de responsabilidade do professor fornecer contextos e ambientes de aprendizagem para que o estudante desenvolva a habilidade de conjecturar, questionar, relacionar, investigar, além de realizar abstrações a partir de situações matemáticas, e isso também é alvo de pesquisas. Nessa perspectiva, Dreyfus corrobora essa ideia:

> Se um aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático. Atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada. (DREYFUS, 1991, p.34, tradução nossa[1]).

O estudo de conceitos básicos do Cálculo muitas vezes é introduzido através de uma aula expositiva, em que o professor apresenta as definições, propriedades e exemplos, e, por sua vez, os alunos resolvem listas de exercícios.Essa dinâmica utilizada para a construção e compreensão de conceitos e a preparação dos egressos nessas disciplinas são temas recorrentes de discussão, sendo que esse aspecto algorítmico e repetitivo aparece na conclusão do estudo de Frota (2001, p.91):

> Parece haver consenso que o ensino da matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz à aprendizagem de procedimentos e não incentiva ao conhecimento matemático relacional que

---

[1]“If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking. Achieving thiscapability to abstract may well be the single most important goal of advanced mathematical education.”

> leva o indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados.

Essa situação nos levou a planejar atividades com o fim de realizar investigações matemáticas para o estudo das funções e de suas derivadas no Cálculo. A ideia de utilizar investigações como atividade matemáticasurgiu por já fazer parte de minhas experiências como professora do ensino fundamental e médio, que se baseiam na importância da construção do conhecimento por meio de pesquisas, investigações e explorações.

Assim, nossa preparação para as atividades da pesquisa de campo incluiu também uma revisão bibliográfica em relação a investigações matemáticas(PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006), bem como o pensamento reflexivo (DEWEY, 1959), por entender que os estudantes,quando realizam investigações matemáticas, utilizam o pensamento reflexivo ao questionar, esclarecer problemas e levantar hipóteses na construção de soluções para problemas.

A pesquisa de campo foi realizada no primeiro semestre letivo de 2013, na turma de Sistemas de Informação de uma universidade pública, e contou com a presença de 38 alunos efetivamente matriculados. Elaboramos e realizamos oito atividades relacionadas ao estudo de funções e suas derivadas (ver Apêndices A-H), que ocorreram na sala de aula e no laboratório de Informática com a utilização do s*oftwareGeoGebra*. A utilização de tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem de matemática têm se tornado alvo de pesquisas e o estudo dos ambientes informatizados destacam-se como uma das tendências da Educação Matemática. A utilização do computador como ferramenta metodológica pode auxiliar o aluno na construção de seu próprio conhecimento através da visualização gráfica e algébrica. Escolhemos o *GeoGebra*, por se tratar de um *software* livre, por sua interface amigável e pela facilidade e possibilidade manipulativa e dinâmica.

No desenvolvimento da pesquisa de campo, o planejamento das atividades baseou-se nas aulas expositivas do professor, referentes aos conceitos de funções, limites e derivadas, e no estabelecimento de relações entre funções e suas derivadas. A partir dessas observações, em vez derealizar investigações matemáticas na acepção de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), propusemosa realização de atividades matemáticas através de estudos sobre funções e suas derivadas. As atividades matemáticasforam elaboradas como atividades complementares à aula ministrada pelo professor regente, desenvolvidas com o intuito de analisar e interpretar relações gráficas entre funções e suas derivadas, bem como as propriedades dessas funções, utilizando um *software* de representação gráfica dinâmica.

Após a realização de oito atividades, propusemos aos alunos um trabalho a ser realizado em grupo.Essaproposta de trabalho, feita pelo professor regente juntamente com a pesquisadora, teve como objetivo principal avaliara compreensão dos alunos sobre funções e suas derivadas. As conclusões dos estudantes, baseadas nos conceitos abordados nas atividades e nas estratégias utilizadas, foram apresentadas em seminário.

Uma vez que,na pesquisa de campo, mudamos o foco de investigações matemáticassobre funções e suas derivadas para atividades matemáticassobre funções e suas derivadas, foi necessário repensar e reconfigurar nosso objetivo inicial. Optamos por fazer essa reformulação após o término das atividades de campo à luz de nossa apreciação geral dos acontecimentos e de dados que consideramos relevantes para o ensino e a aprendizagem de Cálculo.

Focamos nossas atenções nas interações que aconteceram em sala de aula e durante as apresentações do seminário, entendendo a importância do momento, pois era um espaço no qual as vozes dos estudantes e os confrontos e argumentos em discussão levantavam algumas incongruências entre definições pessoais e formais. Nesse sentido, observamos que as interações entre estudantes e professores (professor regente e professora pesquisadora), ocorridas durante a realização das atividades e no seminário de apresentação dos resultados dos estudos pelos grupos, foram significativas. No entanto, constatamos algumas dificuldades dos estudantes com o uso de definições matemáticas formais relacionadas com funções e suas derivadas, manifestadas durante as apresentações do seminário, na forma de registros e argumentações orais. Ressaltamos a importância das definições utilizadas pelos alunos, as quais direcionaram e fundamentaram seus estudos e conclusões.

Por isso, decidimos realizar uma análise mais aprofundada sobre a compreensão das definições matemáticas presentes na comunicação matemática dos estudantes referentes aesses estudos, no contexto de um ensino baseado no desenvolvimento de uma sequência de atividades complementares às aulas do professor, e desenvolvidas para promover o aprendizado de conceitos de funções e suas derivadas, utilizando o *softwareGeoGebra*.

Interpretamos os acontecimentospela ótica do pensamento matemático avançado (TALL, 1991; VINNER, 1991; DREYFUS, 1991). Tomando como referência principal os estudos de Tall (1991) e Vinner (1991), utilizamos os construtos imagens conceituais e definições conceituais – pessoal e formal – para realizar uma análise a respeito da compreensão dos estudantes sobre funções e suas derivadas com ênfase no uso de definições matemáticas. (VINNER, 1991; EDWARDS; WARD, 2008).

Tomamos como objeto de nossa pesquisa definições matemáticas no seu uso em discussões matemáticas. Especificamente, examinamos esse objeto no contexto do seminário,pautados emestudos sobre funções e suas derivadas ministradas por grupos de estudantes.

Nosso objetivo é compreender como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas em discussões entre estudantes e professores durante as apresentações do seminário, cujos estudos enfatizam representações gráficas e algébricas das funções e suas derivadas, elaboradas por meio de um *software* com representação gráfica dinâmica.

A análise desses dados levou em consideração as interações ocorridas em sala de aula, sob a ótica do interacionismo simbólico (BLUMER, 1980; GODINO; LLINARES, 2000), e mostrou que o pensamento matemático manifestado pelos estudantes sobre os conceitos referentes às funções e suas derivadas evoluiu a partir das interações produzidas entre os estudantes e, entre eles, o professor da turma e a pesquisadora. As atividades complementares, as aulas do professor e as anotações do caderno de campo da pesquisadora foram utilizadas como fontes que esclareceram os dados do seminário.

No capítulo 2, apresentamos os métodos e procedimentos utilizados nesta pesquisa, no qual expomos o contexto e os participantes, o objetivo do estudo, as características que levaram ao uso de métodos e procedimentos da análise de conteúdo qualitativa, alémda forma como os dados foram organizados e analisados.

No início deste trabalho, selecionamos construções teóricas de acordo com nossa análise inicial, mas pelo fato de o foco da pesquisa ter sido mudado de investigações matemáticas sobre funções e suas derivadas para atividades matemáticas sobre funções e suas derivadas, passamos a observar as interações entre estudantes e professores nas discussões em torno das definições e dos conceitos abordados. Portanto, no capítulo 3, mostramos uma síntese das ideias presentes na linha pensamento matemático avançado (PMA) e do interacionismo simbólico, e a importância das definições em matemática. No capítulo 4, descrevemos o desenvolvimento das oito atividades complementares às aulas do professor realizadas com os alunos e relacionadas ao estudo de funções e suas derivadas; e, no capítulo 5, relatamos sobre os resultados da análise dos dados, referentes ao semináriode três dos grupos e a discussão desses resultados.

No produto educacional, apresentamos as atividades realizadas nesta pesquisa com o apoio de um *software* de representação gráfica dinâmica, que podem ser adequadas ao ensino de funções e suas derivadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Algumas atividades foram descritas de acordo com os procedimentos e as estratégias utilizados pela pesquisadora, enfatizando as circunstâncias em que se realizaram, bem como as intervenções do professor no processo de ensino e aprendizagem, além dos resultados e observações acerca da compreensão e respostas dos alunos. Destacam-se as discussões realizadas entre aluno/aluno e professor/aluno, considerando as interações entre os participantes desse processo e, sobretudo, como os alunos utilizaram as definições matemáticas durante a realização dessas atividades.

Com os resultados deste estudo, pretendemos contribuir para o campo de discussões sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente enfatizar a importância das definições matemáticas na compreensão dos conceitos de funções e suas derivadas em contextos de discussões e debates em sala de aula.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Nestecapítulo, apresentamos as etapas desta pesquisa, bem como as circunstâncias em que foi realizada, além dos objetivos, métodos e procedimentos utilizados. Expomos o contexto e os participantes da pesquisa, o desenvolvimento das atividades, os temas e objetivos dos grupos de estudo, o cronograma das atividades, a forma como os dados foram coletados, os instrumentos e critérios utilizados para a seleção dos dados a ser analisados.Retomamos o objetivo desta dissertação e as características que levaram ao uso de métodos e procedimentos da análise de conteúdo qualitativa. Relatamos a maneira como os dados foram tratados e analisados.

2.1 Contexto e participantes da pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada durante as aulas de Cálculo, com estudantes do primeiro período do curso Sistemas de Informação da Universidade Estadual de Montes Claros-UNIMONTES, no período de 26 de fevereiro a 20 de junho de 2013. A disciplina tinha uma carga horária de seis horas/aula semanais, cada horário de 50 minutos, dois horários geminados por dia, nas terças, quartas e quintas-feiras, quando realizamos uma sequência de oito atividades sobre derivadas e suas funções, além de um seminário para a apresentação dos resultados obtidos a partir dos estudos dos alunos. As aulas expositivas, ministradas pelo professor regente da disciplina, ocorreram na sala de aula; as atividades complementares, propostas pela pesquisadora, ocorreram no laboratório de informática (6 atividades) e na sala de aula (2 atividades). No seminário, os alunos, divididos previamente em grupos, apresentaram suas conclusões, acerca dos estudos sobre funções e suas derivadas, que serviram de objeto de análise desta dissertação.

No final do semestre, após a realização do seminário, continuei a ministrar aulas extras sobre conceitos relacionados a Funções, Limites, Derivadas e Integrais, com o objetivo de sanar dúvidas para a resolução de exercícios e realização de provas. As aulas fora do horário aconteciam nas terças e quartas-feiras, geralmente das 19h às 21h, totalizando seis encontros ao longo do semestre.

2.2 Aula expositiva: observação e direcionamento para a elaboração das atividades complementares

O professor ministrou aulas expositivas, nas quais as definições relacionadas aos conceitos prévios (funções, funções crescentes e decrescentes, representações de funções, funções trigonométricas, racionais, algébricas, logarítmicas, exponenciais, polinomiais, etc.) e aos conceitos de limites e derivadas eram abordadas formalmente, segundo a apresentação contemplada no livro de Cálculo adotado. Uma das preocupações do professor regente era sempre iniciar a aula com as definições claras e precisas do assunto que seria abordado, ou seja, ele escrevia no quadro de giz a definição e a explorava através de exemplos retirados do livro texto. Ao final da aula, o professor solicitava aos alunos que resolvessem extraclasse exercícios e situações-problema propostos no livro adotado, com cujas correções iniciava a próxima aula. Geralmente, essa solicitação não era cumprida por parte dos estudantes, inibindo, assim, a formulação de questionamentos diante da exploração de conceitos abordados nesses exercícios.

Apesar de objetiva e conveniente ao professor, a aula expositiva torna passivo o aluno, seu conhecimento e sua experiência, e, apesar de o aluno ter liberdade de questionar e interagir, e sempre ser instigado pelo professor, observamos que nem sempre essa interação ocorria de forma expressiva. O envolvimento tornava-se um desafio para alguns alunos, que pareciam constrangidos em esclarecer dúvidas diante dos colegase do professor. Percebemos, então, a necessidade de atividades que complementassem as estratégias do professor, a fim de proporcionar uma forma mais clarade manifestações do aluno sobre o seu entendimento acerca do conteúdo trabalhado, além de favorecer um ambiente propício para interações mais eficientes. Daí, a proposta de oito atividades que serão descritas a seguir. A aula ministrada no laboratório, diferente da que acontecia em sala de aula, proporcionava um ambiente de interação mais significativa, uma vez que contemplava a verbalização dos alunos, além dos registros, sobre as definições de funções e suas derivadas.

2.3 Desenvolvimento e dinâmica das atividades complementares

Ao todo, foram desenvolvidas com os alunos oito atividades relacionadas ao estudo de Funções, Limites e Derivadas, cujas questões foram elaboradas com o intuito de explorar a construção de conceitos de funções e suas derivadas, e promover a interação e o diálogo entre alunos. Essas atividades foram elaboradas pela pesquisadora, pelo professor regente da turma, com a participação do orientador desta pesquisa na elaboração da primeira atividade.

A participação do professor regente foi imprescindível, uma vez que cada uma das atividades dava continuidade aos conceitos desenvolvidos por ele em sala de aula, o que proporcionou a retomada imediata do que estava sendo ministrado aos alunos. Considerando as apreciações dele, as atividades eram desenvolvidas com foco nas dificuldades e dúvidas apresentadas pelos alunos durante a aula expositiva.

É importante ressaltar que a maioria das atividades foi elaborada após a aula teórica do professor regente, com o intuito de vinculá-las aos objetivos do programa da disciplina, aos conceitos, exercícios e problemas propostos no livro texto adotado pelo professor (STEWART, 2010). A natureza das atividades constitui uma importante estratégia de ensino e aprendizagem, pois possui características exploratórias e apresenta tarefas de caráter aberto com várias possibilidades de resoluções.

No que se refere ao desenvolvimento das oito atividades, duas foram realizadas em sala de aula, e seis no laboratório de Informática. Nas atividades ocorridas no laboratório, utilizou-se o *softwareGeoGebra*, escolhido por se tratar de um programa livre, com uma interface bastante intuitiva, que possibilita trabalhar, de forma conjunta, as representações gráficas e algébricas, além de fornecer ferramentas para uma exploração dinâmica dos conteúdos. Utilizamos a versão 4.2 do *software*, instalada na maioria dos 30 computadores do laboratório. Embora todos estivessem funcionando de forma adequada, muitos alunos preferiam utilizar o próprio *notebook*. Além disso, a sala tinha espaço adequado para acomodar 40 alunos e a disposição dos computadores favoreceu o trabalho em grupo, o que propiciou a interação necessária para o desenvolvimento das atividades.

As situações-problema apresentadas em cada atividade tinhamo objetivo de propiciar a compreensão e a ressignificação dos conceitos abordados em sala de aula e foram orientadas, com o auxílio do *software*, através de exploração, experimentação, questionamento, visualização e manipulação dos recursos oferecidos pelo programa na aplicação dos conceitos de funções e suas derivadas. O uso de representação gráfica dinâmica do *software* gerou interpretações referentes aos conceitos e definições abordados, e fez parte de debates e discussões entre os alunos e professores – professor regente e pesquisadora.Vê-se, portanto, que a realização dessas atividades propiciou distintas interações.

Na execução das atividades, os alunos eram orientados a enviar suas resoluções para uma sala virtual, as quais seriam recebidas pelo professor a título de avaliação e também seriam usadas como dados da nossa pesquisa de campo. Entretanto, ao iniciarmos a pesquisa,observamos que os alunos aguardavam nossas respostas e comentários, para modificarem suas respostas, uma vez que essas atividades seriam avaliadas pelo professor regente. Em decorrência disso, passamos a corrigir e comentar as questões somente após o envio delas, impossibilitando uma posterior mudança nas respostas. De tal modo, os alunos foram orientados a enviar, se necessário, dois arquivos: o primeiro com respostas antes dos comentários feitos por nós; e o segundo, após as correções. Essa foi a estratégia encontrada para que os resultados da pesquisa fossem fidedignos ao que se pretendia, respostas elaboradas pelos próprios alunos.

A seguir, o Quadro 1 evidencia o cronograma detalhado das oito atividades planejadas e realizadas com a finalidade de contextualizar sucintamente os objetivos traçados para cada uma delas.

Quadro 1 –Cronograma das atividades

Atividade	Data	Título	Objetivo	Conteúdo	Local
I	17 de abril	Taxa de variação.	Estabelecer relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função onde $x=a$, no gráfico.	– Velocidade média e instantânea. – Taxa de variação. Conceito de derivada no ponto. – Ferramentas do *GeoGebra.*	Laboratório de Computação
II	24 de abril	Derivada de uma função no ponto.	Estabelecer relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função onde x = *a*, por meio de gráficos e tabela.	– Representação analítica e coeficiente angular de reta tangente à função. – Gráfico da função derivada.	Laboratório de Computação
III	08 de maio	Construção e interpretação de gráfico de função polinomial e de sua derivada.	Esboçar gráfico de função polinomial de segundo, terceiro e quarto grau, e de sua derivada na malha quadriculada.	– Gráficos. – Grau de função. – Intervalos onde a função é crescente ou decrescente. – Domínio e imagem. – Cálculo algébrico de derivada.	Sala de aula
IV	15 de maio	Construção e interpretação de gráfico de uma função e de sua derivada.	Construir o esboço do gráfico de *f’* através do esboço do gráfico de *f* na malha quadriculada.	– Gráficos. – Grau de função. – Intervalos onde a função é crescente ou decrescente. – Domínio e imagem. – Cálculo algébrico de derivada.	Sala de aula
V	22 de maio	O que *f ’* nos diz sobre *f?*	Analisar gráfico de uma função derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo.	– Intervalos onde a função é crescente ou decrescente. – Valor máximo ou mínimo de função.	Laboratório de Computação
VI	23 de maio	O que *f ’* nos diz sobre *f?*	Estabelecer relações entre uma função e sua derivada, através do gráfico de vários tipos de funções, observando intervalos onde a função é crescente ou decrescente.	Domínio,imagem. – Cálculo algébrico de derivada. – Função crescente e decrescente. – Valor máximo e mínimo de função –Função: trigonométrica, polinomial de grau 3 e de grau 4racional, exponencial e logarítmica.	Laboratório de Computação
VII	28 de maio	O que *f ’* nos diz sobre *f?*	Estabelecer relações entre uma função e sua derivada, através do gráfico de vários tipos de funções, observando máximos, mínimos e números críticos.	– Máximo e mínimo. – Número crítico.	Laboratório de Computação
VIII	29 de maio	O que *f’’* nos diz sobre *f?*	Estabelecer relações entre uma função e sua derivada primeira e segunda, através do gráfico de vários tipos de funções, observando concavidades e pontos de inflexão.	– Concavidade. – Ponto de inflexão.	Laboratório de Computação

Fonte: A pesquisadora.

2.4 Seminário: etapas e objetivo

Após o desenvolvimento dessas atividades, foi proposto pelo professor regente e pela pesquisadora a realização de um seminário através do qual os alunos apresentariam, em grupo, os resultados de seus estudos sobre funções e suas derivadas. Tal estratégia de apresentação seria o ponto de partida para a análise do uso das definições matemáticas nas representações feitas pelos alunos durante as atividades. Cada grupo se encarregou de pesquisar sobre um tema que tratasse de uma função e de suas propriedades e observar as relações entre essa função e suas derivadas. Os estudantes deveriam sintetizar, realizar testes com a utilização do *GeoGebra* e, posteriormente, apresentar, em um seminário, os resultados de seus estudos relacionados às funções e suas derivadas. Os alunos iniciaram esses estudos em sala de aula e no laboratório, com a presença da pesquisadora e do professor como orientadores e mediadores. Entretanto, realizaram estudos extraclasses para a finalização do trabalho, momento em que não tiveram a orientação, tampouco as intervenções dos professores. Observamos as interações entre os alunos durante o início desses estudos, participamos de seus questionamentos, interagimos com eles e fizemos intervenções quando éramos solicitados.

No dia 29 de maio de 2013, ao final da aula, após a realização da oitava atividade, realizou-se a escolha dos grupos e dos temas (funções), que seriam abordados por eles. Poderiam escolher uma propriedade ou conceito, para ser pesquisado e investigado, desde que estivesse relacionado com funções e suas derivadas.

A proposta de trabalho feita pelo professor regente e pela pesquisadoratinha como objetivo principal estimular e incentivar os alunos a pesquisarem e investigarem com base nos conceitos abordados nas oito atividades desenvolvidas e nas definições exploradas pelo professor nas aulas ministradas por ele.

Decidimos disponibilizar dois dias com duas horas/aula por dia,na sala de computação, para o desenvolvimento do trabalho em grupo, com a presença da pesquisadora e do professor regente. A apresentação dos grupos foiagendada para os dias 12 e 13 de junho. Embora tenha sido recomendada a utilização do livro texto como fonte de pesquisa, os alunos preferiram recorrer à internet como fonte de pesquisa principal. Para a apresentação, os estudantes foram orientados a comentar sobre o trabalho, apontando as dúvidas que surgiram, as conclusões a que chegaram,as fontes que utilizaram para a busca de informaçõese o comportamento da função derivada da função escolhida como objeto de estudo.

O objetivo não era que os alunos ministrassem uma aula sobre o assunto escolhido, mas que apenas expusessem aos colegas o que haviam descoberto ou concluído sobre aquele tipo de função e sua derivada. Cada grupo delimitou uma função a ser estudada e pesquisada de acordo com o seu interesse. Por exemplo, o motivo pelo qual um grupo de alunos escolheu trabalhar com funções irracionais foi não saber a definição dessas funções e como era o comportamento da derivada. Esse grupo alegou que o Cálculo mostrava claramente sobre funções polinomiais e que quase não viam explorações em outros tipos de funções. Outro grupo se interessou em pesquisar sobre função logarítmicaporque não havia aprendido esse conteúdo no Ensino Médio. O Quadro 2, a seguir, apresenta as funções escolhidas pelos grupos para estudar o comportamento das funções derivadas com seus respectivosobjetivos de pesquisa.

Quadro 2 – Funções e objetivos dos grupos de estudos. Grupos selecionados para a análise em sombreamento

Tema	**Objetivos a serem alcançados na pesquisa**	**Número de alunos no grupo**
Função Polinomial	Investigar o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento.	3
Função Polinomial	Investigar o comportamento da função derivada nos pontos máximo e mínimo da função.	3
Função Logarítmica	Investigar o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento.	3
Função Logarítmica	Investigar o comportamento da função derivada nos pontos de inflexão, e máximos e mínimos da função.	4
Função Exponencial	Investigar o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento.	3
Função Exponencial	Investigar o comportamento da função derivada nos pontos máximo e mínimo da função.	3
Função Trigonométrica	Investigar o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento.	3
Função Trigonométrica	Investigar o comportamento da função derivada nos pontos máximo e mínimo.	4
Função Irracional	Investigar o comportamento da derivada nos pontos máximos e mínimos da função.	3
Função Irracional	Investigar o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento.	3

Fonte: A pesquisadora.

Dos dez grupos do Quadro 2, quatro foram selecionados para a análise das apresentações feitas pelos alunos (grupos em sombreamento no quadro). No entanto, dois grupos que expuseram o trabalho sobre função exponencial uniram-se na apresentação e tornaram-se um só grupo, composto por seis estudantes. Por isso, houve quatro grupos e três assuntos abordados na apresentação do seminário.Não desmerecendo a importância e a qualidade dos demais grupos, a escolha para a descrição foi norteada por dois critérios. Primeiro, pela quantidade e qualidade das dúvidas que surgiram ao longo do desenvolvimento dos trabalhos referentes às definições matemáticas no contexto de representações gráficas e outras representações, como as algébricas. Segundo, em relação ao objetivo da pesquisa e aos aportes teóricos adotados, pensamento matemático avançado (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991; TALL et al., 2001) e do interacionismo simbólico (BLUMER, 1980; GODINO; LLINARES, 2000).

A disposição dos grupos no quadro 2 corresponde à ordem de apresentações. Os grupos que realizaram estudos sobre funções trigonométricas não estavam preparados para a apresentação, quando chamados, e ficaram, então, para o final. Porém, apenas entregaram o trabalho por escrito.

Focados no objetivo, escolhemosalguns episódios de diálogos dos três grupos selecionados para a análise, que foram gravados durante a realização do seminário e, posteriormente, transcritos e analisados.

Na redação desta dissertação, são usados nomes fictícios para os estudantes; para o professor regente, apenas a denominação professor; e, para mim, quando me chamarem de professora ou pelo meu nome, utilizaremos a designação “pesquisadora” nas transcrições.

As apresentações dos três grupos que serviram de base para a transcrição dos diálogos que gerou dados para a análise são:

a) G1-Grupo que investigou derivadas em funções polinomiais;
b) G2-Grupo que investigou derivadas em funções logarítmicas;
c) G3-Grupo que investigou derivadas em funções exponenciais.

2.5 Instrumentos de coleta de dados, objetivo e aportes teóricos

Inicialmente, nossa pesquisa estava fundamentada nos pressupostos teóricos das investigações matemáticas e pensamento reflexivo de Dewey, e nosso intuito era analisar o pensamento matemático dos estudantes em seus trabalhos. Entretanto, devido à decisão de vincular as atividades no laboratório ao desenvolvimento das aulas do professor e à aprendizagem dos estudantes, esses aportes deixaram de fundamentar o desenvolvimento das atividades e os estudos em grupos sobre funções e suas derivadas que foram apresentados no seminário. Entretanto, esclarecemos que os pressupostos teóricos das investigações matemáticas e pensamento reflexivo de Dewey nortearam as decisões a respeito de quais tipos de dados seriam importantes para a pesquisa e a escolha dos instrumentos para coletá-los,os quais delimitados a seguir:

a) gravação de áudio e vídeo com o objetivo de registrar as interações e diálogos entre alunos e professores;
b) registros feitos pelos alunos nas folhas de atividades e das provas realizadas em sala de aula, com o objetivo de recolher informações quanto aos conceitos de funções e suas derivadas;
c) sala virtual criada como espaço para registrar as atividades desenvolvidas pelos alunos com auxílio do *GeoGebra* no laboratório de informática, com o objetivo de recolher informações da compreensão dos alunos sobre os conceitos de funções e suas derivadas;
d) fórum virtual, que teve como objetivo registrar os diálogos e interações dos alunos fora do ambiente escolar a respeito de questionamentos sobre assuntos estudados em sala;
e) notas de campo da pesquisadora, com a finalidade de registrar o desenvolvimento das atividades, as observações das aulas do professor regente, as impressões iniciais e formas de expressão dos alunos e possíveis dúvidas manifestadas por eles sobre o conteúdo ministrado.

Os instrumentos utilizados nos permitiram coletar diversos dados, com riqueza de detalhes, ou seja, tínhamos muito material que podia ser analisado. As notas de campo da pesquisadora, o fórum virtual, os registros feitos pelos alunos e os diálogos capturados nas gravações de áudio e vídeo que registraram as interações entre colegas e entre alunos e professores durante a realização das oito atividades desenvolvidas e durante as aulas ministradas pelo professor, apesar de não serem utilizados como dados para a análise, serviram de base para interpretação.

Observamos que as interações ocorridas entre estudantes, professor e pesquisadora foram relevantes e evidenciaram algumas dificuldades dos estudantes relacionadas ao uso das definições matemáticas no estudo de funções e suas derivadas. Isso nos motivou a realizar uma análise mais aprofundada sobre a compreensão das definições matemáticas presentes na comunicação matemática dos estudantes referentes a esses estudos. Por isso, focamos a análise dos dados nas transcrições dos diálogos ocorridos no seminário realizado pelos grupos de estudantes.

Adotamos aportes teóricos para esse recorte, objetivando construir uma compreensão a respeito de como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas em discussões entre estudantes e professores durante as apresentações do seminário. Visou-se interpretar as manifestações orais e dos registros dos estudantes à luz da teoria do pensamento matemático avançado (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991) e interacionismo simbólico.(BLUMER, 1980).

Para alcançar o objetivo proposto, foi necessário focar alguns aspectos desses diálogos por meio de uma leitura global das transcrições, nas quais observamos a presença significativa de referências às representações gráficas realizadas no *software* e o uso de definições matemáticas. Os recortes transcritos nesta dissertação foram feitos, portanto, dos trechos em que se evidenciaram tais fatores a serem analisados e fundamentados teoricamente.

2.6 Análise: métodos e procedimentos

De acordo com Graneheim e Lundman (2004), na análise de conteúdo, em sua vertente qualitativa, o exame de um texto serve de apoio para apreender seu sentido simbólico. Em nossa pesquisa, esse texto se refere às transcrições dos diálogos ocorridos no seminário. Esse sentido nem sempre é manifesto e o seu significado não é único, pois poderá se apresentar com diferentes perspectivas. Através de umtrabalho gradual de assimilação do texto, emergem as unidades de sentido – palavras, conjunto de palavras formando uma locução ou temas –, que são definidas com o intuito de buscar informaçõescontidas no texto. O objetivo de toda análise de conteúdo é o de assinalar e classificar de maneira objetiva todas as unidades de sentido existentes no texto, além de permitir que sobressaiam do documento suas principais regularidades.

A análise e o estudo dos aportes teóricos que a fundamentaram foram distribuídos em seis etapas, apresentas a seguir:

a) apreciação global dos dados para começar a definição de nosso objeto de estudo e objetivo da pesquisa;
b) estabelecimento de diretrizes para a seleção de dados e, assim, a seleção de gravações para transcrever;
c) seleção e transcrição de dados coletados nas atividades e no seminário;
d) definição de aportes teóricos na área do pensamento matemático avançado e interacionismo simbólico;

e) estudo da literatura a respeito do pensamento matemático avançado e definições matemáticas;

f) a codificação e categorização dos dados.

Os episódios selecionados para análise foram interpretados a partir dos métodos e procedimentos de codificação e categorização (CHARMAZ, 2009) e da análise de conteúdo qualitativa (GRANEHEIM; LUNDMAN, 2004). No primeiro momento, foi realizada uma codificação sistemática dos dadose uma subsequente categorização dos códigos sem referência aos aportes teóricos. Os aportes foram utilizados posteriormente como ótica para interpretar os resultados da categorização, visando o objetivo da pesquisa.

Destacamos, neste sentido, a categorização sistemática, interpretação e descrição dos dados como etapas essenciais deste método de análise, que se constitui em um conjunto de técnicas qualitativas visando à busca de sentidos nos dados. A análise de conteúdo pode ser utilizada tanto para a abordagem quantitativa quanto para a abordagem qualitativa ao ser aplicada em contextos com uma variedade de dados que necessitem de interpretação.

Nosso estudo se baseia na análise de conteúdo qualitativa. Para a compreensão analítica de nossos dados, utilizamos a codificação em conformidade com Charmaz (2009). Optamos por analisar os dados de acordo com os métodos e procedimentos da análise de conteúdo, porque nela a codificação define a estrutura analítica para construir a análise dos dados.Dessa forma, a codificação nos deu suporte para questionar de modo analítico os dados da pesquisa e nos levou a observar atentamente as ações contidas nos diálogos. Para Charmaz (2009, p.69), “codificar significa categorizar segmentos de dados com uma denominação concisa que, simultaneamente, resume e representa cada parte dos dados”.

A partir, portanto, de uma leitura minuciosa dos dados da pesquisa, iniciamos pela construção dos códigos, como forma de organização e seleção dos dados desta pesquisa. Para Graneheim e Lundman (2004), as *unidades de sentido*, denominadas “unidades de registro”, ou também “unidades de análise”, são elementos unitários de conteúdo a ser submetido posteriormente à classificação. Entendemos que essas unidades de sentido são similares às unidades de registro que Charmaz (2009) chama de códigos.

A codificação dos dados contidos nas transcrições do seminário foi realizada com uma codificação inicial, e, em seguida, requereu uma leitura atenta e focada sobre os dados, em busca de ideias analíticas.Separamos os dados de acordo com seu contexto,objetivando a elaboração de códigos,e organizamos de maneira que exprimissem ações, ou seja, codificamos os dados como ações com o uso da forma nominal do verbo nogerúndio, pois, para Glaser (1978), citado por Charmaz (2009), a utilização de gerúndios na codificaçãoauxilia o pesquisador a detectar processos e a se fixar nos dados, transmitindo uma forte sensação de ação e sequência.

Apresentamos no Quadro 3 um exemplo de um código da análise.

Quadro 3 –Código expresso em gerúndio

CÓDIGO	**DIÁLOGO OCORRIDO NO GRUPO QUE INVESTIGOU FUNÇÕES POLINOMIAIS**	
Visualizando parábola perfeita e parábola imperfeita no *GeoGebra*	Guto:	*Eu tenho uma pergunta para fazer: a função de grau 4, é uma parábola?*
	Jane:	*Quando a gente estava fazendo o trabalho eu achava que não, mas depois eu vi no* GeoGebra *que sim. Não fica uma parábola perfeita, mas é uma parábola sim.*
	Professor:	*Então, tem parábola perfeita e parábola nãoperfeita?*
	Carlos:	*Tinha hora que ela dava uma entortadinha, mas é uma parábola, não é não?*

Fonte:A pesquisadora.

Para a construção dos códigos, observou-se o assunto principal do diálogo transcrito, bem como as definições e conceitos matemáticos refletidos na discussão em análise. Em seguida, escolheu-se o verbo adequado para cada situação, empregado no gerúndio. Dessa maneira, garantiu-se um foco de interpretação. No exemplo representado no Quadro 3, o verbo visualizar foi escolhido, uma vez que nessa situação os alunos identificaram a representação gráfica da parábola no *GeoGebra*. Caso a ação fosse outra, haveria outros verbos, como: explorar, mostrar, definir, comprovar, entre outros, como exemplificado no Quadro 5, constante do capítulo 5.

Após a codificação dos dados contidos nas transcrições dos diálogos e interações ocorridas no seminário, ou seja, depois de definir e separar os códigos, prosseguimos para a categorização, segunda fase da codificação, pois utiliza códigos anteriores mais significativos, direcionados, conceituais e seletivos. Nessa etapa, identificamos os códigos que mais se destacaram e os sintetizamos em categorias. Nesse momento do processo, norteou-nos a teoria de Charmaz (2009, p.87), segundo a qual "a codificação focalizada exige a tomada de decisão sobre quais os códigos iniciais permitem uma compreensão analítica melhor para categorizar os seus dados de forma incisiva e completa".

A categorização visareunir um grupo de elementos dos códigos. Em nossa pesquisa, obtivemos categorias *a posteriori*, ou emergentes, no processo da análise dos dados colhidos no seminário. Uma categoria pode ser vista como um conjunto ou grupo de conteúdos que compartilham uma semelhança, e criá-la é a característica central da análise de conteúdo qualitativa. As categorias podem ser distinguidas como grandes enunciados que abrangem um número variável de códigos, segundo seu grau de intimidade ou proximidade. Podem, através de sua análise, exprimir significados que atendam aos objetivos do estudo, proporcionando uma visão diferenciada sobre os temas propostos.

Por exemplo, mostramos no Quadro 4 códigos que foram sintetizados para criar uma categoria.

Quadro 4 – Códigos sintetizados em uma categoria

CÓDIGOS	**CATEGORIA**
Explorando o conceito de função quadrática a partir da representação gráfica de derivadas.	Utilizando experiências prévias.
Visualizando parábola perfeita e parábola imperfeita no *GeoGebra*.(ver Quadro 3)	
Descartando um dos quadrantes na leitura de gráfico.	
Mostrando parábola definida por função algébrica diferente da quadrática.	
Definindo função exponencial a partir do que se aprendeu em ensinos anteriores.	

Fonte: A pesquisadora.

Para criar categorias a partir dos códigos, foram observadas as semelhanças entre as ações praticadas pelos alunos em cada código. De acordo com essas características, esses códigos foram agrupados em categorias cuja nomeação se faz de forma mais abrangente, como o exemplo do Quadro 4, que representa a categoria das experiências prévias, ou seja, cada código dessa categoria contempla ações relacionadas aos conhecimentos prévios dos alunos.

De acordo com Graneheim e Lundman (2004), das categorias emergem os temas. Um tema responde à pergunta “Como?”, e pode ser visto como uma expressão do conteúdo latente do texto. Para os autores, a questão básica quando se realiza análise de conteúdo qualitativa é decidir se a análise deve se concentrar no conteúdo manifesto ou latente. A análise de conteúdo no nível manifesto restringe-se ao que é dito, sem buscar os significados ocultos, e, no nível latente, procura-se captar sentidos implícitos, ou seja, parte da informação manifesta no texto para, então, dirigir-se à intenção que o autor quis expressar. Na análise, não nos restringimos apenas ao conteúdo manifesto.

De acordo com Graneheim e Lundman (2004), os temas não são necessariamente excludentes e podem ser construídos por códigos, categorias ou subtemas, de acordo com a escolha própria do pesquisador, pois têm como fundamento os objetivos da pesquisa e indícios levantados do contato com o material estudado e referencial teórico da pesquisa. No caso de nossa pesquisa, após organizar nossas categorias, realizamos uma integração entre elas e o marco teórico com o objetivo de classificar, sintetizar e organizar os dados,servindo assim de suporte para a análise.

Compreendemos o tema como uma forma de integrar as categorias e organizá-las em torno de um conceito central, ou seja, sistematizar o processo de codificação. Para definir cada tema da pesquisa, buscou-se, além dos aspectos manifestos, os aspectos latentes do texto, ou seja, o que podia ser deduzido dos pressupostos implícitos nos diálogos dos alunos.

Nesta pesquisa, códigos e categorias foram divididos em dois temas: “Pensamento matemático dos estudantes sobre funções e suas derivadas: conceito imagem e definições” e “Interações no processo de ensino e aprendizagem de funções e suas derivadas”, explicitados no capítulo 5.

No próximo capítulo, realizamos uma síntese das ideias do pensamento matemático avançado referente às noções teóricas de *imagem conceitual* e *definição conceitual* e do interacionismo simbólico, a respeito da compreensão dos estudantes sobre funções e suas derivadas com ênfase no uso de definições matemáticas.

3 MARCO TEÓRICO: PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E INTERACIONISMO SIMBÓLICO

Neste capítulo, mostramos uma síntese das ideias presentes na linha do pensamento matemático avançado (PMA) e do interacionismo simbólico, que serão utilizadas em nossa pesquisa. Discutimos, sobretudo, as características do pensamento matemático avançado,nas noções teóricas de *imagem conceitual e definição conceitual*, e a importância das definições em matemática. No que se refere ao interacionismo simbólico, focamos nas interações ocorridas entre os estudantes e professores. O PMA vem sendo largamente utilizado nas investigações realizadas no contexto da matemática universitária, e será utilizado nesta pesquisa, relacionada com o estudo de funções e suas derivadas, e desenvolvido com estudantes do curso de Sistemas de Informação de uma universidade pública.

3.1Características do pensamento matemático avançado

Existem diversas linhas de pesquisa sobre os processos de aprendizagem, e, em geral, as discussões recaem sobre o perfil de aprendiz que se deseja formar. Por isso, as concepções de ensino e aprendizagem são fundamentais, uma vez que fornecem diretrizes para a prática do educador que se preocupa com o objeto de estudo,com as estratégias de ensino e com o pensamento matemático desenvolvido pelos alunos no processo de aprendizagem. O desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos desde o nível básico ao superior tem sido foco depesquisas.(TALL, 1991; VINNER, 1991; DREYFUS, 2002; SFARD, 2007; GRAY, 1999; DUBINSKY, 2002; DOMINGOS, 2006; COSTA, 2002; RESNICK, 1987).

Corroboramos com Domingos (2006), ao considerar que tanto as dificuldades quanto o elevado nível de fracasso escolar universitário apresentado pelos estudantes na área de Matemática podem ser explicados pela baixa compreensão de conceitos matemáticos. Devido à complexidade existente na compreensão de conceitos matemáticos, tais como funções e derivadas, buscamos um referencial teórico que nos permita analisar, descrever e explicar, como os estudantes universitários manifestam sua compreensão relativa aos conceitos matemáticos.

Uma sistematização do pensamento matemático, desde a perspectiva cognitivista, foi realizada por Tall (1995), por meio de três componentes da atividade humana: a *percepção* como entrada, o *pensamento* como processamento interno e a *ação* como saída. Isso permite considerarmos as atividades matemáticas, como perceber objetos, pensar e realizar ações sobre eles. Tall (1995) considera que o pensamento matemático inicia-se pela percepção dos objetos do mundo externo e pelas ações exercidas sobre eles. Esse pensamento também se desenvolve simultaneamente por meio dos processos orientados à inspiração de um pensamento criativo baseado na definição formal e na demonstração sistemática dos conceitos matemáticos.À medida que o pensamento se desenvolve tornando-se mais complexo, as ações sobre esses objetos conduzem ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas. Assim, tanto o pensamento matemático elementar quanto o pensamento matemático avançado referem-se à maneira como se processa internamente a informação.

Tall (1995) propõe a distinção entre a matemática elementar, na qual os objetos são descritos, e a matemática avançada, na qual os objetos são definidos formalmente. Para a matemática elementar, isso implica a descrição das propriedades a partir da experiência com o objeto, enquanto na matemática avançada as propriedades emergem das definições.

Segundo Tall (1991, p. 3), a caracterização do ciclo de atividades no pensamento matemático avançado conduz “desde a atitude produtiva de considerar a contextualização de um problema numa investigação matemática até a formulação produtiva de conjecturas e a etapa final de refinamento e demonstração”.

Tall (1991) se apoia na teoria de Piaget em relação à transição de um estado mental a outro. Isso se produz por meio da complementariedade entre os processos de *assimilação eacomodação*. Entende-se *assimilação* como aapropriação individual de um novo dado e *acomodação* como uma possível mudança na estrutura cognitiva individual. Além disso, essa ideia é corroborada pela distinção que Skemp (1979) fez entre as situações nas quais o processo de aprendizagem provoca uma simples expansão da estrutura cognitiva do indivíduo e aquelas nas quais o conflito cognitivo requer uma reconstrução mental.

Segundo Dreyfus (1991), o pensamento matemático avançado consistenuma grande série de processos que interagem entre si, comoos processos de representação e abstração.Além desses dois processos, existem outros, como classificar, conjecturar, induzir, analisar e formalizar, mas é por meio dos dois processos principais que se passa de um nível de pensamento para outros.De acordo com o autor, esses processos podem ser encontrados tanto no pensamento matemático elementar como no pensamento matemático avançado, pois existem tópicos da matemática básica que podem ser tratados de forma avançada, assim como há um pensamento elementar sobre tópicos avançados, pois a distinção está na complexidade de como são tratados e gerenciados os processos presentes em cada um deles. Dessa forma, Dreyfus (1991) ressaltaa importância de o professor conhecer estes processos, pois facilita a compreensão das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

No que se refere à definição de pensamento matemático avançado e às discussões produzidas sobre sua natureza e desenvolvimento, encontramos na literatura especializada que "ao longo do tempo houve uma diversidade de opiniões expressas sobre este tema e não há uma definição de PMA que seja unanimemente aceita".(MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2008, p. 155). Para esses autores, a opção mais simples é que o PMA compreende as necessidades cognitivas para abordar os conteúdos matemáticos associados a domínios usualmente tratados na universidade.

3.2 Imagem conceitual e definição conceitual

As noções teóricas de *imagem conceitual* e *definição conceitual* foram introduzidas na literatura especializada, segundo Tall (1992), pelo trabalho de Vinner e Hershkowitz (1980), e, mais tarde, Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991). A síntese dessas noções, que realizamos, está baseada principalmente no trabalho de Vinner (1991).

Segundo Vinner (1991), quando se vê ou se ouve uma palavra associada a um conceito matemático, algo como o nome do conceito é evocado na memória. Isso faz parte do que é denominado *imagem conceitual*. De acordo com Tall e Vinner (1981), a *imagem conceitual* corresponde ao que está associado ao conceito na mente do indivíduo e inclui todas as imagens mentais, processos e propriedades ligadas ao mesmo. Nesse sentido, esses autores consideram que:

> A imagem conceitual é algo nãoverbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. Mas é importante lembrar que essas formas verbais não são a primeira coisa evocada em nossa memória. Elas acontecem em estágio posterior. [...] Quando você ouve a palavra "função" por outro lado, você pode lembrar-se da expressão "y = f(x)", você pode visualizar o gráfico de uma função, você pode pensar sobre funções específicas como $y = x^2$ ou $y = sen(x)$, $y = lnx$ etc.. Do que nós dissemos, está claro que só é possível falar de imagem conceitual em relação a um indivíduo específico. Além disso, o mesmo indivíduo poderia reagir de modo diferente a um certo termo (nome do conceito) em situações diferentes. Em Tall & Vinner (1981) o termo "imagem conceitual evocada" é introduzido para descrever a parte da memória evocada num dado contexto. Isso não é, necessariamente, tudo que um certo indivíduo sabe sobre uma certa noção. (VINNER, 1991, p. 6).

Por outro lado, a definição conceitual consiste na definiçãoem forma de palavras de um conceito de maneira exata e não circular (VINNER, 1983). Tall e Vinner (1981) fazem a distinção entre uma definição conceitual formal, que é a definição exata e precisa, e a definição conceitual pessoal, que é o entendimento verbal da definição formal de uma pessoa. A definição conceitual, geralmente utilizada para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos no ensino universitário, compreende a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal.Nesse sentido, Tall e Vinner afirmam que:

> A definição conceitual (se o indivíduo a possuir) é uma questão completamente diferente. Consideramos que a *definição conceitual* é uma forma de palavras usada para especificar esse conceito. Ela pode ser aprendida por um indivíduo de forma mecânica ou de forma mais significativa relacionando-a em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução pessoal feita pelo aluno a partir de uma definição. Constitui-se numa forma de palavras que o aluno usa para a própria explicação de sua imagem conceitual (evocada). Se a definição conceitual é dada para o estudante ou construída por ele mesmo, ele pode variá-la de vez em quando. Nesse sentido, uma definição conceitual *pessoal* pode diferir de uma definição conceitual *formal*, sendo esta última uma definição conceitual aceita pela comunidade matemática em geral. (1981, p. 152, tradução nossa[2]).

Tomando como referência o trabalho de Tall e Vinner (1981), Meyer (2003) considera que a definição conceitual pode constituir-se também numa "reconstrução pessoal da definição de um conceito, sem que tenham necessariamente significados coincidentes. Nesse caso, a definição conceitual é considerada como a forma verbal utilizada pelo estudante para especificar sua imagem conceitual (evocada)". (MEYER, 2003, p. 6 apud ABREU, 2011, p 57).

A definição conceitual pode ser categorizada segundo o tema e objetivos da investigação. No que se refere ao estudo desenvolvido por Vinner e Dreyfus (1989), relacionado com as imagens e definições de função, esses autores utilizaram as seis categorias, sintetizadas a seguir, para analisar as definições de função dadas pelos estudantes:

---

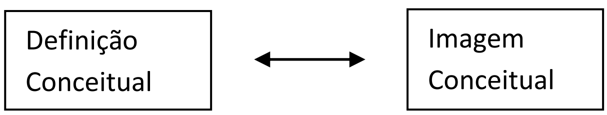
[2]"The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the *concept definition* to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a *personal* concept definition can differ from a *formal* concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large."

1) Correspondência: a função é uma correspondência entre dois conjuntos que designa para cada elemento do primeiro conjunto exatamente um único elemento do segundo conjunto (definição de função de Dirichlet-Bourbaki).
2) Relação de dependência: a função é considerada uma relação de dependência entre duas variáveis (y depende de x).
3) Regra: a função é uma regra, e a expectativa é que essa regra tenha alguma regularidade, considerando que a correspondência pode ser “arbitrária”.
4) Operação: a função é uma operação ou uma manipulação de números por meio de operações algébricas, com o objetivo de obter suas imagens.
5) Fórmula: a função é uma fórmula, uma expressão algébrica ou uma equação.
6) Representação: a função é identificada com uma de suas representações gráficas ou simbólicas, por exemplo, $y=f(x)$.

Conforme afirma Vinner (1991, p. 6), “adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber a definição conceitual de cor não garante o entendimento do conceito. Entender, como acreditamos, significa ter uma imagem conceitual. Certos significados devem ser associados com as palavras”. Vinner desenvolveu um modelo que está baseado na existência de duas células (não relacionadas com o conceito biológico): uma para a *imagem conceitual* e a outra para a *definição conceitual.* Qualquer uma dessas células pode estar vazia quando não se associa significado algum ao conceito. Ainda que cada célula possa constituir-se de maneira independente, o referido modelo sugere que haja interações entre elas. A exemplificação desse modelo será apresentada à continuação segundo o trabalho de Vinner (1991).

Inicialmente, o autor considera o processo pelo qual se introduz um conceito por meio de uma definição. Nesse caso, a célula da imagem conceitual inicialmente vazia é gradualmente desenvolvida a partir dos exemplos eexplicações realizados pelo professor, livros, colegas, internet etc.

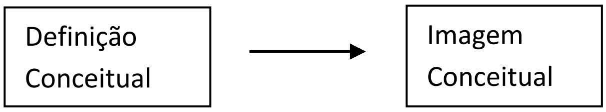
Figura 1 – Intercâmbio entre imagem conceitual e definição conceitual



Fonte: VINNER, 1991, p.9.

Vinner (1991) considera que o esquema representado pela Figura 1 refere-se aos processos de formação de conceito a serem desenvolvidos em longo prazo, conforme ilustrado pela Figura 2.

Figura 2 – O desenvolvimento cognitivo do conceito formal

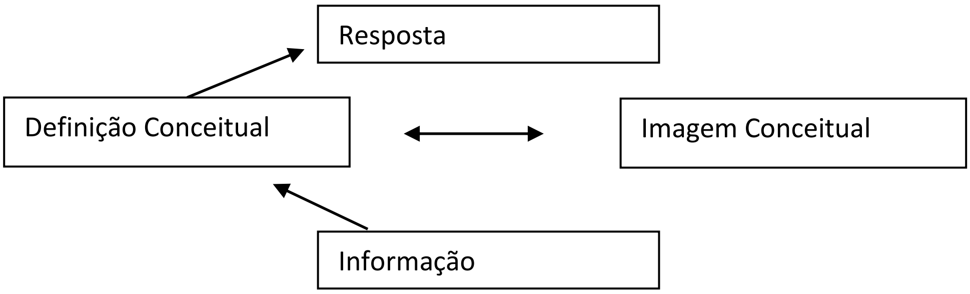


Fonte: VINNER, 1991, p. 10.

No que se refere aos processos de resolução de problemas e de desempenho em atividades, o autor considera que:

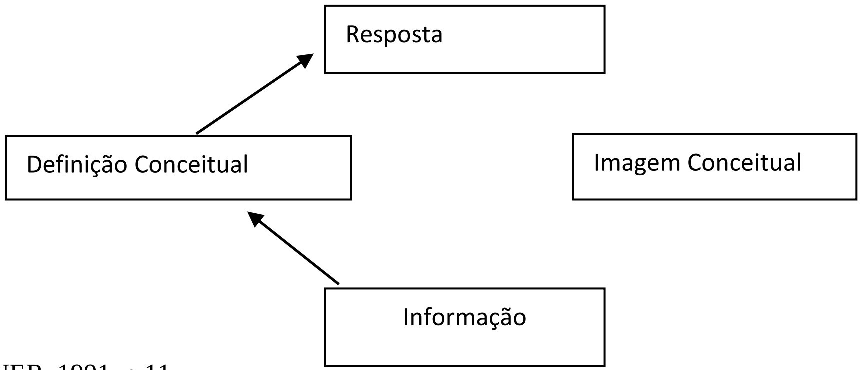
> Quando uma tarefa cognitiva é colocada para um estudante, espera-se que as células da imagem conceitual e da definição conceitual sejam ativadas. Novamente, parece-nos que muitos professores na escola secundária e no college esperam que os processos intelectuais envolvidos na performance de uma dada tarefa intelectual deveriam ser esquematicamente expressos por uma das três figuras [figuras 3,4 e 5 nesta redação] seguintes (as figuras representam somente o aspecto da imagem conceitual e da definição conceitual envolvida no processo). As setas nas figuras representam maneiras diferentes pelas quais um sistema cognitivo deveria funcionar. (VINNER, 1991, p.10).

Figura 3 – Intercâmbio entre definição e imagem



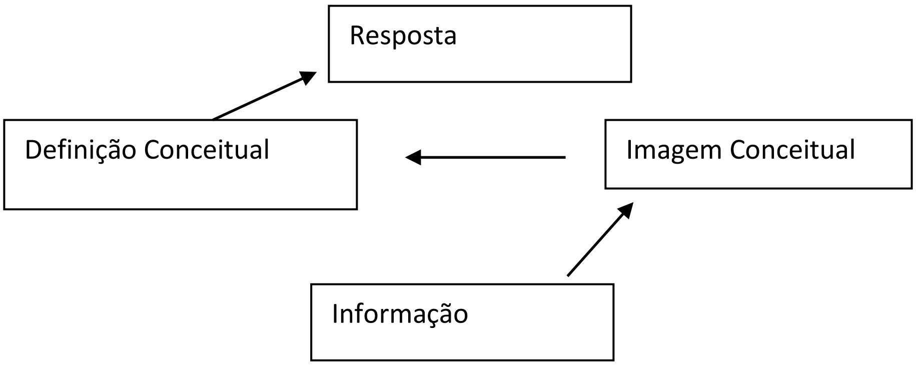
Fonte: VINNER, 1991, p.10.

Figura 4 – Dedução puramente formal



Fonte: VINNER, 1991, p.11

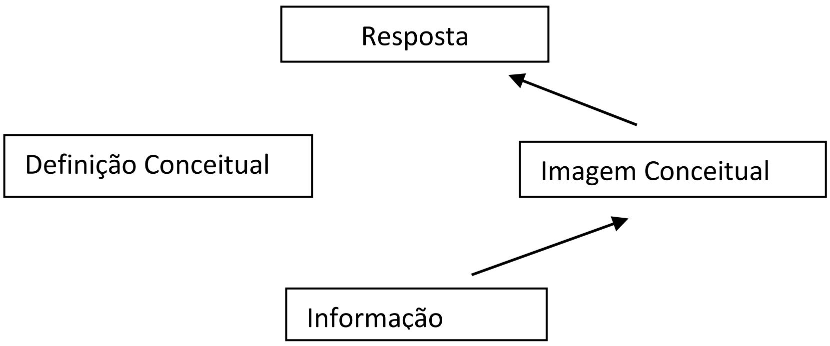
Figura 5 – Dedução seguindo pensamento intuitivo



Fonte: VINNER, 1991, p. 11.

Nos processos ilustrados pelas Figuras 3, 4 e 5, Vinner (1991, p. 11) considera que "não importa como seu sistema de associação reaja quando um problema lhe é colocado em um contexto técnico, não se espera que você formule sua solução antes de consultar a definição conceitual. Isso é, naturalmente, o processo desejável". Entretanto, o autor reconhece que isso não corresponde ao que o estudante realiza na prática. Assim, propõe o seguinte modelo (Figura 6) para a prática:

Figura 6 – Resposta intuitiva



Fonte: VINNER, 1991, p. 11.

Vinner (1991, p. 12) esclarece que, no que se refere à ilustração realizada por meio da Figura 6,

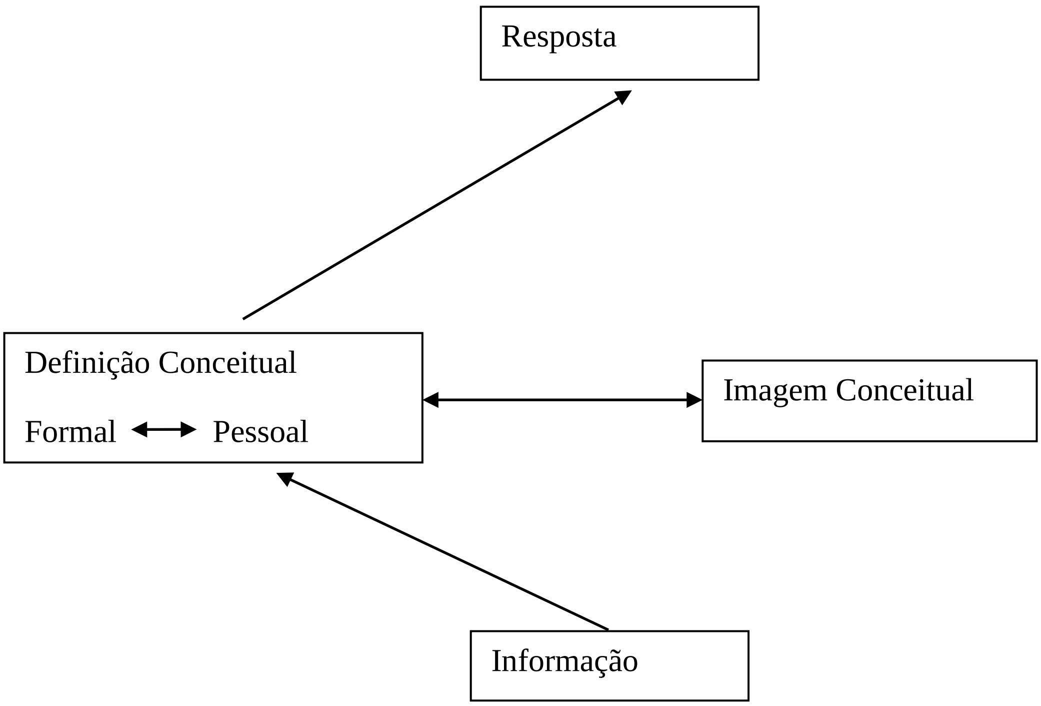
> a célula da definição conceitual, mesmo se não vazia, não é evocada durante o processo de resolução do problema. Os hábitos de pensamento cotidianos se sobrepõem e o respondente está inconsciente da necessidade de consultar a definição formal. Não é preciso dizer que, na maioria dos casos, a referência à célula da imagem conceitual será bem-sucedida. Esse fato não encoraja as pessoas a se referirem à célula da definição conceitual. Apenas em problemas de nãorotina, nos quais imagens conceituais incompletas poderiam ser ambíguas, pode-se encorajar as pessoas a se referirem à imagem conceitual. Tais problemas são raros e, quando dados aos

> estudantes, são tidos como injustos. Então, não há nenhuma força aparente que possa mudar os hábitos de pensamento comuns que são, em princípio, inapropriados para contextos técnicos.

A diferença, portanto, que se percebe entre os processos representados pelas Figuras 5 e 6, fundamentados por Vinner (1991, p. 11), é que, naquele, o indivíduo responde através de uma imagem conceitual, estabelecendo uma relação também com a definição conceitual; neste, não há relação com a definição conceitual, daí chamá-la de resposta intuitiva.

Vinner considera que os modelos, citados por ele, e implicitamente assumidos pelos professores podem ser descritos por meio das ações ilustradas anteriormente. Ressaltamos que Vinner considera que tanto a *imagem conceitual* quanto a *definição conceitual* são centrais para a explicação do processo cognitivo de formação dos conceitos. Nesse sentido, Tall e Vinner (1981) fazem a distinção entre a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal, a qual consideramos relevante frente aos dados desta pesquisa. Por isso, elaboramos um esquema, compreendido pela Figura 7, no qual destacamos os intercâmbios propostos no modelo indicado por Vinner (1991), por meio da Figura 3, bem como detalhamos a definição conceitual formal e a pessoal, de acordo com Tall e Vinner (1981).

Figura 7 – Intercâmbio entre definições (formais e pessoais) e imagens conceituais



Fonte: Elaborado pelapesquisadora.

Esclarecemos que, no que se refere à ilustração realizada por meio da Figura 7, compreendemos que é possível que a célula da definição conceitual, tanto pessoal quanto formal, seja evocada durante o processo de resolução de um problema. Também pode haver intercâmbio entre essas definições, bem como entre elas e a imagem conceitual. De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual pessoal é o entendimento verbal da definição conceitual formal de uma pessoa. A resposta dada pelo indivíduo a uma situação-problema pode partir da definição conceitual pessoal em conexão com a imagem conceitual do objeto em estudo.

3.3Definições estipuladas e extraídas

Considerando o objetivo desta pesquisade compreender como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas pelos estudantes nas representações gráficas e algébricas das funções e suas derivadas, baseamo-nos nesses aportes teóricos a fim de aplicar essa fundamentação na análise das expressões orais e escritas realizadas pelos estudantes, quando utilizaram tanto a definição conceitual formal quanto a pessoal. Além desses autores, a análise também se fundamentou nos estudos de Edwards e Ward (2004), que corroboram com Tall e Vinner (1981), no entendimento das definições matemáticas, mas consideram que as definições conceituais podem ser estipuladas ou extraídas.

Edwards e Ward (2004) analisaram a compreensão dos alunos sobre as definições matemáticas e qual o entendimento que eles têm do papel desempenhado pelas definições formais na matemática. Uma das conclusões obtidas na pesquisa que realizaram foi que alguns alunos com formação matemática avançada não entendem completamente a natureza e o papel das definições matemáticas. Muitos alunos explicam as definições, mas não as usam corretamente, e alguns estudantes apresentam concepções errôneas e/ou incompletas tanto sobre as definições matemáticas quanto sobre o papel que estas desempenham no âmbito da matemática. Em seu estudo sobre as definições matemáticas nos cursos superiores de Matemática, os autores utilizamduas categorias para as definições: definições extraídas e definições estipuladas.

De acordo com Edwards e Ward (2008), as definições matemáticas são estipuladas, e se apoiam em Landau (2001) e Robinson (1962) para explicitá-las.Os autores afirmam que as definições estipuladas são uma “construção explícita e autoconsciente da relação de significado entre uma palavra e algum objeto, o ato de designar a um objeto um nome (ou um nome a um objeto)”. (ROBINSON, 1962 apud EDWARDS; WARD, 2008, p. 224).Essas definições conceituais matemáticas formais, de acordo com Tall e Vinner (1981), utilizam-se de linguagem ou símbolos para se referir a conceitos. Uma definição matemática estipulada é uma definição cujos significados em relação ao conceito são designados ou estipulados pela comunidade matemática e comunicado por esses símbolos, ou seja, pela definição formal. Por exemplo, de acordo com a comunidade matemática, uma definição formal para a função exponencial é dada por $f : R \to R_{+}^{*}$, tal que $f(x) = a^{x}$, em quea ϵ R, *a*> 0 e $a \neq 1$. Para cada símbolo dessa definição, é estipulado um significado específico. Por exemplo, pela definição, a base a ϵ R, a > 0 e a ≠ 1. Para definições estipuladas, os significados para o conceito são designados aos símbolos e assim determinam o uso do conceito que é referenciado por sua definição.

Por sua vez, as definições extraídas referem-se a conceitos cujo uso em uma variedade e contextos específicos permite uma extração ou atribuição de significados para esses conceitos, os quais são referenciados por suasdefinições. São “definições que são baseadas em exemplos reais, definições extraídas de um corpo de evidências”. (LANDAU, 2001 apud EDWARDS; WARD, 2008, p. 224, tradução nossa). De acordo com os autores,a maioria das definições da “linguagem cotidiana” para conceitos não científicos são definições extraídas, nas quais os conceitos são atribuídos de significados conforme o seu uso. Por exemplo, uma criança, ao desenvolver significados a respeito do conceito “cachorro” a partir do animal de estimação da família, vai experimentando esse conceito ao empregar a palavra cachorro a outros animais. Com orientação de acerto ou erro, vai ajustando significados, guardando aqueles que aplicam e eliminando aqueles que não aplicam[3]. Usando a palavra para nomear uma variedade de animais, os significados como quatro patas, rabo etc., ou seja, sua imagem conceitual a respeito do que é um cachorro caracteriza para a criança esse animal. Em outras palavras, o uso do termo cachorro em uma variedade de situações contribui à significação desse conceito. Isto é, os significados em relação ao conceito são extraídos do seu uso.

Em termos de definições matemáticas, considere a definição conceitual pessoal de um aluno (conforme transcrição desta pesquisa) para a função exponencial: uma função que “*tem uma base e a variável está no expoente*”. Com base nesse entendimento, o estudante afirma coerentemente que a função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ é uma função exponencial. A definição pessoal do estudante é fundamentada, direta ou indiretamente, na definição formal, entretanto sem entendimento do significado específico estipulado ao expoente x; e assim exemplifica uma função exponencial como uma função que não atende à definição formal. Argumentos baseados em sua imagem conceitual a respeito do que é uma função exponencial surgiram de

---

[3] Esse exemplo da significação do conceito de cachorro é de Dewey (1959), que aponta que conceitos no seu uso se tornam mais definidos.

uma variedade de contextos de uso, com coerência ou não, com especificidade da definição formal. Assim, o estudante, sem compreender o significado estipulado para o expoente *x* para o conceito de função exponencial, está atribuindo significados ao conceito de forma similar ao processo de extrair significados em relação auma definição.

Destacamos que, de acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual consiste na forma simbólica para especificar um conceito, e nesse sentido, fazem distinção entre a definição conceitual formal e pessoal. Para os autores, uma definição formal na matemática é uma construção simbólica aceita pela comunidade matemática, e a definição conceitual pessoal, compreendida como uma construção pessoal da definição formal remete à imagem conceitual, e, por ser pessoal, pode diferir da definição formal.

Compreendemos que a definição conceitual, de acordo com Tall e Vinner (1981), relaciona-se com as duas definições apresentadas por Edwards e Ward (2008), uma vez que entendemos que a definição conceitual pode ser estipulada ou extraída. As definições matemáticas formais possuem significados estipulados para os conceitos que eles referem. Quando os significados de um conceito matemático são evocados de uma definição formal, são específicos ao conceito e seu uso se refere a essa especificidade, compreendemos como definições estipuladas. A definição estipulada transmite um significado elementar, guia uma discussão específica e é utilizada para servir a um propósito. A definição estipulada faz surgir os usos de conceitos, ao passo que a extraída surge dos usos e conceitos.

3.4 O papel da definição em matemática

Sintetizaremos o papel da definição em Matemática tomando como referência principal o trabalho de Vinner (1991). Esse autor considera que existe um problema sério na aprendizagem da Matemática em torno da compreensão de definições, especialmente no que se refere ao conflito entre a estrutura da Matemática e os processos cognitivos de aquisição de conceitos matemáticos. A Matemática é assumida como uma teoria dedutiva que se inicia tanto no contexto da sala de aula quanto nos livros didáticos a partir das noções primárias e axiomas, por meio dos quais são definidas as demais noções. Os teoremas são provados a partir dos axiomas por meio de certas regras de inferência. Essa apresentação dos conceitos matemáticos geralmente não corresponde ao processo de aquisição dos conceitos matemáticos, e em nossa realidade a Matemática não é trabalhada de forma axiomática. Segundo o autor, a estratégia geralmente utilizada nas salas de aula propõe que:

> Os professores de matemática poderiam constituir, em suas aulas, uma sequência de definições, teoremas e provas como um esqueleto para seus cursos. Seguir essas sequências pode ser pedagogicamente errado, já que ensino deve levar em consideração os processos psicológicos comuns de aquisição de conceito e raciocínio lógico. (VINNER, 1991, p. 1).

Vinner (1991) ressalta a forma como os estudantes adquirem os conceitos matemáticos e não apenas as expectativas para a referida aquisição, afirmando que:

> [...] o papel da definição em um dado curso de matemática deveria ser determinado de acordo com as metas educacionais que se pretende que sejam alcançadas pelos estudantes dados. Se os estudantes são candidatos à matemática avançada, então não somente as definições devem ser dadas e discutidas, mas também os estudantes devem ser treinados a usá-las como um critério último nas atividades matemáticas. Essa meta só pode ser alcançada se forem dadas, aos estudantes, tarefas que não podem ser resolvidas corretamente com referência apenas à imagem conceitual. Enquanto a referência à imagem conceitual resultar em uma solução correta, o estudante permanecerá se referindo à imagem conceitual, já que esta estratégia é simples e natural. Somente um fracasso pode convencer o estudante que ele ou ela tem que usar a definição conceitual como critério último para o comportamento. (VINNER, 1991, p. 21).

Apresentamos uma síntese das possíveis consequências que podem decorrer da consideração do papel da definição em matemática, de acordo com Vinner (1991).

> 1. *Conceitos são adquiridos, principalmente, por meio de suas definições.*
> 2. *Estudantes usarão definições* para resolver problemas e para provar teoremas quando necessário a partir do ponto de vista matemático.
> 3. *Definições devem ser mínimas*. [...]
> 4. *É desejável que definições sejam elegantes*. [...].
> 5. *Definições são arbitrárias*. Definições são feitas pelo homem. Definir em matemática é dar um nome. (Por exemplo, ao se definir um trapézio, pode-se defini-lo como um quadrilátero contendo *pelo menos* um par de lados opostos que são paralelos. Por outro lado, pode-se defini-lo, se quiser, como um quadrilátero contendo *exatamente* um par de lados opostos paralelos. Se você escolher a primeira definição, um paralelogramo é também um trapézio. Se você escolher a segunda, ele não é. Agora, se a ideia de que definições são arbitrárias é bem entendida, o fato acima não causará confusão, caso contrário, poderá causar uma enorme negociação). (VINNER, 1991, p. 2-3,grifos do autor).

De forma geral, as noções de imagem conceitual e definição conceitual de Tall e Vinner (1981) e definições estipuladas e extraídas de acordo com Edwards e Ward (2008) tornam-se importantes ferramentas no estudo do papel das definições em matemática.

3.5 Interacionismo simbólico

Um dos principais elementos no ensino e aprendizagem na sala de aula é a interação entre professores e alunos e entre alunos e alunos, pois influenciaa aprendizagem e interfere na dinâmica das relações. De acordo com Godino e Llinares (2000), uma parte substancial da pesquisa em Educação Matemática é dedicada a estudar as relações entre professores e alunos durante as aulas na realização de tarefas matemáticas. Nesta seção, apresentamos um resumo das principais características do interacionismo simbólico e seu posicionamento em relação à aprendizagem, à noção de significado, ao papel do sujeito como um ser social e à interpretação dos significados. Em nosso estudo, o interacionismo simbólico servirá como base teórica para estudar e analisar a forma como percebemos o uso de definições matemáticas pelos alunos num contexto de discussão em sala de aula e na apresentação de trabalhos em grupos. No contexto daanálise, nosso foco estará nas relações entre professores e alunos, e entre alunos e alunos, fundamentado nas noções de imagem conceitual e definição conceitual de Tall e Vinner (1981), Vinner (1991) e definições estipuladas e extraídas de acordo com Edwards e Ward (2008).As premissas do interacionismo simbólico servirão como suporte para a discussão e análise dos dados.

No contexto histórico,Haguette (1997, p. 25) afirma que, embora o termo interacionismo simbólico tenha sido cunhado por Herbert Blumer em 1937, a escola de interação simbólica teve sua origem no final do século XIX, com clássicos da sociologia, como Charles Horton Cooley (1864-1929), W. I. Thomas (1863-1947) e George Herbert Mead (1863-1931). Mead, filósofo, psicólogo e cientista social, professor de filosofia da Universidade de Chicago entre 1894 e 1931, entende a sociedade como um sistema de comunicações interindividuais significantes. No seu livro *Mind, Self and Society* (1934), desenvolve a ideia de que a sociedade não é algo dado, antes é construído permanentemente na dinâmica dos atores sociais, isto é, nas suas interações. De acordo comHaguette (1997, p. 25), coube a Blumer sistematizar os pressupostos básicos da abordagem interacionista através de seus escritos iniciados em 1937, em que ele apresenta e discute os mais importantes aspectos da interação simbólica, procurando ser fiel ao pensamento de Mead.

Segundo Blumer (1980, p. 119), o interacionismo simbólico baseia-se em três premissas:

> A primeira estabelece que os seres humanos agem em relação ao mundo fundamentando-se nos significados que este lhes oferece. [...] A segunda premissa consiste no fato de os significados de tais elementos serem

> provenientes da ou provocados pela interação social que se mantém com as demais pessoas. A terceira premissa reza que tais significados são manipulados por um processo interpretativo (e por este modificados) utilizado pela pessoa ao se relacionar com os elementos com que entra em contato.

As premissas apresentadas por Blumer mostram que a maneira como as pessoas interpretam os fatos e agem perante outros indivíduos ou coisas depende dos significados que atribuem às coisas, ou seja, em vez de somente reagir às ações um do outro, as pessoas interagem umas com as outras por meio de interpretação mútua das ações. De forma interativa, as pessoas interpretam o mundo que as cerca, e essa interação social é contínua e mediada pelo uso de símbolos e significados. Para Blumer (1980, p. 121), “o significado é produzido a partir do processo de interação humana”, ou seja, é resultado dos processos de interação, que são provenientes ou provocados pela interação social e podem sofrer mudanças ao longo do tempo, pois, mediante um processo interpretativo desenvolvido pelo indivíduo ao se relacionar com os objetos que o cercam, podem ser manipulados e modificados. Assim, Blumer (1980, p. 121) afirma que “o interacionismo simbólico considera os significados produtos sociais, criações elaboradas em e através das atividades humanas determinantes em seu processo interativo”.

As perspectivas interacionistas concentram-se nos processos de interação social que ocorrem entre as pessoas, mediados por relações simbólicas, ou seja, enfatizam os processos individuais e os sociais, e o desenvolvimento da compreensão pessoal dos indivíduos é concebido por meio de sua participação. De acordo com Godino e Llinares (2000, p.3), “o aspecto central da perspectiva interacionista em relação ao significado, é que esse é desenvolvido através da interpretação e interação”, e enfatiza que “os princípios interacionistas podem ser classificados em: professores e estudantes constituem uma cultura interativa na sala de aula, as convenções relativas a cada disciplina emergem interativamente, e o processo de comunicação se apoia nas negociações e nos significados compartilhados”.

Para Blumer (1980), os objetos passam a ter significado para a pessoa quando há uma interpretação consciente desse objeto, quando reflete e pensa sobre ele, quando passa por um processo de autointeração, quando seleciona, confere, reagrupa, suspende e transforma os significados à luz da situação em que os objetos estão inseridos. O autor afirma:

> O agente seleciona, modera, susta, reagrupa e transforma os significados sob o ponto de vista da situação em que se encontra e da direção de seus atos. Por conseguinte, a interpretação não deveria ser considerada como uma mera aplicação automática de significados existentes, mas sim como um processo formativo em que os significados são utilizados e trabalhados para orientar e

> formar as ações. Deve-se levar sempre em consideração que os significados desempenham seu papel na ação por intermédio de um processo de autointeração. (BLUMER 1980, p. 122).

De acordo com o autor, o interacionismo simbólico considera que o significado é produzido a partir do processo de interação humana, como produto social, e que o "uso de significados por alguém em plena ação envolve um processo interpretativo".Para Haguette (1997, p. 32), "a mente é concebida por Mead como um processo que se manifesta sempre que o indivíduo interage consigo próprio usando símbolos significantes".

O interacionismo simbólico fundamenta-se em uma série de conceitos básicos ou "imagens-raiz", como Blumer (1980, p. 123) prefere denominar, e servede base à compreensão das ideias meadianas. São eles: grupos ou sociedades humanas, interação social, o homem como agente, os objetos e seus significados, a atividade humana e conjugação das linhas de ação. Tais imagens-raiz, tomadas em conjunto, são importantes para saber a maneira como o interacionismo simbólico considera a sociedade e o comportamento humano. Nesta pesquisa, percebemos a importância das interações ocorridas entre estudantes e professores, portanto descreveremos sucintamente cada uma dessas "imagens-raiz", pois servirão de base para nossa interpretação dos dados. Em relação à natureza da sociedade humana, Blumer (1980, p. 123) afirma:

> Os grupos humanos são constituídos por seres humanos em ação. O agir compreende a infinidade de atividades que os indivíduos desempenham no decurso de toda a sua existência ao entrarem em contato uns com os outros e ao lidarem com as sucessivas situações que enfrentam. Os indivíduos podem agir isolada ou coletivamente, além de poderem tomar atitudes em nome – ou como representantes – de alguma organização ou grupo de pessoas.

Para o autor, a importância dessa definição se fundamenta no fato de os grupos ou sociedades humanas "existirem em ação", ou seja, os grupos ou sociedades são constituídos por pessoas empenhadas em agir, que passam por todo o percurso de sua vida realizando uma infinidade de atividades, e isso acontece por meio da interação social.Nosso estudo levou em consideração as ações de um grupo de pessoas, no caso estudantes na sala de aula, empenhados em agir, onde a interação se fez necessária durante as discussões ocorridas para o encadeamento de ideias fundamentadas nas definições matemáticas de funções e suas derivadas.

Sobre a interação social, Blumer (1980, p. 124) nos diz que "uma sociedade é constituída de indivíduos que interagem uns com os outros. Suas atividades ocorrem predominantemente umas em reação às outras". As pessoas comunicam-se e interpretam um ao outro, ou seja, podem ser vistas como atores que desempenham o papel de redefinir mutuamente suas próprias atitudes e as atitudes do outro. Afirma também que “a interação social equivale a um processo interativo entre agentes, e não entre fatores a eles atribuídos”. Fundamentados nessa perspectiva, de que as pessoas são vistas como atores que se relacionam, comunicam-se e interpretam um ao outro, percebemos a importância das interações ocorridas entre estudantes e professores em sala de aula para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, pois, quando interagimos, tornamo-nos objetos sociais uns para com os outros, engajamo-nos em ação mental, tomamos decisões, mudamos direções, compartilhamos perspectivas, definimos a realidade e assumimos o papel do outro.

O ser humano é conceituado por Blumer (1980, p. 129)“como um organismo que não apenas reage a outrem no nível não simbólico como também lhes fornece indícios e interpreta suas indicações”. O autor, fundamentado nas ideias de Mead, afirma que esse procurou enfatizar com veemência o fato de o homem possuir um “eu”, isto é, o homem possui uma estrutura que se adapta à natureza social, pois pode ser objeto de sua própria ação,ou seja, objeto de si próprio. Assim, da mesma forma que o indivíduo age socialmente com relação a outras pessoas, ele interage socialmente consigo mesmo e age em relação a si próprio. Blumer (1980, p. 130) afirma que o fato de o ser humano possuir um eu o capacita a interagir consigo próprio, e que “essa interação é social – uma forma de comunicação, com o indivíduo dirigindo-se a si mesmo como a um indivíduo e a isto reagindo”.

Para o autor, o indivíduo empenhado na autointeração não é um mero respondente, mas sim um organismo agente que necessita elaborar uma linha de ação de acordo com os elementos que verifica. Blumer (1980) considera que, devido ao homem se empenhar na autointeração, ele precisa lidar com o que observa, portanto, quando entra em contato com o que verifica, atribui-lhe um significado e utiliza-o como fundamento que norteará suas ações. Neste trabalho, consideramos importante essa autointeração, visto que o desenvolvimento do pensamento matemático depende de reflexões internas e pessoais.

No interacionismo simbólico, Blumer (1980, p. 127) afirma que “objeto é qualquer coisa passível de ser indicada ou referida”, e que sua natureza compreende o significado que esse objeto possui para a pessoa, pois pode possuir diversos significados para diferentes pessoas. Para Blumer, esse significado determina a maneira pela qual a pessoa vê o objeto, a maneira pela qual se prepara para agir em relação a ele e pela qual se prepara para comentar. Os símbolos são objetos sociais usados pelas pessoas pararepresentação e comunicação e representam o ponto central do interacionismo simbólico, pois sem ele os seres humanos não podem interagir uns com os outros. O significado dos objetos para cada pessoa é gerado a partir da maneira pela qual lhe é definido pelas pessoas com quem interage, ou seja, o significado é produzido a partir do processo de interação humana. Para um indivíduo, o significado de um elemento nasce da maneira como outras pessoas agem em relação a si no tocante ao elemento. Todas as suas ações preocupam-se em defini-lo para o indivíduo. Dessa forma, o interacionismo simbólico considera os significados produtos sociais, criações elaboradas em e através das atividades humanas determinantes em seu processo interativo.

Toda atividade realizada em grupo se baseia no comportamento cooperativo que envolve uma resposta às intenções dos outros, e essas intenções são transmitidas através de gestos que se tornam simbólicos, passíveis de serem interpretados. De acordo com Blumer(1980, p.131),

> a capacidade do homem de proceder a indicações a si mesmo empresta um caráter distintivo à ação humana. Isto significa que o homem defronta-se com um mundo que deve interpretar a fim de poder agir, ao invés de estar em contato com um ambiente ao qual reage devido à sua organização.

O ser humano deve ser capaz de enfrentar situações em que é chamado a agir, e, para isso, deve elaborar uma linha de ação, sendo que, quando essa ação é conjunta, não perde a característica de ser elaborada através de um processo interpretativo e interativo. Para o autor:

> Tal processo interativo consiste na confecção de indícios destinados ao outro, sobre como proceder e na interpretação das indicações feitas por este. [...] os objetos de si mesmos são formados, sustados, enfraquecidos e transformados no processo interativo mútuo. (BLUMER, 1980, p. 137).

Levamos em conta nesta pesquisa os diversos significados formados e transformados por meio das interações dos participantes, significados baseados nas definições estipuladas e extraídas e nas imagens conceituais de funções e suas derivadas.

A partir do sucinto esboço dessas “imagens-raiz”, juntamente com os conceitos abordados por Tall e Vinner em relação ao pensamento matemático, estabelecemos, a seguir, algumas relaçõesque irão possibilitar analisar os dados colhidos nesta dissertação.

3.6 Interacionismo simbólico e pensamento matemático avançado

O interacionismo simbólico tem um olhar sobre a aprendizagem em uma perspectiva diferente da forma basicamente cognitivista em que se baseiam os estudos de Tall e Vinner(1981). Para o interacionismo simbólico, de acordo com Blumer (1980), o sujeito é um ser social, e a aprendizagem ocorre por meio de interações entre duas ou mais pessoas, a partir dos significados interpretados. Baseados nas três premissas do interacionismo simbólico de Blumer, podemos inferir que a ação dos indivíduos deriva dos significados que surgem das interações sociais, e que podem ser modificados devido às interpretações. Para o pensamento matemático avançado, os estudos de Tall e Vinner (1981), Vinner (1991) e Tall (1992) mostram uma relação do sujeito com o objeto a ser aprendido. O interacionismo simbólico, por sua vez, não mostra uma relação direta do sujeito com o objeto, e sim uma relação do sujeito e o objeto mediado pela sociedade. Entretanto, o interacionismo simbólico reconhece a importância da interação da pessoa e o objeto;nesse sentido, Blumer (1980) define o ser humano como um organismo agente no processo de autointeração. Assim, mesmo que as duas teorias focam em aspectos diferentes em relação à aprendizagem em termos do individual e o social, entendemos que são teorias compatíveis como análise dos dados da pesquisa.

Os dados da nossa pesquisa mostraram o pensamento dos estudantes sendo desenvolvido nas interações. A interação é um processo social, e, apesar de que os alunos individualmente vão ter diversas imagens conceituais, essas são produzidas socialmente. As discussões ocorridas, as argumentações dos colegas e professores, a compreensão das definições não ocorreram estreitamente em interação indivíduo e objeto; pelo contrário, vão aparecendo de diversas formas num encadeamento de ideias compartilhadas na sala de aula, e não em reflexões do sujeito isoladamente com o objeto, por isso focamos nossas atenções nas interações.

Enquanto compreensão individual de um conceito, adotamos a concepção de imagem conceitual de Tall e Vinner (1981, p. 2). Para esses autores, o termo imagem conceitual está utilizado para descrever "a estrutura cognitiva total que se associa com o conceito, que inclui todos os retratos e propriedades associadas e processos". Isto é, todos os atributos mentais associados com um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem conceitual. Além disso, os autores afirmam que a imagem conceitual nem sempre deve ser coerente e que estímulos diferentes podem provocar partes diferentes da imagem.

Para Blumer, o objeto, como o conceito matemático em nosso caso,pode ter diferentes significados para diferentes pessoas, e que o indivíduo forma, mantém e transforma os objetos de seu universo, à medida que lhes concede significado. Entendemos que, na nomenclatura de Tall e Vinner (1981), isso se refere às imagens conceituais diferentes para pessoas diferentes.Em relação à ação sobre objetosmatemáticos,na medida em que o pensamento se desenvolve tornando-se mais complexo, as ações sobre esses conduzem ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas. Esse pensamentoremete à imagem-raiz do interacionismo, que entende “o ser humano como um organismo agente”. Para Blumer (1980), o indivíduo empenhado na autointeração não é um mero respondente, mas sim um organismo agente que necessita elaborar uma linha de ação de acordo com os elementos que verifica. Blumer (1980) considera que, na autointeração, o homem precisa lidar com o que observa, portanto, em contato com o que verifica, atribui-lhe um significado e utiliza-o como fundamento norteador de suas ações. Essa incorporação da concepção do indivíduo como agente no interacionismo simbólico possibilita que as formulações teóricas da perspectiva cognitivista sejam compatíveis com a teoria do interacionismo simbólico.

A interação simbólica em ambientes de interação social fornece uma maneira para compreender a influência dessas interações no desenvolvimento das imagens conceituais de pessoas em interação. Os significados que os estudantes manifestam nas interações ocorridas em sala de aula em relação às definições de funções e suas derivadas motivou a adoção do interacionismo simbólico para a análise. Tanto o interacionismo simbólico como os conceitos do pensamento matemático avançado estão relacionados com o processo interpretativo em que as pessoas, tanto de forma isolada quanto coletiva, conduzem a si mesmas pela definição de umobjeto, processo que revela e aponta o significado que as coisas têm para os estudantes quando interagem uns com os outros.

A seguir, no capítulo4, apresentamos os objetivos traçados para a elaboração das oito atividadesrelacionados ao estudo de funções e suas derivadas, aplicadas nesta pesquisa, e o desenvolvimento de cada uma delas.

4 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES COMPLEMENTARES ÀS ATIVIDADES DA SALA DE AULA

Neste capítulo,descrevemos as atividades que foram elaboradas com o intuito de explorar a construção de conceitos de funções e suas derivadas, e promover a interação e o diálogo entre alunos, objetivando uma complementação à aula do professor.

Ressaltamos que cada atividade está vinculada às aulas ministradas pelo professor em sala de aula, relacionadas ao estudo de funções e suas derivadas (ver Apêndices A-H). Algumas ocorreram em sala de aula e outras no laboratório de Informática, com a utilização do s*oftwareGeoGebra*.

A realização das atividades foi imprescindível para o desenvolvimento do seminário, visto que, por meio delas, importantes conceitos foram abordados, bem como o manuseio das ferramentas do *software*. Apesar dos dados colhidos nas atividades não fazerem parte da análise desta pesquisa, apresentamos a descrição das atividades neste capítulo, pois essas descrições, juntamente com os diálogos aqui transcritos, apresentam importantes informações que esclarecem os dados da análise.

4.1 Atividade 1: Taxa de variação

Optamos por explorar os recursos do *GeoGebra* sem orientação passo a passo, pois entendemos que alunos que cursam Sistemas de Informação têm propensão para explorar os recursos da tecnologia.

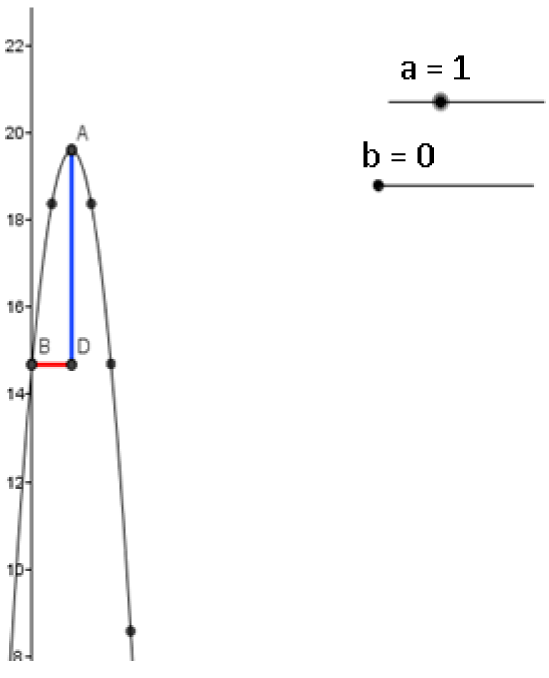
A primeira atividade teve como objetivo estabelecer relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função onde $x = a$. Para isso, foi proposta a seguinte situação-problema:

Um mergulhador salta de um trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura h em metros, o tempo t em segundos e sua velocidade inicial de 9,8 metros por segundo, sua função posição é

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$$

Na aula anterior, o professor regente corrigiu exercícios referentes aos conceitos de limites laterais e continuidade e abordou aspectos de derivada relacionados à taxa de variação, inclusive com exemplos sobre velocidade média. Mesmo assim, os alunos apresentaram dificuldades em responder aos itens da atividade, e ficaram mais preocupados em aprender a manipular as ferramentas do *software* do que interpretar as informações no gráfico construído em relação aos conceitos apresentados em aula, pois a atividade estava muito carregada em relação à aprendizagem de e manipulação de recursos e ferramentas do *software*. O controle deslizante **a**daFigura 8, configurado no intervalo [0,3] e incremento 0,5, altera dinamicamente os valores da abscissa do ponto A, que representa no gráfico a altura do mergulhador em função do tempo. Analogamente, o controle deslizante **b**, configurado no intervalo [0; 0,999] e incremento 0,001, altera dinamicamente os valores da abscissa do ponto B, determinando as variações do tempo *(t)* e da altura *h(t)* do mergulhador, gerando condições de associação entre os conceitos de taxa de variação, velocidade instantânea e de derivada da função em um ponto específico.

Figura 8 – Gráfico da função $h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$,construído de acordo com as instruções da atividade 1.



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

De acordo com o diálogo transcrito abaixo, percebemos que os alunos responderam aos questionamentos sobre velocidade média recorrendo aos conceitos de Física abordados na aula de Cálculo. Sobre o item da atividade(Ver Apêndice A) “1.7. Qual a velocidade média do mergulhador entre 1 e 3 segundos?”, temos a seguinte discussão:

Pedro:	*José, o que você fez para calcular a velocidade média do mergulhador entre 1 e 3 segundos?*
José:	*Eu achei 9,8. Eu peguei a variação do espaço sobre a variação do tempo.*
Pedro:	*Deslocamento sobre tempo?*
José:	*É. No instante 1, o deslocamento dele era 19,6 m, e esse deslocamento ele faz em dois segundos.*
Carlos:	*Então, é 19,6 sobre 2? Está certo Professora?*
Pesquisadora:	*Como você encontra velocidade média?*
José:	*Eu vou dividir a distância pelo tempo.*

O que nos chamou a atenção foi uma discussão que ocorreu em relação ao sinal negativo do número, que representava a velocidade instantânea, no seguinte questionamento: “Qual a velocidade instantânea do mergulhador no momento em que ele atinge a água?”.

José:	*Eu estou achando -19,6 metros. [-19,6 metros por segundo].*
Pedro:	*Ô José, pensa comigo aqui. Essa velocidade tem que ser positiva, pois quando o mergulhador está subindo, ela é negativa. Lá em cima é zero, e depois é positiva por causa da força da gravidade.*
José:	*Eu entendi seu raciocínio, mas eu acho que tem que ser negativo. Acho que quando sobe é positivo, e aí inverte o sentido da trajetória, pois primeiro ele sobe e depois desce.*
Pedro:	*E quem disse que quando sobe é positivo?*
José:	*Olha aqui no* GeoGebra, *gente. Quando está no ponto máximo da curva é zero, e depois desce negativo.*
Pedro:	*Eu entendi, só não consigo compreender uma velocidade negativa.*
José:	*Olha os cálculos que fiz aqui no papel, deu negativo.*
Guto:	*Acho que os dois estão certos. O mais ou o menos é para mostrar o sentido da trajetória.*

Observamos que os alunos tinham conhecimento de física, a respeito de movimento retrógrado (sentido contrário da trajetória) e movimento progressivo (mesmo sentido da trajetória), pois, na discussão, utilizaram esses conceitos e perceberam que a velocidade pode assumir tanto valores positivos quanto negativos.

Percebemos que o aluno Marcelo já havia feito a disciplina Cálculo, devidoà noção que apresentavaem relação ao conceito de limites e derivada no seguinte diálogo:

Marcelo:	*Ô professora, tem duas perguntas iguais aqui.*
Pesquisadora:	*Quais?*
Marcelo:	*A questão 1.8 e a questão 1.18*

A questão 1.8 (Ver Apêndice A) é: “Qual a velocidade instantânea do mergulhador no momento em que ele atinge a água?”.

E a questão 1.18 (Ver Apêndice A) é: “Qual a derivada de h(t) no instante em que o mergulhador atinge a água? Explique”.

> Pesquisadora: *Por que é a mesma pergunta?*
> Marcelo: *Porque velocidade instantânea fala de limite naquele ponto específico, e isso é derivada. Posso resolver por limite?*

Em alguns computadores, a versão instalada do *GeoGebra* não calculava limites, e, nesses casos, os alunos recorreram ao lápis e papel para calculá-lo. Os que estavam *on-line* na versão mais atualizada fizeram todos os cálculos utilizando o *software*.

A pergunta era a mesma, e foi proposital. Queríamos que os alunos estabelecessem essa relação, ou seja, que percebessem que a derivada representa a taxa de variação instantânea de uma função.Esse é um dos exemplos que mostra a função velocidade representando a taxa de variação (derivada) da função. Houve comentários também a respeito da função aceleração como a derivada da função velocidade.

Fizemos a correção dessa atividade antes de realizar a segunda, e esclarecemos, aqui, que a animação do controle deslizante não conduziu para a taxa de variação, como pretendíamos. Queríamos enfocar taxa de variação e, devido a muitos questionamentos, resolvemos retomar os mesmos objetivos na segunda atividade, ou seja, que os alunos estabelecessem relações entre taxa de variação e o conceito de derivada de uma função em um ponto da função onde $x=a$, no gráfico.

4.2 Atividade 2: Derivada de uma função em um ponto

Com mais habilidades no *software*, os alunos direcionaram seus questionamentos para os conceitos que queríamos que compreendessem sobre aaplicação de derivada na resolução de problemas envolvendo taxa de variação. O professor regente da turma ministrou em sala de aula, antes da realização dessa segunda atividade, duas aulas sobre derivada. Os alunos resolveram exercícios do tipo: “Encontre a reta tangente à curva$y = x^3$nos pontos onde $x = 0$ e $x = -1$, e calcule a inclinação (coeficiente angular $\boldsymbol{m}$) da reta tangente à curva traçada nestes pontos”.

O conceito de derivada já havia sido formalizado pelo professor em aula, sua definição como limite já havia sido explorada, e os alunos sabiam calcular derivada de funções por meio de algumas fórmulas, ou seja, usavam regras de derivação tipo: $\frac{d}{dx}\left(x^{n}\right)=nx^{n-1}$, $(Cf)^{'}=Cf'$, $(fg)^{'}=fg'+f'g$, $(f+g)'=f'+g'$, $\left(\frac{f}{g}\right)^{'}=\frac{gf'-fg'}{g^{2}}$, $(f-g)'=f'-g'$, $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$.

O professor seguiu a abordagem do livro-texto, mostrando que "o problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite."(STEWART, 2010, p.130). As seguintes definições de acordo com o mesmo autor também foram exploradas:

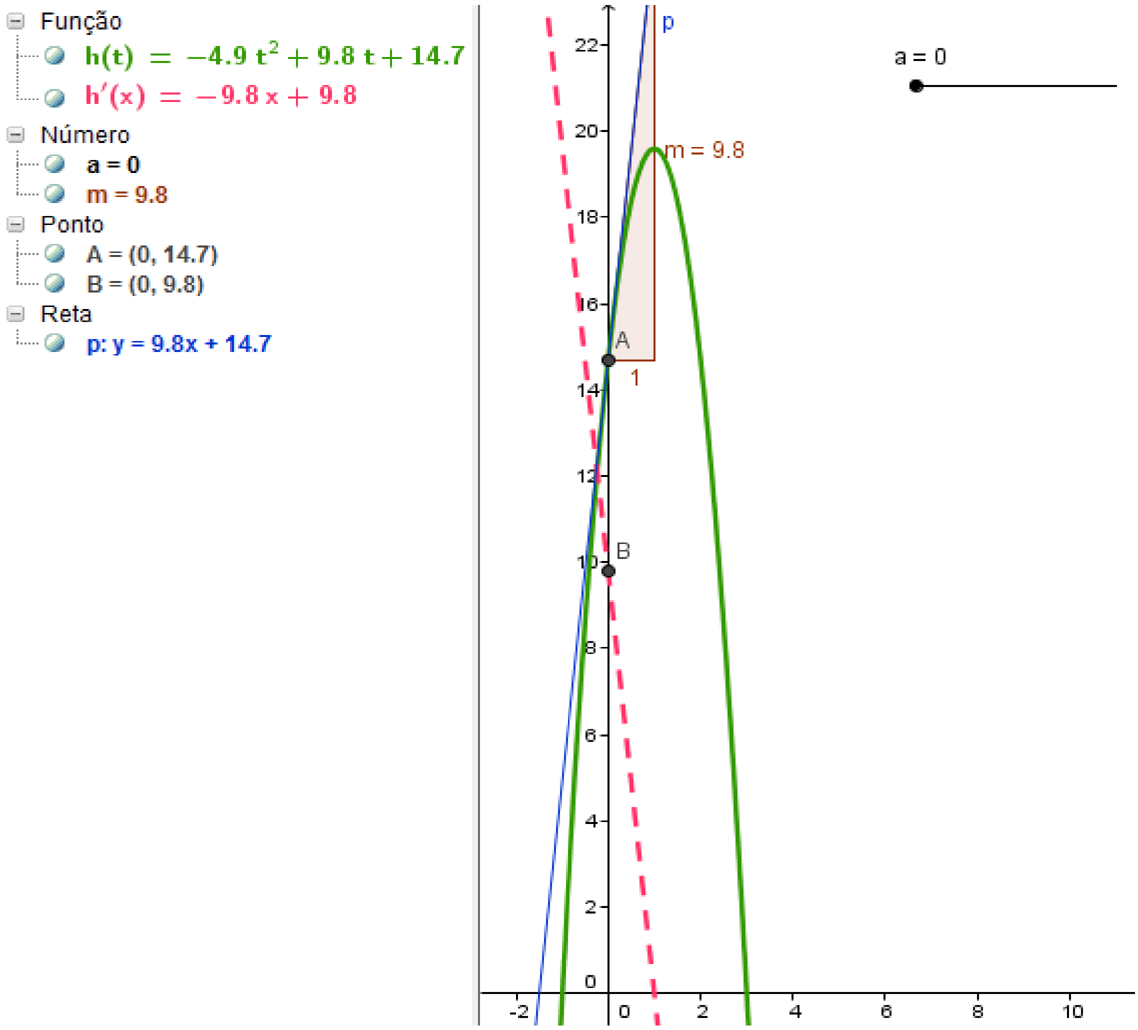
DEFINIÇÃO: A **reta tangente** a uma curva *y = f(x)* em um ponto ***P****(a, f(a))* é a reta por ***P***,que tem a inclinação $m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, desde que esse limite exista.

DEFINIÇÃO: A **derivada de uma função *f* em um número *a***, denotada por *f'(a)*,é

$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se o limite existir.

Observamos que, devido a esses aspectos e à correção da atividade anterior, a realização da segunda atividadefoi rápida, porémeficiente e com articulação entre a visualização e manipulação algébrica. Os alunos recorriam à animação eaos dados da Tabela 1 para responder aos questionamentos da atividade.O controle deslizante *a* corresponde ao ponto *A (a, h(a))*

Figura 9 – Gráfico da função $h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$ construído na atividade 2.



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

Os alunos utilizaram os dados do gráfico da figura 9 para completar a tabela 1 nos instantes especificados.

Tabela 1 – Relação entre os pontos de uma função e os pontos de sua derivada

Instante	Ponto A=(a,h(a)) que representa a interseção entre a reta tangente (p)e a função h(t)	Equação da reta tangente (p) à função h(t)	Valor (m) do coeficiente angular da reta tangente (p)	Ponto B=(a,m) da função h'(t)
0	(0, 14.7)	Y=9.8x+14.7	9.8	(0, 9.8)
0.5	(0.5, 18.38)	Y=4.9x + 15.93	4.9	(0.5, 4.9)
1	(1, 19.6)	Y=19.6	0	(1,0)
1.5	(1.5, 18.38)	Y=-4.9x + 25.73	-4.9	(1.5, -4.9)
2	(2, 14.7)	Y=-9.8+34.3	-9.8	(2, 9.8)
2.5	(2.5, 8.58)	Y=-14.7 + 45.33	-14.7	(2.5, -14.7)
3	(3, 0)	Y=-19.6 + 58.8	-19.6	(3, -19.6)

Fonte: A pesquisadora.

A conversa começa em torno do item 1.10 (Ver Apêndice B). "No contexto do problema, o que o coeficiente angular **m** representa?"

Carlos:	*Ô José, o que você colocou na 1.10?*
José:	*Olha na tabela, moço? É o mesmo coeficiente que está na equação da reta tangente.*
Carlos:	*Você está olhando na tabela? Eu estou olhando no gráfico*. [O aluno olhava o valor do coeficiente angular m registrado no gráfico, aparentemente sem nenhuma análise].
José:	*Mas é a mesma coisa. Eu achei mais fácil olhar na tabela.*
Carlos:	*É mais fácil mesmo, mas eu queria entender isso aqui no gráfico. Ô Professora, eu estou vendo que o x do ponto A é o mesmo x do* [ponto]*B, e que m é o valor perto de x na equação da reta tangente, mas eu queria saber o que ele significa na reta.* [perto de x significa coeficiente numérico de x da reta f(x) = mx+b]
Pesquisadora:	*Coloca sua reta tangente paralela ao eixo x, com m=0. O que você observa olhando a reta no gráfico e na tabela?*
Carlos:	*No gráfico eu vejo que a reta não toca o eixo x, ela não está inclinada. Esse m é a inclinação? Derivada tem a ver o que com reta tangente?*
José:	*Na tabela a gente vê que esse m é o coeficiente angular da reta tangente. Essa reta é a derivada da função naquele ponto lá.*

O aluno José compreendia o conceito de derivada, mas chamava a reta tangente de derivada da função no ponto. Queríamos nessa atividade que os alunos percebessem que a reta tangente à função em um ponto dado é a reta cuja inclinação é igual à derivada da função. Solicitamos aos alunos que construíssem o gráfico da Figura 9, e, através dele, percebemos que há um controle deslizante que, quando animado, mostra a reta tangenciando a curva, deixando como rastro pontos no esboço da função derivada.

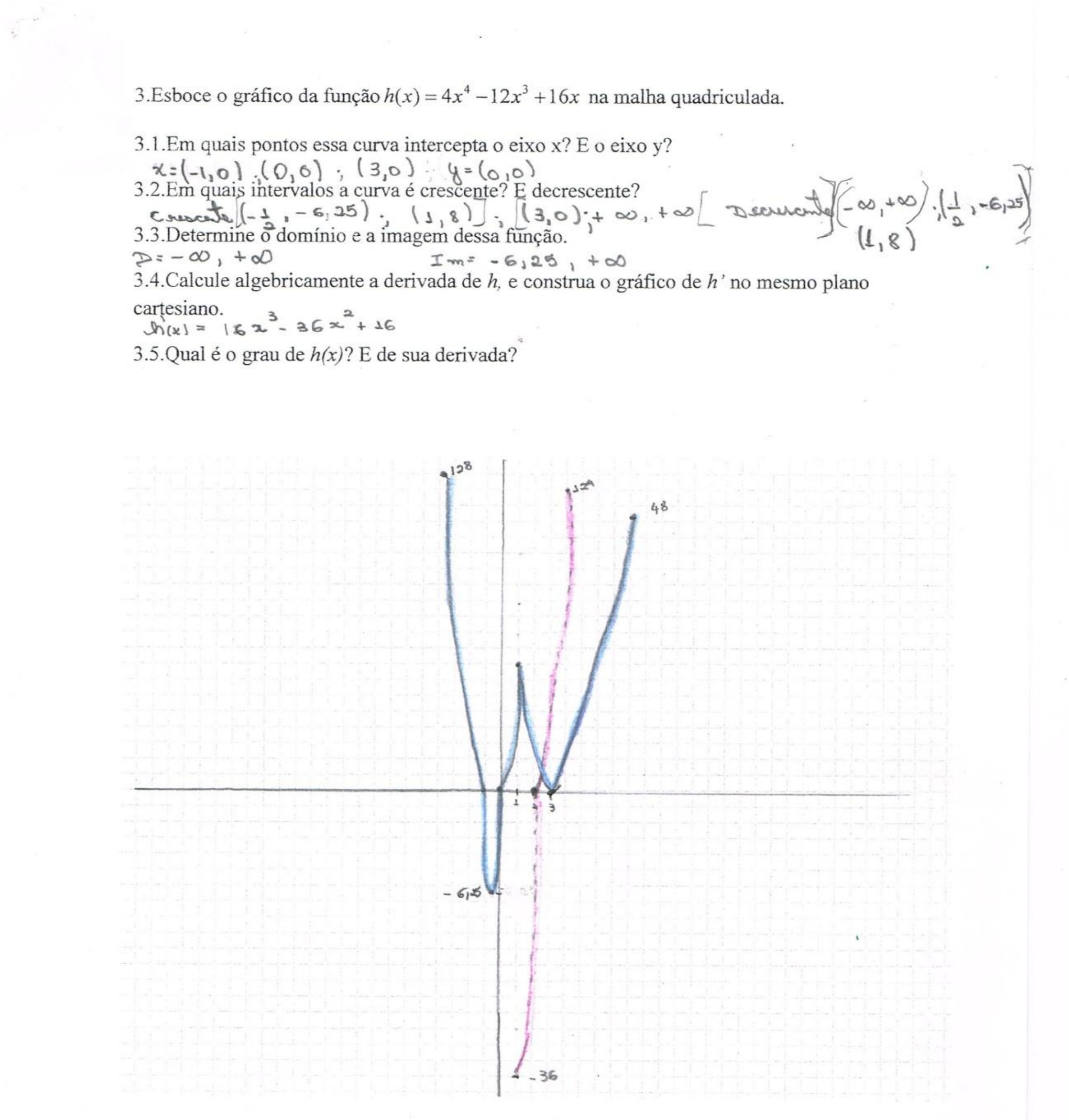
A maioria dos alunos não apresentoudificuldades em construir o gráfico da função, criar o controle deslizante e habilitar rastro, ou seja, já manipulavam com eficiência os recursos do *software*. Preencheram a tabela corretamentee fizeram observações pertinentes entre a tabela e o gráfico plotado no *GeoGebra*, mas não compreenderam ainda o conceito geométrico da derivada. Queríamos que os alunos estabelecessem relações entre taxa de variação e coeficientes angulares de retas tangentes a curvas, atribuindo, assim, significado ao conceito de derivada, pois a utilização de uma ferramenta computacional viabiliza a visualização gráfica e possível atribuição de significado ao conteúdo que está sendo desenvolvido. Mas, naquele momento, percebemos que a utilização do *software* sem conhecimento matemático adequado poderiatrazer conclusões equivocadas, por isso resolvemos planejar a atividade 3, cujo objetivo consistia em estabelecer conexões entre a função e sua derivada. Foi realizada na sala de aula com a utilização de lápis e papel quadriculado para traçar uma reta tangente a um gráfico num dado ponto.

4.3 Atividade 3: Construção e interpretação de gráfico de função polinomial e de suaderivada

Essa atividade foi elaborada com o objetivo de explorar a construção do esboço de gráficos de funções polinomiais de segundo, terceiro e quarto grau, analisar domínio e imagem, determinar intervalos em que a curva era crescente ou decrescente e realizar cálculo algébrico da derivada da função. No primeiro momento, a construção dos gráficos foi feita na malha quadriculada, em sala de aula, e sem auxílio de ferramentas tecnológicas, e, no segundo momento, a mesma atividade foi realizada com o auxílio do *software* no laboratório de informática. As folhas de resolução foram recolhidas pela pesquisadora e entreguesaos alunos na aula seguinte para que comparassem suas construções gráficas realizadas no papel quadriculado às construções feitas no *GeoGebra*. Dessa forma, esclarecemos que a mesma atividade foi feita de duas maneiras, primeiramente sem o uso de tecnologias digitais, e depois com o uso do *GeoGebra*.Os alunos não apresentaram dificuldades para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = x^3$ na malha quadriculada, e a maioria deles recorreu à estratégia de atribuir valores à variável x, organizando em uma tabela os valores de x e de y. Calcularam a derivada das funções de forma algébrica com relativa facilidade e construíram o gráfico da derivada. Determinaram o domínio e a imagem das funções, bem como os pontos de intersecção com o eixo x e com o eixo y. Na função quadrática, alguns alunos resolveram a equação $x^2 - 9 = 0$ para encontrar as raízes da equação com a finalidade de visualizar os zeros da função.

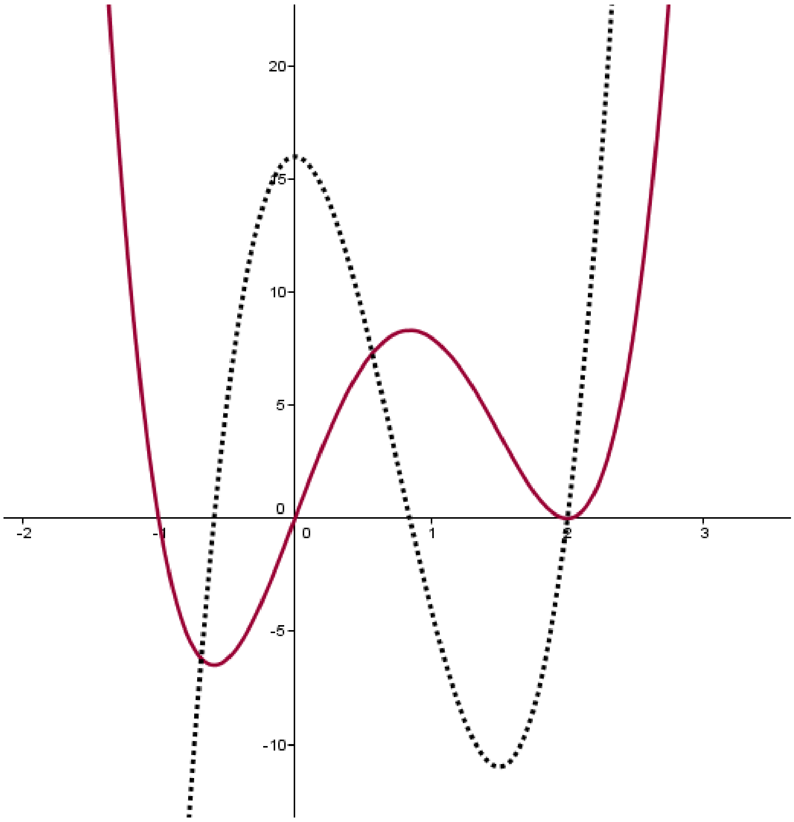
As dúvidas vieram quando tentaram construir o gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$,pois recorreram ao mesmo processo anterior, ou seja, atribuindo valores à variável x. As funções foram elaboradas pela própria pesquisadora, e cada uma delas apresentava um diferente nível de complexidade para sua construção. Nosso intuito erade que os alunos percebessem que, para construir a função *h(x)*, seria viável uma estratégia diferente da utilizada para construir *f(x)* e *g(x)*, ou seja, objetivava-se explorar com os alunos outras formas para a construção de gráficos de funções na malha quadriculada. Apenas um aluno, Marcelo, conseguiu realizar o esboço do gráfico de h(x), portanto, nessa função, a maioria não respondeu, nessa aula, aos questionamentos referentes ao domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento. Apresentamos, para efeito de comparação, na Figura 10, o gráfico da função *h(x)*e sua derivada na folha quadriculada, feito pelo aluno Marcelo e, na Figura 11, a construção da mesma função e sua derivada feito pela pesquisadora no *GeoGebra*. Podemos observar alguns erros cometidos pelo aluno comparando a figura 10 com a figura 11.

Figura 10 –Gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$ e *h'(x)*na malha quadriculada



Fonte: Gráfico construído pelo aluno Marcelo.

Figura11– Gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$ e *h'(x)* pontilhada



Fonte:A pesquisadora.

Os estudantes apresentaram dificuldades para esboçar o gráfico dessa função e ficaram curiosos quanto à sua construção. Houve uma discussão acerca das relações de uma função e sua derivada e alguns alunos estabeleceram relaçõesimportantes entre pontos máximos e mínimos da função e o significado desses pontos com as raízes da função derivada. Perceberam que *h'* era um grau a menos que*h*, comentaram sobre o domínio e a imagem, sobre intervalos de crescimento e decrescimento da função, e compreenderam a importância do gráfico da derivada para a construção do gráfico da função. Entretanto, essas observações foram feitas na visualização dos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = x^3$,pois não conseguiram construir o gráficode *h(x)*.

Na aula seguinte, a resolução dessa atividade aconteceu no laboratório de informática com o auxílio do *GeoGebra*, facilitando a visualização dos gráficos que haviam sido construídos na malha quadriculada da aula anterior. Dessa forma, os estudantes tiveram a oportunidade de comparar o que haviam construído na malha quadriculada com o gráfico plotado no *GeoGebra*. Fizeram observações pertinentes a respeito das relações entre os pontos máximos e mínimos da função *h(x)* e as raízes da função *h'(x)*, pois agora podiam visualizar o gráfico construído no *GeoGebra*.

Houve questionamentos também a respeito da quantidade de raízes da função *h(x)*, pois, de acordo com os alunos, sendo de quarto grau, a equação deveria ter quatro raízes, entretanto, mesmo com essa observação, não conseguiram perceber a duplicidade na raiz x=2. A questão foi respondida no quadro pelo professor utilizando a forma fatorada, ou seja, $4x^4 - 12x^3 + 16x = 4x(x+1)(x-2)^2$.

Segue, abaixo, a transcrição de diálogos dos alunos a respeito de suas observações e/ou questionamentos ocorridos durante a realização dessa atividade, na sala de aula e na sala de computação. Utilizamos a palavra "alunos" para indicar a fala de vários alunos, e não alguém específico.

Pesquisadora:	*Quais dificuldades vocês tiveram para a construção do gráfico da função de quarto grau?*
Alunos:	*Precisaríamos de outro instrumento para sua construção.*
Pesquisadora:	*O quê, por exemplo?*
Alunos:	*Um software, ou uma escala menor para aproximar os pontos.*
Pesquisadora:	*É, aproximar os pontos é uma boa opção. E se não tiver o software? Alguém tem outra ideia?*
Marcelo:	*Achar os mínimos e os máximos da função.*
Pesquisadora:	*E como se acha isso?*
Roberto:	*Pela derivada.*
Pesquisadora:	*Como assim?*
Marcelo:	*Não me lembro, mas acho que tem que igualar a derivada a zero, e tem também que calcular a derivada segunda.* [Marcelo é aluno repetente e estava tentando lembrar o que já havia sido ensinado em outra ocasião, mas não se lembrava, e esse assunto ainda não havia sido abordado nas aulas do professor].
Ivo:	*Ô Professora, me ocorreu uma dúvida aqui agora. Você nos deu uma função e pediu o gráfico dela e de sua derivada. É possível o contrário? Do gráfico da derivada construir o da função?*
Pesquisadora:	*Vocês entenderam a pergunta de Ivo? O que a turma acha, é possível ou não?*
Alunos:	*Acho que não.*
Guto:	*Eu acho que dá pela integral, só que não fica perfeito, pois a integral não usa constante e eu não sei o que aconteceria com o número menos 9.* [Guto é aluno repetente, esclarecemos que a integral tem uma constante de integração e o – 9 refere-se ao – 9 da função $f(x) = x^2 - 9$].
Professor:	*Já que não vimos integrais ainda, vamos analisar o que temos aqui agora. Vocês fizeram o esboço gráfico de uma função e de sua derivada. Quais regularidades vocês podem*

observar entre a função e sua derivada? Estou falando graficamente.

Guto: *Eu acho que não dá perfeito porque, veja bem: a derivada de* $f(x) = x^2 - 9$ *é 2x. A derivada de* $f(x) = x^2 - 10$ *é 2x, a derivada de* $f(x) = x^2$ *mais qualquer constante é 2x. A reta 2x pode ser a derivada de infinitas funções, por isso eu acho que não dá.*

Jonas: *Concordo com Guto, que tem relação tem, mas como vou ter certeza que é exatamente* $f(x) = x^2 - 9$ *através da derivada 2x? Não tem como não.*

Pesquisadora: *Vamos voltar ao gráfico e observar de novo.*

Marcelo: *Vejo uma relação aqui. A inclinação da reta, se ela é crescente ou decrescente.*

Pesquisadora: *Como assim?*

Marcelo: *Se for* $f(x) = -x^2$ *a reta da derivada fica decrescente. No* $f(x) = x^3$, *percebo também que quando a parábola* [a derivada $f'(x) = 3x^2$] *está decrescendo, a função tem valores negativos, e quando a parábola é crescente, a função está em sua parte positiva.*

Jonas: *Até agora não consegui enxergar a relação gráfica da função com sua derivada.*

Marcelo: *Vejo aqui nitidamente que a derivada corta o eixo x exatamente no momento em que a função atingiu seu ponto máximo e mínimo.*

Ivo: *Ô professora, será que tem alguma relação entre a derivada da derivada e a função?*

Devido aos questionamentos ocorridos durante as explicações, às conclusões alcançadas pelos alunos, às regularidades observadas, e principalmente à fala de Ivo*: Ô Professora, me ocorreu uma dúvida aqui agora. Você nos deu uma função e pediu o gráfico dela e de sua derivada. É possível o contrário? Do gráfico da derivada construir o da função?* A atividade 4, realizada em sala de aula sem o auxílio do *software*, foi elaborada pensando na sugestão do aluno Ivo, que sugeriu esboçar o gráfico de uma função a partir do gráfico da sua função derivada. Entretanto, propusemos a construção do gráfico da função derivada a partir do gráfico da função, pois supúnhamos ser mais fácil estabelecer relações entre a função e sua derivada visualizando a função. Com ointuito de focalizar aspectos gráficos, o ponto de partida foi um esboço do gráfico da função sem fornecer sua forma algébrica. Destacamos também as observações do aluno Marcelo em relação às regularidades observadas entre a função e sua derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento da derivada. Em relação à função $f(x) = x^3$, ele observou que no intervalo onde a derivada $f'(x) = 3x^2$ era decrescente, a função estava em sua parte negativa, e no intervaloonde a derivada era crescente, a função estava em sua parte positiva. Segue-se a descrição dessa atividade, que também foi feita utilizando a malha quadriculada, sem o auxílio do *software GeoGebra.*

4.4 Atividade 4: Construção e interpretação de gráfico de função polinomial e de sua derivada

Essa atividade teve como objetivo principal a construção do gráfico da derivada a partir do gráfico da função, sem o conhecimento da forma algébrica da função. Para isso, propusemos aos alunos as tarefas que foram realizadas da seguinte forma: primeiramente, cada aluno recebeu uma folha na qual deveria elaborar uma função, determinar seu domínio e registrar o cálculo de sua derivada, bem como esboçar na malha quadriculada seu gráfico e o de sua derivada. Essa folha foi assinada pelos alunos, recolhida pela pesquisadora, codificada e reservada para posterior comparação. Em segundo lugar, os alunos receberam outra folha com uma malha quadriculada, na qual esboçaram novamente o gráfico da função que haviam elaborado na primeira tarefa, mas dessa vez não registraram a forma algébrica da função e tiveram o cuidado de não assinar o nome, ou seja, na folha constava apenas o esboço do gráfico de uma função. Essa folha também foi recolhida pela pesquisadora, que a codificou de acordo com o nome do aluno que estava na folha recolhida anteriormente, isso para que não fosse conhecida pelo colega a autoria do gráfico. Em terceiro, os alunos receberam o gráfico construído pelo colega na malha quadriculada, no qual deveriam determinar pontos de intercessão com os eixos, domínio, imagem e grau da função. Foi proposto,ainda, que construíssem o gráfico da derivada no mesmo plano cartesiano onde estava construído o gráfico da função. Por fim, a pesquisadora recolheu todas as folhas, organizou-as de acordo com o nome do aluno que havia elaborado as funções e entregou novamente para os alunos, de forma que cada estudante tinha em mãos o que havia elaborado e o que o colega havia feito. Dessa forma, iniciou-se a discussão sobre as relações gráficas que havia entre uma função e sua derivada, e cada aluno pôde comparar o que ele havia feito com o que fez o colega.

Esclarecemos que a atividade foi realizada de forma individual, sem consulta em cadernos, livros, calculadora e *softwares*, e não permitimos também o diálogo entre os alunos até a construção dos gráficos, pois queríamos que elaborassem estratégias para a construção de gráficos de funções derivada por meio da função principal. No início, os alunos ficaram sem saber o que fazer, dizendo ser impossível a construção da função derivada sem a forma algébrica da função principal. Todos eles usaram a estratégia de elaborar a função algebricamente e foram testando os gráficos até achar um parecido com o que tinham em mãos, ou determinaram a função pelos pontos constantes no gráfico. Mesmo relembrando com eles, antes da realização da atividade, a existência de funções exponenciais, trigonométricas, irracionais, polinomiais e logarítmicas, apenas quatro alunos elaboraram uma função polinomial de terceiro grau, um aluno elaborou uma função trigonométrica *(f(x) = sen x)* e todos os outros elaboraram funções polinomiais de segundo grau. Essa atividade encontra-se no Apêndice D, que pode ser acessado para maiores informações. Os diálogos que estão transcritos logo a seguir aconteceram durante a realização da atividade, em sala de aula.

Jonas:	*Ô Professora, acho que quem fez esse gráfico aqui se esqueceu de escrever a lei de f(x).*
Pesquisadora:	*Esqueceu não, é isso mesmo.*
Jonas:	*Você quer que eu desenhe o gráfico da derivada sem a função algébrica?*
Professor:	*Essa é a ideia.*
Pedro:	*Não sei nem de onde começar. Acho que é impossível.*
Marcelo:	*É só descobrir a função gente.*
Pesquisadora:	*Gostaria muito que vocês não comentassem suas descobertas e estratégias de resolução até a conclusão da atividade.*

Após a ideia de Marcelo, todos os alunos começaram a procurar qual era a lei que definia a função. Em alguns gráficos, cujos pontos não estavam tão nítidos, os alunos ficaram sem saber o que fazer, e depois começaram a testar possibilidades gráficas de funções escritas algebricamente:

Guto:	*Ô Professora, pede à pessoa que desenhou esse aqui para definir direitinho os pontos. Do jeito que está aqui não tem jeito.*
Pesquisadora:	*Você está querendo descobrir a lei para desenhar o gráfico da função derivada? Faz esse gráfico através do gráfico da função.*
Guto:	*Isso é impossível. Vou desenhar várias aqui até descobrir qual a pessoa usou.*

Mesmo sugerindo a construção do gráfico sem recorrer à lei que a definia, Gutopreferiu testar vários exemplos de funções até achar uma função que se parecesse com o esboço que tinha. O aluno que recebeu a função trigonométrica descobriu que era a função seno e assim traçou a derivada também recorrendo à regra algébrica. Após a construção dos gráficos, permitimos aos alunos que comparassem o que haviam feito, sem ter como referência a forma algébrica da função, com o esboço de um gráfico elaborado a partir da lei da função. Durante a correção da atividade, fomos aos poucos conduzindo os alunos para a observação de regularidades entre a função e sua derivada. Alguns conceitos sobre função foram relembrados.

Pesquisadora:	*Todo mundo recorreu à lei da função. Vocês não pensaram em outra estratégia?*
Pedro:	*Acho que não tem jeito de ser diferente.*
José:	*Ô Professora, mas tem algumas coisas aqui que podem ser observadas. Se fosse o gráfico de uma polinomial de terceiro grau, a derivada seria uma parábola. Se fosse uma parábola, a derivada seria uma reta, que foi o que fizemos aqui.*
Jane:	*É mesmo, e se fosse uma tipo f(x)=2x a derivada seria 2.*
Jonas:	*Aí seria um ponto.*
Pesquisadora:	*Seria um ponto, gente?*
Marcelo:	*Não, seria uma reta paralela ao eixo x.*
Pesquisadora:	*Essa função tem nome?*
Marcelo:	*Função constante.*

Os alunos não estabeleceram conexões para esboçar o gráfico da derivada sem a lei da função, mas observaram importantes conclusões sobre os tipos de funções e suas derivadas. Revisamos sobre a diferença entre representação de ponto no plano cartesiano e função constante. Um dos alunos, que não é repetente, falou sobre ponto máximo e mínimo, pois foi um assunto abordado pelos alunos repetentes na aula anterior.

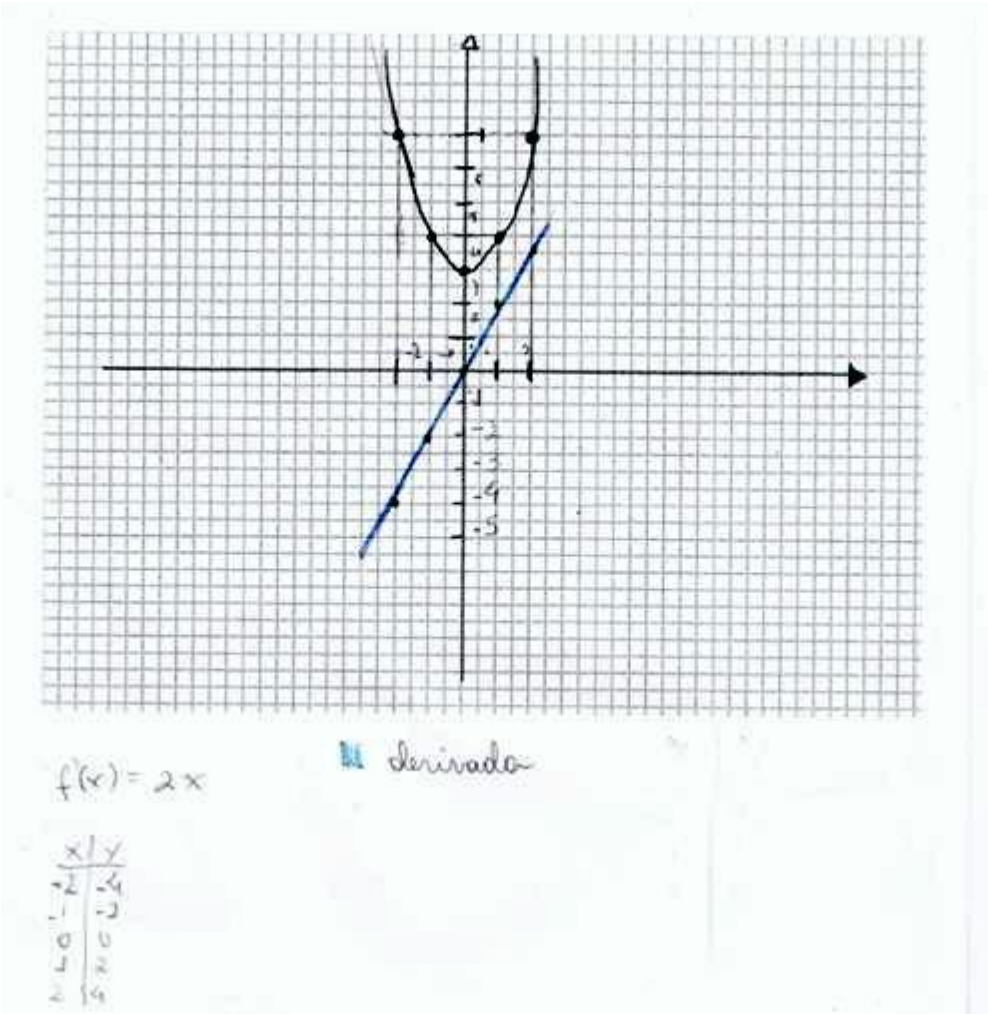
Ivo:	*Se achar a raiz da derivada tem como achar o ponto máximo ou mínimo da função*.[Pode ser um ponto de inflexão].
Pesquisadora:	*Vocês conseguiram enxergar o que Ivo está falando?*

Nesse momento, os alunos pegaram os esboços dos gráficos e procuraram observar o que o colega estava falando.

Pesquisadora:	*Ivo está dizendo que o ponto máximo ou mínimo da função é exatamente no ponto onde o gráfico da derivada corta o eixo x, ou seja, é a raiz da derivada. Isso está acontecendo no gráfico de vocês?*
José:	*É verdade. De certa forma é onde a reta tangente é paralela ao eixo x, por isso que é a raiz da derivada; a inclinação é zero.*

Nas funções polinomiais de segundo grau, conseguiram identificar a raiz da função derivada como ponto máximo ou mínimo da função. Na Figura 12, temos o esboço de uma função de segundo grau e sua derivada. Um aluno elaborou o gráfico de *f(x)*, e outro esboçou *f'(x)*.

Figura 12 – Gráfico de uma função quadrática e de sua derivada, construído por alunos na atividade IV



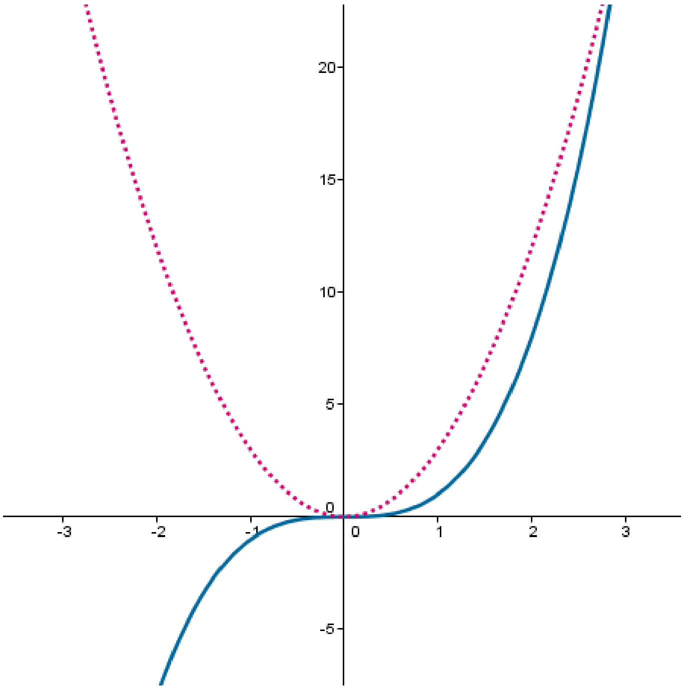
Fonte:Gráfico construído pelo aluno José.

Os alunos que estavam com o esboço da função polinomial de terceiro grau observaram intervalos de crescimento e decrescimento na função derivada e estabeleceram relações importantes com a função. Perceberam o comportamento da função derivada nos pontos máximos e mínimos da função, bem como a inclinação da reta tangente quando paralela ao eixo das abscissas. Durante a discussão, Caio fez o seguinte questionamento:

> Caio: *Ô Professora, percebi aqui que, quando a derivada é decrescente, a função é negativa, e quando a derivada cresce, a função é positiva.*

O aluno está dizendo que, no intervalo onde f ’ era decrescente, a imagem de f era negativa, e, onde era crescente, a imagem era positiva. Questionamos com toda a turma se o que Caio estava falando podia ser generalizado. Como já havíamos explorado funções de terceiro grau, foi fácil perceber que essa conclusão não se aplica a todas as funções. Vejamos na tela abaixo o que ele estava vendo:

Figura 13 – Gráfico de $f(x) = x^3$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2$ (pontilhada)



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

Essa observação havia sido feita por Marcelo anteriormente:

Marcelo: *Se for $f(x) = -x^2$, a reta da derivada fica decrescente. No $f(x) = x^3$, percebo também que, quando a parábola* [a derivada $f'(x) = 3x^2$]*está decrescendo, a função tem valores negativos, e, quando a parábola é crescente, a função está em sua parte positiva.*

Exploramos intervalos de crescimento e decrescimento utilizando o gráfico da Figura 13, e sentimos necessidade de fundamentar todas as conclusões obtidas por meio de definições, pois alguns alunos pensavam que a função era decrescente quando sua imagem era menor que zero. Como toda a discussão estava em torno dos questionamentos sobre intervalos de crescimento e decrescimento, e o comportamento da derivada nesses intervalos, decidimos elaborar a atividade 5, que trata exatamente desses conceitos.

4.5 Atividade 5: O que *f '* nos diz sobre *f* ?

Começamos essa atividade com a definição de função crescente e decrescente, retirado do livro-texto (STEWART, 2010, p.11).

Definição de função crescente:

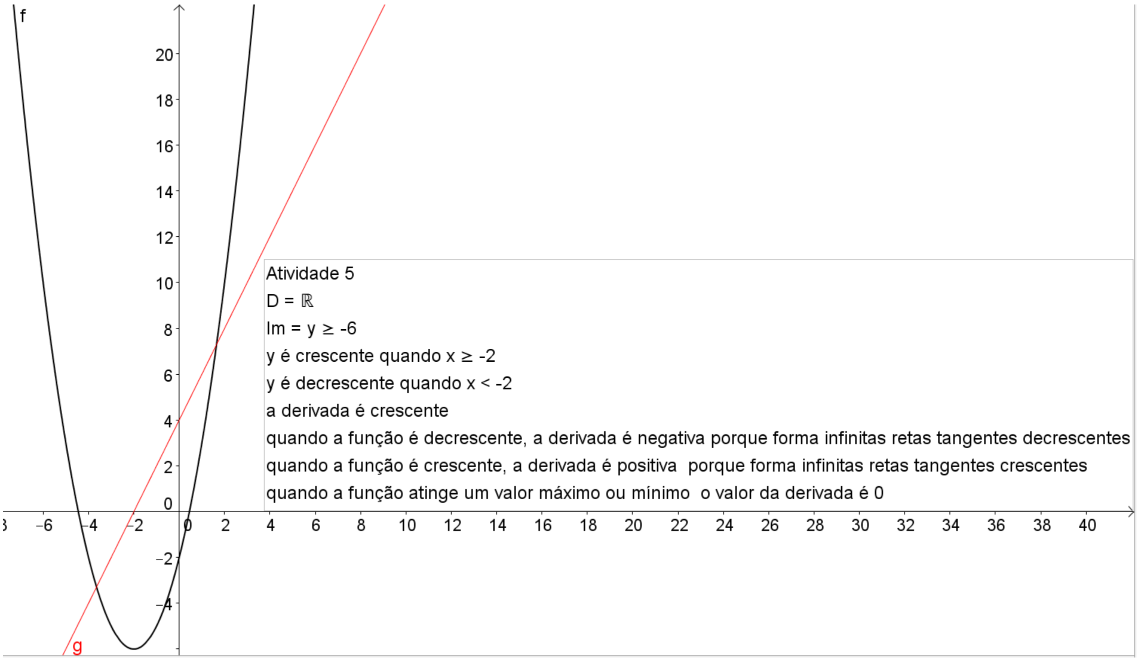
> Uma função ***f*** é chamada **crescente** em um intervalo ***I*** se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***. Ela é denominada **decrescente** em ***I*** se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em ***I*.**

Inicialmente, solicitamos aos alunos que fizessem a leitura da definição de função crescente e decrescente em um intervalo ***I***. Questionamos quem era x_1, $f(x_1)$, x_2 e $f(x_2)$,e, para isso, usamos novamente a tela do *GeoGebra* com a função $f(x) = x^3$ e sua derivada (Figura 6). Como dito anteriormente, encerramos a atividade 4 com discussões a respeito de intervalos de crescimento e decrescimento, e queríamos neste momento ressaltar a definição para fundamentar matematicamente as conclusões obtidas. Os itens para a realização dessa atividade foram:

> Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** que apresente intervalo(s) de crescimento e decrescimento, obtenha o domínio e a imagem de ***f***,determine algebricamente o(s) intervalo(s) onde ***f*** é crescente e onde ***f*** é decrescente. Calcule algebricamente sua derivada.

Esperávamos que, devido à facilidade de visualização gráfica que o *software* proporciona, os alunos fariam opções diversas de tipos de funções, mas não foi isso que aconteceu. Das 33 atividades enviadas para a sala virtual, constatamos que 23 eram funções polinomiais de segundo grau, 2 de terceiro grau, 4 de quarto grau, 3 funções trigonométricas e uma função algébrica. Ao final da atividade, propusemos fechar a discussão com a análise de uma função quadrática, pois a discussão estava focada nesse tipo de função, e para isso escolhemos $f(x) = x^2 + 4x - 2$, construída por Guto em sala de aula durante a realização da atividade 5, o qual se disponibilizou para plotá-la no *GeoGebra*, a fim de ser visualizada por todos os alunos.

Figura 14 – Função $f(x) = x^2 + 4x - 2$ e sua derivada (pontilhada)



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

O texto que se encontra no gráfico da Figura 14 foi construído por Guto com a participação dos alunos durante a discussão. Na exploração do gráfico, Guto foi mostrando com o cursor do notebook a posição das retas tangentes à curva, por isso o texto se refere a elas. O valor mínimo da parábola foi determinado através do cálculo de *f(-2)*, pois os alunos perceberam que o valor para x = -2 era a raiz de *f'*. Podemos observar no texto escrito pelo aluno que ele coloca a igualdade quando escreve "*y é crescente quando* $x \geq -2$ "e não coloca a igualdade quando escreve "*y é decrescente quando x< - 2"*. Essa dúvida a respeito do uso ou não da igualdade nos intervalos de crescimento ou decrescimento foi levantada durante a realização da atividade, e esclarecemos que de acordo com a definição utilizada, a igualdade não era utilizada. Pensávamos que o assunto já estava esgotado e que todos tinham compreendido as relações de uma função e sua derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento, mas, durante a explicação, surpreendemo-nos com o seguinte questionamento:

Ivo:	*Ô Professora, na função de segundo grau, nessa aí que você está corrigindo* [o aluno se refere às observações feitas no trabalho de Guto] *eu entendo, e acho que essa conclusão aí serve. Mas não serve na que eu fiz aqui não.*
Pesquisadora:	*E qual você fez?*
Ivo:	*Uma de terceiro grau aqui. Nela tanto faz a função ser crescente ou decrescente; a derivada sempre será positiva.*
Pesquisadora:	*Vem aqui na frente e explica o que você vê no seu gráfico para concluir isso aí.*

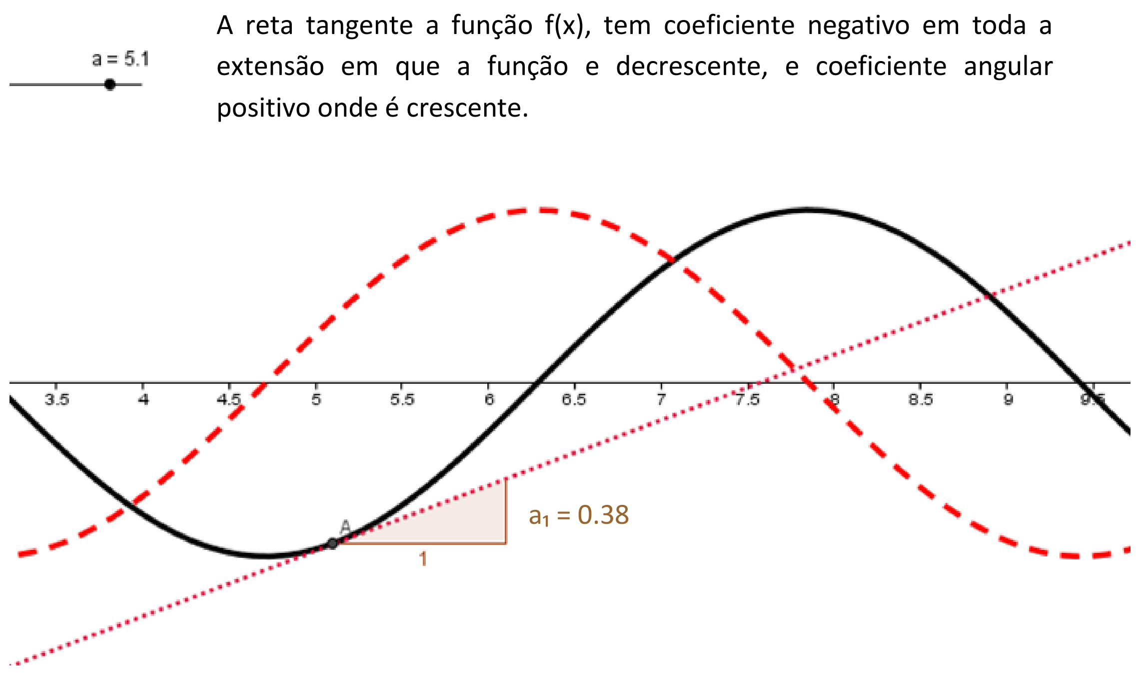
Voltamos a examinar a função $f(x) = x^3$ e sua derivada (ver Figura 13), e toda a turma acompanhava as explicações. De acordo com a fala de Ivo, ele entendia que, no intervalo de menos infinito a zero, ou seja, no 3º quadrante, a função era decrescente, e a derivada nesse intervalo, por estar acima do eixo x, era positiva. Ele disse imagem negativa com intervalo decrescente, como se fosse a mesma coisa. Voltamos à definição de função crescente e decrescente explorada no início da atividade, e fizemos novamente a leitura passo a passo, explicando e discutindo quem era x_1, $f(x_1)$, x_2 e $f(x_2)$, na função $f(x) = x^3$. Após a discussão, o aluno concluiu que a função escolhida por ele era sempre crescente, e, para atender ao que havíamos solicitado nessa atividade (Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** que apresente intervalo(s) de crescimento e decrescimento), ele mudou sua função para $f(x) = x^3 - 2x^2$ e fez corretamente o que a atividade propunha. A seguir, o aluno Miguel fez o seguinte questionamento:

Miguel: *Consigo entender tudo isso nessas funções aí, mas coloquei uma função aqui e nela não consigo enxergar isso aí não. A minha é uma trigonométrica. Vejo claramente o comportamento da derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento, mas confundi aqui na trigonométrica.*

Plotamos o gráfico $f(x) = 2sen(x)$ e de sua derivada, sugerido pelo aluno, para a visualização de todos os presentes, e, nesse momento, antes de qualquer intervenção de minha parte, o aluno Marcelo fez o seguinte comentário:

Marcelo: *Ô Professora, deixa eu mostrar isso aí no gráfico que fiz aqui, que também é de uma função trigonométrica. Acho que a dúvida do pessoal era a mesma que eu tinha, e entendi tudo isso depois que eu coloquei uma reta tangente e fiz um controle deslizante. Só dá para entender isso aí se compreender a reta tangente.*

Figura 15 – Gráfico de $f(x) = sen(x)$ com linha sólida, sua derivada $f'(x) = \cos(x)$ com linha pontilhada e a reta tangente à função $f(x) = sen(x)$



Fonte:Reprodução do trabalho de Marcelo pela pesquisadora.

Na Figura 15, vemos a função *f(x)= sen(x)* e sua derivada *f(x)= cos(x)*,construída pelo aluno Marcelo. Ativamos o controle deslizante para mostrar que a reta é sempre tangente à curva da função ***f***, e que a tangente do ângulo que ela faz com o eixo das abscissas é a derivada. Voltamos aos conceitos de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo para explicar o triângulo que aparece na reta tangente. Na caixa de texto do *GeoGebra*, o aluno registrou uma conclusão, explicando que a reta tangente tem coeficiente angular negativo nos intervalos em que a função é decrescente, e coeficiente angular positivo é crescente. Como a maioria dos alunos escolheu uma função polinomial de segundo grau para a realização da atividade 5, mas as dúvidas mais frequentes giravam em torno de outros tipos de funções, elaboramos a atividade 6 para contemplar os mesmos conceitos abordados. Propusemos a elaboração de seis funções: trigonométrica, polinomial de grau 3 e de grau 4, racional, exponencial e logarítmica, e nelas exploramos domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento. Segue a descrição dessa atividade.

4.6 Atividade 6: O que *f '* nos diz sobre *f ?*

Devido ao caráter de generalização da questãodo título dessa subseção, ou seja, se as relações entre uma função e sua derivada servem para qualquer tipo de função, percebemos a necessidade de levar os alunos a explorar o que haviam concluído em outros tipos de função. Como a maioria da turma havia escolhido uma função polinomial de segundo grau na atividade anterior, dessa vez propusemoso seguinte:

1. Elabore as seguintes funções:
   1.1 Trigonométrica *t(x)* =
   1.2. Polinomial de grau 3 *f(x)*=
   1.3. Polinomial de grau 4 *p(x)*=
   1.4. Racional *r(x)*=
   1.5. Exponencial *e(x)*=
   1.6. Logarítmica *l(x)*=
2. Determine o domínio e a imagem de cada um delas.
3. Determine algebricamente a derivada de cada função que você elaborou.
   3.1. *t'(x)*=
   3.2. *f'(x)*=
   3.3. *p'(x)*=
   3.4. *r'(x)*=
   3.5. *e'(x)*=
   3.6. *l'(x)*=

Exploramos os mesmos conceitos abordados na atividade anterior. Não houve dificuldade para elaborar a função e nem para obter a derivada de cada uma delas, pois tudo foi feito com as ferramentas do *software.* Eles apresentaram dificuldades em estabelecer o domínio e a imagem, principalmente na função trigonométrica. Das 30 atividades enviadas para a sala virtual, 3 eram de função cosseno, 27 de função seno, e nenhum aluno utilizououtro tipo de função trigonométrica. Treze alunos colocaram função algébrica em vez de funçãoracional. A definição de função algébrica e função racional foram trabalhadas em sala de aula de acordo com o livro de James Stewart (2010, p. 22):

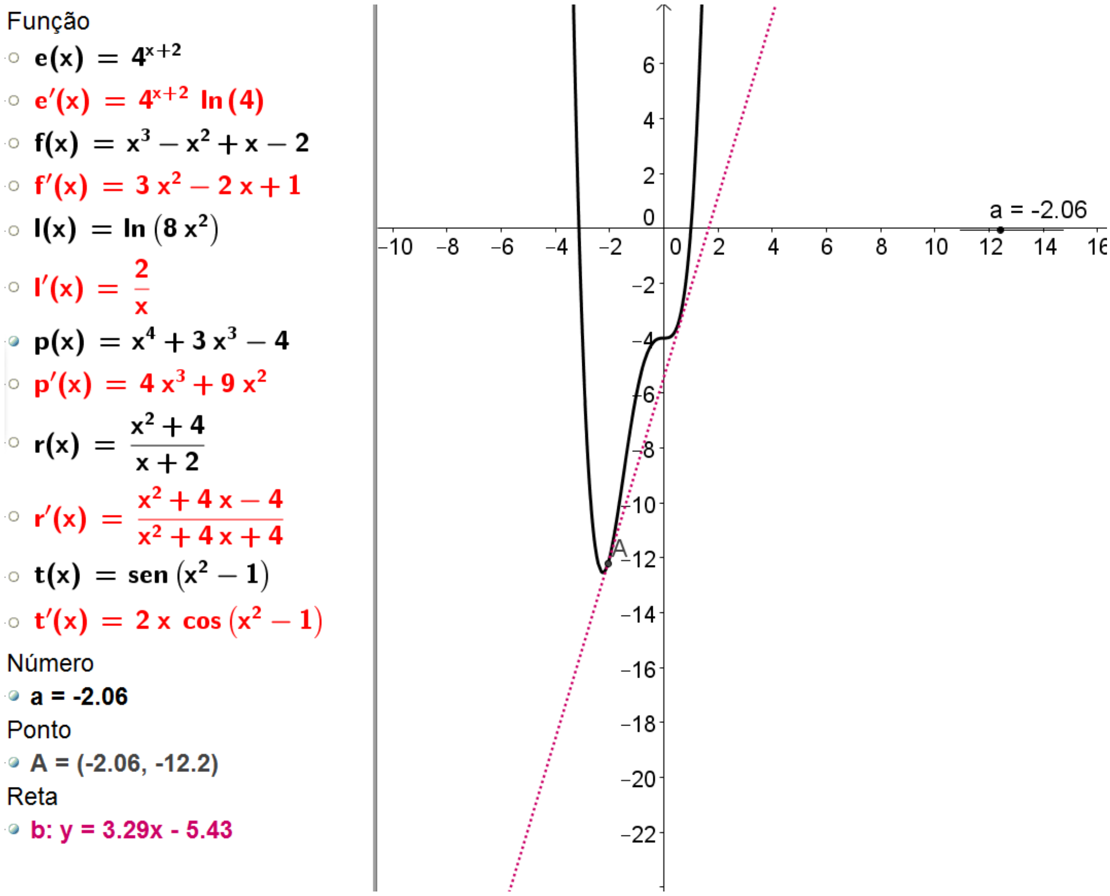
> Uma **função racional***f* é a razão de dois polinômios: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ em que P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de *x*tais que $Q(x) \neq 0$.

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica.

As funções que os alunos colocaram na atividade como racionais foram: $f(x)=\sqrt{4x^2}$ $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$, $f(x)=\sqrt{3x+4}$, $f(x)=\sqrt{2x+3}$, que, de acordo com a definição acima, seriam apenas funções algébricas. Seis alunos erraram em termos o que é uma função exponencial, colocando: $f(x)=4^{x+2}$, $f(x)=e^{x+1}$, $f(x)=e^{2x}$, $f(x)=2^{x+1}$. Dois alunos colocaram $f(x)=x^2$ como exemplo de função exponencial. Na função polinomial de 3º grau $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, todos os alunos, com exceção de apenas um, colocaram o número 1 no valor numérico do coeficiente ***a***.Apenas quatro alunos usaram a base 10 nas funções logarítmicas, e acreditamos que o logaritmo neperiano apareceu 26 vezes, porque, quando não especificamos a base do logaritmo ao digitar a função logarítmica no campo de entrada do *GeoGebra*, esse automaticamente faz a representação na base *e*. O conceito de reta tangente foi abordado devido ao questionamento do aluno Carlos:

> Carlos: *Ô Professora, derivada tem que ser com reta tangente não é? O que é mesmo uma reta tangente?*
>
> Pesquisadora: *Bom, depende. O conceito que temos de reta tangente é quando ela toca a curva em um único ponto, mas pela sua pergunta, creio que esse conceito não é suficiente aqui né?*
>
> Carlos: *Isso mesmo, veja isso aqui. Tenho uma reta no meu controle deslizante que toca a curva em dois pontos, e aí?* [Ver Figura 16].

Figura 16 – Gráfico de $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4$ e uma reta que tangenciaafunção em dois pontos



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

Considerei a pergunta do aluno muito pertinente, e achei conveniente esclarecer que essa discussão foi feita na primeira aula de derivada pelo professor regente. Lembrei ao aluno que esse era justamente o “Problema da Tangente”. Assim, abri o livro do James Stewart (2010) na página 130, e li com ele a definição abaixo:

DEFINIÇÃO: A **reta tangente** a uma curva *y=f(x)* em um ponto ***P***(*a, f(a)*) é a reta por ***P*** que tem a inclinação $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, desde que esse limite exista.

Comparamos a definição com o que ele via no gráfico quando fazia a animação com o controle deslizante. O aluno concluiu que o conceito de reta tangente à curva não é o mesmo de reta tangente à circunferência. Após a realização dessa atividade, o professor abordou em sala de aula as aplicações da derivação nos problemas de otimização e a importância de se encontrarem os valores máximo ou mínimo de uma função, pois as regras de derivação já haviam sido trabalhadas e resolvidas em exercícios. Até o momento, os alunos estavam investigando como as derivadas afetam a forma do gráfico de uma função; os conceitos de máximo e mínimo foram discutidos, mas não formalizados. Por isso, decidimos realizar a atividade 7, fechando o assunto “O que ***f’*** nos diz sobre ***f***?”.

4.7 Atividade 7: O que *f '* nos diz sobre *f* ?

Iniciamos a atividade com a leitura de três definições fundamentais (STEWART, 2010, p. 253 e 256):

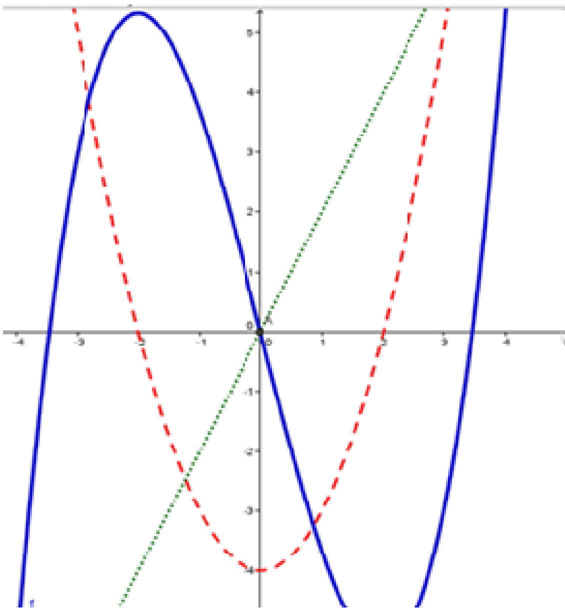
DEFINIÇÃO1:Uma função ***f***tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* em D, onde D é o domínio de *f*. O número *f(c)* é chamado **valor máximo** de *f* em D. Analogamente, *f* tem um **mínimo absoluto** em *c* se para $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* em D, e o número *f(c)* é denominado **valor mínimo** de *f* em D. Os valores máximo e mínimo de *f* são chamados **valores extremos** de *f*.

DEFINIÇÃO2:Uma função *f* tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em *c* se7 quando *x* estiver nas proximidades de *c*.[Isso significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* em algum intervalo aberto contendo *c*]. Analogamente, *f* tem um **mínimo local** em *c* se $f(c) \leq f(x)$ quando *x* estiver próximo de *c*.

DEFINIÇÃO3:Um número crítico de uma função***f***é um número **c** no domínio de***f***onde ou***f’(c)=0***ou ***f’(c)*** não existe.

Discutimos sobre ponto máximo e mínimo de uma função desde o início da realização das atividades, mas faltava formalizar e definir número crítico. Não tinham a mínima ideia por onde começar, e fizeram tentativas plotando funções no *GeoGebra*, até que o aluno Marcelo deu a dica de elaborar primeiro a função com raízes em 2 e em -2, e depois integrar essa função. Não sabiam integrar, questionaram sobre isso, e o mesmo aluno respondeu da seguinte forma: “*É só procurar uma função que se você derivar gera a função* $f(x) = x^2 - 4$.” Esse foi o primeiro contato que os alunos que não eram repetentes tiveram ao conceito de integral. O interessante foi que os alunos cobraram a definição de número crítico, pois o aluno Marcelo, que já havia cursado a matéria e fazia dependência, falava em sala de aula sobre esse número. Na Figura 17, temos o gráfico e as conclusões de alguns itens da atividade, enviada por Marcelo para a sala virtual.

Figura 17 – Gráfico de $f(x) = 0{,}33x^3 - 4x$, f'(x) e f''(x)"



05. f(x): D = R: Im = R
f'(x): D = R :Im = [-4, + ∞[

06. A derivada possui valor igual a zero, devido ao coeficiente angular da reta tangente à curva em tais pontos ser nulo.

07. A função possui dois pontos críticos: P1 = (2, 5.33) – máximo absoluto, P2 = (2, 5.33) – mínimo absoluto e um ponto de inflexão P3 = (0,0).

08. A variação dos valores da função, no tocante ao seu crescimento ou decrescimento, influi diretamente no comportamento da derivada, visto que ambas estão inter-relacionadas pelas inclinações das infinitas retas tangentes às curvas da função original.

09. (Questão resolvida na atividade 6, omitida para maior organização e não duplicação de dados.)

10. Sim, as conclusões obtidas são cabíveis para qualquer tipo de função.

Fonte:Reprodução do trabalho do aluno Marcelo pela pesquisadora.

No item 7 da caixa de texto da Figura 17, o aluno enumera dois pontos críticos em relação à função $f(x) = 0{,}33x^3 - 4x$. Esclarecemos que essa função não tem máximo e nem mínimo absoluto, como mostra o texto do aluno. O ponto (0,0) o aluno denomina corretamente de ponto de inflexão, que ainda não havia sido definido com a turma. Não houve dúvidas por parte dos alunos em responder aos itens da atividade relacionados ao domínio e à imagem das funções. A maioria dos alunos teve dificuldades em elaborar a função de acordo com o enunciado do item 2 e 3 dessa atividade (Ver Apêndice G):

> 2. Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** que seja contínua em [-4,4] e tenha máximo absoluto em -2 e mínimo absoluto em 2.
>
> 3. Determine algebricamente a função ***f*** e sua derivada.

Depois que a maioria dos alunos plotou a função que atendia ao enunciado acima, iniciou-se a discussão sobre os outros itens da atividade, e o aluno José apresentou a seguinte dúvida:

José: *Professora, quer dizer que, se tiver ponto máximo ou mínimo, a derivada é zero, certo?*

Pesquisadora:	*Sim.* [Essa resposta foi sim de acordo com o gráfico da figura 10 da atividade que estava sendo realizada no momento].
José:	*Então, se a derivada for zero, tem ponto crítico, então tem máximo ou mínimo.*
Pesquisadora:	*É justamente isso que estamos testando, você está afirmando?*
José:	*Eu achei uma função aqui que onde a derivada é zero não é máximo e nem mínimo. Esse é o ponto de inflexão?*

O aluno estava se referindo à função$f(x) = x^3$, que podemos visualizar na Figura 13.

Pesquisadora:	*Sim.*
José:	*Então, existe o ponto de inflexão, mas ele não é crítico.*
Pesquisadora:	*Nesse caso que você está mostrando, esse ponto de inflexão é crítico, correto?*

Os alunos começaram a testar em outras funções a existência de pontos críticos, e o que representavam. Muitas dúvidas surgiram e alguns afirmavam que nem todo ponto crítico representava um ponto de inflexão e nem todo ponto de inflexão representava um ponto crítico. Decidimos elaborar a atividade 8, com a definição de ponto de inflexão, e o que a derivada segunda dizia sobre a função, pois novas conjecturas surgiam frente à visualização dos resultados dos gráficos que estavam sendo testados nessa atividade.

4.8 Atividade 8: O que *f''* nos diz sobre *f*?

Essa foi a última atividadeantes da realização dos estudos em grupos. Resolvemos iniciá-la com a definição de concavidade, porque um aluno afirmou que a única função que tinha concavidade era a de segundo grau. A definição de ponto de inflexão tornou-se necessária devido aos questionamentos constantes na atividade anterior.

DEFINIÇÃO 1:Se o gráfico de ***f*** estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo ***I***, então ele é dito **côncavo para cima** em I. Se o gráfico de ***f*** estiver abaixo de todas as suas tangentes em ***I***, é dito **côncavo para baixo** em ***I***.

DEFINIÇÃO 2: Um ponto ***P*** na curva *y=f(x)* é chamado **ponto de inflexão** se ***f*** é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em ***P***.

Depois de ler com a turma as definições acima, e antes de iniciar a realização da atividade 8,houve o seguinte diálogo entre alunos:

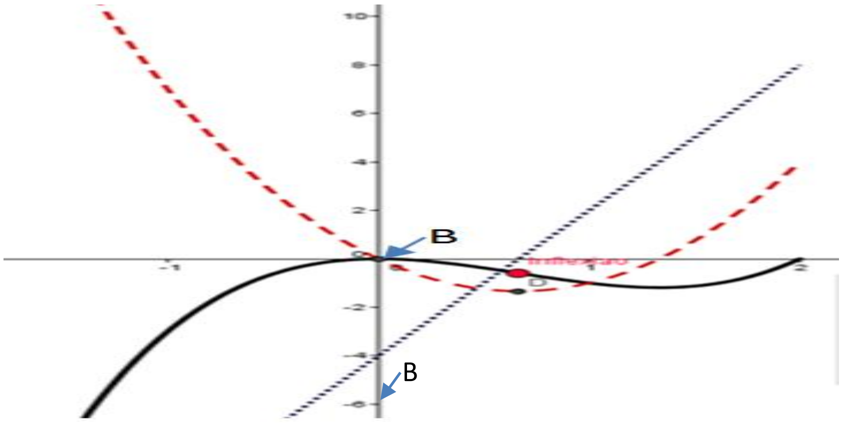
Laura:	*Aprendi a ver concavidade para cima e para baixo apenas nas parábolas; nunca me falaram de concavidade associado ao conceito de reta tangente.*
Jane:	*Ué, se for assim, uma função pode ter várias concavidades.*
José:	*Acho que não. Se for de segundo grau tem uma concavidade, se for de terceiro, tem duas, e assim por diante.*
Ana:	*Ô Professora, isso que José está falando aqui é certo?*
Pesquisadora:	*Podemos testar isso aí também. A realização da atividade 8 permite essa investigação. Vamos começar e ver se é verdade ou não.*

O questionamento acima ficou sem resposta no momento, porque esperávamos que realizassem uma investigação sobre as relações entre as funções e suas derivadas nos intervalos com concavidades e nos pontos críticos, mas, assim que iniciamos, eles plotaram a função $f(x) = x^5$ e perceberam que o que José afirmava estava incorreto. Solicitamos aos alunos que realizassem, de início, a seguinte tarefa:

> Plote no *GeoGebra* uma função ***f*** cujo esboço do gráfico apresente concavidade para cima, concavidade para baixo, e um ou mais pontos de inflexão. Limite seu gráfico em um intervalo ***I***.Determine algebricamente as funções***f,f '*** e ***f ''***.

Esperávamos que os alunos escolhessem todo tipo de função, pois já havíamos explorado várias delas nas atividades anteriores. Das 28 atividades enviadas para a sala virtual, um aluno escolheu a função *f(x) = sen(x)*, e todos os outros escolheram uma função polinomial de terceiro grau para a realização dessa atividade. Na Figura 18, temos as conclusões registradas pelo aluno Marcelo.

Figura 18 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2$, *f' e f''*

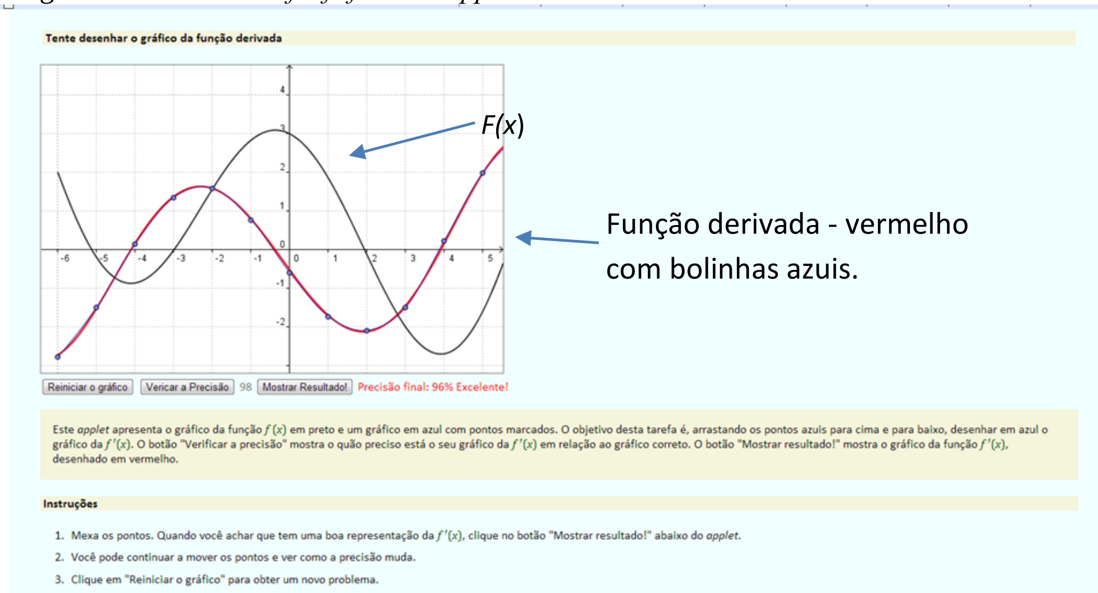


Fonte:Reprodução do trabalho do aluno Marcelo pela pesquisadora.

As funções foram limitadas no intervalo [-2,2], delimitando um intervalo do domínio. Para determinar a imagem de *f'* e o ponto de inflexão, o aluno recorreu à raiz de *f''*. A maioria dos alunos respondeu corretamente ao item 11 e 12 da atividade(Ver Apêndice H), que perguntava: "quando ***f ''*** for positiva, ***f*** tem concavidade para cima ou para baixo? E quando ***f''*** for negativa?". Entretanto, não registraram as conclusões que estabeleciam uma relação entre uma função, sua primeira derivada, e sua segunda derivada, questionamento do item 13 da atividade. Marcelo escreveu, em sua conclusão, que "*a partir do ponto de inflexão podemos criar as curvas mais suaves e precisas*".Essa informação não fazia parte dos questionamentos da atividade 8, portanto se deduz que ele chegou a essa conclusão quando realizou a tarefa que foi proposta a seguir, realizada no mesmo horário de aula.

Essa tarefa, realizada por meio de um *applet*,foi adaptada do *site (http://www.geogebratube.org/?lang=pt_BR)* por André Pereira (técnico em computação).Este *applet* apresenta, com visualização mais clara no *site* disponibilizado acima, o gráfico da função *f(x)* em preto e um gráfico em vermelho com pontos marcados em azul.O objetivo dessa tarefa é construir o gráfico da função derivada por meio do gráfico da função, sem o conhecimento de sua forma algébrica. Esse mesmo objetivo foi proposto na atividade 4, e nela todos os alunos recorreram à forma algébrica da função. Nessa tarefa, o aluno deveria arrastar os pontos azuis para cima e para baixo, e desenhar em azul o gráfico de *f '(x)*. O botão "Verificar a precisão" mostra o quão preciso está o seu gráfico da *f '(x)* em relação ao gráfico correto. O botão “Mostrar resultado!” mostra o gráfico da função *f '(x)*, desenhado em vermelho.

Figura 19 – Gráfico de *f e f’ feito no applet.*



Fonte:Reprodução do trabalho do aluno Marcelo pela pesquisadora.

Na realização dessa tarefa, os alunos colocaram em prática os conceitos abordados nas atividades anteriores em relação a pontos críticos, pontos de inflexão, pontos máximos e mínimos, concavidades e intervalos de crescimento e decrescimento. Chegaram a 98 e 99% de precisão nos gráficos construídos que enviaram para a sala virtual, percentual fornecido pelo *applet*. Nesse dia, propusemos a realização do seminário.

No próximo capítulo, relatamos os resultados de nossa análise e a discussão desses resultados fundamentada nas interações e diálogos de três grupos apresentados no seminário.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO DA ANÁLISE DOS ESTUDOS SOBRE FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS APRESENTADOS PELOS ALUNOS NO SEMINÁRIO

Neste capítulo, relatamos sobre os resultados da análise dos dados e a discussão desses resultados. A análise focou nas transcrições dos diálogos ocorridos em três grupos de estudantes, dos dez que realizaram o seminário(nesta pesquisa,são denominados: G1, G2, e G3). Cada grupo se encarregou de pesquisar sobre um tema que tratasse de uma função e de suas propriedades e observar as relações entre essa função e suas derivadas. Em grupos, os estudantes deveriam sintetizar, realizar testes com a utilização do *GeoGebra* e, posteriormente, apresentar, em um seminário, os resultados de seus estudos relacionados às funções e suas derivadas. Muitos diálogos aconteceram nas interações, pois foi intensa a participação de alunos. Foi necessário focar a análise em alguns aspectos desses diálogos. A decisão a respeito do que analisarocorreu por meio de uma leitura global das transcrições, nas quais observamos a presença significativa de referências às representações gráficas realizadas no *software* e o uso de definições matemáticas em que os estudantes manifestaram seus entendimentos.

Com os procedimentos de análise de conteúdo (GRANEHEIM; LUNDMAN, 2004) delineados no capítulo 2, definimos seis categorias emergentes que norteiam as interpretações dos dados dessa análise, à luz das teorias de PMA e interacionismo simbólico. As categorias, que apareceram nas discussões dos três grupos, determinam um parâmetro de conduta para organizar os dados e interpretar a discussãodos alunos durante as interações entre eles. As seis categorias emergentes são:

a) utilizando experiências prévias;
b) transitando entre as representações;
c) apresentando definição de conceitos;
d) discutindo as dúvidas apresentadas;
e) explorando/testando funções e suas derivadas, utilizando o *GeoGebra*;
f) avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem).

Formadas nossas categorias na codificação, realizamos uma integração entre elas e o marco teórico, o que nos proporcionou visualizar a possibilidade de categorias mais amplas, ou seja, os temas. O primeiro tema, “*Pensamento matemático dos estudantes sobre funções e suas derivadas: conceito imagem e definições*”, é resultado da análise, em uma perspectiva cognitiva, de como os estudantes universitários manifestam sua compreensão relativa aos conceitos matemáticos. O segundo tema,“*Interações no processo de ensino e aprendizagem* *de funções e suas derivadas*", reflete a forma como percebemos o uso de definições matemáticas pelos alunos num contexto de discussão em sala de aula e apresentação de trabalhos em grupos.

Organizamos no Quadro 5os resultados da análise de conteúdo.

Quadro 5 – Códigos, categorias e temas estabelecidos na codificação.

CÓDIGOS	CATEGORIAS	TEMAS
Explorando o conceito de função quadrática a partir da representação gráfica de derivadas.	Utilizando experiências prévias.	Pensamento matemático dos estudantes sobre funções e suas derivadas: Conceito imagem e definições.
Visualizando parábola perfeita e parábola imperfeita no *GeoGebra*(ver Quadro 3).		
Descartando um dos quadrantes na leitura de gráfico.		
Mostrando parábola definida por função algébrica diferente da quadrática.		
Definindo função exponencial a partir do que se aprendeu em ensinos anteriores.		
Plotando uma função no *GeoGebr*a a partir de sua forma algébrica.	Transitando entre as representações.	
Professor alertando para a forma gráfica da função.		
Visualizando a expansão na direção horizontal (foi definida algebricamente na direção vertical).		
Fatorando uma função de quarto grau para visualizar sua forma gráfica.		
Interpretando a definição formal de uma função.	Apresentando definição de conceitos.	
Definindo uma função pela sua forma gráfica e algébrica.		
Buscando teoria que mostre o ponto de inflexão na função.		
Apresentando função com ponto de inflexão baseado no exemplo do livro do autor James Stewart.		
Definindo o domínio de uma função por meio de sua forma gráfica e algébrica.		
Baseando a definição pessoal na definição formal do livro.		
Professores e alunos interagindo no encadeamento de discussões a partir do que está surgindo.	Discutindo as dúvidas apresentadas.	Interações no processo de ensino e aprendizagem de funções e suas derivadas.
Apresentando argumentos fundamentados em definição formal.		
Professores sugerindo reflexão na definição pessoal.		
Alunos confrontando ideias e conceitos.		
"Quebrando" definições pessoais e conceitos por		

meio de argumetações.		
Estabelecendo relações entre uma função e sua derivada.	Explorando/Testando funções e suas derivadas utilizando o *GeoGebra.*	
Comprovando que a derivada acompanha a função.		
Utilizando a reta tangente no gráfico para mostrar a derivada nula.		
Realizando testes com parâmetros para transformações no gráfico**.**		
Realizando deslocamentos de gráfico de função no *GeoGebra*.		
Realizando testes com ***f, f’ e f’’***(constante 0,14).		
Resistindo à mudança no conceito, baseado em definição pessoal e definição formal.	Avançando na compreensão das definições (Melhoria na aprendizagem).	
Admitindo não saber.		
Professores confrontando a definição pessoal e a definição formal apresentada pelo aluno.		
Apresentando dúvidas baseado em experiências prévias.		
Mudando a definição pessoal por diversas vezes. (conflito de ideias).		
Apresentando argumentos fundamentados em definição formal.		
Mudando a postura em relação às conclusões.		

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A redação dos resultados da análise de dados apresenta em detalhes o nome dos membros de cada grupo, o tema escolhido por eles, as transcrições dos diálogos selecionados para interpretação, além dos comentários feitos pelos professores, a saber, o regente da turma e a pesquisadora. Ressalta-se que os nomes aqui utilizados são fictícios para resguardar a identidade dos participantes deste estudo.

5.1 Grupo que investigou derivadas em funções polinomiais (G1)

Jane, Ana e Carlos fizeram parte do grupo que estudou funções polinomiais com foco em máximos e mínimos, e a relação desses com as derivadas. Logo no início da apresentação, argumentaram sobre a importância das definições, apresentaram a definição formal de função polinomial, comentaram sobre máximos e mínimos e esclareceram que plotaram vários gráficos de funções polinomiais no *GeoGebra* com o intuito de observar e estabelecer relações entre as funções e suas derivadas primeira e segunda.

Função polinomial:

Uma função polinomial *f: R* →*R*de grau *n* é uma função da forma:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0;$$

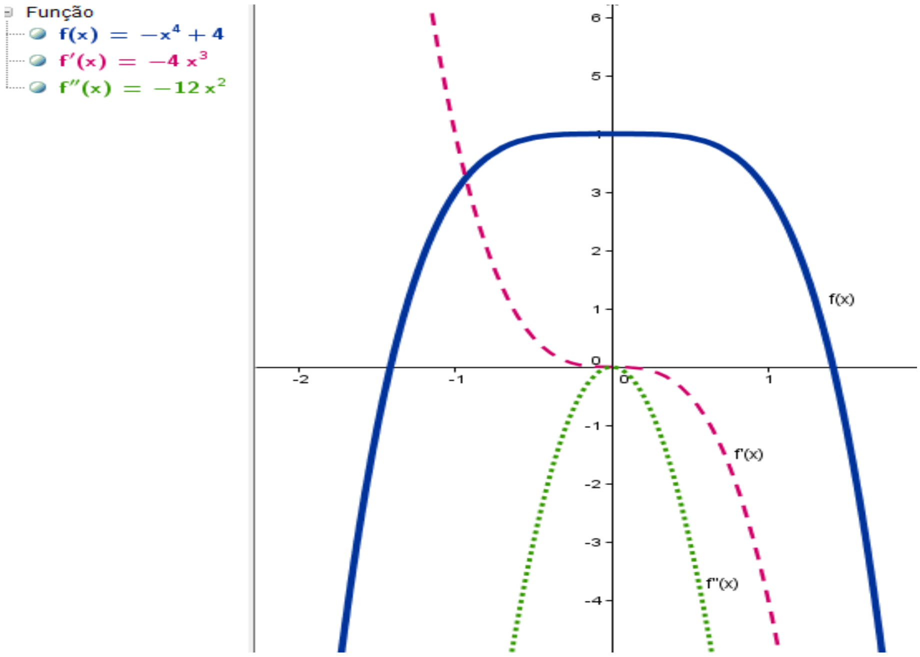
onde:

- *n* é o grau do polinômio;
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ são constantes reais $(a_n \neq 0)$;
- *x* é variável independente;
- *y = f(x)* é a variável dependente.

Fizeram testes com transformações de funções, realizando deslocamentos verticais e horizontais. A aluna Jane, baseada na forma gráfica da função, afirmou que a função polinomial de quarto grau e a de segundo grau são parábolas.

Pesquisadora:	*Qual é a função?*
Jane:	*Essa parábola é a função, e a derivada é essa aqui de azul.* [A aluna se refere à função $f(x) = -x^4 + 4$ e sua derivada; ver Figura20].
Professor:	*Isso aí é uma parábola?*
Jane:	*Sim, essa função formou uma parábola, olha aí a forma dela.*
Professor:	*Essa de azul aí?*[A de azul se refere à função$f(x) = -x^4 + 4$]. *É uma parábola? Qual é a função?*
Jane:	*A função?*
Professor:	*É, algebricamente.*
Jane:	*Menos x a quarta mais quatro. Observamos que, quando ela fica virada para baixo, a derivada segunda toca o eixo x.*
Pesquisadora:	*Qual é a derivada segunda dela?*
Jane:	*Essa de verde aqui. É uma parábola também.* [A de verde se refere à função $f''(x) = -12x^2$, representada no gráfico da Figura 20].

Figura 20 – Gráficos das funções f, f' e f'.



Fonte: Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a imagem conceitual corresponde ao que está associado ao conceito na mente do indivíduo e inclui todas as imagens mentais, processos e propriedades ligadas a ele, e nesse caso as formas gráficas das funções se apoiam nas afirmações da aluna. Suas experiências anteriores com a forma gráfica da parábola fundamentaram suas afirmações.

Também, nas conclusões do grupo, existem evidências de definições extraídas e definições estipuladas (EDWARDS; WARD, 2008).De acordo com os autores, as definições matemáticas são estipuladas, ao passo que a maioria das definições "linguagem cotidiana" são extraídas, ou seja, os conceitos são apreendidos a partir do uso dos significados em diversas situações e contextos.As definições conceituais matemáticas formais utilizam-se de símbolos para se referir a esses conceitos cujos significados, estipulados pela comunidade de matemáticos, devem ser comunicados por estes símbolos. Por sua vez, as definições extraídas referem-se ao uso de conceitos em uma variedade de contextos específicos.Assim, apresentamos o diálogo ocorrido com a aluna Jane, quando questionada pelo colega Guto, se a função polinomial de quarto grau era uma parábola.

Guto: *Eu tenho uma pergunta para fazer: a função de grau 4 é uma parábola*?

A comunidade matemática nos diz que a definição conceitual formal de uma função polinomial de segundo grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.Nesse questionamento, o aluno Guto se referia a essa definição conceitual formal, pois esta destaca o grau da função.

Jane:	*Quando a gente estava fazendo o trabalho eu achava que não, mas depois eu vi no GeoGebra que sim. Não fica uma parábola perfeita, mas é uma parábola sim.*

Seguindo o diálogo, a aluna Jane, para responder à pergunta de Guto, utiliza uma definição extraída, pois, para ela, a representação gráfica apresentada pelo *GeoGebra* visualmente tem a forma de uma parábola, mesmo incoerente com a definição conceitual formal, essa faz parte da sua imagem conceitual de parábola. Realizamos atividades (ver capítulo 4) com funções quadráticas antes desse estudo realizado pela aluna, e, em suas experiências prévias, ela utilizou essa representação em outra situação, e assim, atribuiu significados ao conceito conforme o seu uso em diversas situações e contextos.

Professor:	*Então, tem parábola perfeita e parábola nãoperfeita?*
Carlos:	*Tinha hora que ela dava uma entortadinha, mas é uma parábola, não é não?*[Gráfico similar à representação gráfica da função $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4$ na figura 16]
José:	*Se você mexer no zoom do gráfico você vai ver que parece, mas não é uma parábola.*
Pesquisadora:	*Quando é parábola?*
Jane:	*Agora eu já não sei. Eu achava que tudo era parábola.*
Professor:	*Vocês acham que, na utilização do GeoGebra, essa representação gráfica plotada, dá para realmente identificar se é ou não parábola sem olhar a função algébrica?*
Jane:	*Não dá não. Eu coloquei x^6 e deu parábola, quer dizer, eu achei que era parábola.*
Marcelo:	*Dá sim. Dá para saber a partir da derivada dela. Se a derivada não é uma reta, então não é uma parábola. Não basta só o GeoGebra, tem que saber a matéria.*

A resposta dada pelo aluno Marcelo, que é aluno repetente, assim como o aluno Guto, fundamenta-se em experiências prévias. Quando ele afirma que não basta só o *GeoGebra*, ou seja, não basta apenas a visualização, nem a definição extraída,entende-se que o aluno ressalta a importância da compreensão da matéria, nesse caso, a definição conceitual formal. O aluno compreendeu que a derivada de uma função polinomial de segundo grau é uma função polinomial de primeiro grau, ou seja, visualmente a derivada de uma função quadrática que gera o gráfico de uma parábola é uma função que gera o gráfico de uma reta. A interação entre a aluna Jane, que no momento estava apresentando o seminário, e os colegas, alunos repetentes, participantes da discussão, cooperou para uma ressignificação dos conceitos que estavam sendo abordados. Os alunos desse grupo apresentaram concepções fundamentadas em formas gráficas visualizadas no *GeoGebra*, que não correspondem à definição formal fundamentada na representação algébrica.

Ainda, de experiências prévias, se existe função quadrática completa e incompleta[4], existe certa lógica para existir também parábola perfeita e imperfeita, na imagem conceitual da aluna Jane. A parábola “não perfeita” é um exemplo de definição extraída, pois faz parte de um contexto específico, baseada em exemplos reais e extraída de um corpo de evidências, no caso de uma função quadrática “completa e incompleta”.

A construção de conceitos matemáticos pode partir de situações das quais o aluno tem algum conhecimento prévio, e esse geralmente está vinculado à aplicação e utilização. Os alunos trazem para a sala de aula, ou surgem durante as aulas, definições pessoais e imagens conceituais embasadas em suas experiências e percepções, por seremresultado de uma aprendizagem adquirida por meio de experiências e interações de cada indivíduo.

Segundo Tall e Vinner (1981), o desenvolvimento cognitivo de uma pessoa, associado a um conceito matemático, sucede da soma de todas as experiências integradas com esse conceito, ou seja,um conceito matemático não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como única referência pedagógica sua definição formal. É necessária uma variedade de ideias, todas associadas a ele, para que se forme o que chamam de imagem conceitual.

> Usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Nos diálogos apresentados, ressaltamos a ocorrência da categoria “discutindo as dúvidas apresentadas”, pois a discussão entre a aluna Jane, colegas e professores, em torno do conceito “Parábola”, foi constante, envolvendo argumentos de todos os envolvidos. Os episódios descritos nos levam à reflexão sobre as premissas básicas do interacionismo simbólico descritas por Herbert Blumer (1980). Para Blumer, “o ser humano orienta seus atos

---

[4] Na equação $ax^2+bx+c=0$, quando $b\neq 0$ e $c\neq 0$, dizemos que a equação do 2º grau é completa. Se pelo menos um dos coeficientes *b* e *c* é nulo, dizemos que a equação do 2º grau é incompleta. (Tudo é Matemática – 9º Ano. DANTE, 2008, p. 45).

em direção às coisas, em função do que elas significam para ele". Mesmo com o argumento dos professores e colegas sobre o que seria uma parábola, Jane continuou acreditando na possibilidade de ainda assim a função representar uma parábola, pois estava fundamentada no significado que essa representação tinha para ela. Percebemos isso quando argumentou que poderia não ser uma "*parábola perfeita*". Para o interacionismo simbólico, as pessoas interagem umas com as outras por meio de interpretação mútua das ações, em vez de somente reagir às ações um do outro. Suas respostas não são dadas diretamente às ações um do outro, mas baseadas no significado que eles atribuem a tais ações. Assim, interação humana é mediada pelo uso de símbolos e significados, através de interpretação, ou determinação do significado das ações um do outro. (BLUMER, 1980). As perspectivas interacionistas enfatizam os processos individuais e os sociais, e o desenvolvimento da compreensão pessoal dos indivíduos é concebido por meio de sua participação. De acordo com Godino e Llinares (2000), o aspecto central da perspectiva interacionista em relação ao significado é que esse é desenvolvido através da interpretação e interação. O significado que a aluna Jane tinha em relação ao conceito de parábola foi modificado durante a discussão em grupo, pois percebemos sua insegurança no conceito anterior quando diz: "Eu achei que era parábola". Para Blumer, o ser humano conhece as coisas pelos seus significados e esses são criados e modificados pela interação social. Nesse sentido, ele considera que:

> A peculiaridade consiste no fato de que os seres humanos interpretam as ações dos outros ao invés de meramente reagirem às ações dos outros. Suas respostas não são feitas diretamente à ação, mas, sim, baseadas no significado que dão a essa ação. (BLUMER, 1980, p.19).

Considerando, então, essa interação como forma deressignificação de conceitos, de acordo com (BLUMER, 1980), destaca-se a sugestão do aluno Guto, cuja reflexão a respeito da forma fatorada da função proporcionou à pesquisadora e à aluna Jane novas intervenções e redirecionamentos do conceito de parábola. Esse diálogo, que sucedeu à fala do referido aluno, está transcrito a seguir:

Pesquisadora:	*A função de quarto grau tem quantas raízes?*
Jane:	*Quatro raízes.*
Pesquisadora:	*Coloca uma aí no GeoGebra pra gente fechar essa parte aqui.*
Jane:	*Não sei.*
Guto:	*Coloca na forma fatorada, tipo:* $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

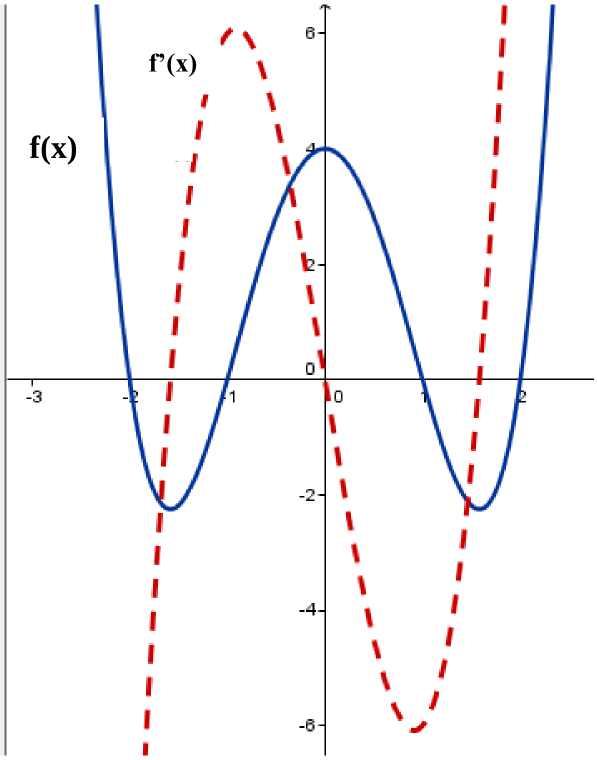
Devido aos questionamentos do aluno Guto em relação à função de quarto grau, discutimos também sobre a quantidade de raízes de uma função polinomial, e o grupo disse não ter achado nenhuma polinomial com quatro raízes reais.

Figura 21 – Gráfico de função de quarto grau e sua derivada

Função

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

$f'(x) = 4x^3 - 10x$



Fonte:Reprodução do trabalho sugerido pelo aluno Guto pela pesquisadora.

Professor:	*Isso mesmo, e aí? São duas parábolas?*
Jane:	*Não. Eu já entendi.*
Professor:	*Então, fechamos aqui.*

De acordo com os episódios descritos, acreditamos que, para a aluna Jane, as interações ocorridas entre colegas e professores foram fundamentais para a mudança da *imagem conceitual e definição conceitualpessoal* da funçãoquadrática. Através das interações, os alunos foram estimulados a ressignificar seus conhecimentos, construindo novos saberes. A categoria “Avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem)” fica evidente na interação do professor com a aluna, quando questionada se a função polinomial de quarto grau apresenta duas parábolas. Sua resposta (“eu já entendi”) nos mostra uma mudança de conceito, que foi acontecendo gradativamente por meio de argumentos de colegas e professores ao longo de sua apresentação.

De forma geral, percebemos a ocorrência de todas as categorias da análise nesse grupo, pois os alunos também transitaram entre as representações, principalmente a algébrica e a gráfica, e realizaram explorações e testes com funções e suas derivadas utilizando o *GeoGebra*.Foi notável a facilidade com que os alunos manipulavam as ferramentas do *software*, e essa habilidade trouxe dinamismo às interações.

Passaremos, a seguir, à descrição do grupo que investigou derivadas em funções logarítmicas, com foco no comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento.

5.2 Grupo que investigou derivadas em funções logarítmicas (G2)

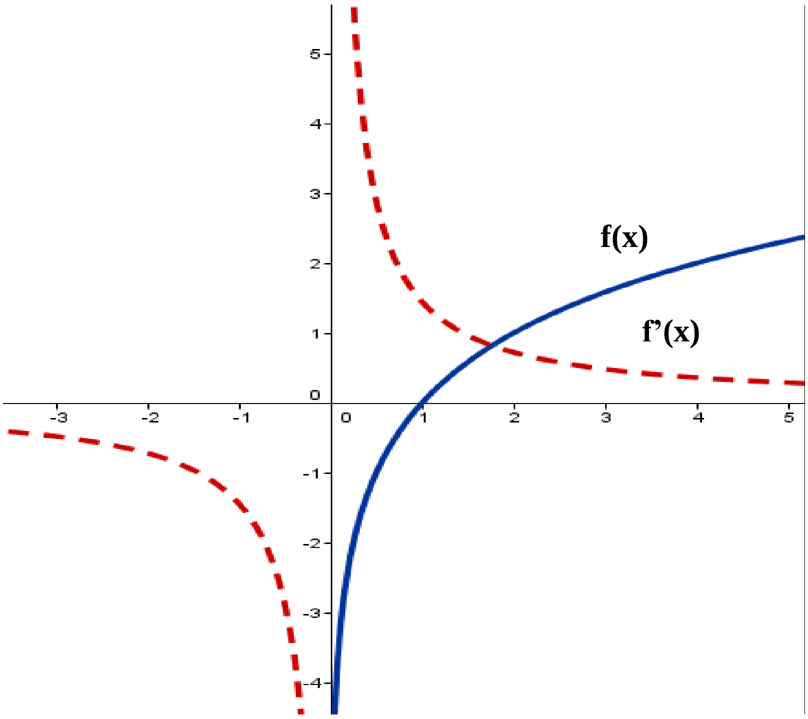
Participaram da apresentação desse grupo os alunosCaio, Pedro e Walter, que decidiram pesquisar sobre o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento de funções logarítmicas. Como no trabalho descrito na seção anterior, surgiram muitas dúvidas que enriqueceram as discussões. Fizeram transformações nas funções logarítmicas, gerando outras funções, com outros comportamentos, e vários aspectos foram discutidos, tais como: domínio, conjunto imagem, ponto de inflexão, ponto máximo e mínimo. Logo no início da apresentação, Caio plotou a função $f(x) = \log_2 x$ (ver Figura 22) e fez a leitura do gráfico de *f'(x)* no *GeoGebra*, considerando apenas o primeiro quadrante do plano cartesiano.

Pesquisadora: *Espere aí, quem é a função?*

A pergunta foi feita porque ele estava falando da função $g(x) = \log_{10} x$, mas no *GeoGebra* estava plotado $f(x) = \log_2 x$.

Caio: *A função é essa daqui ó. A função é a de azul* [representamos com linha sólida] *e a derivada é a vermelha*[pontilhada].

Figura 22 – Gráfico da função $f(x)=\log_2 x$ e $f'(x)=\dfrac{x^{-1}}{\ln 2}$



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

O aluno afirmava: "Eu percebi que se a função é crescente a derivada vai ser decrescente". Pedi para mostrar no GeoGebra como ele fazia essa leitura porque ele comentava a respeito da função derivada no primeiro quadrante, sem comentar a parte do gráfico que o *software* esboçou no terceiro quadrante (Figura 22).

Fiz o seguinte questionamento:

> Pesquisadora: *Se essa parte de baixo* [terceiro quadrante] *não faz parte da função derivada, você podia tirar ela daí, então.*
> Caio: *Não consigo tirar.*
> Pesquisadora: *Entendem a dúvida de Caio?*
> Pedro: *Sim, se a parte de baixo faz parte ou não da função derivada.*
> Jane: *Lógico que faz, uai, como que você tira uma parte da função assim?*

O que estava sendo questionado era: Se o domínio da função $f(x)=\log_2 x$ é o conjunto de números reais positivos, sua derivada pode ter um domínio que possui além de reais positivos, os reais negativos? Como mostra o gráfico no *GeoGebra*, a função $f(x)=\log_2 x$ possui domínio $D=\{x\in R, x>0\}$, sua derivada pode existir somente para valores de x > 0, ou seja, não tem como determinar a derivada de uma função para valores em que não existe o domínio da função.[5]

Nesse recorte, observamos que a imagem conceitual do aluno Caio em relação ao gráfico da função derivada desta função corresponde ao que está associado apenas à curva no primeiro quadrante, pois, além de não fazer a leitura da parte do gráfico da função que aparecia no terceiro quadrante, o aluno tentou apagá-la com recursos do *software*. Não conseguindo, afirmou: “Não consigo tirar”. Isto é, a forma gráfica da função faz parte das imagens mentais que se manifestaram em suas afirmações. Houve discussão entre os alunos sobre o domínio da função $f'(x)=\frac{x^{-1}}{\ln 2}$.

Pesquisadora:	*Qual o domínio da função derivada?*
Marcelo:	*Domínio Real. Essa função é logarítmica? Porque, se ela for logarítmica, o domínio dela é maior que 0.*
Luna:	*A variável independente não está no Log, não está dentro do Log.* [Isto é, a variável x não é o logaritmando].
Pesquisadora:	*A derivada de f(x) não é uma função logarítmica?*
Jane:	*Não, porque ln2 ali é constante, então aquele denominador se torna uma constante também. Então, não é logaritmo por causa disso, pra ser logaritmo o x... seria o mesmo que x sobre 2, ou 1 sobre x ln 2.*
Pesquisadora:	*Ln 2 é um número?*
Jane:	*Sim, é uma constante, seria o mesmo que 1 sobre 2x por exemplo.*[A aluna considera ln2 igual ao número 2, e assim estabelece a seguinte igualdade: $\frac{x^{-1}}{\ln 2}=\frac{1}{2x}$]
Pesquisadora:	*Aproximadamente quanto?*
Jane:	*Não sei.*
Pesquisadora:	*Então, a derivada de logaritmo de x na base 2 não é uma função logarítmica? O domínio dela pode ser real? Tem alguma restrição para o domínio da função?*
Caio:	*x não pode ser 0, porque está embaixo*. [x não pode ser zero porque está no denominador].
Pesquisadora:	*Então, esse gráfico que representa a função derivada, vocês acham que é só a parte de cima? Só a parte de baixo ou os dois?* [a parte de baixo se refere ao 3º quadrante, e a parte de cima ao primeiro quadrante].

[5] Dado qualquer número *x* para o qual esse limite exista, atribuímos a *x* o número *f’(x).* Assim, podemos considerar *f’* como uma nova função, chamada ***derivada de f*** e definida pela equação $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Sabemos que o valor de *f’* em *x, f’(x),* pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *(x, f(x)).* A função *f’* é denominada derivada de *f*, pois foi “derivada” a partir de *f* pela operação-limite na equação $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. O domínio de *f’* é o conjunto $\{\ x/\ f'(x)\ \ existe\}$ e pode ser menor que o domínio de *f*. (STEWART, 2010, p. 140).

Esse diálogo nos leva ao seguinte questionamento: “Se o domínio da função é o conjunto de números reais positivos, sua derivada pode ter um domínio que possui além de reais positivos, reais negativos?”. Observamos que não há uma compreensão dos estudantes em relação ao domínio da função $f'(x)=\frac{x^{-1}}{\ln 2}$ eà derivada da função $f(x)=\log_2 x$.

Outro aspecto que podemos destacar é a participação da aluna Jane, do grupo anterior, que traz importantes conceitos em relação ao logaritmo natural, e do aluno repetente Marcelo, que questiona se a função é logarítmica e especifica o domínio. A categoria “Apresentando definição de conceitos” se destaca nesse grupo, e esclarecemos que, no início da apresentação, o aluno Caio apresentou um *slide* com a definição de função logarítmica e seu domínio: “Toda função definida pela lei de formação***f(x) = log$_a$x*, com *a* ≠ 1 e *a*> 0** é denominada função logarítmica de base**a**. Nesse tipo de função, o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais”. Fundamentados nessa definição, Marcelo e Jane apresentam questionamentos se a função derivada seria ou não logarítmica, e argumentam sobre seu domínio. Portanto, a interação ocorrida entre os participantes propiciou a apresentação de definição de conceitos, possibilitando esclarecimentos e ressignificação da aprendizagem, avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem).

Após essa discussão, Caio resolveu mostrar a função $h(x)=\log_x 2$ e as conclusões a que chegou (ver figura 23). Esse estudo foi individual e desvinculado dos estudos dos outros membros do grupo, que estavam focados nas explorações que podiam realizar na função $f(x)=\log_2 x$. Caio, testando possibilidades, resolveu explorar a função $h(x)=\log_x 2$, e nessa função encontrou uma constante, o valor 0,14 (aproximadamente), fazendo a interseção entre a derivada segunda de *h(x)* e o eixo x. Ele estava tentando descobrir qual era o ponto máximolocal da derivada primeira; para isso, determinou a derivada segunda e percebeu que ela tinha uma raiz. Resolveu calcular essa raiz, ou seja, a interseção entre o eixo x e a derivada segunda.

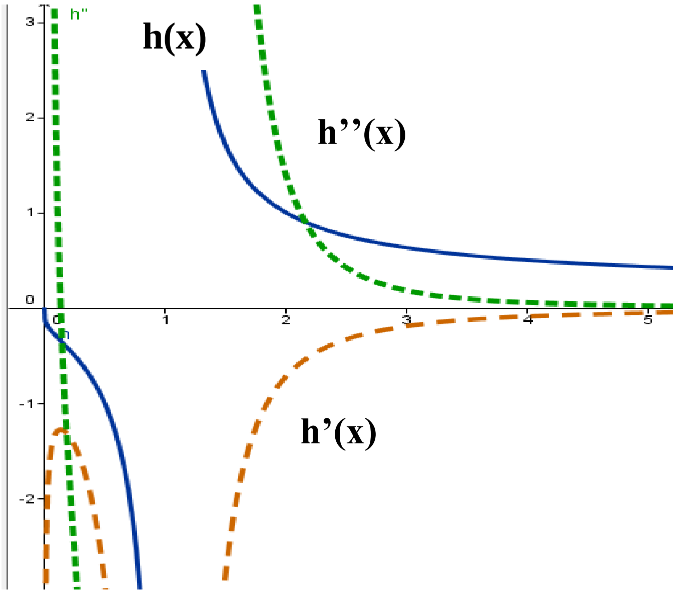
Figura 23 – Gráfico da função $h(x) = \log_x 2$, $h'(x)$ e $h''(x)$

Função

$$\mathbf{h(x) = \log_{\mathit{x}}(2)}$$

$$\mathbf{h'(x) = -\frac{\mathit{ln}\,(2)}{\mathit{ln}(x)^2 x}}$$

$$\mathbf{h''(x) = \frac{\mathit{ln}\,(x)\,\mathit{ln}\,(2) + \mathit{ln}\,(2)}{\mathit{ln}\,(x)^3\,x^2}}$$



Fonte:Reprodução do trabalho do aluno Caio pela pesquisadora.

Caio: *Porque ela* [ela refere a h'(x)] *tem essa voltinha aqui, ela tem uma concavidade bem pequena do 0 até 1, depois ela fica aqui, ou seja, estabelecemos um ponto máximo e eu fiquei curioso pra saber que ponto era esse, aí eu peguei a derivada dela* [derivada de h'(x)] *e calculei a interseção dela* [h''(x)] *com o eixo x pra saber qual era o ponto máximo.*[Ele calculou o ponto de interseção entre o eixo x e h"(x)]. *Deu 0,14. Ela* [h'(x)] *vai ser crescente até o 0,14 e decrescente até a abertura.*

Caio estava analisando os intervalos onde *h'(x)* era crescente e decrescente; para isso, movimentou a janela de visualização do *software* para saber qual era o ponto mínimo da função *h'(x),*que para ele era uma parábola. Nas funções do tipo $h(x) = \log_x a$, que não é uma função logarítmica,o aluno disse ter testado várias funções variando o número*a*. Quando ele diz até 100 mil, quer dizer que plotou no *GeoGebra*a função $h(x) = \log_x 100000$. Também fez outras funções desse tipo, variando o valor atribuido à constante *a*.Explorando/testando funções e suas derivadas utilizando o *GeoGebra*é uma das categorias que emergiu a partir dos códigos da análise. Essa descoberta despertou a curiosidade de muitos alunos, pois nesse momento houve uma grande discussão em sala de aula. Alguns alunos que estavam com o notebook faziam testes para valores diferentes no logaritmando. Estavam interessados em descobrir se essa interseção com o eixo x sempre seria 0,14. A turma deu opinião, consultaram tanto o *GeoGebra* quanto os cadernos para saber a derivada de uma função logarítmica. Caio colocou na tela do *GeoGebra* a função $h(x) = \log_x 100000$ e fez a interseção da derivada segunda com o eixo das abscissas, encontrando o número 0,14.

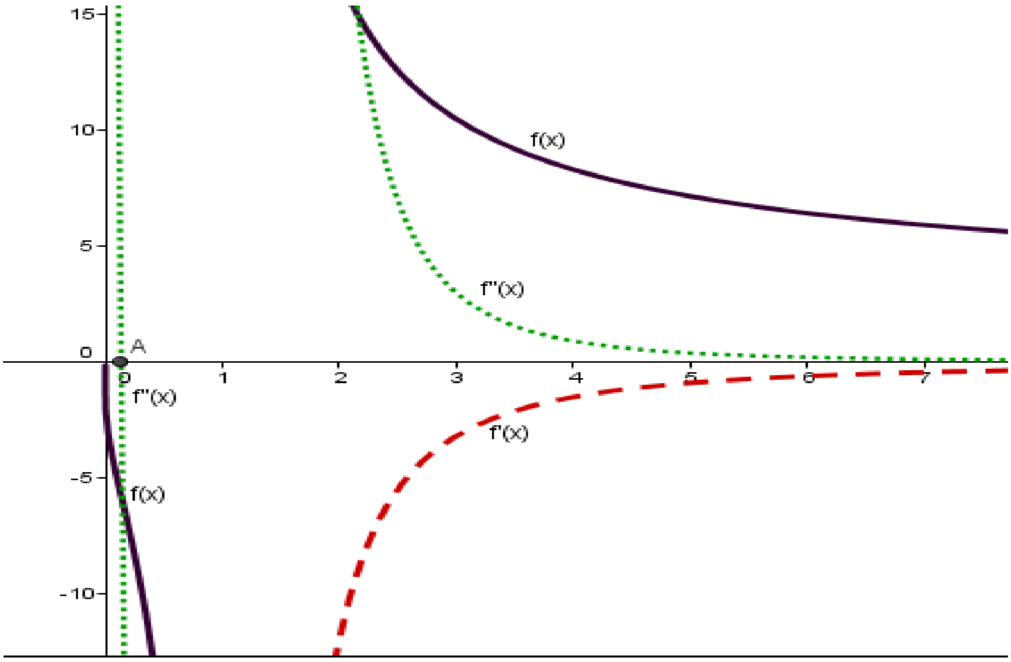
Questionei com a turma o que a derivada segunda diz da função, mas as respostas que obtive não se referiam às relações entre a derivada segunda e a função, e sim com a derivada primeira e segunda. Caio se preocupava com o número 0,14, mas insistino questionamento sobre o que a derivada segunda nos diz sobre a função *h*, porque havíamos explorado esses conceitos na oitava atividade, descrita no capítulo 4. Pedro dizia que a raiz da derivada segunda mostra que a função tem um ponto de inflexão, e Walter afirmava que a derivada segunda mostra se a concavidade é para cima ou para baixo. A derivada segunda nos remete à concavidade da função e à existência de um mínimo ou máximo local. Toda essa discussão a respeito do número 0,14 trouxe uma motivação para buscar a definição conceitual formal de vários conceitos envolvidos na situação-problema, pois, até então, os alunos se referiam apenas às suas imagens conceituais. De acordo com Vinner (1991, p. 12), na prática, a definição conceitual não é evocada durante o processo de resolução de um problema, pois os hábitos de pensamentos cotidianos se sobrepõem à necessidade de consultar a definição formal. Devido à curiosidade em relação ao número 0,14, os estudantes recorreram às definições formais de máximo e mínimo local, número crítico e máximo e mínimo absoluto. Vinner (1991, p. 21), em relação ao papel da definição na matemática, informa-nos que, “enquanto a referência à imagem conceitual resultar em uma solução correta, o estudante permanecerá se referindo à imagem conceitual, já que esta estratégia é simples e natural”. Enquanto os alunos estavam interagindo com o aluno Caio em relação à sua descoberta, estavam firmados em suas imagens conceituais, mas, quando se envolveram na busca de explicações para a existência do número 0,14, buscaram a definição estipulada de cada conceito, pois precisavam de significados específicos a essas definições formais.

Caio continuava interessado em descobrir sobre a razão da existência do número 0,14 e suas relações com a derivada primeira e segunda de uma função,e a discussão continuou com questionamentos feitos pelo professor.

Caio:	*Eu testei até o 100 mil. Não dormi à noite, fiz várias funções e sempre achei esse 0,14.*
Professor:	*Mas esse é o ponto máximo? Se você tomar como referência que a função é a derivada primeira, e, se você derivá-la novamente, pega a derivada segunda. A derivada segunda indica o máximo ou o mínimo. Se você procurar o máximo da derivada primeira, você vai encontrar esse valor aí?*
Caio:	*Vou.*
Professor:	*Qual é o problema com esse número?*

Caio:	*Não entendo por que sempre dá 0,14.*
Pedro:	*É mágica.*
Professor:	*Toda função, como? Se modificar o quê na função?*
Caio:	*Se modificar aqui ó, o logaritmando. Vou colocar outra aqui para vocês verem.*

Figura 24 – Gráfico da função $f(x) = \log_x 100000$, $f'(x)$, $f''(x)$ e o ponto A(0,14; 0)



Fonte:Reprodução do trabalho do aluno Caio pela pesquisadora.

Considerando o papel das definições, retomamos os registros do aluno Caio, destacando a função $f(x) = \log_x 100000$, que esse aluno representou no *GeoGebra*, e as derivadas primeira e segunda dessa função: $f'(x) = -\dfrac{\ln(100000)}{\ln(x)^2 x}$ e $f''(x) = \dfrac{\ln(x)\ln(100000) + 2\ln(100000)}{\ln(x)^3 x^2}$, respectivamente. O ponto A (0,14; 0) é a interseção entre o eixo das abscissas e a derivada segunda da função *f*.

Caio:	*Vejam isso aqui ó. Isso aqui é a função log de 100000 na base x. Vou calcular a derivada dela. A derivada vai ter o mesmo comportamento das outras funções que eu fiz. Agora vou fazer a derivada segunda. Olha aqui a interseção da derivada segunda com o eixo x. Igual a 0,14 de novo. Não entendi porque sempre dá 0,14. A partir de 100000 eu assumi que sempre será 0,14.*
Pesquisadora:	*O que vocês acham disso, turma?*
Pedro:	*Bruxaria.*

Todo o episódio descrito acima, com a riqueza de detalhes e a interação entre os participantes sobre as diversas definições e conceitos construídos com a experiência vivenciada pelo aluno Caio nos testes realizados, remete-nos ao papel das definições no ensino aprendizagem de matemática. Tentando descobrir qual era o ponto máximo da derivada primeira na função $h(x) = \log_x 2$, Caio determinou a derivada segunda e percebeu que ela tinha uma raiz. Resolveu calcular essa raiz, ou seja, a interseção entre o eixo x e a derivada segunda, encontrando a constante 0,14. Esse fato o levou a testar ideias, envolvendo conceitos importantes relacionados às funções e suas derivadas, despertando e motivando também vários alunos que participaram das discussões.Vinner (1991, p. 7), tomando como exemplo a forma como os alunos compreendem o valor absoluto na matemática, afirma o seguinte:

> quando decidindo sobre a pedagogia do ensino de matemática, tem-se que levar em conta não só questões sobre como se espera que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem aqueles conceitos.

Acreditamos que a maneira como os conceitos de funções e suas derivadas foram construídos através dos testes realizados pelo aluno Caio foi significativa, e nesse grupo destacamos duas categorias imprescindíveis ao estudo da matemática: “Explorando/Testando funções e suas derivadas utilizando o *GeoGebra*” e “Avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem)”. Percebemos o avanço na compreensão de alguns estudantes quando o professor retomou a discussão sobre funções logarítmicas, pois foram exploradas, pelo grupo, no *GeoGebra* funções do tipo $f(x) = \log_a x$ e do tipo $f(x) = \log_x a$. Perguntamos aos alunos do grupo se existe alguma diferença quandoa variável é o logaritmando ou a base do logaritmo. Para responder aos questionamentos do professor, os alunos recorreram à definição formal de função logarítmica, plotaram no *GeoGebra* a função $f(x) = \log_x 2$, e analisaram o domínio e o conjunto imagem. Foi, então, que perceberam que a função $f(x) = \log_x 2$ não atendia aos mesmos critérios de uma função do tipo $f(x) = \log_a x$ em que $a > 0$ e $a \neq 1$. Embora $f(x) = \log_x 2$ não seja uma função logarítmica,seu domínio serefere à base x, portanto o domínio é x > 0 e x ≠ 1.Vinner (1991) afirma que definições podem ter papéis extremamente importantes, não apenas porque interferem na formação da imagem conceitual, mas porque frequentemente têm um papel crucial em atividades cognitivas.

Quando o aluno Caio diz: “Eu testei até o 100 mil. Não dormi à noite, fiz várias funções e sempre achei esse 0,14”, percebemosinteresse e persistência em descobrir se a interseção da derivada segunda com o eixo x daquele tipo de função seria sempre a constante 0,14. As interpretações que o aluno faz sobre esse número, as interações ocorridas, as imagens conceituais do aluno em torno das definições abordadas nos levam a considerar o significado na concepção interacionista. Blumer (1980, p. 117) nos diz, na terceira premissa, que “os significados são manipulados por um processo interpretativo (e por este modificados) utilizado pela pessoa ao se relacionar com os elementos com que entra em contato”.A busca do aluno Caio por uma resposta, um significado, o levou a esse processo interpretativo consciente e reflexivo. Podemos observar que o aluno Caio manipulou os significados em relação à imagem conceitual da segunda derivada de uma função, no diálogo:

Pesquisadora:	*Essa função tem ponto de inflexão? Se isso for um ponto de inflexão, o que a derivada segunda nos diz? A derivada segunda fala alguma coisa?*
Pedro:	*A raiz da derivada segunda mostra que tem um ponto de inflexão.*
Walter:	*Mostra se a concavidade é para cima ou para baixo.*
Pesquisadora:	*Quando calculamos a derivada segunda, o que acontece mesmo?*
Caio:	*A intercessão da derivada segunda com o eixo x é 0,14. Esse foi o ponto máximo da derivada.*

Para Caio, a imagem conceitual da derivada segunda dizia mais que um ponto de inflexão ou a forma da concavidade. Para Blumer (1980), os objetos passam a ter significado para a pessoa quando há uma interpretação consciente desse objeto. O autor afirma:

> O agente seleciona, modera, susta, reagrupa e transforma os significados sob o ponto de vista da situação em que se encontra e da direção de seus atos. Por conseguinte, a interpretação não deveria ser considerada como uma mera aplicação automática de significados existentes, mas sim como um processo formativo em que os significados são utilizados e trabalhados para orientar e formar as ações. Deve-se levar sempre em consideração que os significados desempenham seu papel na ação por intermédio de um processo de autointeração. (BLUMER 1980, p. 122).

De acordo com o autor, o interacionismo simbólico considera que o significado é produzido a partir do processo de interação humana, como produto social, e que o “uso de significados por alguém em plena ação envolve um processo interpretativo”. Seguindo esse raciocínio, podemos dizer que o aluno Caio se envolveu nesse processo interpretativo envolvendo diversos conceitos sobre funções e suas derivadas. No interacionismo simbólico, esse processo se chama mente. Para Haguette (1997, p. 32), “a mente é concebida por Mead como um processo que se manifesta sempre que o indivíduo interage consigo próprio usando símbolos significantes”. De acordo com os episódios, constatamos que as interações ocorridas foram fundamentais para a interpretação e construção de significados, acentuando a importância das definições nos estudos realizados pelos grupos.

Antes de encerrar a apresentação do grupo, o professor retomou a discussão sobre a descoberta do número 0,14, esclarecendo a necessidade de se fazer uma análise algébrica para verificar se as conclusões testadas empiricamente são válidas em qualquer situação. Explicou sobre conjecturas em matemática e discorreu sobre algumas descobertas realizadas por matemáticos ao longo da história.

5.3 Grupo que investigou derivadas em funções exponenciais (G3)

Seis alunos participaram desse grupo que foi formado pela junção de dois grupos, e apresentaram o trabalho em duas partes: a primeira parte foi apresentada pelos alunosAlice, Miguel e Fábio, e a segunda parte pelos alunos Elen, Bela e Márcio. Os grupos realizaram estudos separadamente, e se organizaram numa única apresentação. Os estudos foram sobre o comportamento da função derivada de funções exponenciais, com o objetivo de encontrar pontos máximos e mínimos, crescimento e decrescimento, e ponto de inflexão. Mostraram e explicaram o conteúdo dos seguintes *slides* no início da apresentação:

> **DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL**
>
> Seja $a \in R,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$. Chamamos de Função Exponencial a função definida por $f(x) = a^x$. A função exponencial é também definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, isto é: $\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$.

As funções logarítmicas $f(x) = \log_a x$, em que a base a é uma constante positiva, são inversas das funções exponenciais, e esse fato foi comentado na leitura do *slide* pelos alunos do grupo, mas não observaram o significado da função logarítmica natural e do número ***e***. Se a função exponencial for definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, teremos apenas a base ***e***, portanto fica incoerente com $a \in R,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$. A função exponencial é também definida como sendo a inversa da função logarítmica natural, isto é: $\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$.

O próximo *slide* se refere ao domínio e imagem da função exponencial. Ressaltamos que os alunos preferiam consultar *sites* na internet ao invés de consultar o livro adotado. Percebemos a redundância na notação apresentada no slide do grupo: $\Re$ =]-∞, + ∞[e $\Re_{+}^{*}$ =]0, + ∞[.

Domínio e Imagem da função exponencial

Domínio: $\Re$ =]-∞, + ∞[

Imagem: $\Re_{+}^{*}$ =]0, + ∞[

No início da apresentação do grupo, não entendemos o porquê da definição formal de máximo absoluto e máximos e mínimos locais. Decidimos aguardar e não questionamos esse fato, pois o aluno apenas leu a definição sem explicar do que se tratava.

Máximo absoluto

- Uma função ***f*** tem máximo absoluto em ***c*** se ***f(c)*** ≥ ***f(x)*** para todo ***x*** em **D**, onde **D** é o domínio de ***f.***
- O número ***f(c)*** é chamado valor máximo de ***f*** em **D.**

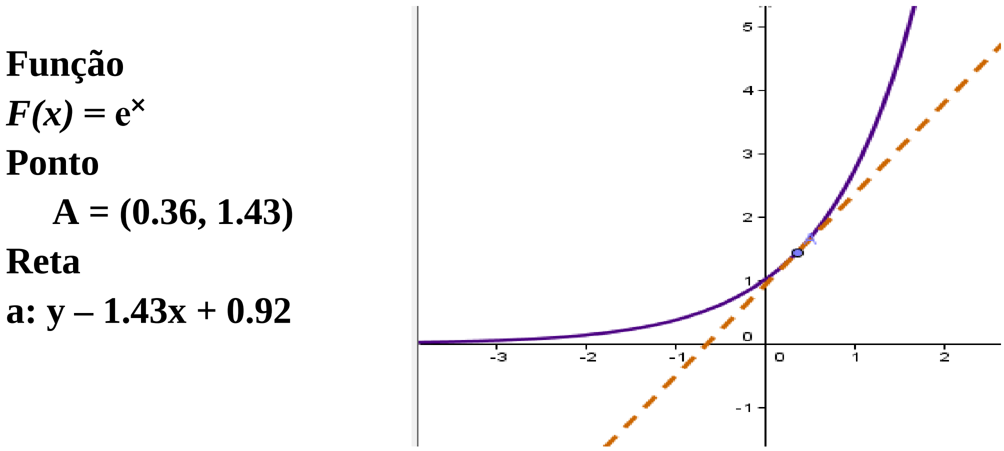
Máximos e mínimos locais

Teste da segunda derivada

Suponha que ***f''*** seja contínua na proximidade de c. Se ***f'(c) = 0 e f'' > 0***, então ***f*** tem mínimo local em ***c***. Se ***f'(c) = 0 e f''(c) <0***,então ***f*** tem máximo local.

Após a leitura de cada *slide*, a equipe apresentou no *GeoGebra* o gráfico da função $f(x) = e^{x}$, com o objetivo de mostrar que a função exponencial não tem ponto máximo e nem mínimo. Utilizando o controle deslizante, deslizaram uma reta tangente ao longo da curva para mostrar que a função não toca o eixo x (ver figura 25).

Figura 25 –Gráfico da função $f(x) = e^x$ e reta tangente



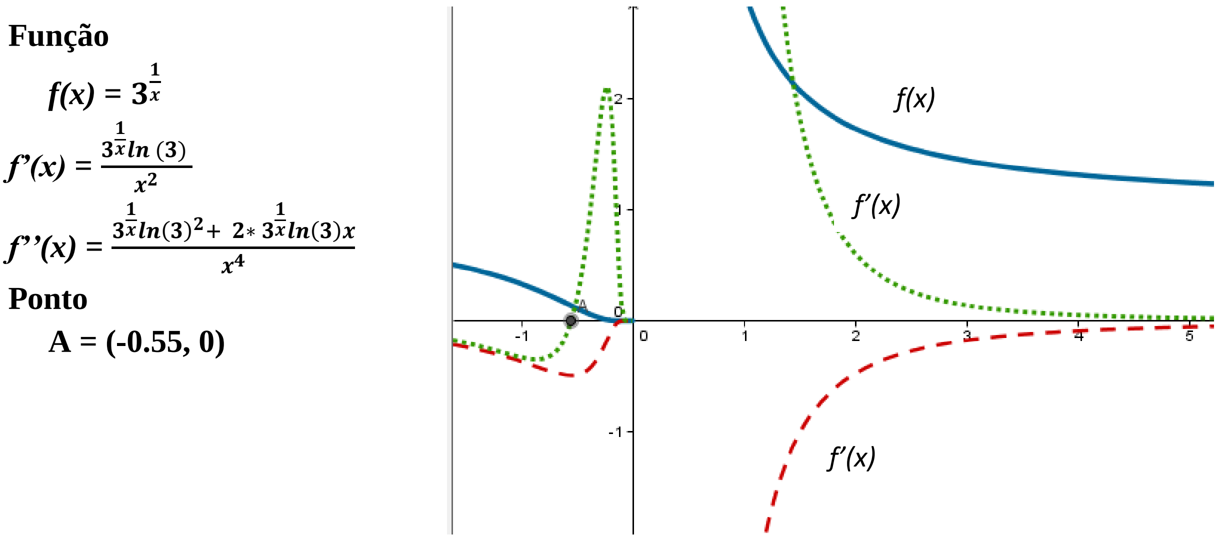
Fonte: Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

Alice:	*A equipe de polinomiais provou que isso realmente acontece, mas isso não acontece na exponencial, porque a exponencial não tem raízes. [A aluna se referia ao trabalho apresentado pela equipe que apresentou funções polinomiais, que mostrou pontos máximos e mínimos na função polinomial]*
Miguel:	*A gente tentou de tudo; pesquisamos a teoria para poder entender isso aqui. Era uma lei, estava definido, então fizemos de tudo para encontrar. [Encontrar uma teoria que mostrasse ponto máximo e mínimo, e/ou ponto de inflexão especificamente na função exponencial].*
Alice:	*Plotamos também no GeoGebra para ver o que a segunda derivada dizia. Se acontecia a mesma coisa que acontecia nas polinomiais.*
Miguel:	*Para conseguir um máximo ou mínimo, tinha que ter a primeira derivada igual a zero.*
Alice:	*Nós plotamos esse gráfico aí, e movimentamos várias vezes a função, e observamos que a derivada não muda. [A derivada não muda porque a derivada da função $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x$].*
Miguel:	*Fizemos a mesma coisa que as outras equipes, somamos e diminuímos constantes. Muda os valores, mas a derivada não altera. Nenhuma derivada a gente consegue dar zero, não toca o eixo x. Fizemos um zoom e aproxima bastante, mas não toca o eixo. Colocamos uma reta tangente para tentar provar que não toca.*
Miguel:	*Como não conseguimos encontrar uma derivada que toca o eixo x, concluímos que a função exponencial não tem ponto máximo ou mínimo.*

A conclusão de Miguel foi que, se a derivada não toca o eixo x, a função não tem ponto máximo ou mínimo. Após essa conclusão, a outra parte da equipe apresentou o resultado de seus estudos em relação a pontos de inflexão, que foi acrescentado após a definição do objetivo original do quadro. Começaram com o seguinte questionamento para a turma:“É possível haver ponto de inflexão em uma função exponencial?”.

Nesse momento, a maioria da turma se pronunciou como não sendo possível. Então, o aluno Márcio apresentou no *GeoGebra* a função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ como um exemplo de função exponencial, e mostrou que, mesmo não tendo ponto máximo ou mínimo, a função apresentava ponto de inflexão.

Figura 26 – Gráfico da função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$, *f’(x)*, *f’’(x)* e o ponto A



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

Márcio: *Vejam bem essa função aqui: 3 elevado a um sobre x. Quando fizemos a segunda derivada dela, obtivemos uma raiz aqui, aproximadamente -0,55* [ver ponto A no gráfico]. *Isso prova que uma função exponencial, mesmo não tendo ponto máximo ou mínimo, tem ponto de inflexão.*

Bela: *Em tudo que a gente pesquisou, nós não achamos uma função exponencial que tivesse ponto de inflexão. Só que a gente achou isso em um exercício do James Stewart, que mostra que tem; temos as referências.*

A aluna Bela se referia ao exemplo 8 apresentado no *Livro de Cálculo* de James Stewart (2010, p. 274).

Exemplo 8- Use a primeira e segunda derivada de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

Questionados a respeito de por que não utilizaram o mesmo exemplo do livro, disseram que a função exponencial tinha de ter base numérica e o número ***e*** era letra e não número, por isso trocaram a letra ***e*** pelo número 3 na função. Pelo fato dos membros desse grupo terem realizado estudos separadamente, essa justificativa foi dada por um aluno que não participou da apresentação do gráfico da função $f(x) = e^x$ na Figura 25, portanto passou despercebido. Seguiu-se uma discussão entre os alunos, e este foi convencido pelos colegas que o número ***e*** representava o número de Euler,que é aproximadamente2,71828, portanto poderia ter sido usado como base para funções exponenciais. Não nos estendemos nessa discussão, e o professor retomou com a seguinte pergunta:

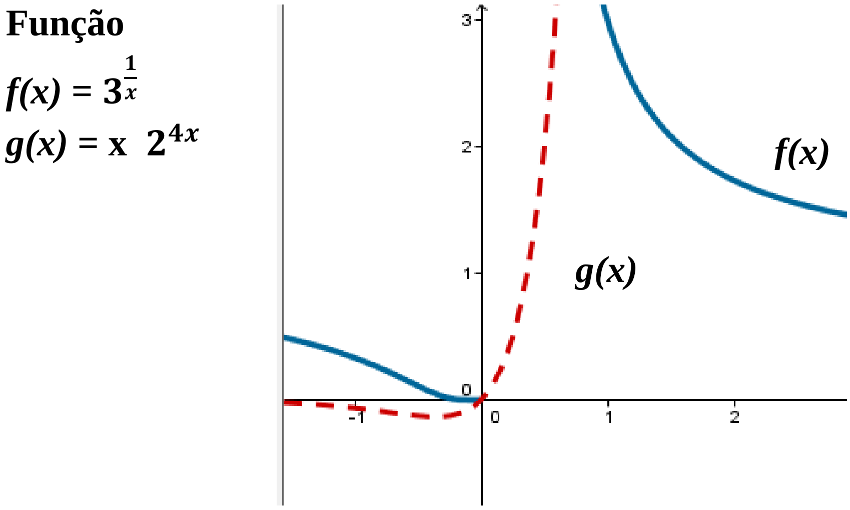
Professor: *Qual é a função mesmo?*
Márcio: $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$.
Pesquisadora: *Antes do James Stewart, vocês achavam que não tinha ponto de inflexão, é isso?*
Márcio: *Até hoje de manhã, a gente acreditava que não existia essa função.*
Bela: *Na verdade, é o seguinte: nós encontramos um artigo de uma universidade federal fluminense, que achamos seguro e a gente viu uma função com ponto de inflexão, e ficamos em dúvida se era exponencial.*
Pesquisadora: *Vocês mudaram de opinião quantas vezes?*
Bela: *Mudamos umas dez vezes ou mais. Mas aí, hoje de manhã, depois que vimos isso no livro do James Stewart, acabou a dúvida, pois o livro dele é confiável; é o livro do professor.*
Guto: *Desculpa perguntar agora, mas essa função é exponencial?*
Márcio: *Essa aqui é;* $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ *é exponencial.*
Marcelo: *Não é irracional não?*
Pesquisadora: *É exponencial, racional ou irracional?*
Márcio: *O critério para ter uma função exponencial é ter uma base elevada a um expoente x. Aqui nós temos a base 3 e o expoente* $\frac{1}{x}$. *O expoente é considerado como uma variável, então, ela é uma função exponencial.*

A maioria dos alunos estava envolvida nas discussões sobre a função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$. O grupo que realizou estudos sobre funções irracionais falava que a função era irracional, e o grupo que estudou sobre polinomiais falava que era polinomial. Recorriam às definições e defendiam seu ponto de vista, e, mesmo questionados pelo professor, mantinham a posição que a função apresentava características de uma exponencial. Fundamentado na definição de função exponencial apresentada no início da exposição do trabalho(seja *a ϵ R, a > 0 e a ≠ 1*, chamamos de Função Exponencial a função definida por $f(x) = a^x$), o aluno estava convicto de que a função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ era exponencial. Esse episódio nos remete às conclusões de Vinner (1991) em relação ao papel da definição na matemática. Esse autor considera que existe um problema sério na aprendizagem da matemática em torno da compreensão de definições, especialmente no que se refere ao conflito entre a estrutura da matemática e os processos cognitivos de aquisição de conceitos matemáticos. Quando o aluno Márcio afirma: “O critério para ter uma função exponencial é ter uma base elevado a um expoente x”,ele estava baseado na definição formal de função exponencial. Ele observa a base 3, e o expoente $\frac{1}{x}$,e conclui que a função é exponencial. Nesse caso, ele não levou em consideração que $f(x) = a^x$ é diferente de $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$.Ou seja, ter a variável no expoente não é o equivalente de ter a variável como expoente. O aluno conhecia e enunciava a definição formal de função exponencial, e até a usava para fundamentar suas conclusões, no entanto não compreendia o significado matemático formal de $f(x) = a^x$, e, nesse caso, podemos afirmar que apenas conhecer a definição formal não garante a sua compreensão. Vinner (1991, p.6) também corrobora essa ideia ao afirmar: “Nós assumimos que adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber a definição conceitual de cor não garante o entendimento do conceito”.

Professor:	*A equipe vai continuar mantendo que é exponencial?*
Bela:	*Nós fizemos o trabalho todo afirmando que é.*
Professor:	*Então, enxergando assim a definição, vocês continuam achando que é exponencial, é isso?*
Márcio:	*Sim*
Pesquisadora:	*Então, vamos dar uma olhada no GeoGebra. Se vocês plotarem o gráfico dela, vai ser de uma exponencial?*
Bela:	*Eu vejo o gráfico de uma exponencial sim.*

O aluno voltou para o *GeoGebra* e plotou o gráfico das seguintes funções:

Figura 27 – Gráfico da função *f* e da função *g*



Fonte:Reprodução do trabalho do grupo pela pesquisadora.

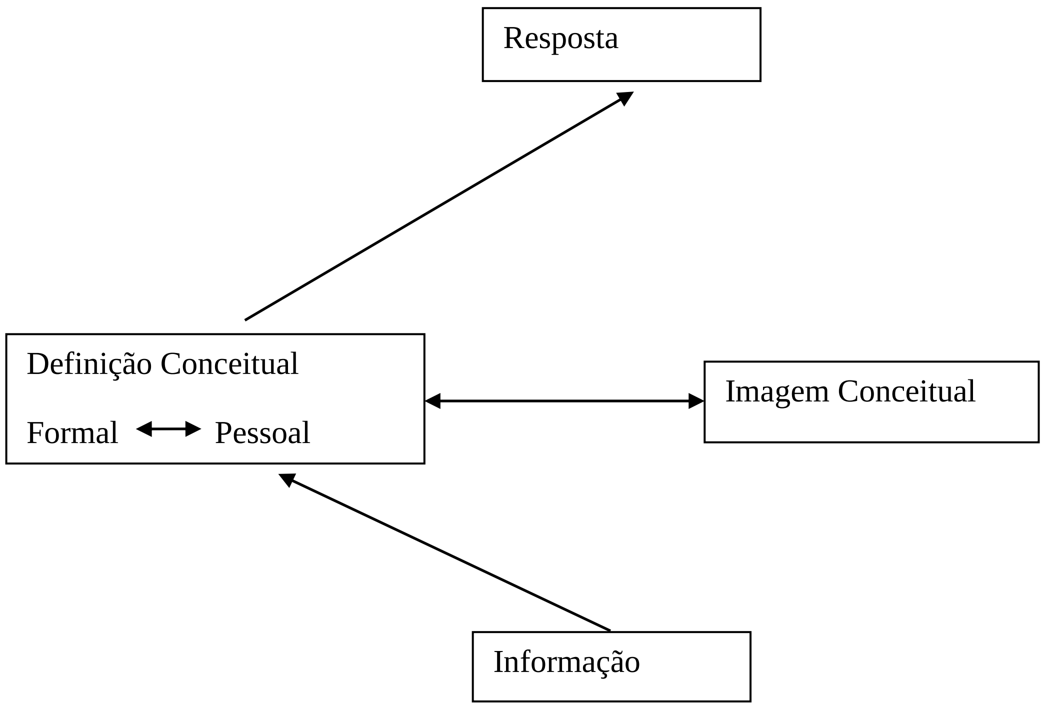
Na análise dos dois gráficos, seguiu-se a seguinte discussão:

> Pesquisadora: *Como é o gráfico de uma função exponencial? Volta o gráfico lá. Tem uma coisa também que não entendo Márcio. Por que você afirma que* $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ *é exponencial e* $f(x) = x.2^{4x}$ *não é? Qual a diferença?*
>
> Márcio: *Analisamos de acordo com a definição: a primeira tem uma base e a variável está no expoente. Já a segunda, a variável está no expoente, mas também está na base.*
>
> Professor: *Ok, mas veja graficamente: ela parece uma função exponencial?*
>
> Márcio: *Eu estou enxergando uma função exponencial sim, olha aqui a curva, é idêntica.* [O aluno se referia ao gráfico da função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ representado apenas no primeiro quadrante].
>
> Pesquisadora: *E essa parte que está no segundo quadrante?*
>
> Márcio: *Isso aqui? Eu descartei, ué. Isso faz parte do gráfico? Não sabia.*

Nota-se que o aluno Márcio percebeu a representação gráfica no segundo quadrante quando quis encontrar um ponto de inflexão (ver figura 26), mas não considerou essa mesma representação para fundamentar seus argumentos sobre a forma de uma função exponencial.

O professor retomou a palavra, releu a definição de função exponencial com a turma e mostrou características no gráfico das funções. As interações ocorridas entre os integrantes do grupo e professores e os argumentos utilizados nas discussões nos remetem às afirmações deVinner (1991). O autor desenvolveu um modelo baseado na existência de duas células: uma para a *imagem conceitual* e a outra para a *definição conceitual,* econsidera que são centrais para a explicação do processo cognitivo de formação do conceito. Vinner (1991, p. 11) considera que “não importa como seu sistema de associação reaja quando um problema lhe é colocado em um contexto técnico, não se espera que você formule sua solução antes de consultar a definição conceitual”. Isso é, naturalmente, o “processo desejável”, entretanto o autor reconhece que isso não corresponde ao que o estudante realiza na prática. Para Tall e Vinner (1981), a definição conceitual, geralmente utilizada para o desenvolvimento de conceitos matemáticos no ensino universitário, compreende a definição conceitual formal e a definição conceitual pessoal. Essa distinção é relevante para a análise dos dados desta pesquisa, por isso elaboramos um esquema, compreendido pela Figura 28, no qual destacamos os intercâmbios propostos no modelo indicado por Vinner (1991), bem como detalhamos a definição conceitual formal e a pessoal, de acordo com Tall e Vinner (1981).

Figura 28 – Intercâmbio entre definições (formais e pessoais) e imagens conceituais



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Esclarecemos que, no que se refere à ilustração realizada por meio da Figura 28, compreendemos que é possível que a célula da definição conceitual, tanto pessoal quanto formal, seja evocada durante o processo de resolução de um problema. Também pode haver intercâmbio entre essas definições, bem como entre elas e a imagem conceitual. De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição conceitual pessoal é o entendimento verbal da definição conceitual formal de uma pessoa. A resposta dada pelo indivíduo a uma situação-problema pode partir da definição conceitual pessoal.

Em nosso estudo, podemos inferir que a célula da imagem conceitual sobre função exponencial do aluno Márcio foi gradualmente sendo ressignificadaa partir dos exemplos e argumentos realizados pelos professores e colegas. De acordo com Vinner (1991), muitos professores têm a expectativa de um processo de mão única para a formação do conceito. Eles esperam que a imagem conceitual seja formada por meio da definição conceitual formale seja completamente controlada por esta. Claramente, percebemos que as conclusões do aluno e suas respostas aos questionamentos em relação à função exponencial não são coerentes com a definição conceitual formal, entretanto percebemos que em todo o processo a definição conceitual pessoal foi construída a partir da definição conceitual formal da função exponencial, já que o aluno Márcio afirma: “Analisamos de acordo com a definição; a primeira tem uma base e a variável está no expoente”. Os significados desseconceito matemático foram evocados da definição conceitual formal, e, assim, temos uma definição estipulada, pois sua definição pessoal foi fundamentada diretamente pela definição formal, entretanto sem entendimento do significado específico estipulado ao expoente x. Argumentos baseados em sua imagem conceitual a respeito do que é uma função exponencial surgiram de uma variedade de contextos de uso, com coerência ou não, com especificidade da definição formal. Dessa forma, o aluno Márcio, sem compreender o significado estipulado para o expoente x para o conceito de função exponencial, atribuiu significados a esse conceito.

Após a observação do professor, o aluno José fez um comentário pertinente:

Professor:	*Está vendo, a gente foi quebrando um a um os argumentos de vocês, e o James Stewart não afirmou que era exponencial, certo?*
Bela:	*Não, a gente que concluiu isso. Parecia ser.*
José:	*Você concorda que a função exponencial tem só uma concavidade? Como ela vai ter ponto de inflexão, se ela não troca de concavidade? Cadê a lógica disso? Se só tem uma concavidade, como pode ser isso?*
Pesquisadora:	*E agora? O que vocês podem afirmar?*
Márcio:	*Afirmamos agora que essas funções que colocamos aqui não são exponenciais e as exponenciais não têm ponto de inflexão.*

Por fim, percebemos na última afirmação do aluno Márcio, uma ressignificação de sua definição conceitual pessoal, ou seja, em aspectos de sua definição extraída. Quando ele diz: “Afirmamos agora que essas funções que colocamos aqui não são exponenciais e as exponenciais não têm ponto de inflexão", percebemos que ele atribuiu significados para os conceitos abordados, referenciados por suas definições, conforme o uso nessa situação.

O aluno José utilizou conceitos dos estudos de funções e suas derivadas em seus argumentos.Vinner (1991) recomenda, quando for necessário, iniciar conflitos cognitivos com os estudantes, com o objetivo de encorajá-los a um estágio intelectual mais alto, e afirma que uma das metas do ensino de matemática deveria ser mudar os hábitos de pensamento do modo cotidiano para o modo técnico. Porém, considero queos conceitos matemáticos, se sua natureza permite, deveriam ser adquiridos no modo técnico de formação de conceito e não no modo cotidiano. Deve-se começar com vários exemplos e contraexemplos através dos quais a imagem conceitual será formada. Para ele, as definições podem ter papéis extremamente importantes nos contextos técnicos, e estes impõem ao estudante alguns hábitos de pensamento totalmente diferentes daqueles típicos do cotidiano. No começo do processo de aprendizagem, os hábitos de pensamento do cotidiano irão se sobrepor aos hábitos de pensamento impostos pelos contextos técnicos, e os estudantes continuam usando os hábitos de pensamento cotidianos também em contextos técnicos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi motivada por inquietudes surgidas da nossa própria prática profissional, como professora de Cálculo, relacionadas com as dificuldades que os estudantes universitários geralmente apresentam no processo de aprendizagem dos conteúdos abordados no contexto do Cálculo Diferencial e Integral. Constatamos, na literatura especializada da área de Educação Matemática, que o Cálculo tem ocupado um papel de destaque nas pesquisas por "constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na forma do pensamento avançado em Matemática". (IGLIORI, 2009, p.13).

Decidimos centrar nossa pesquisa em um tema específico de Cálculo, que consiste no estudo das funções e de suas derivadas. Para isso, observamos como esse tema era proposto e desenvolvido com uma turma do curso de Sistemas de Informação de uma universidade pública e atuamos conjuntamente com o professor regente da disciplina na elaboração de oito atividades complementares, implementadas durante o desenvolvimento da disciplina de Cálculo.

Essas atividades estavam focadas na proposição de situações-problema, cuja solução era realizada por grupos de estudantes durante as aulas práticas, seis destas realizadas no laboratório de informática, com a utilização do *GeoGebra*. A partir de um processo de construção, os estudantes visualizavam, de maneira dinâmica e interativa, os procedimentos relacionados aos conceitos de funções e suas derivadas, e eram incentivados a enunciarem verbalmente ou por escrito, suas conclusões sobre as questões propostas nas referidas atividades, bem como sobre os conceitos contemplados nas mesmas. A utilização das tecnologias aplicadas ao ensino e aprendizagem de funções e suas derivadas foi considerada importante tanto para a visualização de representações gráficas referentes às questões propostas por meio das atividades elaboradas pelo professor e pela pesquisadora quanto para os questionamentos e interações realizadas pelos estudantes durante o desenvolvimento dessas atividades, bem como do estudo, preparação e apresentação do seminário pelos grupos de estudantes.

Observamos que as interações entre estudantes, professor e pesquisadora durante a realização das atividades e nas apresentações dos resultados pelos grupos foram relevantes e evidenciaram algumas incongruências entre a maneira como alguns estudantes utilizaram as definições matemáticas e a forma como estão compreendidas na Matemática. Assim, percebemos uma falta de coerência matemática nos seus argumentos para justificar as proposições encontradas durante a execução das atividades, contemplando o estudo de funções e suas derivadas. Isso nos motivou a realizar uma análise mais aprofundada sobre a compreensão das definições matemáticas presentes na comunicação matemática dos estudantes referentes a esses estudos, no contexto de um ensino baseado no desenvolvimento de uma sequência de atividades complementares às aulas do professor, e desenvolvidas para promover o aprendizado de conceitos de funções e suas derivadas, utilizando o *software GeoGebra*.

Nesse contexto, nosso objeto da análise dos dados da pesquisa de campo consiste na comunicação matemática que utiliza definições matemáticas.Interpretamos esse objeto pela ótica do pensamento matemático avançado. (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991; TALL, 1991). Tomando como referência principal os estudos de Tall e Vinner (1981), utilizamos os construtos *imagens conceituais* e *definições conceituais – pessoal* e *formal* para realizar uma análise a respeito da compreensão dos estudantes sobre funções e suas derivadas com ênfase no uso de definições matemáticas(VINNER, 1991; EDWARDS; WARD, 2008). Ao mesmo tempo, levamos em consideração as interações ocorridas em sala de aula segundo as ideias do interacionismo simbólico(BLUMER, 1980; GODINO; LLINARES, 2000). Consideramos que o espaço social em torno dos questionamentos levantados pelos estudantes durante o desenvolvimento das atividades e nas apresentações e discussões referentes aos questionamentos propostos ou emergentes delas revelou a importância da utilização das definições conceituais – formais e pessoais – para a compreensão e ressignificação dos conceitos matemáticos associados às funções e suas derivadas.

Referente a esse contexto, focamos nossas atenções nas interações que aconteceram durante as apresentações dos três grupos no seminário, entendendo a importância do momento, pois era um espaço no qual as vozes dos estudantes e os confrontos e argumentos emergentes das discussões produzidas evidenciaram incongruências entre definições pessoais e formais. Selecionamos para a análise, os dados das discussões e interações com referência aoobjetivo de nossa pesquisa:compreender como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas em discussões entre estudantes e professores durante as apresentações do seminário sobre estudos realizados por grupos de estudantes a respeito de funções e suas derivadas, cujos estudos enfatizam representações gráficas das funções e suas derivadas, elaboradas por meio de um *software* com representação gráfica dinâmica.

Os dados da nossa pesquisa mostraram que o pensamento matemático manifestado pelos estudantes sobre os conceitos referentes às funções e suas derivadas evoluiu a partir das interações produzidas entre os estudantes e, entre eles com o professor da turma e a pesquisadora, o que interpretamos por meio da análise dos distintos episódios descritos no capítulo 5 desta dissertação.

Com relação ao Grupo 1, que fez a apresentação no seminário sobre funções polinomiais e suas derivadas, observamos, inicialmente, os significados que a estudante Jane atribuia à parábola. Ela entendia que as representações gráficas das funções polinomiais do 2º e do 4º grau se referiam a parábolas. Essa estudante baseou-se em seu conceito imagem de “parábola”, entendendo que a forma da curva plotada no *GeoGebra* fornecia informações suficientes para afirmar que as referidas funções eram parábolas.

Entretanto, as interações produzidas por meio das discussões ocorridas durante a apresentação do grupo em questão, foram fundamentais para colocar em confronto a definição pessoal da estudante com a definição formal. Nesse sentido, destacamos as declarações dos alunos repetentesMarcelo e Guto, fundamentados em suas experiências prévias, de que não basta apenas a visualização das curvas plotadas no *GeoGebra* para concluir que se trata de uma parábola. Com base nos argumentos desses alunos, inferimos que, para este caso, neste momento na aprendizagem da estudante, sua definição extraída de uma parabola não era adequada para a comunicação em relação aos gráficos em um contexto social. Foram colegas que apontaram as ideias vinculadas à definição conceitual formal que estabeleceu um entendimento em comum. Quando os estudantes estabeleceram as relações entre a função e sua derivada ficou evidenciado que a derivada de uma função polinomial de segundo grau é uma função polinomial de primeiro grau, ou seja, visualmente a derivada de uma função quadrática que gera o gráfico de uma parábola é uma função que gera o gráfico de uma reta. A interação entre a aluna Jane que no momento estava apresentando o tema do grupo no seminário e os colegas, participantes da discussão, cooperou para uma ressignificação dos conceitos que estavam sendo abordados.

Os alunos desse grupo apresentaram concepções fundamentadas em formas gráficas visualizadas no *GeoGebra* que não correspondem com a definição conceitual formal, fundamentada na representação algébrica das funções polinomiais e de suas derivadas. De acordo com a análise dos episódios selecionados do grupo que realizou a apresentação sobre funções polinomiais, consideramos que as interações ocorridas entre estudantes e professores foram fundamentais para a mudança gradativa da *imagem conceitual* e da *definição conceitualpessoal* da função quadrática para um grau de aproximação maior aos significados estipulados para a definicação conceitual formal. Através das interações, os alunos foram estimulados a ressignificar seus conhecimentos e a construirem novos saberes. Isso ficou clarona interação do professor com a aluna sobre a representação gráfica da função polinomial de quarto grau, quando a mesma afirmou: *"eu já entendi"*.

O Grupo 2 resolveu pesquisar sobre o comportamento da função derivada nos intervalos de crescimento e decrescimento de funções logarítmicas. Observamos que houve uma discussão inicial relacionada com o domínio de uma função logarítmica e com o domínio de sua derivada. Ao plotar ambas as funções no *GeoGebra*, o *software* não restringiu o esboço do gráfico, foram levantados questionamentos sobre a relação entre o domínio da função derivada e o domínio da função dada. Isto ressalta a importância do conhecimento matemático do professor e estudantes e uma postura questionadora frente a informações e resultados, qualquer seja a fonte.

Os estudos realizados pelo Grupo 3 foram sobre o comportamento da função derivada de funções exponenciais, com o objetivo de encontrar pontos máximos e mínimos, crescimento e decrescimento, e ponto de inflexão. Entre os episódios analisados a partir da apresentação deste grupo, destacamos que a apresentação do tema no seminário começou pelas definições conceituais formais, entre as quais foi apresentada a definição de função exponencial. Apesar de o grupo haver projetado a referida definição por meio do *datashow*, não houve uma compreensão da mesma, no sentido de definição estipulada. A maioria dos alunos se envolveu nas discussões sobre a função $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ proposta pelo estudante Márcio. Os estudantes recorriam às definições conceituais formais que estavam contempladas no trabalho apresentado no seminário e defendiam seu ponto de vista. Apesar dos questionamentos realizados pelo professor, eles mantinham a posição que a função apresentava características de uma função exponencial. Esse episódio nos remete às conclusões de Vinner (1991) em relação ao papel da definição na matemática. Esse autor considera que existe um problema na aprendizagem da matemática em torno da compreensão de definições, especialmente no que se refere ao conflito entre a estrutura da matemática e os processos cognitivos de aquisição de conceitos matemáticos. Quando o aluno Márcio afirma: "*O critério para ter uma função exponencial é ter uma base elevado a um expoente x",* ele estava baseado na definição formal de função exponencial. Ele observa a base 3, e o expoente $\frac{1}{x}$, e conclui que a função é exponencial. Nesse caso ele não considera que $f(x) = a^x$ é diferente de $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$.O aluno conhecia e enunciava a definição conceitual formal da função exponencial, e a usava para fundamentar suas conclusões, no entanto não compreendia o significado matemático formal de $f(x)=a^x$.Após as interações ocorridas durante o seminário, percebemos na última afirmação do aluno Márcio, uma ressignificação de sua definição conceitual pessoal, ou seja, em aspectos de sua definição extraída. Quando ele diz: *"afirmamos agora que essas funções que colocamos aqui não são exponenciais e as exponenciais não têm ponto de inflexão"*, percebemos que ele atribuiu significados para os conceitos abordados, referenciados por suas definições, conforme o uso nessa situação. Corroboramos com Vinner (1991, p.6) ao afirmar que "assumimos que adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber a definição conceitual [formal] de cor não garante o entendimento do conceito". Assim, consideramos que o fato do estudanteconhecer a definição conceitual formal não garante que ele chegou à compreensão da mesma, no sentido de definição estipulada.

A partir da análise dos episódios selecionados em nossa pesquisa, consideramos que a interação é social, e apesar de que os alunos individualmente vão ter diversas imagens conceituais, elas são produzidas socialmente e podem ser modificadas pelo estudante durante as interações produzidas em um contexto específico, como foi o caso do seminário realizado para que os estudantes apresentassem, discutissem e formalizassem os conceitos relacionados com distintas funções e suas derivadas. Tall (1995) propõe a distinção entre a matemática elementar, na qual os objetos são descritos e a matemática avançada, na qual os objetos são definidos formalmente. Para a matemática elementar, isso implica a descrição das propriedades a partir da experiência dos estudantes com o objeto, enquanto na matemática avançada as propriedades emergem das definições. Nesse sentido, entendemos que as discussões ocorridas, as argumentações dos estudantes, as intervenções do professor da turma e da pesquisadora foram fundamentais para a compreensão das definições pelos estudantes. Assim, a compreensaõ das definições sendo evidenciada a partir de um encadeamento de ideias compartilhadas por meio das interações entre os sujeitos e não estreitamente por meio da interação indivíduo e objeto.

Por isso, nesta pesquisa entendemos a compreensão individual de um conceito na concepção de imagem conceitual de Tall e Vinner (1981, p. 2). Para esses autores o termo imagem conceitual está utilizado para descrever "a estrutura cognitiva total que associa com o conceito, que inclui todos os retratos e propriedades associadas e processos". Isto é, todos os atributos mentais associados com um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem conceitual.

Da mesma forma, para Blumer, o objeto, como o conceito matemático em nosso caso, pode ter diferentes significados para diferentes pessoas, e que o indivíduo forma, mantém e transforma os objetos de seu universo, à medida que lhes concede significado. Entendemos que, na nomenclatura de Tall e Vinner (1981), isto se refere às imagens conceituais diferentes para pessoas diferentes. Em relação à ação sobre objetos matemáticos, na medida em que o pensamento se desenvolve tornando-se mais complexo, as ações sobre estes conduzem ao pensamento matemático avançado, que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas pelas várias atividades matemáticas. Esse pensamento remete à imagem-raiz do interacionismo que entende "o ser humano como um organismo agente". Blumer (1980) considera que devido o homem se empenhar na autointeração, ele precisa lidar com o que observa, portanto, quando entra em contato com o que verifica, atribui-lhe um significado e utiliza-o como fundamento que norteará suas ações.

De acordo com Godino e Llinares (2000), o aspecto central da perspectiva interacionista em relação ao significado, é que esse é desenvolvido através da interpretação e interação. Para Blumer, o ser humano conhece as coisas pelos seus significados e esses são criados e modificados pela interação social, "suas respostas não são feitas diretamente à ação, mas sim, baseadas no significado que dão a essa ação" (BLUMER, 1980, p.19).

Nas apresentações de todos os grupos realizadas por meio do seminário, percebemos a ocorrência de todas as categorias codificadas e o uso de definições pessoais baseadas em experiências prévias e mudanças dessas definições ocorridas nas interações. Nesse sentido, corroboramos com Blumer (1980, p. 117), ao considerar que "os significados são manipulados por um processo interpretativo (e por este modificado) utilizado pela pessoa ao se relacionar com os elementos com que entra em contato". Nessa concepção, pensamos que as discussões ocorridas nas interações foram fundamentais para o êxito na aprendizagem dos estudantes uma vez que colaboraramna ressignificação de conceitos de Cálculo, como de funções e suas derivadas.

Destacamos a potencialidade do modelo (figura 4)proposto por Vinner (1991, p.11) para a análise dos episódios selecionados das apresentações dos estudantes ocorridas no seminário. Com base no referido modelo, para análise dos dados de nossa pesquisa, entendemos que foi importante utilizarmos um esquema mais detalhado, no qual foram destacados os intercâmbios propostos no modelo deVinner (1991), bem como o detalhamento da definição conceitual formal e a pessoal, no sentido proposto por Tall e Vinner (1981). Dessa maneira, entendemos que é possível que a célula da definição conceitual tanto pessoal quanto formal seja evocada durante o processo de resolução de um problema. Também pode haver intercâmbio entre essas definições, bem como entre elas e a imagem conceitual. De acordo com Tall e Vinner (1981) a definição conceitual pessoal é a forma verbal da definição conceitual de uma pessoa. A resposta dada pelo indivíduo a uma situação problema pode partir da definição conceitual pessoal em conexão com a imagem conceitual do objeto em estudo.

Ressaltamos a importância do papel mediador do professor no processo de aprendizagem de funções e suas derivadas. Na pesquisa este fato foi evidenciado por meio dos questionamentos, argumentos e intervenções realizadas pelo professor e pela pesquisadora durante a realização das atividades implementadas no processo de estudo de funções e suas derivadas. Isso possibilitou que estudantes, em diversos momentos durante as aulas de Cálculo, refletissem sobre os conceitos abordados, chegando à sua ressignificação. Nesse sentido, entendemos que os estudantes atribuíram significados aos distintos termos e símbolos utilizados na definição conceitual formal de conceitos relacionados a funções e suas derivadas, se aproximando em vários graus à definição estipulada desses conceitos, no sentido proposto por Edwards e Ward (2008).

Nossa pretensão é que os relatos e reflexões aqui abordados possam contribuir com outros professores a elaborar suas próprias propostas de ensino, visto que a oportunidade de exercer o papel de ouvinte da fala dos estudantes e de interagir com eles na produção de conhecimentos matemáticosfoi fundamental para minha experiência como professora e como pesquisadora. Compreender a maneira como os estudantes manifestavam os pensamentos pautados nas definições matemáticas, atribuir sentido ao que eles diziam e expressavam trouxe para mim perspectivas diferentes sobre a aprendizagem do Cálculo e sobre as implicações pedagógicas relacionadas a esse estudo. Entretanto, cremos que sejam necessárias pesquisas baseadas nas realizações de experimentos em sala de aula, onde o aluno tenha a oportunidade de se expressar e interagir com seus pares e professores, privilegiando as formas de pensamento matemático.

Finalmente, consideramos que o educador matemático deve atuar como mediador do conhecimento, de forma que os estudantes possamexperienciar uma aprendizagem permeada pelas distintas interações que conduzam a uma compreensão dos conceitos de Cálculo. Corroboramos com Godino e Llinares (2000) ao considerarem que o professor deve criar condições suficientes para que os estudantes se apropriem de certo conhecimento, e deve assegurar que o conhecimento anterior e as novas condições criadas no contexto das aulas possibilitem oportunidades para os estudantes apropriarem-se do conhecimento, cabendo aos estudantes uma atuação interativa e o cumprimento das condições acordadas com o professor.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. **Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I.** 2011. 99p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BLUMER, H. "A natureza do interacionismo simbólico". In: MORTENSEN, C.D. **Teoria da comunicação**: textos básicos. São Paulo: Mosaico, 1980, pp. 119–138.

CHARMAZ K. **Aconstrução da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa;** trad. Joice Elias Costa. –Porto Alegre: Artmed, 2009.

COSTA, C. **Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização.** XI Encontro de Investigação em Educação Matemática SPCE – Grupo de trabalho 4 – O desenvolvimento do raciocínio matemático avançado. Coimbra, 2002. p.s. 257 – 273. Disponível em: < http://www.spce.org.pt/sem/17conceicao-costa.pdf>. Acesso em: 01 jan. 2014.

DANTE, L. R. Tudo é Matemática. Editora Ática. 9º ano, 2008.

DEWEY, J. **Como pensamos***:* como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo (uma reexposição). 4. ed. Tradução de Haydée Camargo Campos. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In: **XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Setúbal, 2006.

DREYFUS, T. AdvancedMathematicalThinking Processes. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 25-41.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, David (Org.). **Advanced mathematical thinking**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 95-123.

EDWARDS, B.S.; WARD, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. **The American Mathematical Monthly**, 111, p. 411-424.

_______. The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (Eds.). **Making the**

Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education MAA Notes #73, Washington, DC: Mathematics Association of America, 2008, p. 223-232.

FROTA, M. C. R. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 89-122.

FROTA, M. C. R. Investigações na sala de aula de Cálculo. In: **Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, X. Anais...** São Paulo: ANPED, 2006.

GODINO, J. D.; LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. **Revista Educación Matemática**, México, D. F., v. 12, n. 1, p. 70-92, 2000. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/Godino_Llinares_Interaccionismo.PDF>. Acesso em: 01 jan. 2014.

GRANEHEIM, UH.; LUNDMAN, B. (2004). "Qualitative content analysis in nursing research: Concepts, procedures and measures to achieve trustworthiness." Nurse Education Today, 24, pp. 105-112.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, p. 111-133, 1999.

HAGUETTE, T. M. F. **Metodologias qualitativas na sociologia**. 3. ed. rev. E ampl..Petrópolis, Vozes, 1997

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 11-26.

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M.L.N. Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. In: ENGLISH, L. (Org.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. 2. ed. New York: Routledge, 2008. p. 154-174.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2006.

RESNICK, L. B. **Education and Learning to Think**. Washington, DC: National Academy Press, 1987.

REZENDE, W. M. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, N.; CUNHA, M. (Org.). **Linguagem, Conhecimento, Ação** – ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003, v.1, p. 313-336.

SFARD, A. When the Rules of Discourse Change, but Nobody Tells You: Making Sense of Mathematics Learning From a Commognitive Standpoint. **The Journal of The Learning Sciences**, Mahwah, NJ, US, v. 16 n. 4, p. 567 - 615, 2007.

SKEMP, R. **Intelligence, learning and action**. London: Wiley, 1979.

STEWART, J. **Cálculo**. Trad. Antonio Carlos Moretti. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v. 2.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 3-21.

_______. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In: GROWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan Publishing Company, 1992, p. 496.

_______. A Transição para o Pensamento Matemático Avançado: funções, limites, infinito e prova. In: **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Macmillan, New York, p. 495-511, 1992. Trad. PINTO, M. M. F.

_______. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In**: Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife, Brasil, 1995. p. 61-75. v. I.

_______. Concept image and concept definition. Em **David Tall Home Page**. 2003.Disponível: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html>. Acesso em: 15 jan. 2014.

_______; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: **Published in Educational Studies in Mathematics**. University of Warwick. 1981. p. 151–169. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David. Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2013.

VINNER, S. ‘Concept definition, concept image and the notion of function’, **TheInternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 14, p. 293-305, 1983.

_______; DREYFUS, T. Images and definitions for the concept of function. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20, p. 356-366, 1989.

_______; HERSHKOWITZ, R. ‘Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts’, **Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,** Berkeley, p. 177-184, 1980.

_______. O papel das definições no ensino e aprendizagem de Matemática. Tradução de Márcia Maria Fusaro Pinto e Jussara de Loiola Araújo.**The Role of Definitions in the**

Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 1991.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Primeira atividade desenvolvida no laboratório de informática.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**
Orientanda: Rieuse Lopes Pinto
Orientador: Prof. Dr. Dale William Bean

ATIVIDADE 1: TAXA DE VARIAÇÃO

Situação-problema:

Um mergulhador salta de um trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura *h* em metros, o tempo *t* em segundos e sua velocidade inicial de 9,8 metros por segundo, sua função posição é

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$$

Processo de Construção/exploração de conceitos:

1.1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a1_cal_si_nome_data.
1.2. Plote a função *h(t).*
1.3. Crie um controle deslizante **a** e configure-o no intervalo [0, 3] e incremento 0.5.
1.4. Crie o ponto A=(a, h(a)). Habilite o rastro de A e, em seguida, animação.
1.5. Use esses dados para completar a tabela 1 que relaciona a altura (*h*) do mergulhador com o tempo (*t*) nos instantes especificados.

Tabela 1 – Altura do mergulhador em função do tempo

***t*(segundos)**	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
***h*(metros)**							

1.6. De acordo com a tabela 1, em que instante o mergulhador atinge a água?
1.7. Qual a velocidade média do mergulhador entre 1 e 3 segundos?
1.8. Qual a velocidade instantânea do mergulhador no momento em que ele atinge a água?
1.9. Crie um controle deslizante **b** e configure-o no intervalo [0, 0.999] e com incremento 0.001.
1.10. Crie um pontoB=(b, h(b)).
1.11. Trace a reta x=1.
1.12. Determine uma reta *r* perpendicular a x=1 passando por B e encontre a interseção D entre ambas. Oculte as duas retas.
1.13. Utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”, defina os segmentos BD e AD. Em propriedades configure as cores dos segmentos para vermelho e azul, respectivamente. Use o estilo 5.
1.14. No campo de entrada digite “se 0<=x<=3, -4.9x^2+9.8x+14.7”. Configure a cor marrom para a função e estilo 5.
1.15. Oculte a função *h(t)* e ative animação do controle deslizante b. Observe o que acontece.
1.16. Digite no campo de entrada T = (19.6-h(b))/(1-b). Ative a animação de b e explique o que o valor de T representa.
1.17. Qual a velocidade instantânea do mergulhador quando ele atinge a altura máxima do pulo?
1.18. Qual a derivada de *h(t)* no instante em que o mergulhador atinge a água? Explique.
1.19. Que relação você pode estabelecer entre os conceitos abordados nesta atividade e o conceito de derivada de uma função em um número ***a***?
1.20. Apresente sua opinião sobre as possíveis contribuições desta atividade para a compreensão dos conceitos estudados. As críticas e sugestões são bem-vindas.

Bons estudos!

APÊNDICEB –Segunda atividade desenvolvida no laboratório de informática.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**
Orientanda: Rieuse Lopes Pinto
Orientador: Prof. Dr. Dale William Bean

ATIVIDADE 2: DERIVADA DA FUNÇÃO NO PONTO

Situação-problema:

Um mergulhador salta de um trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura *h* em metros, o tempo *t* em segundos e sua velocidade inicial de 9,8 metros por segundo, sua função posição é

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$$

Processo de Construção/exploração de conceitos:

1.21. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a2_cal_si_nome_data.
1.22. Plote a função *h(t).*
1.3. Crie um controle deslizante **a** e configure-o no intervalo [0, 3] e incremento 0.5.
1.4. Insira o ponto A no gráfico, colocando na caixa de entrada a expressão A = (a, h(a)).
1.5. Utilizando a opção reta tangente (4ª janela), *tecle* no gráfico da função e no ponto A; assim obterá a reta tangente (b) ao gráfico neste ponto. Em propriedades, renomeie a reta tangente para t.
1.6. Na opção inclinação (8ª janela), *tecle* na reta tangente; assim obterá o valor de a1 que corresponderá à sua inclinação neste ponto. Renomeie para m.
1.7. Na caixa de entrada, insira o ponto B com as seguintes coordenadas (a, m). Com o botão direito do mouse no ponto B, ative a opção habilitar rastro.
1.8. Movimente o parâmetro **a** com a opção mover, e observe os pontos obtidos pelo rastro deixado.
1.9. Use esses dados para completar a tabela 1 nos instantes especificados.

Tabela 1 – Relação entre os pontos de uma função e os pontos de sua derivada

Ponto A=(a,h(a)) que representa a interseção entre a reta tangente te a função h(t)	Equação da reta tangente t à função h(t)	Valor (m) do coeficiente angular da reta tangente t	Ponto B=(a,m) da função h'(t)
(0, 14.7)	Y=9.8x+14.7	9.8	(0,9.8)
(0.5, 18.38)			

1.10. No contexto do problema, o que o coeficiente angular **m** representa?
1.11. Qual o significado de **m** ser positivo? E negativo? Quando ele é nulo? Por quê?
1.12. Calcule a derivada de h(t) e verifique se as coordenadas dos pontos gerados pelo rastro de B= (a,m) pertencem a essa função.
1.13. O que representa as coordenadas do ponto B?
1.14. Elabore e responda a uma pergunta no contexto dessa situação-problema.

APÊNDICEC – Atividade desenvolvida em grupo

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

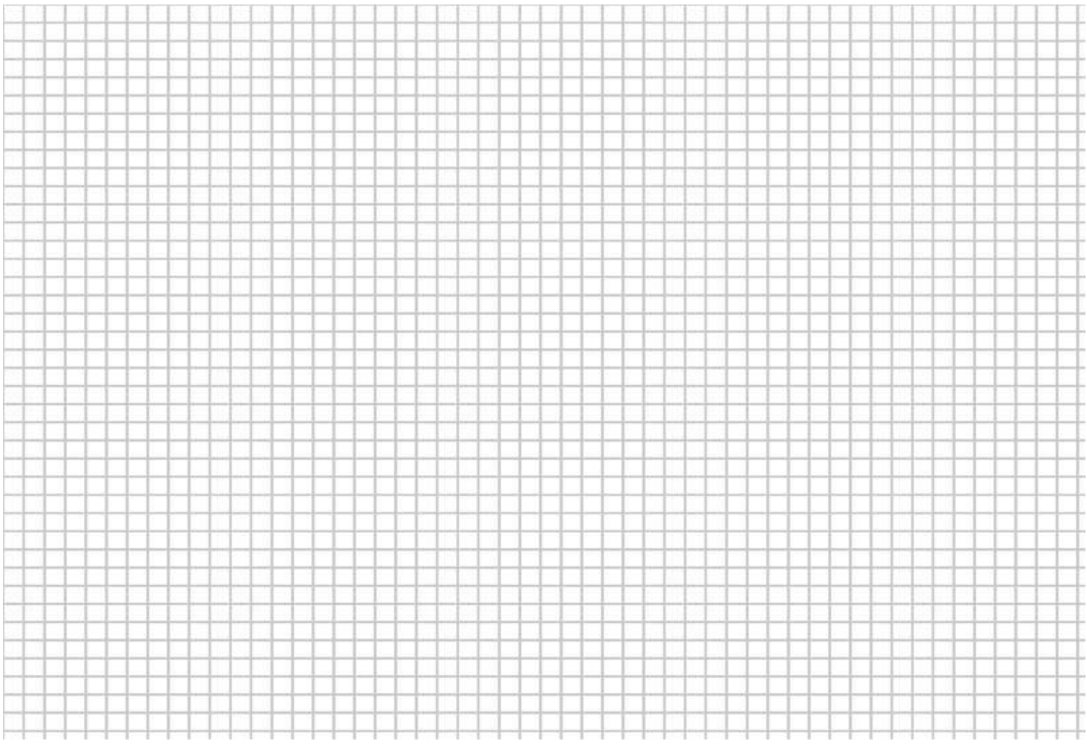
Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**

Aluno:_________________________________ Curso:______Data:_______
Aluno:_________________________________ Curso:______

Aluno:_________________________________ Curso:______

ATIVIDADE 3: CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICO DE FUNÇÃO POLINOMIAL E DE SUA DERIVADA

1. Esboce o gráfico da função $f(x)=x^2-9$ na malha quadriculada.
1.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?
1.2. Em qual intervalo a curva é crescente? E decrescente?
1.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.
1.4. Calcule algebricamente a derivada de *f*, *e* construa o gráfico de *f'* no mesmo plano cartesiano.
1.5. Qual é o grau de *f(x)*? E de sua derivada?



2. Esboce o gráfico da função $g(x) = x^3$ na malha quadriculada.

2.1. Em qual pontoessa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?
2.2. Em qual intervalo a curva é crescente? E decrescente?
2.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.
2.4. Calcule algebricamente a derivada de *g*, *e* construa o gráfico de *g'* no mesmo plano cartesiano.
2.5. Qual é o grau de *g(x)*? E de sua derivada?

3. Esboce o gráfico da função $h(x) = 4x^4 - 12x^3 + 16x$ na malha quadriculada.

3.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?

3.2. Em quais intervalos a curva é crescente? E decrescente?

3.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.

3.4. Calcule algebricamente a derivada de *h*, econstrua o gráfico de *h'* no mesmo plano cartesiano.

3.5. Qual é o grau de*h(x)*? E de sua derivada?

Obrigada!
Rieuse Lopes.

APÊNDICED – Atividade desenvolvida na sala de aula

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**

Aluno:____________________________________ Curso:______Data:_______

ATIVIDADE 4: CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO E DE SUA DERIVADA

1. Escreva uma função *f(x)* e determine seu domínio.
2. Determine a derivada dessa função.
3. Esboce o gráfico de *f(x)* e de *f'(x)* na mesma malha quadriculada.

f(x)=

f'(x)=

4. Na malha quadriculada a seguir, esboce novamente o gráfico da função *f* que você criou.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**

Aluno:___________________________________ Curso:______Data:_______

ATIVIDADE 4: CONSTRUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO E DE SUA DERIVADA

5. Na malha quadriculada, você tem o esboço do gráfico de uma função que foi elaborado por um de seus colegas.

5.1. Em quais pontos essa curva intercepta o eixo x? E o eixo y?

5.2. Em quais intervalos a curva é crescente? E decrescente?

5.3. Determine o domínio e a imagem dessa função.

5.4. Qual é o grau de *f(x)*? E de sua derivada?

5.5. Construa o gráfico de *f'* no mesmo plano cartesiano.

Obrigada!
Rieuse Lopes.

APÊNDICEE –Terceira atividade desenvolvida no laboratório de informática.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudo de Funções e suas Derivadas**

Orientanda: Rieuse Lopes Pinto **Orientador:** Prof. Dr. Dale William Bean

ATIVIDADE 5: O que***f ’***nos diz sobre***f***

Definição de função crescente

Uma função ***f***é chamada **crescente** em um intervalo ***I*** se

$f(x_1) < f(x_2)$sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***

Ela é denominada **decrescente** em***I*** se

$f(x_1) > f(x_2)$sempre que $x_1 < x_2$ em ***I***

1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a5_cal_si_nome_data.
2. Plote no GeoGebra uma função ***f*** que apresente intervalo(s) de crescimento e decrescimento.
3. Obtenha o domínio e a imagem de ***f***.
4. Determine algebricamente o(s) intervalo(s) onde ***f*** écrescente.
5. Determine algebricamente o(s) intervalo(s) onde ***f*** é decrescente.
6. Calcule algebricamente sua derivada.
7. Plote o gráfico de ***f’*** e em propriedades, mude sua cor para vermelho.
8. Em qual intervalo ou quais intervalos ***f’*** é crescente? E decrescente?
9. Para quais valores de x a derivada é negativa? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
10. Para quais valores de x a derivada é positiva? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
11. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo?
12. Escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.

APÊNDICEF –Quarta atividade desenvolvida no laboratório de informática.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**
Orientanda: Rieuse Lopes Pinto **Orientador:** Prof. Dr. Dale William Bean

ATIVIDADE 6: O que f ’ nos diz sobre f

1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a6_cal_si_nome_data.
2. Elabore as seguintes funções:
2.1. Trigonométrica. *t(x)=*
2.2. Polinomial de grau 3. *f(x)=*
2.3. Polinomial de grau 4. *p(x)=*
2.4. Racional*r(x)=*
2.5. Exponencial *e(x)=*
2.6. Logarítmica *l(x)=*
3. Determine o domínio e a imagem de cada um delas.
4. Determine algebricamente a derivada de cada função que você elaborou.

t’(x)=
f’(x)=
p’(x)=
r’(x)=
e’(x)=
l’(x)=

5. Plote no GeoGebra as funções e suas derivadas (em vermelho), e observando o gráfico de cada função e sua respectiva derivada, responda:
5.1. Em qual intervalo ou quais intervalos as funções são crescentes? E decrescentes?
5.2. Para quais valores de x a derivada é negativa? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
5.3. Para quais valores de x a derivada é positiva? Nesse caso, a função ***f*** é crescente ou decrescente? Por quê?
5.4. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo?

5.5. Escreva com suas palavras o que você entende por função crescente e função decrescente.
5.6. De acordo com o tipo de funções que você elaborou, escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.
5.7. Suas conclusões servem para qualquer tipo de função?

APÊNDICEG –Quinta atividade desenvolvida no laboratório de informática.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**
Orientanda: Rieuse Lopes Pinto **Orientador:** Prof. Dr. Dale William Bean

ATIVIDADE 7: O que*f* ′nos diz sobre*f*

Definições:

Definição 1: Uma função ***f***tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* em D, onde D é o domínio de *f*. O número *f(c)* é chamado **valor máximo** de *f* em D. Analogamente, *f* tem um **mínimo absoluto** em *c* se para $f(c) \geq f(x)$ para todo *x* em D, e o número *f(c)* é denominado **valor mínimo** de *f* em D. Os valores máximo e mínimo de *f* são chamados valores extremos de *f*.

Definição 2: Uma função *f* tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em *c* se $f(c) \geq f(x)$ quando *x* estiver nas proximidades de *c*.[Isso significa que $f(c) \leq f(x)$ para todo *x* em algum intervalo aberto contendo *c*]. Analogamente, *f* tem um **mínimo local** em *c* se $f(c) \leq f(x)$ quando *x* estiver próximo de *c*.

Definição 3: Um **número crítico** de uma função *f* é um número *c* no domínio de *f* onde ou *f'(c)*=0 ou *f'(c)* não existe.

1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a7_cal_si_nome_data.

2. Plote no GeoGebra uma função ***f*** que seja contínua em [-4,4] e tenha máximo absoluto em -2 e mínimo absoluto em 2.
3. Determine algebricamente a função ***f*** e sua derivada.
4. Em vermelho, plote no GeoGebra ***f '***.
5. Obtenha o domínio e a imagem de ***f*** e de ***f '***.
6. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo? Por quê?
7. Sua função tem pontos críticos? Quais?
8. Escreva suas conclusões estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.
9. Verifique se as relações que você estabeleceu são válidas para outros tipos de funções. Para isso, você deve elaborar e plotar no GeoGebra as seguintes funções e suas respectivas derivadas:

9.1. Trigonométrica. *t(x)=* *t'(x)=*

9.2. Polinomial de grau 3. *f(x)=* *f'(x)=*

9.3. Polinomial de grau 4. *p(x)=* *p'(x)=*

9.4. Racional *r(x)=* *r'(x)=*

9.5. Exponencial *e(x)=* *e'(x)=*

9.6. Logarítmica *l(x)=* *l'(x)=*

10. Suas conclusões servem para qualquer tipo de função?

APÊNDICEH –Sexta atividade desenvolvida no laboratório de informática.

Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática / ICEB

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Projeto de Pesquisa: **Atividades Centradas no Estudode Funções e suas Derivadas**
Orientanda: Rieuse Lopes Pinto **Orientador:** Prof. Dr. Dale William Bean

ATIVIDADE 8: O que***f ''***nos diz sobre***f***

Definições:

Definição 1: Se o gráfico de ***f*** estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo ***I***, então ele é dito **côncavo para cima** em I. Se o gráfico de ***f*** estiver abaixo de todas as suas tangentes em ***I***, é dito **côncavo para baixo** em ***I***.

Definição 2: Um ponto ***P*** na curva *y=f(x)* é chamado **ponto de inflexão** se ***f*** é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em ***P***.

1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a8_cal_si_nome_data.
2. Plote no GeoGebra uma função ***f*** cujo esboço do gráfico apresente concavidade para cima, concavidade para baixo, e um ou mais pontos de inflexão. Limite seu gráfico em um intervalo ***I***.
3. Determine algebricamente a função ***f*** .
4. Determine algebricamente a função ***f '***.
5. Determine algebricamente a função ***f ''***.
6. Em vermelho, plote no GeoGebra ***f '***.
7. Em azul, plote no GeoGebra ***f ''***.
8. Obtenha o domínio e a imagem de ***f*** ,de ***f '*** e de ***f ''***.
9. Em qual (ou quais) intervalos a função ***f*** apresenta concavidade para cima? E para baixo?
10. Determine o ponto de inflexão.
11. Quando ***f ''*** for positiva, ***f*** tem concavidade para cima ou para baixo?
12. E quando ***f ''*** for negativa?
13. Estabeleça uma relação entre ***f ''*** e ***f*** que responda o que ***f ''*** nos diz sobre ***f***.

14. De acordo com o que foi explorado nessa atividade, escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função, sua primeira derivada, e sua segunda derivada.