Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo de Dewey: Uma experiência no ensino das funções seno e cosseno

Daiana Katiúscia Santos Corradi

Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo de Dewey: uma experiência no ensino das funções seno e cosseno

EDITORA UFOP

Ouro Preto| 2014

© 2014
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas|Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação|Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitor da UFOP | Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza
Vice-Reitor | Profª Drª Célia Maria Fernandes Nunes

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
Diretora | Profª Drª Raquel do Pilar Machado
Vice-Diretor | Prof. Dr. Fernando Luiz Pereira de Oliveira

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Prof. Dr. Valdei Lopes de Araújo
Pró-Reitor Adjunto | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Coordenação | Prof. Dr. Dale William Bean

MEMBROS

Profª Drª Ana Cristina Ferreira
Profª Drª Célia Maria Fernandes Nunes
Prof. Dr. Dale William Bean
Prof. Dr. Daniel Clark Orey
Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Profª Drª Marger da Conceição Ventura Viana
Profª Drª Maria do Carmo Vila
Prof. Dr. Milton Rosa
Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira
Profa. Dra.Regina Helena de Oliveira Lino Franchi
Profª Drª TeresinhaFumi Kawasaki

Reprodução proibida Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados.

Curiosidade, criatividade, disciplina e especialmente paixão são algumas exigências para o desenvolvimento de um trabalho criterioso, baseado no confronto permanente entre o desejo e a realidade.

(Mirian Goldenberg)

Índice

Apresentação

Caro(a) Leitor(a)

Apresentamos uma versão preliminar da coleção Cadernos de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática. Nela você poderá encontrar livretos com proposta de ensino e de formação de professores.

Cada caderno representa o esforço de um(a) professor(a) de Matemática em buscar alternativas para a melhoria do ensino dessa disciplina. Todos os autores cursaram o Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto e suas pesquisas tiveram como foco a sala de aula, a formação de professores e/ou processos que envolvem professores, alunos e a Matemática.

Esperamos, em breve, dispor da versão definitiva disponível para aquisição (impressa) e na página do Programa (www.ppgedmat.ufop.br).

Espero que gostem!

Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Ao professor de Matemática

Os conteúdos trigonométricos, apesar de serem importantes e fundamentais para diversas áreas do conhecimento humano, não são muito simples de serem trabalhados pelos professores e compreendidos por grande parte dos alunos. Inúmeros estudos têm mostrado que existem dificuldades no ensino e na aprendizagem da trigonometria, ou quando são abordados problemas a ela relacionados. Por outro lado, são significativas as propostas de alternativas nesses estudos buscando a melhoria no processo de ensino e aprendizagem.

Este trabalho, que se encontra dentre elas, destaca a utilização das investigações matemáticas tendo por ferramenta o *software* GeoGebra para uma maior exploração da visualização gráfica. Este material apresenta uma proposta de ensino das funções seno e cosseno a partir das investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo.

A atividade investigativa aqui apresentada foi desenvolvida com alunos do 2º ano do ensino médio em uma escola particular e um instituto federal em Itabirito – Minas Gerais nos meses de maio, junho e primeira quinzena de julho de 2012. Na elaboração das atividades bem como em seu desenvolvimento, tivemos como aporte, João Pedro da Ponte, no concernente as suas concepções de atividades investigativas. E no que diz respeito ao pensamento que caracteriza essas atividades, apoiamos-nos nas ideias do pensamento reflexivo de John Dewey.

Apresentamos, então, uma proposta de ensino com algumas ideias formuladas a partir da experiência que vivenciamos e esperamos que sirva como ponto de partida, aporte bem como provocação para colegas que realizam ou tenham como intenção o uso das atividades investigativas em sala de aula ou mesmo o desejo de conhecer a respeito da realização da investigação.

Ressaltamos que o livreto é fruto da nossa dissertação defendida junto ao Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade de Ouro Preto, intitulada “Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio”.

Esperamos que este material contribua para a sua reflexão e prática pedagógica!

Daiana

Introdução

Apresentaremos as investigações matemáticas como sendo uma atividade de natureza aberta na qual procuramos conhecer, compreender e encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos, não havendo reprodução de técnicas já estabelecidas. Em se tratando de ensino e aprendizagem, mostraremos que as investigações matemáticas significam trabalhar a partir de perguntas que nos interessam, e que em princípio, apresentam-se de forma confusa, mas que é possível clarear torná-las claras para posterior análise, permitindo a elaboração de estratégias, sistematização de ideias e resultados. Na pesquisa realizada, foi apresentada aos alunos a função $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$, em que cada grupo trabalhou com um aspecto ou propriedade específica de seu interesse a respeito dessa função, como o período ou a amplitude, gerando, por meio de observações visuais gráficas associadas aos conhecimentos prévios, os dados para elaboração e testes de suas conjecturas. A ideia defendida quanto à utilização da investigação matemática como estratégia de ensino e aprendizagem se justifica por tratar-se de uma capacidade de grande importância no âmbito educacional por corresponder a realizar descobertas, recorrendo a processos matemáticos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos. Por exemplo, uma ideia inicial a respeito do período da função soma, como a f(x), seria a de 4π, já que o período de y=sen(x) e de y=cos(x) é 2π, ou seja, a soma fornece uma sugestão para também somar períodos. Constatamos que ela contribuiu para a construção do conhecimento, levando o aluno a intuir, a conjecturar, a experimentar, a provar, a avaliar, e a apresentar o(s) resultado(s) encontrado(s), reforçando atitudes de autonomia e cooperação.

Neste texto apresentamos algumas considerações baseadas na pesquisa para servir como subsídios para professores que pretendem utilizar esse tipo de tarefa em suas aulas. Delineamos alguns pontos entre as ideias de investigações matemáticas propostas por Ponte com as ideias educacionais em termos de pensamento reflexivo de Dewey.

Entendemos que esse tipo de pensamento seja propício na realização de atividades investigativas, pois é um processo em que são levados em consideração e analisados os diversos pontos observados em um problema, provocando um fluxo de sugestões e favorecendo a consecutividade no ciclo de ideias. O pensamento reflexivo parte da curiosidade, da sugestão e se apoia em pesquisa e investigação com vista à solução do problema de forma evolutiva e acumulativa. No exemplo de $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$, a sugestão inicial de que o período da função fosse 4π foi logo descartada, ao reparar o fato de os coeficientes de x, 2 e $\frac{2}{3}$ determinarem o período.

Levando-se em consideração que, na sala de aula, professores de matemática podem propor tarefas de natureza muito diversas e que os limites que diferenciam uma tarefa de resolução de problemas de uma tarefa investigativa ou de exercícios de uma investigação nem sempre são claros, destacamos o modo como essas tarefas se distinguem umas das outras, já que são conceitos entendidos, por vezes, de maneiras diferentes.

Os resultados da pesquisa na qual planejamos e realizamos uma investigação apoiando em Ponte e Dewey mostram que existiram benefícios e desafios em investigação. Mostraremos como aconteceu essa tarefa utilizando os dados da pesquisa de campo realizada no CEFET- *campus* Itabirito.

Analisamos quais as contribuições resultantes de uma proposta na qual os conceitos da trigonometria voltados para as funções seno e cosseno foram trabalhados a partir de atividades que serviram de aporte para a investigação matemática com alunos do segundo ano do ensino médio, em Itabirito, Minas Gerais. Para tanto, a proposta foi levar para a sala de aula um conjunto de atividades preliminares e a investigativa. Percebemos que certas atitudes adotadas por nós antes da atividade investigativa contribuíram para sua realização. Não era nossa própria turma aquela em que a pesquisa foi realizada, por isso a utilização de atividades preliminares cujo intuito foi fazer com que os estudantes revissem ou mesmo aprendessem conceitos matemáticos (como domínio, imagem, paridade, translação) e, mais especificamente, conceitos voltados para as funções trigonométricas seno e cosseno (definição, amplitude, período), também para o conhecimento do *software* de geometria dinâmica (GeoGebra) que foi utilizado como ferramenta de suporte à atividade investigativa. As atividades preliminares também tiveram o propósito da “inversão de papéis”, colocando o aluno como ator principal do processo, como aquele que construirá seu conhecimento, devido a um envolvimento contínuo. Além disso, a finalidade era que os alunos pudessem vivenciar algumas das características da investigação, ajudando na concretização de vários propósitos curriculares, como desenvolvimento do raciocínio lógico, autoconfiança, reflexão e criatividade. Nesse sentido, percebemos que essa “preparação” anterior à atividade investigativa contribuiu para o sucesso da investigação.

Na parte final do livreto, apresentamos algumas considerações sobre contribuições educacionais das investigações matemáticas e o papel do professor, finalizando com algumas das nossas reflexões.

1. Investigações matemáticas e o pensamento reflexivo

Este capítulo é dividido em duas seções. A primeira trata das investigações matemáticas como atividades de ensino-aprendizagem ancoradas nos trabalhos de João Pedro da Ponte. A segunda diz respeito às ideias do pensamento que caracteriza essa atividade (pensamento reflexivo) sustentada teoricamente por John Dewey.

Entendemos que as ideias de João Pedro da Ponte concernente às suas concepções de atividades investigativas e as de John Dewey, relativas ao pensamento reflexivo, poderão corroborar para a elaboração das atividades bem para seu desenvolvimento.

Na primeira seção, é descrito o que são investigações matemáticas, o desenvolvimento e a realização das atividades investigativas. Apresentamos também discussão e análise da distinção das investigações matemáticas, resolução de problemas e exercícios para melhor compreensão do que seja a atividade investigativa. O motivo da apresentação desses tópicos se justifica pela relevância dessa atividade, em que a utilização da argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios oportuniza aos alunos a produção de significados para a Matemática. Por meio de situações-problema desafiadoras, possibilita ao aluno a autonomia na busca de meios para investigação.

Tratamos, na segunda seção, o que é pensar reflexivamente, apresentando algumas características do pensamento reflexivo e suas fases com o intuito de melhor conhecer essa maneira de pensar, que mediará a investigação matemática. Tal mediação se deve ao fato de que o pensamento reflexivo aspira chegar a uma conclusão por meio de um estudo prolongado e minucioso, consistindo em uma sucessão regular de coisas pensadas, numa sequência de ideias de modo a gerar a outra, naturalmente, sustentando umas às outras de forma a constituir um fluxo de ideias e tornando-se uma cadeia com um propósito comum, um exame pessoal, pesquisa e investigação.

1.1 Investigações

De um modo geral, investigar não é mais do que procurar conhecer, compreender e encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos, não há reprodução de técnicas já estabelecidas, o trabalho do aluno é aberto, criativo e independente. Em se tratando de ensino e aprendizagem, significa trabalhar a partir de perguntas que nos interessam, e que em princípio, se apresentam de forma confusa, mas que é possível tornar-se clara para posterior análise; permite a elaboração de estratégias, sistematização de ideias e resultados.

Essa atividade é caracterizada por situações ou processos em que os alunos tentam compreender, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças de forma a conseguir chegar a generalizações. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a investigação matemática tem sido interpretada como uma atividade matemática que envolve quatro momentos principais. Cada um desses momentos, presentes no quadro a seguir, podem envolver atividades com etapas características de uma investigação (ver Quadro 1).

Quadro 1. Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes

	• Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte; Brocardo; Oliveira (2006, p. 21).

Nesse sentido, investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos matemáticos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos.

Para Ponte (2003, p.2):

> [...] investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado.

Segundo o autor, em uma investigação matemática o aluno parte de uma questão geral pouco estruturada e tenta formular uma questão mais específica e sobre ela produzir várias conjecturas que devem ser testadas para que, em caso de refutações, as questões sejam revistas ou novas questões sejam avaliadas até ganharem credibilidade.

Como exemplo, citamos a função $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$ apresentada na introdução como uma questão aberta em que os estudantes foram convidados, considerando as funções f(x)=A.senB(x-C)+D e g(x)=A.cosB(x-C)+D, a definir uma função da sua autoria com as duas funções (seno e cosseno) que contivesse uma operação (f(x).g(x); f(x)+g(x); f(x)-g(x); f(x)/g(x) ou outras operações) a fim de investigar a função criada por eles.

Ainda segundo Ponte, investigar é descobrir relações e padrões, procurando identificar e comprovar as propriedades levantadas pelo investigador. Ele destaca a importância dessa atividade por levar o aluno a intuir, a experimentar, a provar, a avaliar, e a apresentar o(s) resultado(s) encontrado(s), reforçando atitudes de autonomia, cooperação e capacidade de comunicação oral e escrita. Uma investigação pode envolver questões mais abertas com um grau de dificuldade maior ou até questões relativamente simples que surgem na sala de aula. De acordo com Ponte (2003), as atitudes desenvolvidas pelos alunos nessas atividades contribuem para envolver e concretizar seus conhecimentos matemáticos, para desenvolverem capacidades de se comunicar, estabelecer conexões entre os tópicos da matemática, perseverança, curiosidade e interesse.

Sabemos que investigações não resolvem todos os problemas da Educação especialmente da Educação Matemática, pois, mesmo sendo uma atividade de ensino-aprendizagem eficaz, possui limitações. Ainda assim, é de suma importância já que de tais atividades podem emergir a motivação e envolvimento dos alunos e, principalmente, a capacidade de pensar, pois requer criatividade da parte deles e os aproximando do tipo de trabalho realizado pelos matemáticos possibilitando a produção de conhecimento do aluno e do professor.

Com o intuito de compreender o conceito de tarefas investigativas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006), analisamos as fronteiras entre diferentes tipos de tarefas que às vezes são utilizadas com o mesmo significado por algumas pessoas e de forma distinta por outras. Acreditamos que tal distinção possa corroborar para um esclarecimento do que sejam as investigações matemáticas. Ressaltamos o nosso entendimento de que a comparação entre investigações, resolução de problemas e exercícios serve para essa elucidação e que os três tipos de tarefa têm seu valor, cabendo ao professor manter um equilíbrio no seu uso. É pertinente lembrar que a metodologia, utilizando qualquer tipo de tarefas, é para enriquecer o processo ensino e aprendizagem.

Uma tarefa muito próxima de investigação matemática é a resolução de problemas. Em síntese, podemos dizer que, geralmente, uma das principais características da resolução de problemas é ter um objetivo bem definido, mas que não é tão facilmente alcançável. Procura-se a solução e, nas investigações, o objetivo é desenvolver e testar conjecturas com o intuito de verificar sua validade. Os problemas podem ser mais estruturados ou mais abertos e referir-se a situações puramente matemáticas ou contextos da vida real; no entanto, geralmente, as questões estão claramente estruturadas desde o início e são apresentadas já formuladas aos alunos. Um exemplo de resolução de problemas seria:

Encontre o período da função $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$.

Nas investigações, a colocação de questões, a formulação de problemas, o estabelecimento de objetivos por parte dos alunos e a mudança do direcionamento da investigação são características que diferenciam investigações de resolução de problemas. Para além disso, na resolução de um problema, podem ser sugeridos caminhos a trilhar. Nas investigações, é muito difícil, no início da atividade, apresentar um conjunto de estratégias, pois as possibilidades são imensas para criação de um problema. Assim, para que esse processo seja contemplado, a investigação deve ter um caráter aberto e um ponto de partida pouco definido.

Em relação à investigação na resolução de problemas, o objetivo é posto pelo professor. É claro o que deve ser feito, mas como chegar "lá" não é claro. No exemplo dado como resolução de problemas, o aluno poderá trabalhar só com $g(x) = sen(2x)$ e $h(x) = \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$. Embora o estudante possa saber que g(x)=sen(2x) tem período 2π e h(x)= $\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$ tem período igual a 3π, o período de f(x) não é óbvio, e os estudantes não possuem estratégias prontas para esse tipo de problema.

De acordo com Ponte (1998, p.1):

> O aspecto mais distintivo das atividades de investigação em relação à resolução de problemas diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto que na resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente especificada ao aluno, na atividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas, necessitando de ser trabalhadas, tornadas mais precisas e transformadas em questões concretas pelo aluno.

Além disso, Ponte *et. al* (1998) afirmam que, na resolução de problemas, as tarefas são tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida, enquanto as investigações matemáticas são referentes a contextos variados, porém prevalecendo os contextos exclusivamente matemáticos.

Na tentativa de clarificar o conceito de investigação matemática, Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002) recorrem à abordagem de estudiosos em relação à suas análises das diferenças e semelhanças entre a resolução de problemas e a atividade de investigação. Assim, foram considerados como fatores distintivos entre essas duas tarefas: a formulação de problemas, os objetivos dessas atividades, o papel do professor e do aluno. De acordo com as ideias de Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (2002), na resolução de problemas, as questões já estão formuladas, diferentemente das investigações em que esse será o primeiro passo a desenvolver. Outra distinção: a investigação é um processo divergente, e a resolução de problemas um processo convergente, pois o objetivo nas investigações é a própria exploração (observações), enquanto, num problema, procura-se a solução de algo a ser determinado. Na resolução de problemas, o professor poderá ter o controle do conteúdo e do modo de ensinar; já na investigação, ele poderá apresentar à turma a situação inicial, mas é o aluno quem formula a questão de acordo com seu interesse na situação apresentada.

Isso ocorreu na pesquisa: apresentamos a função $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$, e cada grupo escolheu o que investigar sobre a situação apresentada (período, imagem, paridade...). Dessa forma, o professor assume o papel de mediador na aula de Matemática, uma vez que o docente não determina o assunto a investigar tampouco o caminho a seguir; ele orienta os estudantes durante a investigação. Já o aluno tem um papel ativo, a ele cabe escolher o assunto a investigar bem como as estratégias a seguir durante a tarefa. Outra característica que distingue essas tarefas é que, durante o processo de investigação, novas questões podem emergir para serem investigadas.

Complementando, Brocardo (2001) salienta que a atividade de investigação é caracterizada por vários processos matemáticos que não podem ser apenas seguidos de uma forma linear e ordenada. A recolha e a organização de dados, a formulação e o teste de conjecturas, e a prova, são fases do processo investigativo que devem ser percorridas tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interações entre eles.

Diante das considerações expostas, podemos afirmar que ambos, investigação matemática e resolução de problemas, se distinguem de exercícios. Se considerarmos um contexto em que estudantes já tivessem aprendido que o período das funções seno e cosseno pudesse ser determinado pela fórmula $\frac{2\pi}{|B|}$, podemos exemplificar como exercício a seguinte situação: Encontre o período da função y=sen(2x).

Em relação à resolução de problemas, o exercício pode ser resolvido usando um método ou algoritmo já conhecido. É o que afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Segundo os autores, “um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido” (2006, p. 23).

Segundo Ramos, Mateus, Matias e Carneiro (2002, p.4):

> O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida. Ou seja, o exercício envolve mera aplicação de resultados teóricos enquanto o problema necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa.

Nesse sentido, existem diferenças entre exercícios, resolução de problemas, problema e investigações matemáticas. Na primeira tarefa, o aluno precisa decidir sobre o procedimento a ser utilizado para se chegar à solução. Já os problemas e investigações exigiriam reflexão, questionamentos; e tomada de decisões para encontrar a solução para seus questionamentos, não existe uma técnica preestabelecida. Em outras palavras:

> As tarefas em que precisa aplicar uma fórmula logo depois desta ter sido explicada em aula, ou após uma lição na qual ela aparece explicitamente [...] servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas [...] (SOARES; PINTO, 2001, p.7).

Diante dessas abordagens, entendemos que a tarefa-exercício pode ser conceituada por apresentar as características de aplicação/fixação de noções já conhecidas, ao passo que a tarefa problema se caracteriza pela busca do desconhecido, não se obtendo a resposta de imediato, mas sim por meio de um método ou estratégia de resolução. Diferentemente dessas atividades Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) afirmam que, para que uma tarefa possa constituir uma investigação, é essencial que seja motivadora e desafiadora, não sendo imediatamente acessíveis, ao aluno, nem o processo de resolução nem a solução da situação. Nesse sentido, as atividades de investigação contrastam-se claramente com as tarefas de exercícios e resolução de problemas, uma vez que são muito mais abertas, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo ao aluno clarificar sua definição permitindo que ele coloque as suas próprias questões (formulação do problema dentro da situação) e estabeleça o caminho a seguir. Além disso, o ponto de partida e as conclusões dos resultados podem se dar de vários modos.

Com a finalidade de exemplificar as afirmações sobre atividade investigativa, apresentaremos, no capítulo 3, momentos da investigação vivenciados por nós.

1.2 Pensamento reflexivo em investigações matemáticas

Nesta seção, apresentamos concepções de Dewey sobre o sentido do pensamento reflexivo, a fim de explicitar o tipo de pensamento que os alunos possivelmente utilizarão na realização da atividade investigativa, e para subsidiar a condução dessa atividade. Percebemos a importância da atividade reflexiva para com a investigativa ao notar que os aspectos da realização de tais atividades, como o reconhecimento da situação proposta, sua exploração, o surgimento de ideias, a elaboração do problema ou a questão a investigar, o levantamento de conjectura, os testes e as reformulações e a verificação dos resultados convergiam.

Utilizamos os preceitos do pensamento reflexivo para subsidiar nossa postura no sentido de estimular nos alunos a formação de hábitos de pensamento reflexivo. Por meio da compreensão das características desse tipo de pensamento, pudemos despertar e guiar a curiosidade, a sugestão e a ordem das ideias dos alunos, fazendo com que eles pudessem aprender por si próprios desenvolver o prazer em examinar reflexivamente o que estavam interessados em descobrir. Os resultados foram positivos, o ato de pensar reflexivamente foi utilizado pelos alunos na realização da atividade investigativa. No intuito de esclarecer o sentido do pensamento reflexivo de Dewey e seu subsídio para com as investigações matemáticas, apresentamos algumas considerações.

Dewey (1959) evidencia que o pensamento reflexivo se traduz em se chegar a uma conclusão mediante indagações, desvendar algo obscuro a ser esclarecido por meio da aplicação do pensamento. Ainda, segundo o autor, o pensamento reflexivo se baseia em um estudo cuidadoso e extenso na observação, no raciocínio sobre as conclusões, a fim de verificar as hipóteses levantadas. O pensamento reflexivo “faz um ativo, prolongado e cuidadoso exame de toda crença ou espécie hipotética de conhecimento, exame efetuado à luz dos argumentos que a apóiam e das conclusões a que chega” (DEWEY, 1959, p. 18).

A necessidade da solução de uma dúvida é o fator básico e orientador da reflexão, devendo-se considerar que a natureza do problema a resolver determina o objetivo do pensamento e esse objetivo orienta o ato de pensar. Enquanto reflexivo, um processo de pensamento segue um curso ordenado. É cuidadoso, lógico e determina com exatidão um resultado que, por sua vez, é procedido de uma vistoria. Já o pensamento solto deixa o resultado com um sentido vago em relação àquilo que foi conseguido com sua investigação (o resultado). Desse modo, o pensamento reflexivo não é simplesmente uma sequência, mas também uma consequência, ou seja, é uma operação em que uma ideia completa e/ou sustenta a outra em uma sequência tornando-se um fluxo, uma cadeia para um fim comum de tal modo que nos induzam a crer. Faz com que sejamos induzidos a acreditar no que é sugerido. Por isso, é uma operação em que os atos e os significados são alcançados por meio de constantes interações entre eles. Cada novo fato descoberto desenvolve, verifica e modifica uma ideia; e cada nova ideia conduz à nova investigação, revelando fatos novos que podem modificar a compreensão dos fatos anteriormente observados criando-se assim "[...] uma nova situação em que a dificuldade se ache resolvida, a confusão, esclarecida, a perturbação, aliviada, a questão proposta, respondida" (DEWEY, 1959, p.105).

Podemos resumir as funções do pensamento reflexivo da seguinte forma: "[...] transformar uma situação de obscuridade, dúvida, conflito, distúrbio de algum gênero, numa situação clara, coerente, assentada, harmoniosa" (DEWEY, 1959, p. 105).

Dessa forma, pensar reflexivamente não é um processo mental separado e sim um processo onde são empregados, levados em consideração e analisados os diversos pontos observados no problema, provocando fluxo de sugestões e favorecendo a consecutividade no ciclo de ideias.

Para Dewey, quando uma pessoa encontra uma situação que contenha determinada dificuldade, ela pode tomar diversos caminhos e um deles é o de enfrentar essa dificuldade. Nesse momento, a pessoa começa a refletir e, consequentemente, a observar determinado fato. A partir disso, vão surgindo sugestões de ações para que, após compará-las, possamos escolher a que mais fornece uma solução satisfatória. Segundo o autor, o pensamento reflexivo possui fases que podem ser consideradas, em síntese, em duas sequências:

> (1) um estado de dúvida, hesitação, perplexidade, dificuldade mental, o qual origina o ato de pensar; e (2) um ato de pesquisa, procura, inquirição, para encontrar material que resolva a dúvida, assente e esclareça a perplexidade. (DEWEY, 1959, p. 22).

Para Dewey existem dois limites na atividade reflexiva: a parte pré-reflexiva em que se encontram situações embaraçosas, confusas, ou seja, origem da questão a ser resolvida; e a parte pós-reflexiva, que se caracteriza por uma situação resolvida. Dentre esses limites, existem (cinco) fases do pensamento reflexivo:

- Sugestões
- Intelectualização da dificuldade ou perplexidade
- Hipótese (ideia-guia)[1]
- Elaboração mental da ideia ou suposição (raciocínio)
- Verificação da hipótese pela ação

Em síntese, entendemos que, apesar de Ponte nos fornecer informações sobre o que é a investigação matemática, sua relevância e realização dessa tarefa, Dewey nos dá informações mais descritivas sobre o pensamento reflexivo, a ser utilizado durante a investigação matemática, no tocante às atitudes dos alunos e do professor. Nessas informações, constam a importância da incerteza para a investigação, por meio da qual os alunos iniciam o processo de inquirição atribuindo significados aos conceitos investigados, além de propiciar a eles a reflexão, a autonomia, a criação do espírito de pesquisa, a argumentação, a descoberta e, por fim, a avaliação. Além disso, Dewey nos relata os meios para que o professor possa desenvolver nos alunos bons hábitos de pensamento e sua postura na atividade reflexiva.

De acordo com Dewey (1959), quando um estado de confusão suspende nossa convicção, surge um problema, uma questão, a origem do pensamento, de tal modo que nossas verdades ou crenças tornam-se incertezas e, em meio as nossas perplexidades/dilema, paramos de observar e a investigar. A partir daí, passam a surgir as ideias que podem explicar particularidades em questão, passamos a examinar soluções para o problema e assim ser capazes de alcançar conclusões por meio de evidências. Segundo Dewey (1959, p. 23):

---

[1]Entendemos que o sentido de hipótese, para Dewey, é o que Ponte denomina conjectura e, em nossa discussão, adotaremos o termo conjectura, por ser um termo usual na nomenclatura da Matemática.

> [...] Não existe reflexão, quando sentimos que nossa atividade mental passe insensivelmente de um assunto para outro, ou que nossa imaginação se entregue livremente a seus caprichos. Caso se entregue porém a uma dificuldade, um obstáculo, no processo de alcançar uma conclusão, precisamos deternos. Na suspensão de incerteza, trepamos metaforicamente em uma árvore; procuramos atingir um lugar donde possamos inspecionar outros fatos e, por um descortino mais completo da situação, compreender a relação desses fatos entre si.

Assim, para que exista reflexão há que se ter uma predisposição na busca de novos objetos que sirvam de ampliação de nossos conhecimentos. Para que isso ocorra, é preciso que exista observação considerada como um processo ativo e que consista em uma exploração, uma pesquisa com vista a descobrir o desconhecido. Essa observação começa da necessidade de se resolver problemas tendo por desenvolvimento intelectual a reflexão. Ela tem por objetivo conjecturar e levantar hipóteses que expliquem os aspectos problemáticos apresentados pela observação e verificar as ideias sugeridas.

2. Apresentando o contexto no qual a proposta foi realizada

Para os primeiros encontros, preparamos um conjunto de atividades que chamamos de preliminar, ou seja, atividades a serem realizadas anteriormente à atividade investigativa, e adotamos por ferramenta auxiliar na condução das atividades o software GeoGebra.

As atividades preliminares tiveram por objetivos:

1. Sondar e retomar conceitos básicos sobre as funções seno e cosseno (conceito, propriedades, período, amplitude, simetria);
2. Apresentar dinâmica (condução) de aula em que a professora[2] era mediadora e alunos investigadores mais independentes. Em geral, essa não é a dinâmica do dia a dia da sala de aula de matemática e por isso, antecipamos que precisava ser efetuada uma transformação nos costumes da professora e alunos frente a suas posturas nas aulas de matemática.

Para os estudantes:

3. Aprender a utilizar um *software* de geometria dinâmica (*GeoGebra*) no contexto de atividades envolvendo as funções seno e cosseno.

O primeiro e o terceiro objetivos implicavam aulas mais expositivas e diretivas, enquanto no segundo, assumiría a postura de mediador e os alunos trabalhariam em grupos de forma mais autônoma.

A proposta era trabalhar com os alunos atividades que lhes proporcionassem rever ou mesmo aprender conceitos referentes às funções seno e cosseno para subsidiar sua atividade investigativa no tocante a seus conhecimentos prévios e depois propor a atividade investigativa propriamente dita, buscando, pelas das atividades preliminares e de investigação, contribuir para o aprendizado deles.

[2]Apesar de não ser a professora da turma em que realizei a pesquisa, adotei o termo professora para me referir à pesquisadora.

Percebemos que trabalhar os conhecimentos prévios dessas funções possibilitou a revisão e o aprendizado de conceitos matemáticos não compreendidos pelos alunos, o que possibilitou sua utilização posterior na investigação. Outro fator importante a ser destacado nesse trabalho preliminar foi o de procurar desenvolver ambiente e postura que promovessem o desenvolvimento de algumas características do pensamento reflexivo e das investigações matemáticas (curiosidade, sugestão, observação, hábitos de pesquisar e consecutividade no ciclo de idéias, interações, argumentação, questionamento, testes) com a finalidade de subsidiar a atividade investigativa, já que não era uma tarefa comum para esses alunos e nem para a professora. Além disso, proporcionar práticas com o *software GeoGebra* utilizado como ferramenta que os ajudariam no desenvolvimento dessa atividade. O propósito de que os alunos começassem a desenvolver o hábito de pensar reflexivamente foi concretizado mediante estímulos que puderam aguçar neles características desse tipo de pensamento. Entendemos que os professores devem desenvolver atividades nas que possam suscitar no aluno o hábito de pensar para que ele verifique, de forma continua e reflexiva, o que possa vir a ter interesse em descobrir.

Para exemplificar o tipo de atividade trabalhada durante a fase preliminar, apresentamos uma das atividades realizadas:

ATIVIDADES -PARÂMETROS

Exercício1: Tendo por base o estudo dos parâmetros das senóides, preencha a tabela para itens a - e.

	f(x)	Imagem	Período
a	sen($\frac{1}{3}x$)		
b	cos(πx)		
c	3sen(4x)		
d	2sen(x)+3		
e	6cos(7x)+1		

Exercício2: Utilize a última linha em branco da tabela para criar sua senóide f(x) = Asen B(x – C) + D ou f(x) = Acos B(x – C) + D; encontre sua imagem e período. Você deverá trocar com outro grupo a sua imagem e período encontrados, tendo por base sua

função criada, e o outro grupo deverá encontrar essa função ou uma função que satisfaça os “critérios” (mesma imagem e período entregues pelo grupo) sendoA, B, C, D $\in \Re; A, B \neq 0$.

No capítulo 3, para mostrar os momentos da investigação no CEFET, utilizaremos nomes fictícios para nos referir aos alunos que participaram da pesquisa:

P- (professora); Roberto - (aluno do grupo 1); Márcia, Marcela – (alunas, grupo 3), Mateus, Henrique, Caio - (alunos, grupo 4); Leandro, Patrícia – (alunos, grupo 5); Artur, Carolina, Tiago – (alunos, grupo 6), João - (aluno, grupo 7) , Karina, Kelly –

(alunas do grupo 8), Eliza – (aluna, grupo 9).

3. A atividade investigativa mediada pelo pensamento reflexivo

Apresentaremos o desenvolvimento da tarefa investigativa para ilustrar os quatro momentos da investigação matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006):

I) Exploração e formulação de questões investigativas;
II) Organização de dados e construção de conjecturas;
III) Realização de testes, refinamento e sistematização das conjecturas;
IV) Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Utilizaremos tópicos representados por assuntos para relatar o que aconteceu em etapas características de cada momento na ordem em que ocorreram. Acreditamos que o relato de tais tópicos seja importante para verificação das situações que possam ocorrer em cada momento.

Exploração e formulação de questões investigativas

Esse momento corresponde, em síntese, à observação, sugestão/ideia inicial eIntelectualização da ideia em problema. No pensamento reflexivo, a convicção que a pessoa tem de determinado assunto é suspensa, quando se depara diante de um dilema a ser esclarecido. Perante esse estado de dúvida, hesitação e perplexidade é originado o ato de pensar e a pessoa começa a observar, a explorar os fatos (dados). Ao mesmo tempo em que a pessoa observa as condições que constituem os fatos a serem tratados, são sugeridos os cursos possíveis de ação, sendo espontâneas as primeiras ideias que vêm à mente.

Essas ideias iniciais são tidas como um palpite, uma possibilidade para a solução, não existindo nessas sugestões um controle das condições que determinam sua ocorrência. Isso é pensar, mas não o pensar reflexivo, já que não existe uma observação e um pensamento dirigidos para uma conclusão aceitável, com base em evidências que a fundamentam para se tornar reflexivo; é preciso que existam ordem e consecutividade no ato de pensar. Por meio de novas observações, a sugestão inicial é bloqueada, o que leva a reconsiderar os dados com que se defrontam, mantendo o estado de dúvida e provocando investigação ulterior.

Até esse momento, a inquietação, provocada pela situação problema embaraçosa, passa a ser expressa até certo ponto como condições. Quando conseguir entender, de forma clara, a dificuldade, ou seja, quando localizar e definir a dificuldade traduzida em um problema mais fácil e mais apurado, é possível transformar em um verdadeiro problema, algo intelectual.

Essa conversão acontece pelo registro mais definido das condições que constituem o embaraço. Nesse momento, transformamos a sugestão, a princípio nossa possibilidade, em uma probabilidade a ser verificada. Essa intelectualização da sugestão em problema está presente na atividade investigativa, na etapa de exploração e formulação de questões, que é representada pelo reconhecimento e exploração de uma situação duvidosa.

No início dessa etapa, as tentativas para o alcance do problema são mais ou menos vagas. A exploração inicial é identificada pela familiarização com os dados e apropriação mais plenamente do sentido da tarefa. Não se trata apenas da opção por algo a se investigar, mediante observações dos dados. A pessoa parte de uma questão geral pouco estruturada para, logo após, formular uma questão mais específica de acordo com seu interesse a investigar.

Relatando minha experiência com atividade investigativa

A realização desse tipo de atividade não é tão fácil, principalmente para professores, como nós, com pouca experiência, porém dispostos a sair da zona de conforto e se aventurar em novas possibilidades metodológicas que possam contribuir na aprendizagem dos alunos. Relato minhas primeiras impressões quanto a esse tipo de atividade.

Após atividades preparatórias (preliminares), a expectativa era grande para a proposta de atividade investigativa. Em princípio, nossa pretensão era iniciar uma prévia da atividade investigativa, e, por não me ser uma prática comum, estava um pouco apreensiva já que tanto os alunos como a professora iriam vivenciar essa experiência pela primeira vez. Acredito que a ansiedade maior foi na condução da atividade. Como não sabia o que poderia ocorrer, procurei ficar atenta na direção que a atividade poderia tomar para assim intervir com minhas mediações. Portanto, tinha a constante preocupação de incentivar o aluno na prévia e ao mesmo tempo não guiar a escolha do problema a ser investigado. Tentei observar bem as discussões do grupo e procurei dar exemplos a cada pergunta de forma a não influenciar nas resoluções. Houve momentos em que alguns grupos não desenvolviam, não progrediam e tive que intervir dando ideias.

Apresentando a atividade investigativa.

Por se tratar de uma tarefa matemática de caráter aberto, penso que uma das questões a se dar ênfase na realização da atividade investigativa é sua apresentação para os alunos. Essa pode ser feita dando poucas ou muitas informações e pode assumir a forma escrita, oral ou mista (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999). As investigações derivam de uma situação inicial a que alguns autores (FONSECA, 2000; AMARAL, 2003) chamam ponto de partida, que servirá de base para a investigação. Especificamente, adotei a ideia de Amaral (2003), que coloca como uma boa sugestão para o ponto de partida a análise de um caso particular. Ele enfatiza que, a partir do momento em que os alunos compreendem os aspectos envolvidos na investigação, torna-se mais fácil envolverem-se na exploração de mais exemplos e na procura de padrões, embora, em princípio, tivesse pensado que a abstração da ideia do que seria uma investigação pudesse não sair facilmente mesmo utilizando um caso particular. Então, acreditei que, mesmo apresentando um ponto de partida baseado na opinião de Amaral, talvez tivesse que fazer alguns ajustes. Pensei em fazer uma prévia da atividade investigativa para que depois de possíveis ajustes pudesse propor a atividade propriamente dita. Porém, o que eu acreditava acontecer em relação à falta de andamento da atividade não ocorreu, o que era para ser uma prévia tornou-se a própria investigação.

No início do sexto encontro, os alunos estavam impacientes, ansiosos para começar a atividade investigativa. Talvez essa reação tenha sido por curiosidade em conhecer a atividade, já que, no decorrer dos encontros, sempre era comentado sobre a investigação como proposta para pesquisa. Assim, demos início à atividade investigativa explicando a proposta.

Considerando as funções: $f(x) = A_1 sen\ B_1(x – C_1) + D_1eg(x) = A_2\ cos\ B_2(x – C_2) + D_2$,

solicitamos aos alunos que definissem funções de sua autoria, formadas pelas funções seno e cossenoe que contivessem uma das operações (f*(x).g(x); f(x)+g(x); f(x)-g(x); f(x)/g(x)* dentre outras) a fim de investigar algo de seu interesse tendo por base um exemplo que fornecemos como ponto de partida: $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$ sendo sua escolha aleatória, tendo a condição de ser formada pelas funções seno e cosseno e um número reduzido de parâmetros (A, B, C e D) por ter poucas transformações em relação a *y = sen (x)* e *y = cos (x)*. Nesse sentido, o aluno foi convidado a construir suas próprias questões a partir da função apresentada.

P: *É... eu gostaria que vocês observassem essa função aqui* $\left[f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right]$ *que eu criei e procurassem fazer algumas observações sobre as características dessa função, que seja no próprio gráfico, ou por meio de cálculos. Observem as propriedades que já vimos nesses encontros direcionadas para essa função e, a partir de suas observações, vamos tentar chegar a generalizações. Na Matemática, para generalizar algo tenho que fazer testes, porque se eu encontrar nos meus testes algo que contradiz aquilo que eu acredito ser verdade aí o que eu achava ser o correto não será válido para todos os casos. Então, vocês vão observar essa função e vão tentar se lembrar de tudo que aprenderam comigo ou que relembraram comigo desde o primeiro encontro e vão tentar achar alguma generalização. Suponhamos que eu queira estudar alguma coisa específica que a Daiana explicou nessa função; então terei que primeiro levantar conjecturas, testar essas conjecturas para ver se são válidas para todas as funções que eu criar, que eu for testar, aí se isso ocorrer eu posso generalizar a ideia que tive, senão tenho que ajustá-la para fazer novos testes. Essa função aqui é uma base se o aluno quiser criar outra função para testar essa pode criar, estão entendendo o exemplo?*

A escolha pela investigação do período para esse tipo de função mereceu destaque, visto que cinco grupos decidiram por investigar o período e três grupos optaram por investigar a imagem. Acredito que tal interesse aconteceu pela construção de um entendimento da fórmula geral $\frac{2\pi}{|B|}$ para o período de funções do tipo y = sen B(x) e y = cos B(x) durante uma das atividades preliminares. Percebi que o ensino, para que os estudantes atribuíssem um significado de período por meio da noção de comportamento de função, foi significativo, uma vez que eles utilizaram essa noção para determinar a fórmula geral para o período, considerando B pertencente aos números racionais e também utilizaram a concepção de comportamento e a fórmula geral em suas investigações.

Alunos apresentando dúvidas na atividade investigativa

Na fase inicial do trabalho, os alunos podem mostrar dificuldades que os impedem de realizar as suas investigações, principalmente os pouco habilitados ao trabalho de natureza investigativa, e, nesse momento de impasse, logo chamam pelo professor. De acordo com a experiência vivenciada, concordamos com Fonseca, Brunheiras e Ponte (1999), os quais explicam que isto acontece porque não compreendem a natureza da tarefa proposta, sendo necessário explicar-lhes um pouco do que é o trabalho investigativo com um ou mais exemplos.

No início, houve dúvidas de como começar e o que fazer. Tive que, aos poucos, dar informações a medida que os alunos mostravam dificuldades:

Artur: *Explica só mais um pouco, como eu devo começar analisar porque agora temos duas funções.*

Apresentei mais explicações sobre a proposta.

P: *Suponhamos que estejamos estudando essa função aqui y=sen(x)+10, ah! A Daiana pediu para que eu analisasse essa função aqui, eu posso analisar isto* [g(x)=sen(x)] *e depois eu posso verificar isto [h(x)=10], eu posso verificar, por exemplo, separadamente e depois analisar a soma dessas funções. Deu para entender a ideia?*

Alunos: *Ranran.*

Reconhecendo uma situação problemática/estado de dúvida. Observando / explorando a situação

Depois das diversas explicações sobre o que tratava essa tarefa, às vezes utilizando exemplos, outras não, os alunos apresentaram progresso em relação à proposta da atividade e iniciaram um estado de dúvida provocado pelas observações de aspectos da representação gráfica da função. Esse estado para Dewey consiste em algo obscuro a ser esclarecido por meio da aplicação do pensamento. Para o autor, quando uma pessoa encontra uma situação que contenha determinada dificuldade, ela pode tomar diversos caminhos e um deles é o enfrentar essa dificuldade; nesse momento a pessoa começa a refletir. A tentativa de reconhecer a situação problemática deu início à atividade reflexiva.

É importante ressaltar que, segundo Dewey, é possível não pensarmos reflexivamente, mesmo quando haja um estado de perplexidade. Pode acontecer a falta de crítica das ideias que nos ocorrem, precipitando nossas conclusões; ou a abreviação dessas indevidamente pela adoção do primeiro resultado por preguiça ou impaciência. Para ele só estaremos aptos a pensar reflexivamente quando nos dispusermos a suportar a suspensão do pensamento e a vencer o cansaço da pesquisa. Levando em consideração as ponderações de Dewey e conforme a pesquisa, posso afirmar que é preciso, a todo instante, estimular o aluno prolongando esse estado de dúvida,que é o estimulo para uma investigação.

De acordo com Dewey, ao se deparar com uma situação embaraçosa é importante que o aluno, em seu estado de confusão, suspenda sua convicção, surgindo uma dúvida que dá origem ao pensamento. Foi isso que ocorreu: reconhecida a situação problemática, no caso referente ao período, os participantes da pesquisa passaram a realizar observações da situação. Os recortes a seguir revelam essa etapa de exploração, reconhecimento da situação problemática; nesse momento, as tentativas para alcance de um problema mais bem elaborado são mais ou menos vagas. Para Ponte a exploração inicial é identificada pela familiarização dos dados e apropriação do sentido da tarefa.

Márcia: $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$, *isso, dá enter*. [digita a função na linha de comando e aperta a tecla enter para o gráfico aparecer]

Grupo 3: *Nossa!* [muita conversa ao mesmo tempo]

Márcia: *O período está indo até* $\frac{\pi}{2}$ *?*

Marcela: *Acho que não.*

Após apresentada a função que serviu como ponto de partida, o grupo 3 examinava a situação. Verificamos que o período também é uma característica da função que chama a atenção desse grupo ao ver o gráfico.

Apresentando uma falta de entendimento quanto à proposta de atividade

Como dito, pode ser que as investigações matemáticas não sejam uma tarefa habitual na sala de aula. Assim, pode acontecer que, mesmo tirando dúvidas iniciais, outras possam surgir durante a atividade e isso ocorreu na pesquisa. Após alguns esclarecimentos quanto à proposta, alguns alunos mostravam dificuldades em termos de não entender a ideia de conjecturas a partir de uma questão e de generalização. Dessa forma, procurei dar mais informações no sentido de exemplificar como seria o processo:

Artur:	*Ô Daiana, quem achou a imagem e o período, por exemplo, é para acabar?*
P:	*Não. Mas aqui... Ô gente vocês entenderam que além de verificar na função, por exemplo, nessa função soma aqui* $\left[f(x) = sen\ (2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right) \right]$*, além de você achar a imagem, o período, etc, etc, e outras propriedades, o objetivo é que você faça generalizações. Vamos supor que eu achei ali, vamos* ***supor*** *que a imagem deu de -1,86 a 1,86, por que que a imagem deu isso? Por quê? Eu sei que a imagem das funções seno e cosseno variam de -1 a 1 e por que a imagem da função f(x) está dando esse valor? Se eu mudar ali o valor de B e/ou outros parâmetros a imagem continua a mesma? Por que não é a mesma? Se eu penso que eu achei respostas para minhas perguntas, aí eu tenho que testar, deixa eu ver se isso que estou achando vale para uma outra função, e para essa outra aqui, até eu poder fazer uma afirmação. É isso que eu quero que vocês façam, tá bom? (todos os grupos discutiam ao mesmo tempo).*
P:	*Entenderam? Entenderam? (passava nos grupos) Tudo bem aí? (perguntei ao grupo 8)*
Karina:	*Explica um pouco mais pra gente.*

À medida que foram aparecendo dúvidas em relação à proposta, ia fornecendo mais informações para que os alunos pudessem compreendê-la envolvida na investigação.

Parte das dúvidas deveu-se à falta de experiência nesse tipo de atividade, o que levou, no início, os alunos a quererem utilizar estratégias que empregavam para resolver outros tipos de tarefas (como exemplo, exercícios) e também pela falta de compreensão quanto à natureza da tarefa investigativa (busca de padrões, condições, ideia de conjectura, generalizações). Sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos na realização da atividade, Rocha e Ponte (2006, p. 33) afirmam que os alunos "tendem a dar pouca atenção à colocação de questões, demoram a compreender a necessidade de justificar as conjecturas e tornam-se rapidamente como conclusões''.

Sugestão (uma ideia inicial ou possibilidade)

É importante destacar que o pensar reflexivo mediou a investigação e começou com a observação que geraram os dados. No início, ideias surgiram à mente sem muito direcionamento, foram sugestões tidas como uma mera possibilidade, mas que puderam ser orientadas pela professora para dar prosseguimento à inquirição.

Ao apresentar a função $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$, os alunos se sentiram desafiados a tal ponto que a crença se fez incerteza. A função apresentada produziu perplexidade, eles começaram a se questionar. Nesse momento, o pensamento abrangeu a observação ou a percepção de um fato, seguidas de mais alguma coisa não observada, mas trazida à mente, uma sugestão inicial do objeto visto. Dessa maneira, foi considerada uma possibilidade como natureza da conexão entre o objeto visto (função apresentada) e a primeira sugestão vinda à mente.

Em princípio, frente à dúvida que se formou pelo contato com a função apresentada, o pensamento reflexivo começa com uma sugestão imediata que deveria ser apreciada mediante os fatos. Por exemplo, o grupo 4 levanta uma sugestão inicial para a função apresentada $f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$:

Mateus: *Daiana, olha o que pensamos. O período da função dá 4π, porque eu vou somar as funções seno e cosseno, em cada uma o período é 2π.*

P: *Será? E se vocês testassem para mais umas três a quatro funções para ver se isso está acontecendo mesmo. Tentam fazer assim...*

	façam os gráficos das funções separadas, achem o período e depois façam da função toda e achem o período, veja se é isso que vocês pensaram, e tentem chegar em uma relação. [saí, fui aos outros grupos].
Henrique:	*Não sô, aqui tem o parâmetro B, tá vendo, por isso que o período dessas funções não é 2π.*
Caio:	*Vamos fazer o que ela falou. Digita aí as funções.*
Mateus:	*Ô meu filho, é só calcular pela aquela fórmula geral.*
Henrique:	*Mas faz o gráfico também pra ajudar.*

Para Dewey as observações e o pensamento estão inter-relacionados, elas constituem os fatos que regulam a formação de ideias (sugestões) que, em princípio, são tidas como mera possibilidade, que é caracterizada por um curso desordenado de ideias que surgem de forma automática. A sugestão inicial tida como possibilidade pôde ser notada na fala do aluno Mateus:

Daiana, olha o que pensamos. O período da função dá 4π, porque eu vou somar as funções seno e cosseno e em cada uma o período é 2π.

Pesquisadora demonstrando um espírito investigativo. Professora mediando / orientando atividade frente à obstáculo apresentado pelo aluno

Enfatizamos que as atividades investigativas devem provocar a capacidade de raciocínio, além de possibilitar o emprego de conceitos matemáticos para trabalhar nas atividades propostas. Para que isso aconteça, o professor deve modelar tipos de questões que os alunos devem perguntar para si, além de levantar a possibilidade do emprego de conceitos matemáticos para trabalhar a investigação. Também observamos que se faz necessária uma postura bem diferente da utilizada no ensino tradicional, haja vista que o professor deve procurar envolver os alunos na tarefa com o objetivo de favorecer seu aprendizado.

Durante a investigação, procuramos exemplificar atitudes questionadoras, além de realizar mediações e orientações para auxiliá-los em sua investigação:

P:	*Vocês querem investigar a imagem, o período, os dois...*
Roberto:	*Vamos analisando os dois, com o andamento qual ficar mais interessante. Mas ô, Daiana, Daiana, nós encontramos os dois a imagem e o período dessa função, a gente não tá sabendo como fazer para continuar.*

P: *Observem que naquela função está presente o parâmetro B, será que ele está influenciando nesse resultado que você achou para o período, ou para o que vocês acharam para a imagem? Qual seria a lógica? Vocês encontraram 3π como sendo o período, a função é composta da soma das funções seno e cosseno, qual é a lógica para ter dado 3π. Procurem criar outras funções e analisar, observar padrões, até chegar a uma hipótese para depois testá-la.*

Esse trecho mostra que procuramos despertar a curiosidade rumo à investigação, motivar o aluno com o intuito de gerar o desejo de informação e exercitando nele a prática de observação. Percebemos que houve a oportunidade de criar situações que oportunizaram reações intelectuais nos alunos por meio de perguntas, indagações para levantar questões a serem discutidas, de modo a auxiliar na organização dos dados. Outra atitude notada nesse recorte é a postura investigativa que estava sendo desenvolvida em nós. Ponte (1998) relata que para que o aluno sinta autenticidade nas propostas de trabalho do professor é necessário que o próprio docente demonstre um espírito investigativo. Para o autor, ao longo de toda a atividade, o professor deve emitir opiniões concretas e manter uma atitude questionadora perante as solicitações dos alunos a fim de permitir a eles confirmar ou não suas conjecturas.

Elaborando o problema/formulando a questão

A fase de elaboração do problema é de suma importância, pois com a criação do problema damos prosseguimento ao pensamento reflexivo caracterizado por uma pesquisa, inquirição para encontrar material que resolva a dúvida, assente e esclareça a perplexidade. É o que revela a fala da aluna Eliza.

Durante parte do intervalo do encontro a professora e os grupos 9, 4 e 6 ficamos na sala trocando ideias formuladas por meio de interpretações de informações obtidas das observações dos gráficos plotados no *GeoGebra* relativos à função dada como ponto de partida. O grupo 9 formula uma questão a ser investigada:

Eliza: *Olha aqui [gráfico] o período dessa [h(x)=sen(2x)] foi π, dessa* $\left[g(x)=\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right]$ *foi 3π e da função [f(x)] foi 3π, daí a gente ta achando que o período para essas funções que somam, igual essa,*

$\left[f(x) = sen(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right) \right]$ pode ser sempre o período de uma das duas, ou esse (h(x)) ou esse(g(x)).

P: *Será? Será? E se vocês testassem para mais umas três ou quatro funções para ver se isso tá acontecendo mesmo.*

Grupos 4 e 6: *O nosso também tá dando isso.*

P: *Mas será que vale sempre? E se eu trocar os valores desse parâmetro B*[coeficiente da variável x]*?* [ficaram pensando]

P: *Aí tá vendo*? [confirmando a incerteza dos alunos, conforme suas expressões faciais, em relação a afirmação feita por eles]

A questão elaborada pela aluna Eliza foi que o período para funções soma poderia ser dado pelo período ou da função seno ou da função cosseno. No momento em que elaborou a questão a ser investigada, os estudantes passaram a ter uma noção da solução necessária e a sugestão inicial que era uma possibilidade passou a ser uma probabilidade, uma espécie de expectativa a ser verificada. Esse trajeto é concebido por Ponte como a fase da exploração e formulação da questão investigativa o que para Dewey se traduz na intelectualização da dificuldade ou perplexidade.

Organização de dados e construção de conjecturas

Nesse momento da investigação, os dados expandem a sugestão original surgindo as conjecturas. Depois de definido o problema, adquirimos ideia mais clara da espécie de solução necessária. Os dados põem-se à frente do problema e seu exame corrige, modifica ou mesmo expande a sugestão original, traduzida pelo problema, e passa a constituir uma suposição definida ou uma conjectura. Essa será uma ideia, que iniciará e guiará a mais observações e outras operações, durante a coleta de dados, para saber se o novo material atende a condições presentes na conjectura.

Dessa forma, de acordo com Dewey, a primeira operação (sugestão) e a segunda (sua intelectualização em problema) são postas sob controle; o sentido do problema se torna mais adequado e apurado, e a sugestão deixa de ser mera probabilidade para se tornar uma suposição a ser verificada. Essas características são condizentes às conjecturas nas investigações. Essas conjecturas refinam as sugestões iniciais, elas podem surgir, para o aluno, de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia a outras conjecturas.

Levantando conjectura. Realizando testes

Notamos que o professor precisa desempenhar o seu papel de mediador, na tentativa de que os alunos produzam uma síntese de suas ideias, fazendo com que eles elaborem suas conjecturas, testando-as e apresentando os resultados e argumentações dos principais resultados de todo o processo da investigação realizada.

Verificamos que o professor deve fornecer alguma forma de direção frente a empecilhos que dificultam o aluno a dar prosseguimento na investigação, ou mesmo, poderá dar sugestões sobre esse caminho já que o docente deve ter em mente que uma investigação nunca está completa, pois os alunos podem ter ideias que outros nunca tiveram. Tal direcionamento e/ou sugestão dada pelo professor pode ser notada na elaboração da conjectura em nossa pesquisa:

Ainda no intervalo, continuavam as discussões entre os grupos 4, 6 e 9. Após o grupo 9 ter apresentado um problema já elaborado para se chegar a uma generalização para o período, intervemos fazendo algumas colocações como: “E se testassem para outras funções?”, “E se variassem os valores do parâmetro B?”. Dessa forma, novas observações foram realizadas até o grupo 4 apresentar uma questão que foi compartilhada com os grupos 9 e 6 e a professora:

Mateus: *E o que a gente está observando já pra duas funções aqui* $\left[f(x) = sen\,(2x) + \cos\left(\frac{2x}{3}\right) \right]$ *é que o valor do período da função soma é sempre o valor daquela fórmula geral* $\frac{2\pi}{|B|}$ *só que esse B é um valor de fração, sabe?*

Caio: *É... se tiver soma de duas funções com um B inteiro e outro sendo uma fração* [própria]*, o período da função toda vai ser 2π sobre o B fração.*

Os grupos 6 e o 9 conferiram se o período da função formada era pelo seno e cosseno. Calcularam o período utilizando a fórmula 2π/|B| para o B fracionário, a fim de comparar com o período visualizado no *GeoGebra* com o intuito de comprovar o que o grupo 4 relatou.

Grupo 6 e 9: *Ah é! É mesmo.*

P: *Deixa eu dar uma dica, testem para uma função com dois valores de B inteiros para ver se o período da função toda, como disseram, será igual ao período de uma das duas funções, ou se isso ocorre para* *quando tivermos somente um valor de B inteiro e outro fração, Ah! E se tivermos dois valores de B sendo frações?* [todos falavam ao mesmo tempo, ajeitando as coisas para sair para o intervalo]. *Vão para o intervalo e continuamos depois.*

Pudemos constatar que houve um progresso em relação às ideias iniciais. Conforme o pensamento de Dewey (1959), cada fato ou dado observado que se colocava à frente do problema era examinado modificando e expandindo a sugestão original que passou a constituir uma suposição definida:

Caio: *É... Se tiver soma de duas funções com um B inteiro e outro sendo uma fração* [própria]*, o período da função toda vai ser 2π sobre o B fração.*

Interpretamos que Ponte, Brocardo, Oliveira (2006) entendem esse mesmo processo como sendo as conjecturas, uma vez que para eles essas são ideias ou suposições com fundamento não verificado e que, após sua definição, uma série de testes são feitos no intuito de confirmá-la ou rejeitá-la.

Realização de testes, refinamento e sistematização das conjecturas

Nesse momento a(s) conjectura(s) levantada(s) dirige(m) a observação, regula(m) a coleta e inspeção de dados. Ás observações ou explorações, guiadas pela conjectura, constituem os fatos que regulam a formação de ideias que são trabalhadas mediante certa experiência ou conhecimento de determinado assunto (conhecimentos prévios), resultando em uma sugestão diferente da conjectura, ajudando a ampliar o conhecimento existente.

A segurança dos elos entre as ideias, ou seja, da passagem de uma a outra se dá mediante o raciocínio que é a conjectura mais elaborada, requintada e que depende do conhecimento precedente à investigação de cada indivíduo. Na atividade investigativa, o raciocínio está relacionado ao refinamento e sistematização das conjecturas. Ele permite um exame mais completo da conjectura, a fim de verificar sua validade antes de aceitá-la. No processo de testes, as conjecturas, inicialmente promissoras, podem se revelar inadequadas, o que poderá nos levar a rejeitá-las. Às vezes, o entendimento sobre as circunstâncias de uma conjectura pode não nos levar não à refutação destas, mas à sua reformulação.

Reformulando conjecturas

Revelando-se imprópria a conjectura, ela deve ser revista e reformulada numa forma mais afim ao problema. Depois de definida a conjectura, os alunos realizaram testes na tentativa de uma constatação. Nesse processo de testes, algumas conjecturas foram reformuladas e observações adicionadas a experiências ou ao conhecimento de determinado assunto em estudo, no caso conhecimentos prévios dos alunos e aprendizado durante as atividades preliminares; uma ideia levou a outra e, por meio do raciocínio, houve um exame mais completo da conjectura existente a fim de verificar sua validade. Averiguamos também que, durante o processo, existiu a alteração do foco da atividade, no caso a conjectura, pois apesar da investigação iniciar a partir de uma questão, o objeto da inquirição pode ser mudado por aquele que conduz à investigação.

A reformulação de uma conjetura:

Conjectura inicial

O período de funções do tipo $f(x)=sen\,(B_1x) + cos\,(B_2x)$, com os valores do parâmetros B sendo uma fração e o outro um número inteiro, seria igual a $\frac{2\pi}{|B|}$, sendo B a fração.

Conjectura reformulada:

Grupos 1, 4, 5 e 6 – com interferência da professora pesquisadora: O período de funções do tipo $f(x)=sen\,(B_1x) + cos\,(B_2x)$ será dado pelo menor múltiplo comum dos períodos das funções seno e cosseno.

Grupo 6 – visando a um novo contexto (produto de funções seno e cosseno): O período de funções do tipo $f(x)=sen\,(B_1x).\ cos\,(B_2x)$ será dado pela fórmula, sendo e $\frac{2\pi}{|B_1 B_2|}$

$$B_1 = a \qquad B_2 = \frac{a}{b}$$

, ou seja, o valor de deveria ser igual ao valor do numerador da fração do parâmetro.

Grupo 9 – reformulação da parte numérica para a gráfica: O período de funções do tipo *f(x)=sen* (B_1x) + *cos* (B_2x) *e* g(x)=*sen* (B_1x) . *cos* (B_2x) será encontrado pela diferença dos valores do domínio, em que os gráficos da função criada e daquelas que a compõe se encontrarem.

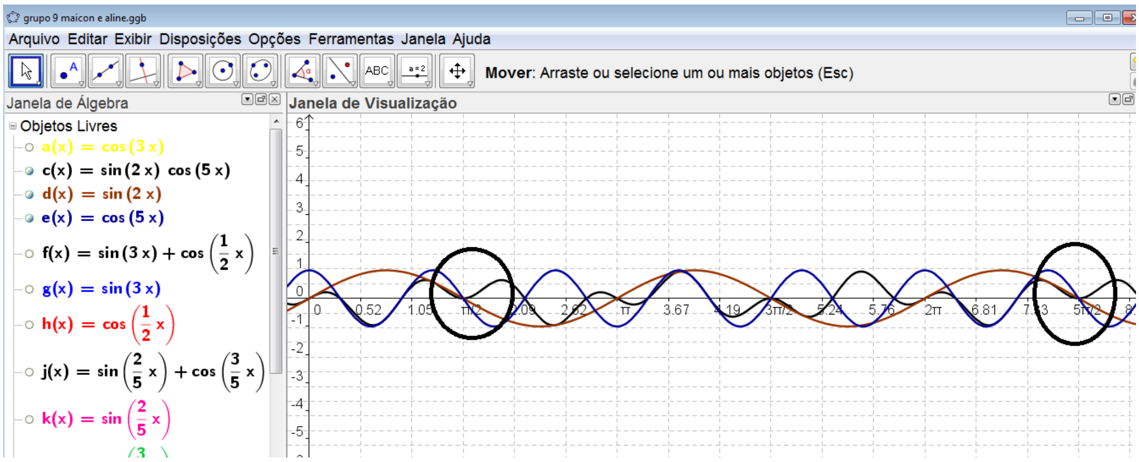

Figura 1: Gráfico da função $c(x) = sen\ (2x)\cos(\ 5x)$ exemplificando a conjectura reformulada do grupo 9

Grupo 6 – Visando a um novo contexto (produto de funções seno e cosseno): O período de funções do tipo *f(x)=sen* (B_1x)*. cos* (B_2x)será dado pela fórmula $\frac{2\pi}{|B|}$, cujo valor de B será dado pelo produto dos parâmetro B_1 e B_2.

No início do sétimo encontro, depois de observar as discussões dos grupos que investigavam o período e ver que os alunos não estavam prosseguindo na atividade, resolvemos intervir. Ajudamos os alunos na elaboração de uma nova conjectura e mostramos um contra-exemplo para a conjectura inicial formulada no sexto encontro pelos grupos 1, 4, 5 e 6.

P: *O que vocês pensaram?* [grupos investigando o período] *deixa eu dar uma ajuda para vocês começarem a pensar sobre isso, só uma linha. Na aula passada, vocês estavam observando funções com valores do parâmetro B inteiro e outro fracionário não foi isso?*

Caio: *É.*

P: *E vocês tinham descoberto que o período para soma de funções era* $\frac{2\pi}{|B|}$ *, só que o B seria o valor dado pela fração, correto?*

Alunos: *Correto.*

P: *Mas... eu vou criar uma agora* [usando o *GeoGebra*] *vou explicar essa aqui e vou dar outra para vocês pensarem. Essa aqui [f(x)=sen(3x)+cos(x/2)] no caso o período seria 2π/(1/2), o período seria 4π, correto? Se eu tiver falando alguma coisa errada sobre o que vocês encontraram na aula passada vocês me corrijam. Vamos no 4π, aqui acaba [comportamento da função] e a partir daqui, vai começar a outra etapa se eu tomar como referência a origem vai repetir a partir daqui não vai?*

Alunos: *Vai.*

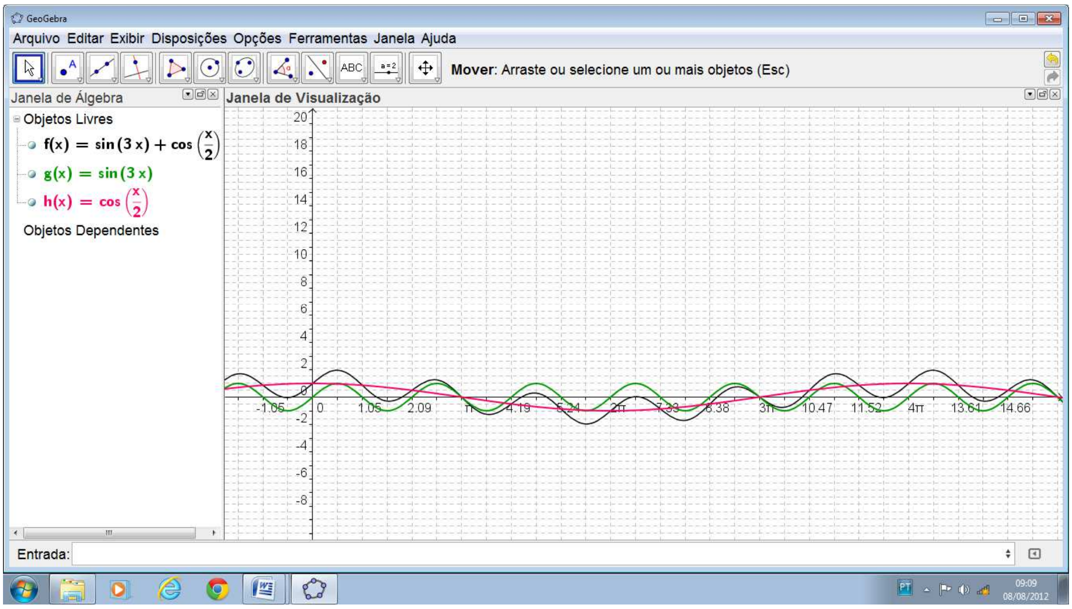

Figura 2: Gráfico das funções $f(x) = sen\ (3x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $g(x) = sen\ (3x)$ e $h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

P: *Se a gente fizer separadamente as funções... vou chamar essa de g(x)* [fazia no GeoGebra] *e aqui eu tenho a h(x), olha só a preta* [*f(x)*] *é a soma das duas. Vamos lá! No período dessa função... 4π, no 4π se eu calcular o período separado da rosa ali* $\left[h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ *,o período separado vai dar realmente 4π e o período da outra função separada, da verde* [*g(x)=sen(3x)*], *vai dar* $\frac{2\pi}{3}$ *, não é isso? A cada quatro vezes, a malha a verde começa a repetir de novo, estão vendo? Só que, no 4π, observem que coincide [período] o verde com a rosa, não está coincidindo?*

Alunos: Certo.

Após ter ajudado os alunos na elaboração de uma nova conjectura, mostramos um caso que contrariava a conjectura inicial formulada pelos grupos 1, 4, 5 e 6. Por acreditar que, ao pensar em fração, grande parte dos estudantes associam a ideia de valores entre 0 a 1, dissemos que se fosse utilizada uma fração imprópria tipo, $\frac{7}{2}$, para compor um dos valores de B da função produto, exemplo $f(x) = sen(3x) + \cos\left(\frac{7x}{2}\right)$, a utilização da fórmula $\frac{2\pi}{|B|}$ para determinação do período desse tipo de função não daria certo, já que o valor $\left[\frac{4\pi}{7}\right]$ determinado por essa fórmula como sendo o período seria diferente daquele valor [4π] visualizado no GeoGebra.

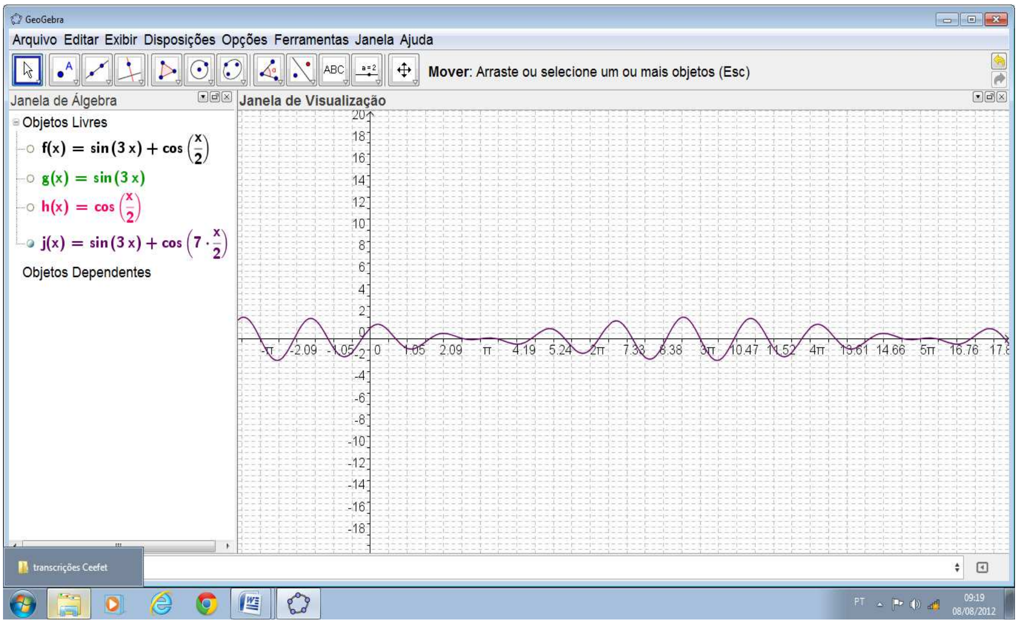

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = sen(3x) + \cos\left(\frac{7x}{2}\right)$

P: *Por que será que o período das funções coincide logo nesse valor, será que tem alguma relação?*

Realcamos a necessidade de testes para as conjecturas. Explicamos que, na Matemática, para fazemos afirmações sobre determinada situação devemos testar para vários casos e, se não encontrarmos um exemplo que negue a conjectura, poderemos acreditar nela, mas que sua generalização dependerá de uma demonstração.

Mediante recorte, destacamos que é preciso uma notória atenção por parte do professor diante das dificuldades apresentadas pelos alunos no percurso da realização da atividade, intervindo, especialmente, em momentos difíceis que os impediam de prosseguir. Tal consideração se encontra em consonância com as ideias de Dewey e Ponte em relação ao papel determinante do professor na condução da atividade. Conforme mostrado no recorte, avaliamos o progresso do aluno que, como indicado, já se encontrava empenhado nesse tipo de tarefa e, em meio a possíveis entraves, promovemos a reflexão e fornecemos informação. Fica evidente no trecho aqui selecionado que o decorrer da aula dependeu, em partes, das indicações e apoio da professora no desenvolvimento das investigações no momento em que apresenta um caso particular e fornece caminhos para reflexão de outra conjectura.

O grupo 4 havia nos relatado, o que não foi gravado, sobre uma sugestão a respeito do menor múltiplo comum entre os períodos das funções seno e cosseno para determinação do período da função formada por eles, após eu ter dado uma explicação, um “fio condutor” para essa ideia. Percebemos a falta de prosseguimento na atividade pelos outros grupos, então, resolvemos compartilhar o que eu tinha descoberto. Iniciamos o relato mostrando o número de vezes em que o comportamento de cada função separada $\left[f(x) = sen\ (3x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right),\ g(x) = sen\ (3x),\ h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]$ iria se repetir para que os gráficos se encontrassem.

P: *[...] Quando chegou no 4π, tanto a cosseno quanto a seno estavam juntas, o período vai repetir de novo, por isso que o período da soma era 4ð, aí voltando um pouco o que significa lá na quinta série o menor múltiplo em comum? Vamos supor que eu queira saber o menor múltiplo comum entre três e dois eu pego três vezes um é três, três vezes dois é seis, três vezes é três e assim vai. Depois eu pego os múltiplos de dois, um vezes dois é dois, dois vezes dois é quatro, dois vezes três é seis, opa! Então o menor múltiplo em comum é seis. É mais ou menos esse raciocínio o que eu fiz, eu peguei os períodos separados de cada uma e encontrei o menor múltiplo em comum para saber qual seria o período da soma que é* *onde eles vão coincidir. Qual o número que eu multiplico por* $\frac{2\pi}{3}$ *vai dar 4π? Eu tenho que repetir esse período* $\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ *algumas vezes para dar 4π.*

Relatamos também aos alunos o que havia testado. Falamos com eles que pensamos em trocar a fração própria $\left[\frac{2}{3}\right]$ por uma fração imprópria $\left[\frac{7}{2}\right]$. Dissemos que, ao fazer isso, verificamos que o período visualizado na tela foi diferente daquele determinado pela conjectura inicial que eles haviam encontrado [período seria igual 2π dividido pelo B fracionário]. Então, pedimos que verificassem se era possível encontrar o período pelo raciocínio que tínhamos explicado quanto ao mínimo múltiplo comum entre as funções que compunham a função criada por eles. Desse modo, procuramos mostrar o uso de outros conhecimentos na tentativa de ajudá-los em seu raciocínio. Reforçamos a ideia de que eles deveriam visualizar, testar, criar outras funções, embora tenhamos dito para não se prenderem somente na dica. Pedimos que eles não ficassem presos somente naquilo que havia dito, mas que tentassem outros raciocínios.

Após nosso relato, os grupos 1, 5 e 6 seguiram a mesma conjectura levantada pelo grupo 4 para seus testes; porém, o grupo 6 encontrou uma conjectura para a multiplicação.

Professora apresentando dificuldades na realização da atividade e sua visão quanto à investigação

O papel do professor ganhou destaque, já que durante todo o procedimento de se adquirir o costume de refletir, a nossa posição foi relevante. As opiniões dos alunos expressas no questionário respondido pelos grupos, no final da atividade, confirmam essa interpretação. Por saber da importância da função do professor nesse tipo de atividade, achamos relevante apresentar nossa visão quanto à atividade e relatar algumas das dificuldades que apresentamos para que outros docentes possam ter uma previsão do que poderá ocorrer durante a proposta ou mesmo ter uma noção do que precisarão adaptar em seu trabalho.

Diante da nossa experiência, podemos afirmar que para que se tenha êxito em uma atividade investigativa, o aluno tem que se envolver, e a missão de motivá-los não é algo fácil. Mediante a vivência profissional, podemos afirmar que o sucesso do propósito de criar um ambiente de envolvimento dos alunos deve-se ao estilo e à condução do trabalho, às várias explicações sobre a natureza da atividade e, principalmente, ao desejo de centralizar a atividade nos alunos.

Essas funções atribuídas ao docente, durante a tarefa investigativa, não são simples, principalmente quando se trabalha com um número expressivo de alunos que não possuem o costume de investigar e quando essa não é uma tarefa habitual para o professor. Tal consideração pode ser expressa na seguinte situação em que fomos até os outros grupos para participar um pouco do trabalho desenvolvido em cada um deles. Essa participação não foi fácil já que éramos a única turma de 26 alunos para orientar, mediar e tentar fazer observações quanto ao desenvolvimento de cada grupo. Reconhecemos que, no geral, uma turma com 26 alunos é considerada pequena, porém, o trabalho a ser desenvolvido pelo professor durante a investigação pode se tornar mais difícil com esse número de alunos tendo em vista as mediações para investigações diferentes.

No sétimo encontro durante a realização da atividade, foi notado que alguns componentes dos grupos estavam bem envolvidos, já outros não o bastante, ainda mais por haver um agravante: no dia seguinte aconteceria uma festa típica na cidade, a “Julifest”, e muitos alunos já se sentiam envolvidos com o clima de preparação para o evento. Na tentativa de encorajá-los, expusemos algumas impressões sobre a atividade:

> *Não sei se vocês estão achando isso, mas eu acho que, nessa atividade, quando trabalho com turma cheia como essa, acredito que talvez não consiga 100% da turma se envolvendo totalmente com essa atividade, é... , por exemplo, na aula passada tive a impressão que tinham três grupos interessados, três grupos ficaram durante o intervalo, perguntaram..., eles me pareceram estar interessados, envolvidos, sabe. Na atividade investigativa, primeiro o aluno tem que querer, ele tem que ter uma inquietação para começar a trilhar caminhos para a descoberta dessas inquietações, deixa eu ver isso..., à medida que ele for descobrindo, ele vai querer testar mais, não deu certo, deixa eu testar de novo[...]*

Alunos demonstrando interesse e motivação. Professora vivenciando a tarefa investigativa, incentivando os alunos

O importante de experimentar a tarefa proposta antes de ministrá-la, é que podemos vivenciar aspectos descritos na teoria que puderam ser confirmados na prática, como o entusiasmo, o envolvimento e as fases do pensamento reflexivo e da investigação matemática, além de acertar detalhes antes de propor a tarefa, como o caso de expor uma situação inicial no início da atividade, já que esse tipo de tarefa requer um tempo considerável em sua execução. Outro ponto positivo que consideramos relevante foi que essa experimentação nos proporcionou pensar "frente" a nossos alunos para melhor propor sugestões e conduzir os encontros, o que ajudou a motivá-los.

No sétimo encontro, fomos aos grupos para orientar e mediar a atividade. Resolvemos tecer alguns comentários, incentivar a turma diante das expressões de desânimo de alguns alunos por não conseguirem chegar a generalizações para aquilo que investigavam:

> *P: [...] essa atividade é diferenciada mesmo, olha só, o aluno tem que bolar o problema a ser investigado, ele tem que testar, observar, elaborar, tem que ser mais autônomo. É diferenciado. E isso é fácil? Nem para mim é fácil. Estou aprendendo com vocês também.*

Durante essa fala, o aluno João estava com a mão levantada, solicitando a palavra:

P: Fala querido (João)

João: Não... Eu ia falar que isso [a pesquisa] *podia cair na prova, podia fazer em grupo para ajudar a pensar também*. [todos alunos se exaltaram, todos falavam ao mesmo tempo].

Leandro: [...] valeu a pena.

Patrícia: Eu também acho.

Começaram a falar da prova somativa. Por meio de uma conversa com o professor da turma, foi possível verificar que todo semestre tem uma prova com o nome "somativa", na qual é cobrado o conteúdo do semestre e, na prova de Matemática, havia questões de trigonometria. Os alunos falavam que as atividades da pesquisa os tinham ajudado na resolução dessas questões, principalmente nas de período.

Roberto: A questão do período lá eu consegui...

Marcela: *Verdade 7B, eu também concordo.*

Roberto: Ô Daiana, ô Daiana, na prova sabe a questão de período, lá eu tentei pela fórmula que a gente descobriu.

P: *É mesmo? Que bom! E você está gostando dessa atividade?*

Roberto: *Estou.*

A maioria dos alunos contava um pouco, ao mesmo tempo, de como os encontros ajudaram nas questões de trigonometria, depois voltaram a investigar. No contexto das manifestações positivas, nas quais houve uma concordância com a fala do aluno João: "*Eu ia falar que isso* [a pesquisa] *podia cair na prova, podia fazer em grupo para ajudar a pensar também"* percebemos que os estudantes gostariam que práticas da investigação como interações e descobertas pudessem ser algo presente em seu meio escolar.

P: Olha, na atividade investigativa também estou aprendendo com vocês, isso aqui...eu fiquei hoje lá em casa um tempão quando é uma coisa...pelo menos para mim né, é uma coisa... quando você começa a descobri, você se envolve e parece que você fica preso naquilo que está analisando sabe, assim, isso aconteceu comigo, e sei que sou suspeita pra falar, mas... [risos. Saí para observar os outros grupos].

Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados

Por fim, ao encontrarmos uma solução possível, mas até o momento condicional, procedemos à vistoria final da conclusão a que chegamos para que esta possa ser aceita. Esse momento é uma espécie de prova, que para Dewey, resulta em uma parte necessária à formação de boas práticas, de organizar o conhecimento, revendo fatos e ideias anteriores, relacionando-as a novos dados.

Se, no exame feito, encontrarmos todas as condições requeridas em nosso raciocínio, registrando a ausência de fatos que comprovem o contrário, será quase impossível não crer na solução encontrada, a menos que surjam dados contrários que possam indicar uma revisão dessa conclusão. Essa relevância dada à verificação é notada também nas investigações matemáticas. Uma vez que os resultados encontrados são confrontados, eles são procedidos de uma vistoria, a fim de determinar sua conformidade com as exigências da situação. Com o objetivo de validar resultados, podem ocorrer, no final da investigação, construção de justificativas, argumentações ou demonstrações.

Compartilhando os resultados

A discussão final sobre a atividade dos alunos é uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho realizado. Nessa fase, o professor deve proporcionar aos alunos momentos em que possam pensar e refletir sobre a atividade realizada. Para Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), a reflexão permite a valorização do processo de resolução que cada aluno desenvolve para chegar a um resultado, mesmo não sendo o correto. Permite ainda estabelecer conexões com outras ideias matemáticas e pode constituir um ponto de partida para outras investigações. Por meio da socialização dos grupos, pudemos entender melhor o raciocínio adotado pelo grupo e foi nessa etapa que os alunos puderam compartilhar suas investigações.

Percebemos que, na exposição da investigação, os alunos não relataram a parte das reformulações e refutações, somente mostraram o processo que, para eles, era o correto para se chegar aos seus resultados. Em algumas apresentações, pedimos para que os alunos abordassem suas reformulações. Exemplificaremos o processo de construção de justificativa/argumentação que serviu para socialização da turma em relação ao trabalho de investigação matemática. Para tanto utilizaremos a apresentação de um dos grupos:

> *Carolina: Como os outros grupos, a gente também achou que, através do mínimo* [mínimo múltiplo comum] *a gente pudesse achar o período só que a gente achou outra coisa que acabou sendo um caso específico. A gente testou para duas funções e deu a mesma coisa só que quando fomos testar em outras* [funções] *diferentes não deu e depois a gente ficou pensando por que essas duas deram iguais e achamos uma coisa que fazia com que as duas fossem iguais. O que a gente fez? a gente pegou essa função* $f(x) = sen(2x).\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$. *A gente multiplicou*

os dois parâmetros B; 2 vezes $\frac{2}{3}$ *que é igual a* $\frac{4}{3}$ *e jogamos esse* $\frac{4}{3}$ *na fórmula* $\frac{2\pi}{|B|}$ *então ficou (explicava e escrevia no quadro)* $\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}$ *que é igual* $\frac{6\pi}{4}$ *a que é igual a* $\frac{3\pi}{2}$*.*

E esse realmente foi o período da função que visualizamos no GeoGebra.

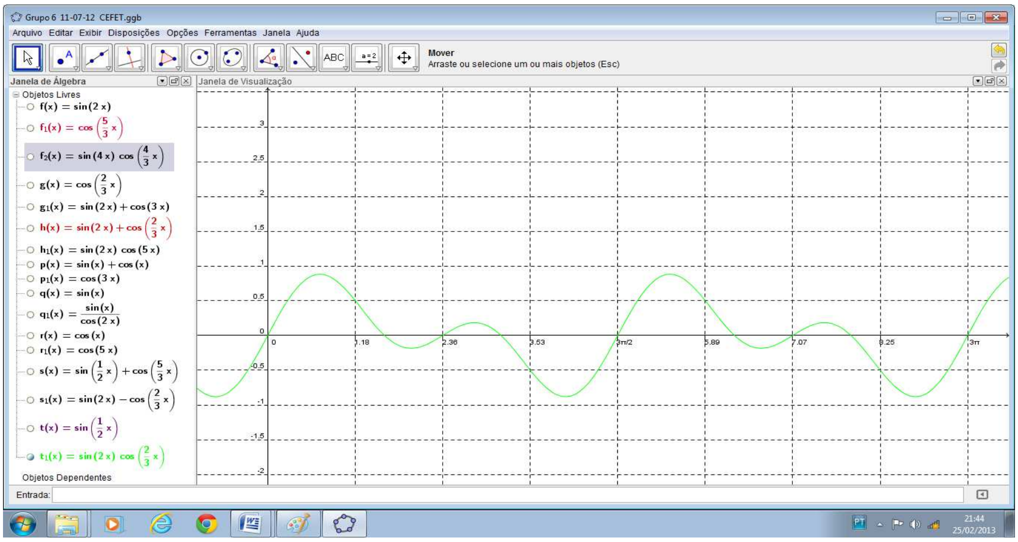

Figura 4: Gráfico da função $f(x) = sen(2x).\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$. A malha estava configurada para $\frac{3\pi}{8}$.

Carolina: *Fizemos com outra função* $g(x) = sen(4x).\cos\left(\frac{4x}{3}\right)$. *Fizemos a mesma coisa 4 vezes* $\frac{4}{3}$ *que deu* $\frac{16}{3}$, $\frac{2\pi}{\frac{16}{3}}$ *que vai ser igual a* $\frac{3\pi}{8}$. *E esse realmente foi o período da função.*

Ao verificar a transcrição e o relato escrito do grupo, observamos que o período dessa segunda função seria $\frac{3\pi}{4}$ e não $\frac{3\pi}{8}$, como a aluna disse. Não houve uma apresentação explícita da justificativa gráfica para esse exemplo, mas à luz da dinâmica da aula, não foram solicitados mais esclarecimentos na hora.

Carolina: *Só que, ao testar para outras como essa* $h(x) = sen(2x).\cos(5x)$, *não deu a mesma coisa, se a gente fizesse o mesmo processo 2 vezes 5 igual a 10 então seria* $\frac{2\pi}{10}$ *igual a* $\frac{\pi}{5}$ *não daria a mesma coisa* [o período de h(x)]. *Então, por que não daria? Aí a gente pensou o que essas duas* $\left[f(x) = sen(2x).\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right]$ *e* $\left[g(x) = sen(4x).\cos\left(\frac{4x}{3}\right)\right]$ *têm de igual que, ao jogar nessas duas funções, nesse processo elas foram iguais. O parâmetro B tinha número inteiro igual nos dois, esse aqui tinha o dois multiplicando e aqui também tinha o dois multiplicando* [multiplicando o arco x] *aqui tinha o 4 multiplicando e o 4 multiplicando aí a gente achou específico que, quando houvesse, em uma função houvesse o mesmo número multiplicando os dois, a gente poderia multiplicar os parâmetros B e jogar na fórmula para encontrar o período de uma função produto.*

O que a aluna quis dizer foi que a ideia de multiplicar os parâmetros B_1 e B_2 de funções do tipo ($f(x)=sen(B_1x).\cos(B_2x)$) para o resultado ser atribuído à fórmula $\frac{2\pi}{|B|}$ daria certo para valores de $B_1 = a$ e $B_2 = \frac{a}{b}$. Ou seja, o valor do B_1 deveria ser igual ao valor do numerador da fração do parâmetro B_2.

P: *Deixa eu fazer uma colocação que eu observei também, ali o denominador da primeira função é três...* [Antes que eu finalizasse, todos os alunos falavam ao mesmo tempo dizendo que também tinham observado que os dois denominadores das funções analisadas pelo grupo 6 era três].

Leandro: *Pode ter alguma coisa a ver.*

Carolina: *Eu não analisei, eu percebi agora quando estava apresentando (risos).*

Kelly: *O Daiana, se não fosse inteiro daria?*

P: *Oi?*

Kelly: *É independente de...*

Kelly: *No caso do daqui ao invés de ser* $\frac{2}{3}$ *se eu tivesse um número que não fosse igual ao outro B tipo* $\frac{4}{3}$ *aí*... [Disse isso pois nos exemplos analisados pelo grupo 6 o numerador da fração coincidia com o valor inteiro de B].

Professor da turma: *Ali ela já testou e não dá certo.* [todos alunos falavam ao mesmo tempo]*. Ou eu não entendi o que você quis dizer.*

P: *Não, ela não testou para esse caso. Ela quis dizer se o grupo testou para casos do tipo* $y = sen(4x).\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, *aí o segundo B, mesmo não sendo inteiro, não possui nem no numerador ou no denominador o número relativo ao primeiro B* [falava com o professor]. *Alguém testou para algo parecido?*

Caio: *Acho que o pessoal pode ter testado para casos de B desse tipo, mas não analisando igual a6A de multiplicar os parâmetro B* [os alunos concordaram].

P: *Pena que não dá tempo de testar agora. Alguém mais quer fazer alguma colocação? E você 6C?*

Tiago: *Não é isso.*

Achei que o processo foi rico, considerando a curiosidade em descobrir o porquê daquilo que observavam, as sugestões e os testes. Além disso, o compartilhamento do raciocínio do grupo 6 envolveu o restante da turma nas discussões.

A fase final do trabalho é acentuada por Ponte como o momento em que os alunos se dispõem apresentar e a discutir com os demais grupos os resultados. É nesse instante que existe um compartilhamento de ideias, ao se apresentar por justificativas/argumentações o trajeto que cada grupo trilhou para chegar a soluções do problema. Temos por interpretação que a construção de uma argumentação para evidenciar o alcance do trabalho possibilitou o compartilhamento de ideias e estimulou o aluno no prazer da reflexão.

4. Contribuições educacionais das investigações matemáticas e o papel do professor

O valor educacional das investigações matemáticas se encontra em sintonia com o fim educacional defendido por Dewey no ato de pensar reflexivamente. E ambos, Ponte e Dewey, destacam a importância da função do professor em atividades investigativa e reflexiva.

Dewey defende que a escola deve desenvolver o prazer nos alunos pelas questões intelectuais, a fim de que pessoas saiam da rotina e do habitual e tenham a consciência da importância do ato de pensar. Os estudantes devem espontanea e continuamente examinar reflexivamente o que estão interessados em descobrir, aumentando assim o hábito de pensar. Para ele, em se tratando do ensino, não existe ponto mais importante do que a maneira pela qual os conceitos e significados são formados sendo importante que exista uma significação ampliada de forma a melhor compreender um conceito. As atividades investigativas contemplam esses requisitos ao permitir que os alunos atribuam significados aos conceitos matemáticos além de propiciar a eles a reflexão, autonomia, criação do espírito de pesquisa, argumentação, descoberta e avaliação.

Em relação às atitudes do professor frente a condução e orientação das atividades, ambos os autores dão destaque as funções que devem ser desempenhadas por esse profissional. Segundo Deweyo professor é comparado a um guia de uma embarcação e os alunos à energia propulsora. Nessa situação o professor é concebido como agente de sua própria formação e da formação dos alunos. Para ele, a função do professor é prover as condições para dirigir a curiosidade rumo a investigação não a deixando "morrer". Outros aspectos importantes mostrados em relação ao professor é que ele deve conhecer o aluno para saber as ações para formação de hábitos de reflexão; deve dar devida atenção para dificuldades apresentadas no percurso da realização das atividades, intervindo especialmente em momentos difíceis que empeçam o aluno de prosseguir a experiência; deve ser motivador despertando o desejo de informação e exercitando nos alunos o hábito de observação. O professor deve conduzir a atividade tendo a oportunidade de avaliar o progresso dos alunos. Pode criar situações que oportunize reações intelectuais pelos alunos através de indagações para levantar questões a serem discutidas, de modo a orientar as dúvidas e auxiliar a organização dos dados obtidos. Ainda, Dewey afirma que o professor deve preparar os alunos antes da atividade reflexiva, ou seja, é necessário que neles tenha sido despertado o interesse por algo que deve ser explicado. Alerta que essa parte preparatória (as explicações) não pode ser longa demais para que o aluno não perca o interesse e nem tão insuficiente que deixe de estimular a reflexão.

Todos esses aspectos relacionados ao professor são defendidos no tocante a realização de atividades investigativas. Ponte esclarece que é preciso ter a preocupação em centrar a aula na atividade nos alunos, nas suas ideias e nas suas pesquisas. Para isso, o professor deve criar um ambiente de envolvimento dos alunos para que eles se sintam estimulados, à vontade para pensar, se questionar e questionar seus colegas. O professor deve pensar matematicamente "em frente" os seus alunos, fornecer informação, promover a reflexão, desafiá-los, apoiá-los e avaliar o seu progresso. O autor afirma que o professor exerce papel de orientador e mediador da atividade, ele deve estar sempre preparado a incentivar os alunos no desenvolvimento da tarefa dando-lhes o seu ponto de vista sobre suas iniciativas na realização das tarefas investigativas e precisa ajudar os estudantes a ultrapassar eventuais bloqueios. Ainda, é preciso que o professor estimule a comunicação entre os alunos e observe se eles estão trabalhando de modo produtivo; deve ter cautela na apresentação da atividade investigativa a fim de não conduzir os alunos num determinado sentido (se fornecer demasiada informação), ou tornar a tarefa pouco clara (na falta de informação). No caso de dificuldades dos alunos em organizar os dados e em formular questões, os professores devem apoiá-los com a finalidade de não comprometer o prosseguimento da investigação, ele deve incentivar a autoconfiança e reflexão dos estudantes, além do desenvolvimento de seu raciocínio e sua criatividade. Deve promover um diálogo com os alunos enquanto estes estão executando a atividade e os encorajar a discutir com outros grupos em sala de aula. Na etapa de discussão é preciso que o professor tenha boas capacidades de raciocínio matemático bem como boas competências de gestão de discussões a fim de evitar que os alunos falem todos ao mesmo tempo. Deve incentivar os alunos a ouvir uns aos outros tendo a função de moderador e orientador, estimulando a comunicação entre os alunos a respeito das ideias e conclusões deles.

Por entender que investigações devem fazer partes da variedade de atividades em aulas de Matemática apresentamos algumas considerações para professores que usam ou pretendem utilizar esse tipo de tarefa em suas aulas. Como atores fundamentais do processo educativo, abordaremos a natureza da relação que os professores tendem a estabelecer com as investigações matemáticas, como atividade a realizar em sala de aula. Entendemos que as atitudes do professor manifestadas em relação às atividades de investigação matemática, o seu conhecimento profissional sobre essa atividade, a importância que atribuem a ela, o estilo e condução do trabalho influenciam no sucesso dessa atividade em termos do envolvimento dos estudantes. A escolha por uma atividade de natureza investigativa remete principalmente a três fatores que merecem atenção. Assim, trouxemos algumas considerações relativas a esses fatores bem como apresentamos algumas dicas como sugestão para sua realização.

a) Elaboração, apresentação da atividade e dúvidas na proposta

Corroboramos com o que defendem Dewey e Ponte sobre o planejamento da tarefa investigativa e quanto ao direcionamento dessa tarefa. A preparação das aulas de investigação, para nós, é uma etapa importante, pois um propósito formulado de forma adequada motiva o educando e contribui para o êxito da atividade. Esse planejamento inclui a experimentação da tarefa elaborada.

Após a realização das atividades preliminares introduzimos a atividade investigativa. Utilizamos a ideia de Amaral (2003) em relação à apresentação de umcaso particular considerando que a partir do momento em que os alunos compreendessem os aspectos envolvidos na investigação, tornaria mais fácil se envolverem na exploração de mais exemplos e na procura de padrões. Para aescolha da apresentação de um caso particular, levamos em conta também o tempo destinado a execução dessa atividade devida suas próprias características (atividade pouco estruturada, reflexão, testes, reformulação das conjecturas, diálogos). Foi o que fizemos apresentamos aos alunos uma situação inicial, a função *f(x)=sen(2x)+cos(2x/3)*, que foi o nosso ponto de partida para que os alunos iniciassem o processo de inquirição.

Na medida em que foram aparecendo dúvidas em relação à proposta íamos fornecendo mais informações para que os alunos pudessem compreender a proposta envolvida na investigação. Parte das dúvidas deveu-se a falta de experiência nesse tipo de atividade o que levou a início os alunos a quererem utilizar estratégias que empregavam para resolver outros tipos de tarefas (como exemplo, exercícios) e também pela falta de compreensão quanto à natureza da tarefa investigativa (busca de padrões, condições, ideia de conjectura, generalizações).Depois das diversas explicações sobre o que tratava essa tarefa, às vezes utilizando exemplos, outras não, os alunos apresentaram progresso em relação à proposta da atividade e iniciaram um estado de dúvida provocado pelas observações de aspectos da representação gráfica da função.

DICAS

- A preparação das aulas de investigação constitui uma etapa importante. Deve-se selecionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa definindo claramente os objetivos a atingir o pensamento matemático dos alunos.
- Há que se definir um método para essa apresentação.
- O professor deve fornecer informações adequadas sobre esse tipo de tarefa para que o aluno compreenda a proposta. Com o prosseguimento de práticas de investigação e apoio do professor grande parte dos alunos apresenta progressos em relação a suas dificuldades a partir do momento que compreendem o que é uma investigação.

b) Características da investigação e pensamento reflexivo

Trabalhamos alguns aspectos das atividades investigativa e reflexiva nas atividades preliminares de forma a preparar os alunos para esse tipo de tarefa. Acreditamos que ao trabalhar em turmas que não tenham o costume com essas práticas seja preciso a introdução de alguns encaminhamentos sobre elas, a fim de que o aluno possa experimentá-las, o que ajudará na sua investigação. Essa indicação também é válida para o professor que tem interesse em utilizar essa didática, uma vez que, conforme nossos resultados, não se trata de uma tarefa fácil, requer a predisposição do docente em se lançar em novos desafios.

DICAS

- O professor deve elaborar atividades ou situações que servirão de preparo para a atividade de investigação, estreitando as interações professor/aluno e aluno/aluno, promovendo atitudes importantes como autonomia, inquirição e criatividade.
- Os estudantes devem, espontânea e continuamente, examinar reflexivamente o que estão interessados em descobrir, exercitando assim o hábito de pensar e, para que isso ocorra, o professor deve estimular o lado intelectual da atividade do aluno. As atividades tendências agem em todos os indivíduos e devem ser trabalhadas para que os bons hábitos de pensamento, como curiosidade, sugestão e ordem nas ideias, sejam desenvolvidas.

c) Condução da investigação

Outro fator relevante é o direcionamento, pois o aluno deve estar desafiado e ter claro um propósito, sendo isso traduzido em duas funções principais do professor no decorrer da atividade – orientação e mediação.

O papel do professor como orientador e mediador é fundamental no sucesso da tarefa investigativa. Minha atuação foi tida como parcela considerável nos resultados obtidos na investigação. Procurei despertar a curiosidade rumo à investigação; motivar o aluno com o intuito de gerar o desejo de informação e exercitando nele a prática de observação; oportunizou situações que geraram reações intelectuais nos alunos através de perguntas, indagações para levantamento de questões a serem discutidas; e também tentou transmitir aos participantes uma postura investigativa.

DICAS

- O professor deve ter o papel de fornecer informação e promover a reflexão.
- Deve estar sempre preparado a incentivar os alunos no desenvolvimento da atividade. É necessário que o próprio docente demonstre um espírito investigativo. Ao longo de toda fase da atividade o professor deve evitar emitir opiniões concretas, e manter uma atitude questionadora perante as solicitações dos alunos a fim de permitir a eles confirmar ou não suas conjecturas.
- Deve estar disponível a mudar sua postura deixando o aluno no centro do processo de ensino e aprendizagem.

Algumas reflexões

Acreditamos que a atividade investigativa como a realizada contribuiu para o ensino e a aprendizagem das funções seno e cosseno. Entendemos investigações como uma possibilidade de encaminhamento didático em sala de aula de Matemática cuja importância se deve ao desenvolvimento do trabalho realizado em equipe. Esse trabalho permitiu ao aluno descobrir padrões, relações, por meio de argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportunizando a eles a produção de significados para a Matemática.

A atividade mostrou que é possível proporcionar oportunidades de trabalhar com conceitos matemáticos de forma investigativa e a levar os alunos a uma participação prazerosa e envolvimento ativos na criação de um ambiente de trabalho estimulante capaz de promover aprendizagens e desenvolvimento de habilidades. Ainda, essa tarefa permitiu ao aluno envolver-se na atividade desde o primeiro momento (com a criação da questão a investigar), com a elaboração de estratégias na sistematização de ideias e resultados. A realização de investigação matemática se estabeleceu numa experiência fundamental e poderosa para aprendizagem matemática do aluno¸ constituindo uma vivência importante para o desenvolvimento profissional do professor.

A atividade matemática investigativa possibilita a criação do espírito de pesquisa, bem como pode ser considerada uma oportunidade de argumentar, discutir, descobrir e avaliar. É uma atividade de ensino e de aprendizagem que contribui para melhoria do aprendizado do aluno através de exploração e uso de conceitos matemáticos em níveis diferentes com graus de profundidade variada; possibilitando diferentes significações entre alunos com experiências diferentes, permitindo trabalhar no seu ritmo próprio.

Referências

AMARAL, H. *Actividades investigativas na aprendizagem da matemática no 1º ciclo*. Lisboa, 2003. 322 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/hamaral/hamaral.pdf> Acesso em: 01/02/11

BROCARDO, J. Investigações na aula de matemática: A história da Rita. In: I. C. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (EDs.), *ActasProfMat.* p. 155-161. Lisboa: APM, 2001.

DEWEY, J. *Como pensamos:* como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo (uma reexposição). 4. ed. Tradução de Haydée Camargo Campos. São Paulo: Nacional, 1959a.

FONSECA, H. Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na sala de aula. Lisboa, 2000. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação)– Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt>. Acesso em: 13/03/2011

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99.* Lisboa: APM, 1999.

PONTE et al. *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa:Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P., BROCARDO, J. OLIVEIRA, H.Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica. 2006.

ROCHA, A.; PONTE, J. P. da. Aprender matemática investigando. *Zetetiké*– CEMPEM – FE – UNICAMP – v. 14 – n. 26 – jul./dez. – 2006.

RAMOS, A. P.; MATEUS, A. A.; MATIAS, J. B. de O.; CARNEIRO, T. R. A.Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.USP - Seminários de Resolução de Problemas, 2002. Disponível em:

<http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8-resolucao_problemas.pdf>. Acessado em: 14 /07/2012.

SANTOS, L.; BROCARDO, J.; PIRES, M., ROSENDO, A. I. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: J.P. Ponte; C. Costa; A. I. Rosendo; E. Maia; N. Figueiredo; A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação* (pp. 83-106). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. (2002).

SOARES, M.T.C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. In: **2**4ª Reunião, Caxambú – MG, - (UFPR),2001.

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora|CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto.