Uma atividade socialmente reflexiva envolvendo a transformação derivada

Antonio Augusto Ferreira de Assis

Uma atividade socialmente reflexiva envolvendo a transformação derivada

EDITORA UFOP

Ouro Preto|2014

© 2014
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas|Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação|Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitor da UFOP | Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza
Vice-Reitor | Profª Drª Célia Maria Fernandes Nunes

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
Diretora | Profª Drª Raquel do Pilar Machado
Vice-Diretor | Prof. Dr. Fernando Luiz Pereira de Oliveira

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitor | Prof. Dr. Valdei Lopes de Araújo
Pró-Reitor Adjunto | Prof. Dr. André Talvani Pedrosa da Silva

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Coordenação | Prof. Dr. Dale William Bean

MEMBROS

Profª Drª Ana Cristina Ferreira
Profª Drª Célia Maria Fernandes Nunes
Prof. Dr. Dale William Bean
Prof. Dr. Daniel Clark Orey
Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Profª Drª Marger da Conceição Ventura Viana
Profª Drª Maria do Carmo Vila
Prof. Dr. Milton Rosa
Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira
Profª Drª Regina Helena de Oliveira Lino Franchi
Profª Drª Teresinha Fumi Kawasaki

Índice

Introdução 11
Aportes e fundamentação 14
Dewey e o pensamento reflexivo 14
Recognizing, building-with and constructing 17
Investigações matemáticas 18
Descrição de nossa atividade 20
O primeiro encontro 20
O segundo encontro 28
O terceiro encontro 34
Considerações Finais 45
Referências 47

Apresentação

Ao colega professor.

Neste trabalho, apresento o produto educacional, desenvolvido com base na minha dissertação do mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) intitulada Uma atividade socialmente reflexiva envolvendo a transformação derivada e sua inversa. Para a realização da pesquisa, fui orientado pelo professor Dale Bean e utilizei-me da experiência obtida no meu trabalho de iniciação científica em aplicações da Álgebra Linear ao Cálculo, ainda durante minha graduação em Matemática na Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ).

A pesquisa foi desenvolvida no meu segundo ano de mestrado, com alunos do curso de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) que cursavam Álgebra Linear, disciplina obrigatória à licenciatura e bacharelado. Para realização deste trabalho, apropriei-me das ideias de Dewey (1959) sobre o pensamento reflexivo e a atividade reflexiva, de algumas acepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) sobre investigações matemáticas em sala de aula, e da teoria RBC que foi utilizada para auxiliar na compreensão das abstrações matemáticas e da construção social de um conhecimento compartilhado. Nossa análise apontou alguns indícios da mobilização de saberes, durante a nossa atividade em sala de aula, e da influência da interação social no processo de aprendizagem.

Neste trabalho, apresentaremos um resumo de nossa atividade em sala de aula. Um exemplo de uma atividade socialmente reflexiva, descrita aqui, é a questão dos vetores do conjunto $E=\{sen(x), cos(x)\}$, ser ou não, linearmente independentes. Nas duas vezes em que apresentamos essa questão, na pesquisa e no piloto dela, aconteceram debates e argumentações bem mais importantes que a própria solução desse problema. Tentando provar ser LI ou LD, os estudantes foram convidados a utilizar-se de seus conhecimentos prévios e de argumentação para convencer os colegas.

Por fim, esperamos que a leitura deste trabalho possa auxiliar colegas de profissão a desenvolverem suas próprias atividades ou adequarem algumas já existentes para a contribuição de aprendizagem mais crítica e reflexiva.

Antonio Augusto

Introdução

Assim que completei a minha graduação, comecei a lecionar para o ensino médio. Fora algumas dificuldades na relação com a “nova adolescência”, enfrentei outros problemas ao ensinar alguns conteúdos de Matemática, tanto em relação ao novo quanto aos conteúdos de séries anteriores. Observando alguns livros e suas propostas, comecei a perceber como alguns conteúdos são tratados de forma desconexa e como se abandonam alguns tópicos como, por exemplo, o quase abandono de frações quando estudamos a equação do segundo grau.

Enquanto começava a lecionar, elaborava uma apostila para um minicurso relacionado à minha iniciação científica para a V SEMAT da UFSJ, na qual pesquisei algumas aplicações da álgebra linear ao cálculo, utilizando-me de alguns resultados do professor Jack Rogers, no trabalho: “Algumas aplicações da Álgebra Linear ao Cálculo”. Durante esse trabalho, percebi que meus conhecimentos nas duas disciplinas melhoraram bastante e acredito ter sido devido ao fortalecimento dos significados dos conceitos matemáticos envolvidos para a realização desta pesquisa.

Durante a realização de um minicurso baseado na minha iniciação científica, na Semana da Matemática, tive um retorno muito positivo dos estudantes sobre como era mais interessante utilizar a Álgebra linear para simplificar problemas de cálculo. Esse reforço positivo sobre o trabalho e minhas inquietações como professor me incentivaram a cursar o mestrado em Educação Matemática da UFOP.

Dentre as aplicações, encontram-se algumas das ideias centrais da álgebra linear como base de um espaço vetorial, transformações lineares e representação matricial dessas transformações. Como um exemplo, trabalhamos com o espaço gerado pela base

$B=\{e^t, te^t, t^2e^t\}$

e, para exibirmos a matriz D, que representa a transformação derivada em relação a essa base, devemos aplicar a transformação aos vetores da base:

$D(e^t)= e^t = (1, 0, 0)_B$

$D(te^t)= te^t + e^t = (1, 1, 0)_B$

$D(t^2e^t)= t^2e^t +2te^t = (0, 2, 1)_B$

E, respeitando a ordenação da base, inserimos transpostos, cada um dos vetores obtidos pela transformação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já para aplicamos sobre um vetor genérico desse espaço,

$v(t) = at^2e^t + b\, te^t + c\, e^t$

ou v = $(a, b, c)_B$, a transformação derivada, devemos realizar o produto *Dv*. e, então, obteremos as coordenadas $Dv = (a, 2a+b, b+c)$. A apresentação desse tópico, de forma dialogada e inquiridora, nos propiciará perguntas como:

1) Quem é a integral de t^2e^t?
2) É possível apresentar uma matriz que represente a transformação integral *I*nesse espaço?
3) Qual a relação entre as matrizes que representam essas transformações?
4) O que acontece com a constante de integração?
5) E com as derivadas de ordem superior?
6) E se aumentarmos a dimensão do espaço?
7) É sempre possível se obter a matriz *I* utilizando-se a matriz *D*?

E outras questões que acabarão por aparecer, em sala de aula, por meio da construção do conhecimento de forma compartilhada, que segundo Voigt (1985 *apud* HERSHKOWITZ *et. al,* 2007, p. 42), reforça a discussão entre alunos e professores que acabamos por produzir uma explicação que talvez não conseguissem individualmente.

Já durante o mestrado, comecei a amadurecer a ideia de desenvolver uma proposta para uma aula mais dinâmica e reflexiva, na qual o professor teria um papel muito mais de mediador do que de “transmissor do conhecimento”. Assim tive contato com as ideias de Dewey (1959) sobre o pensamento reflexivo e a atividade reflexiva. Apoiando-me nelas e em algumas acepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) sobre investigações matemáticas em sala de aula, elaborei uma atividade socialmente reflexiva com o intuito de mobilizar saberes, principalmente em cálculo e álgebra linear, de estudantes de Matemática que cursavam a disciplina Álgebra Linear.

Nossa atividade tem o intuito de convidar os alunos a assumirem um papel mais ativo em a sua aprendizagem. O papel do professor é o de mediar questões e problemas matemáticos de forma dialogada, valorizando o processo de aprendizagem em relação ao produto gerado por ela. Durante a atividade, incentivamos os estudantes a conjecturar, perceber padrões, refinar essas conjecturas, avaliar as soluções encontradas e a tentar convencer os colegas pela argumentação com algumas mediações do professor-pesquisador.

Neste trabalho, faremos uma síntese de nossos aportes, e para melhor compreensão, sugerimos a leitura da dissertação. Também apresentamos uma descrição comentada de nossa atividade, além de algumas observações e sugestões a respeito do ensino de Matemática.

Dewey e o pensamento reflexivo

Dewey foi professor do ensino secundário, universitário, filósofo e pedagogo escreveu sobre vários temas, como filosofia da educação, influenciando movimentos educacionais. Dentre algumas de suas ideias sobre educação, estão o desenvolvimento do pensamento, da capacidade de raciocínio e do espírito crítico. Em nossa pesquisa, utilizamos sua obra *Como Pensamos*, edição de 1959, na qual ele defende o desenvolvimento de uma forma de pensamento chamado reflexivo.

Dewey (1959, p.13) afirma que o pensamento reflexivo "consiste em examinar mentalmente o assunto e dar-lhe consideração séria e consecutiva". De acordo com Dewey (1959), para que o pensamento reflexivo ocorra, é necessário que haja alguma inquietação (ou dúvida) diante de determinada situação, a fim de voltemos nossa energia mental para realizarmos uma pesquisa sobre esse tema. O autor enfatiza essa inquietação:

> A reflexão não é simplesmente uma seqüência, mas uma conseqüência – uma ordem de tal modo consecutiva que cada idéia engendra a seguinte como seu efeito natural e, ao mesmo tempo, apóia-se na antecessora ou a esta se refere. As partes sucessivas de um pensamento reflexivo derivam umas das outras e sustentam-se umas às outras (DEWEY, 1959, p. 14).

Baseados nas ideias de Dewey, acreditamos ser necessário um objetivo que dirija a atividade mental para prever ou planejar estratégias. Pensar de forma reflexiva amplia o significado das coisas e, em nosso caso, dos conceitos matemáticos estudados. Educacionalmente, é necessário o desenvolvimento de boas atitudes como a responsabilidade, a dedicação e uma mente aberta. Como a aprendizagem está intimamente ligada ao interesse pelo assunto, Dewey (1959, p. 40) informa que "o professor que desperta tal entusiasmo em seus alunos conseguiu algo que nenhuma soma de métodos sistematizados, por corretos que sejam, poderá obter".

Nossa atividade foi trabalhada de forma a valorizar o debate e as ideias desenvolvidas pelos estudantes durante a atividade. Acreditamos que um dos problemas a ser combatido é o de dar-se mais importância ao produto do que ao processo, o que leva muitos professores a valorizarem excessivamente “uma resposta certa”. A valorização do processo leva maior ênfase à inferência. Este processo de utilizar-se de sugestões tomadas como verdadeiras para se chegar a novas conclusões é essencial para a ampliação da capacidade de pensar.

Após o estado de dúvida ou hesitação, pode ocorrer a atividade reflexiva, que é descrita por Dewey como:

- Sugestão: ideias primordiais, palpites ou lampejos, primeira intervenção da mente sobre as questões.

Em nossa atividade, a aluna 08, quando pedida para encontrar a matriz que representa a integração em relação a um espaço vetorial, levanta a seguinte questão: *A integral não é uma antiderivada?* Questões como essa podem ser aproveitadas para a interação e a aprendizagem da turma.

- Intelectualização: ato de gerar uma questão diante da situação perturbadora, obtenção de dados, processo pelo qual conhecemos o problema pela sua observação.

Em outra situação, os estudantes discutiram sobre a dependência linear das funções *sen(x)* e *cos(x)*. Durante esse debate, tentaram provar tanto a dependência quanto a independência linear. Ocorreram experimentos e negações que auxiliaram na elaboração de hipóteses para o problema.

Hipótese: uma suposição formada das sugestões e do exame dos dados. É uma ideia-guia que deverá orientar as verificações posteriores.

Em dado momento, sobre a construção da matriz que representava a derivação no espaço vetorial que trabalhávamos, o aluno 01 levantou a seguinte hipótese: *A cada derivada você parece que desloca* 90^0. Essa afirmação abriu um leque de trabalho: matriz de rotação, generalização da derivação de ordem superior e até da integração.

- Raciocínio: processo mental pelo qual se analisa, compara-se, verifica-se, atribui-se probabilidades e se encadeiam as várias ideias e objetos. É o momento no qual as ideias iniciais se unem em um todo consistente.

É comum que os estudantes não verbalizem esse processo. Mas, se ensinar é ensinar a pensar, precisamos perceber possíveis confusões que possam estar atrapalhando a aprendizagem dos alunos. Na discussão sobre a dependência linear de *sen(x)* e *cos(x)*, após os estudantes observarem a expressão

$$a\,sen(x) + b\cos(x) = 0$$

desenvolveram-na para:

$$\frac{a}{} \quad cot(x) = -a/b$$

Então aluno 01 termina a discussão afirmando: *Se isso acontecesse, você não poderia ter nem o b ali igual a zero. E isso traria outro problema.* Dessa forma, ele mostra a impossibilidade da dependência linear, e a turma acaba por se convencer que esse conjunto é LD. Realizados os experimentos mentais, é importante verificar ou experimentar a hipótese.

- Verificação da hipótese pela ação: fase na qual busca-se compreender as consequências e a confirmação dos resultados obtidos pela ação exterior de corroboração ou verificação experimental da conjectura.

O processo de verificação é importante não só para nos assegurarmos de nossos resultados como para que os estudantes adquiram essa postura. Em nossa pesquisa, os estudantes procuraram averiguar seus resultados durante as discussões ocorridas em sala de aula.

Essa atividade finda quando a dúvida é extinta. As fases dessa atividade podem ser reduzidas, expandidas, fundir-se e não possuem uma ordem estabelecida. Para tentar elaborar nossa atividade de forma reflexiva, procuramos inserir problemas que trouxessem a possibilidade de os estudantes preverem, perceberem padrões, conjecturarem e, para que cumprissem seu papel social, argumentassem entre si. Para o estudo das abstrações matemáticas, em nossa atividade, optamos pelo RBC.

Recognizing, building-with and constructing (RBC)

Essa teoria aponta três ações epistêmicas observáveis: Recognizing, Building-with and Constructing (RBC) ou, em português, Reconhecendo/reconhecer, Edificando-com/edificar-com e Construindo/construir (tradução nossa). Essas três ações são consideradas aninhadas e indissociáveis e fundamentam o modelo teórico RBC de observar e compreender a abstração em situações de aprendizagem de matemática.

Essa teoria foi desenvolvida por um grupo de pesquisadores (Rina Hershkowitz, Baruch B. Schwarz, Tommy Dreyfus e outros) que atualmente inseriram uma nova fase de consolidação no modelo RBC + C. Eles se basearam principalmente na Educação Matemática Realista e na Teoria da Atividade. Esses pesquisadores buscam entender o processo de abstração na construção de novas estruturas matemáticas em contexto ou ambientes educacionais e enfatizam uma ótica sociocultural para a análise da abstração, acentuando tarefas, ferramentas e experiências dos alunos e professores e a interação social no processo de abstração. Para Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001, p. 202, tradução nossa), a abstração é uma atividade (no sentido da Teoria da Atividade), uma cadeia de ações empreendidas por um indivíduo ou um grupo e dirigida por um motivo que é específico a um contexto.

As três ações epistêmicas apontadas por esses autores são:

i) Reconhecimento: etapa na qual se toma consciência de quais conceitos, abstrações ou conhecimentos específicos anteriores poderão ser úteis para a realização de uma edificação-com ou de uma construção, necessários à resolução de um problema;

ii) Edificação-com: momento em que se busca estruturar o que foi reconhecido como útil por meio dos conhecimentos anteriores. Na fase de edificação-com, pode-se atingir uma meta, dada ou não, por meio de abstrações que já possui, a fim de alcançar um objetivo, realização de uma estratégia ou justificar uma solução;

iii) Construção: fase na qual existe a necessidade de uma nova construção ou criação de uma nova abstração matemática para o individuo realizar seus objetivos. Nessa fase, é produzida uma nova abstração ou estrutura matemática.

Essas ações ocorrem, muitas vezes, de maneira simultânea e cada indivíduo poderá estar diante de uma mesma situação, utilizando-se de uma ação diferente diante de um mesmo problema, dependendo de suas abstrações matemáticas. Durante a construção e a edificação-com, ocorre o estabelecimento de conexões matemáticas, que incluiem ações matemáticas como apontadas por Hershkowitz, Schwarz e Dreyfus (2001, p. 202):

a) Fazer uma nova hipótese ou conjectura;
b) Inventar ou reinventar uma generalização matemática, uma prova, ou uma nova estratégia para resolver um problema.

O contexto em que ocorre o processo de abstração influencia a atividade, pois os alunos conseguirão tirar proveito das ferramentas e artefatos utilizados se os contextos histórico (conhecimentos já adquiridos), social (oportunidades, interação com colegas, professores, familiares) e físico (recursos acessíveis como computadores, jogos ou outros artefatos) os permitirem. Hershkowitz *et. al* (2007) entendem que a construção do conhecimento pode ocorrer em conjunto ou individualmente.

Em nossa atividade, buscamos, pela reflexão, inquirição e empirismo, incentivar a construção de tal conhecimento, de forma a tirar proveito da atividade social. Nos três encontros que realizamos para a execução da atividade, buscamos desenvolver o tema e tratar das inquietações apresentadas pelos estudantes de forma dialogada.

Investigações matemáticas

Adaptamos algumas das ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) coerentes com nossa proposta de elaborar uma atividade reflexiva segundo Dewey (1959) para nos auxiliar na elaboração de uma atividade matemática que motivasse e envolvesse os estudantes.

Utilizamos, principalmente, as fases de uma investigação matemática no entendimento dos autores citados:

1. Exploração e formulação das questões: deve-se reconhecer e explorar uma situação problemática e formular questões. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 30), é durante a fase de exploração que os estudantes “vão se embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa”.

2. Conjecturas: a formulação de conjecturas inclui a organização dos dados. Conjecturar está intimamente ligado à aprendizagem de matemática. Para Brocardo (2006, p. 110), conjecturar é “aprofundar a compreensão da situação que se explora e

conseguir imaginar uma generalização a partir de exemplos significativos”. Essas conjecturas podem surgir de diversas formas: observação direta, manipulação dos dados, analogia a outras conjecturas etc. Em nossa pesquisa, também trabalhamos com um enfoque social no qual os estudantes formulavam conjecturas a partir de outras apresentadas por outros colegas.

3. Testes e formulação: nessa fase, deve-se realizar os testes e refinar as conjecturas. Assim, “à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006, p. 38).

4. Justificação e avaliação: significa realizar uma verificação que a valide como sendo uma proposição verdadeira. Assim, após os testes, justifica-se e avalia-se uma conclusão aceitável acerca da questão.

Descrição de nossa atividade

Embora já acompanhasse as aulas da turma, esta foi a primeira vez que eu conduzi uma atividade com eles. E nos era necessário, para melhor aproveitamento do trabalho de ambas as partes, ter uma noção de quais conhecimentos matemáticos os estudantes já dominavam para que pudéssemos escolher o melhor caminho para abordar o tema pretendido, pois, para Dewey:

> O nome técnico dos fatos observados é dados. Os dados formam o material a ser interpretado, considerado, explicado; ou no caso de deliberação sobre o que fazer ou como fazer, a ser tratado e utilizado. As soluções sugeridas para as dificuldades que a observação trouxe à luz, formam as ideias. Os dados (fatos) e as ideias (sugestões, soluções possíveis) formam, assim, os dois fatores indispensáveis e correlativos de toda atividade reflexiva. São eles, respectivamente, providos pela observação (na qual, por conveniência, está incluída a memória de observações anteriores de casos semelhantes) e pela *inferência*. (DEWEY, 1959, p. 109, grifo do autor).

Dessa forma, não poderíamos ignorar os conhecimentos prévios sobre os quais novos conceitos deveriam se apoiar. Devido a reprovações anteriores, nem todos os alunos já haviam estudado os conceitos que trabalharíamos, o que podia comprometer uma leitura posterior dos dados caso não fizéssemos essa sondagem. Nossa atividade foi realizada no decorrer de três encontros, dividindo o horário com as aulas tradicionais da disciplina.

O primeiro encontro

Nesse primeiro encontro, aplicamos um instrumento para uma sondagem a respeito dos conhecimentos prévios dos estudantes e aproveitamos o restante do tempo para explorar alguns conteúdos matemáticos, necessários à atividade, de forma dialogada para que os alunos fossem se sentindo mais à vontade e se tornassem mais participativos. Esse primeiro encontro foi realizado na sexta-feira, dia dez de junho, com a participação de sete alunos aqui tratados como aluno 01 e alunas de 01 a 06.

A sondagem inicial

Durante a atividade, me reapresentei à turma, procurei deixá-los à vontade e comecei a apresentar as questões, criando uma espécie de sondagem que queria que desenvolvessem. As questões foram elaboradas com foco nos conhecimentos prévios e futuros necessários ao trabalho. As questões seguem abaixo:

1. O que é um espaço vetorial?
2. O que é a base de um espaço vetorial?
3. Derivada de h em relação a t, onde $h(t) = t^2e^t$.
4. Integral de g(t), onde $g(t) =te^t$.
5. A transformação derivada é uma transformação linear?
6. O conjunto E=[u(x), v(x)], u(x)=sen(x) e v(x)=cos(x), é LI ou LD?

Optei por apresentar as questões, uma a uma, e ir controlando o tempo da atividade oralmente e formalizadas ou apresentadas na lousa, quando necessário, para um melhor entendimento. Usei esse momento com três objetivos: descobrir o nível dos conhecimentos tanto em Cálculo quanto em Álgebra Linear dos alunos e começar a construir nosso relacionamento para que pudessem agir mais naturalmente nas atividades. Em um segundo momento, mantive meu foco no relacionamento com a turma e procurei incentivá-los a um papel mais ativo, de “fazer matemática”, incentivando-os a conjecturar e sustentar com suas próprias conjecturas.

No início da atividade, os estudantes formaram uma fila única imediatamente em frente à filmadora, tornando-a inútil para nossos registros. Fiz uma brincadeira com eles e mudei a câmera de posição. Instrui para que pegassem uma folha e apresentei as questões, uma a uma, sempre esperando um tempo para que a respondessem. Procurei incentivá-los a escrever com suas próprias palavras. Notei um excesso de preocupação deles com relação a sua identificação que fica clara na resposta da aluna 01 a uma de minhas falas:

Pesquisador:	*... fiquem mais livres pra falar... pra vocês ficarem mais tranquilos quero dizer que não vou corrigir isto ...*
Aluna 01:	*Bom é se não tivesse nome ...*

Expliquei a eles que poderiam ficar tranquilos e que, caso quisessem, explicaria melhor o motivo de minhas opções ao final da atividade. Procurei continuar a descontraí-los e melhorar nosso diálogo para que não me entendessem como um elemento estranho. Embora o processo não fosse avaliativo da disciplina, notei envolvimento por parte dos estudantes, mas também um excesso de preocupação em acertar todas as questões.

2) O que é abase de um espaço vetorial?

Após alguns instantes, eu precisei apressá-los devido ao fato do nosso tempo estar bastante limitado e propus a segunda questão. A turma estava bastante encabulada e procurei não permitir que percebesse que estava ficando um pouco preocupado. Frequentemente intercedi no sentido de deixá-los tranquilos e livres para se expressarem. Uma das alunas mostrou-se bastante confusa sobre o conceito de base na afirmação:

A base deve esta contida no vetor. E para ser base de vetor ela tem que gerar o conjunto do vetor e tem que ser L.I.

Então percebi que o aluno 01 já havia resolvido. Tentei lançar a terceira questão, mas fui impedido pela aluna 01 que pediu mais tempo. Assim que mais alunos deram sinais de término, prossegui com a próxima questão.

3) Qual é a derivada de *h* em relação a *t*, onde $h(t) = t^2e^t$?

Ao lançar a terceira questão, aconteceu um fato inusitado. Quando disse a palavra derivada, a aluna 04 deu um sorriso misto de espanto e constrangimento. Sua feição ficou triste. Ao perceber, procurei acalmá-la, dizendo para a turma que poderiam responder que não se lembravam. Ela, ainda incomodada com o fato, confirmou não se lembrar e eu tentei novamente tranquilizá-la:

Aluna 04:	*Eu não lembro como faz.*
Pesquisador:	*Sem problemas.*

Notando conversa entre as alunas 05 e 06, pedi para que, se alguém se lembrasse após uma conversa, bastava se referir à conversa na resposta. Não poderia eu, naquele momento que tentava interagir com eles, proibir o diálogo nem coletar dados coletivos enquanto procurávamos respostas individuais.

4) Qual é a integral de $g(t)$, onde $g(t) = te^t$?

A quarta questão trataria da integração. Eu já esperava que a aluna 04 ficasse um pouco mais agitada. Assim que lancei a questão, ela me perguntou:

Aluna 04:	*E pra quem não fez?*

Então, novamente, tentei incentivá-la a escrever o que me disse. Ela demonstrou estar bastante incomodada com a questão. Então me dirigi à sua carteira, procurei acalmá-la e a ajudei a escrever. Voltei a me dirigir à turma e questionei sobre o método de solução da integral. Se eles reconhecessem que a integração deveria ser resolvida por partes, mesmo que se atrapalhassem nas contas, já seria uma informação útil para nosso trabalho.

5) A transformação derivada é uma transformação linear?

Então passei a quinta questão que fora tratada pelo professor como um dos exemplos de transformação linear. Esta é reconhecidamente uma questão mais técnica e abstrata que as demais. Então eu e o professor da disciplina conversamos e deixamos claro aos alunos que assumimos a diferenciabilidade das funções, ou seja, que elas possuíam derivada. Em seguida, o aluno 01 conseguiu utilizar-se de seus conhecimentos em Álgebra Linear e Cálculo, reconheceu um padrão, utilizando-se de construções anteriores e, em seu questionamento, já deu indícios de poder ter resolvido a questão:

Aluno 01:	*Neste caso, pode usar as próprias propriedades de derivada?*
Pesquisador:	*Pode usar tudo o que você conseguir: propriedades de derivada, de transformações... Se você conseguir falar sim ou não e justificar.*

Procurei não deixar transparecer aos demais que ele já resolvera a questão.

Também notei que os demais participantes já se sentiam mais à vontade comigo. Embora, na atividade escrita, ele tivesse cometido um equívoco (ver palavra sublinhada no trabalho do Aluno 01 a seguir) que acredito ter sido ocasionado por uma pequena distração:

Assim, usando as propriedades das <u>derivadas</u> temos:

$$\cdot \int [f(x) + g(x)] = \int f(x) + \int g(x)$$

$$\cdot \int \lambda f(x) = \lambda \int f(x)$$

questão. Já a aluna 04 pergunta:

Aluna 04:	*Eu posso falar que sim porque o professor falou que é?*

Neste momento me lembrei da aulaem que o professor da disciplina apresentou a transformação derivada e demonstrou que ela era uma transformação linear. Considero bastante interessante que ela consiga se lembrar de uma afirmação do professor, mas não se lembre de como ele fez para demonstrar, ou mesmo, justificar esta questão. Talvez tenham faltado, a ela, condições de construir esta afirmação com seus próprios conhecimentos prévios. Na parte escrita das atividades a aluna 04 chegou a citar que:

R → Eu se fosse uma prova diria que sim, isto porque em alguma aula do professor [redacted], cuja matéria era transformação linear, ele propôs um exercício de derivada e integral.

A turma se dividiu entre falar das propriedades da derivada e de se lembrar da aula que o professor ministrou.

Em seguida, tornou-se ainda mais clara a preocupação do grupo quanto à imagem que eu formaria deles, verbalizada pela aluna 03:

Aluna 03:	*Você vai achar que nós somos burros.*

Naquele momento, foi necessário falar sobre a mudança de estágios que ocorrem durante o aprendizado e, na sequência, busquei falar com eles sobre como o que é fácil e difícil se transforma durante nossa aprendizagem. Dei a eles o exemplo de um aluno de 7ª série que enfrentou alguma dificuldade ao trabalhar com produtos notáveis e de como os produtos notáveis já não geram obstáculos para a maioria de nós.

Infelizmente, devido ao pouco tempo restante, foi necessário apressá-los, lançando a sexta questão, cujo objetivo era ver se lembravam do que viria a ser a dependência/independência linear e como se comportariam diante de um problema de natureza diferente dos já trabalhados na disciplina.

6) O conjunto *E=[u(x), v(x)]*, *u(x)=sen(x)* e *v(x)=cos(x)*, é LI ou LD?

Notei que a maioria dos alunos não conseguia se posicionar diante do problema. Seria uma boa questão a ser trabalhada, mas o tempo já estava muito curto. Então o aluno 01 pareceu resolver a questão ao perceber exatamente onde estava o problema, dizendo:

Aluno 01:	*Este x aí pode ser qualquer número?*

Nesse momento, um pouco empolgado por ele reconhecer novamente a questão, procurei ajudá-los mantendo a questão:

Pesquisador:	*Pode pensar nele como real ou de 0 a 2π que não muda muito. Se for verdade de 0 a 2π será verdade para x real.*

Procurei, dessa forma, incentivar aqueles que estavam sem recursos para trabalhar a questão e manter a busca dos que tivessem trabalhando nela sem atrapalhar seu processo, embora eu acreditasse que apenas esse aluno realmente entendendo o problema. Posteriormente, vi que uma das alunas se perdeu mais no conceito de independência linear do que na dificuldade da questão em si.

Após alguns instantes, finalizei a atividade sob alguns protestos, solicitações de mais tempo e de torná-la atividade para casa. Não pude aceitar nenhuma das sugestões, devido ao fato de o horário já estar acabando e de ficar sem nenhum material para análise na semana seguinte, senão não haveria tempo hábil para a parte mais interessante, na qual eles deveriam começar a encontrar seus resultados. E então comecei a trabalhar com alguns conceitos que precisaríamos reforçar para o bom andamento da atividade.

Abordando conceitos e convidando os participantes ao debate

Considerei de tal momento em diante o início do trabalho dos alunos. Tendo percebido que a maioria possuía problemas com o cálculo, iniciei uma revisão dos conceitos baseada na própria sondagem inicial. Procurei gerenciar debates, tentando despertar a dúvida, tão necessária à reflexão nos alunos.

Então, para que pudéssemos falar da questão da transformação derivada, coloquei um exemplo de uma transformação no quadro, *T(x, y) -> (2x, 2y)* e perguntei a eles o que ela fazia com os vetores do R^2. Prontamente me responderam que "dobrava o vetor". Então resolvi falar sobre uma transformação derivada aplicada sobre os vetores do espaço E cuja base era $B = \{e^t, te^t, t^2e^t\}$. Após notar que não conseguiam se posicionar, voltei ao exemplo anterior e questionei por que "dobrava".

Então o aluno 01 mostrou já ter construído bem o conceito de produto por escalar na afirmação:

Aluno 01:	*Porque é um produto escalar... Tira o 2 pra fora e fica duas vezes o próprio xy, não é?*

Ele simplesmente usou a relação *(2x, 2y) = 2(x,y)* que era suficiente para resolver a questão. Nesse momento, ajudei os demais a atingirem o mesmo ponto, trabalhei com eles na construção da matriz de uma transformação linear, incentivando-os a aplicarem a transformação nos vetores da base (usamos a canônica).

$$T(x,\ y) = (2x,\ 2y) \qquad T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Depois discuti sobre a entrada dos vetores (vertical ou horizontal) na matriz que representava essa transformação e apenas alguns pareceram ter clareza do processo. Efetuamos, na sequencia, a derivada dos vetores da base $B = \{te^t, e^t\}$e começei a incentívá-los a escrever cada vetor derivado como combinação linear dos vetores da base. Nesse momento, fui ajudando-os na construção, levando à algumas perguntas necessárias à discussão, mas, mantendo uma linguagem bem suave, perguntei sobre a segunda coordenada:

Pesquisador:	*Quantos te^t eu tenho aqui?*

Começei bem tranquilamente a dividir com eles o curso da discussão, deixando sempre as perguntas para eles, por exemplo: *Quantas vezes? .... Que número que vai aqui? Quantos? Quantos te^t eu tenho aqui?*

Tentando manter um ambiente de inquietação e dúvida para que precisassem pensar, buscei que todos avaliassem os resultados frequentemente e questionei: Concordam?

Aproveitei até a oportunidade da derivação para discutirmos e auxiliar os alunos que ainda possuám dúvidas sobre a operação. E já comecei a incentivar um sutil debate que começava a se formar sobre o vetor “derivado”:

Aluna 01:	*(0, 1, 1).*
Aluno 01:	*(1, 1, 0).*

E, nesse momento, aproveitei-me do fato de que a aluna 01 se confundiu em relação à ordenação base e os incentivo a um debate sobre qual é a primeira coordenada e, paralelamente, tentei fazer com que justificassem suas afirmações.

Aluno 01:	*Pra mim é 1.*
Pesquisador:	*Por que é um?*
Aluno 01:	*Porque é do e^t.*
Pesquisador:	*Por que é zero?*

Infelizmente foi impossível entender resposta, pois o áudio não captou fala, mas percebo que o aluno concordou com a resposta argumentada pelo colega. Então convidei os demais alunos a opinarem. Logo após, reescrevi a questão para ajudar na compreensão de todos e foi preciso encerrar a atividade porque o horário da aula já havia terminado há cinco minutos. Notei que a turma já começava a assumir um papel mais ativo e deixei a questão da independência linear de seno e cosseno como trabalho para a próxima aula.

O professor da disciplina, ainda que tenha conseguido se manter neutro boa parte do tempo, estava sempre atento quando avançávamos no processo e sempre deixava transparecer sua alegria quando os alunos conseguiam sair das situações-problema.

Para esse primeiro encontro, traçamos como objetivos realizar a sondagem e discutir com os alunos sobre ela. Deveríamos ter designado um tempo um pouco maior, pois ficamos com a turma cerca de oito minutos após o fim do horário. Mas, no geral, gostei da atenção e dedicação dos estudantes.

O segundo encontro

O segundo encontro foi realizado na sexta-feira, dia dezessete de junho com duração de 40 minutos. A esse encontro compareceram os alunos 01 ao 04 e as alunas 01,02, 03, 04, 07 e 08.

Tive uma surpresa ao entrar na classe. Haviam retornado cinco dos sete alunos que iniciaram o trabalho. No entanto, compareceram cinco novos alunos, o que me obrigou a refletir sobre como conduzir os trabalhos. Preocupado com a aprendizagem naquele momento, deixei um pouco os objetivos da pesquisa de lado e decidi fazer uma revisão geral dos conceitos abordados em nosso primeiro encontro, antes de prosseguir, para permitir que todos pudessem acompanhar a atividade. Diante desse fato, aproveitei, também, para tentar nivelar a turma.

A revisão

Comecei comunicando a eles a minha opção por revisar rapidamente os tópicos anteriores. Iniciei falando sobre a transformação:

T(x, y)=(2x, 2y).

Os alunos conseguiram se lembrar de como montamos a matriz que representa essa transformação. Vejo isto como um sinal de que a discussão possivelmente produziu algum significado para a aluna 03, que responde sobre como colocamos os vetores da base transformados na matriz.

Depois defino a base $B = \{e^t, te^t, t^2e^t\}$

De um espaço de funções e questionei sobre como escrevera função:$-2e^t + 5te^t$ em relação a essa base. O aluno 02 mostra sua estranheza ao tema, já a aluna 08 me surpreendeu respondendo:

Aluno 02:	Hã*?*
Aluna 08*:*	*(0,5,-2).*
Aluno 01:	*(-2,0,5)*.

Enquanto esse aluno não passa insensivelmente pela novidade, ela já desperta o pensamento para participar do debate.

Nesse momento, a aluna 08, que também não havia participado da aula anterior parece ampliar seus conceitos para o espaço de funções. Procurei incentivá-la para ampliar os debates entre os colegas. E ela já continuou:

Aluna 08:	*- 2.*

Mas a interrompo, sem querer, sugerindo uma melhor organização da função. Após um debate, alguns alunos chegaram a um consenso de que a forma correta é *(-2, 5, 0)*.

Procuro o tempo todo manter a responsabilidade da fala neles, tentando manter a autoconfiança e a tendência à discussão:

Pesquisador:	*Depois vocês me falaram que a transformação derivada que leva uma função na sua derivada é uma transformação linear. O "aluno 01" até falou das propriedades da derivada para justificar.*

[Ele se utiliza de a derivada preservar a soma e o produto por escalar]

E reforço a participação deles no último encontro dizendo:

Pesquisador:	*Aqui está um pouco mais formalizado, digo me referindo ao quadro, mas foram vocês que me disseram isto. Eu só os ajudei a escrever.*

[Me refiro às propriedades da transformação derivada escritas no quadro.]

aula ante que não entendo. Peço pra ela repetir e a aluna 03 diz:

Aluna 03:	Ela disse que aplica a transformação nos vetores da base.

Já me parece clara a mudança de postura quando vejo os alunos discutindo claramente entre si:

Aluna 01:	E se estiver errado?
Aluno 02:	Está certo.

Começo os questionando sobre a derivada de e^t e te^t quando a aluna 02 responde:

Aluna 02:	*P*roduto. É a derivada dele 1 vezes e^tmais te^t.

Então incremento, perguntando sobre o 3º vetor da base (t^2e^t) e todos respondem puxados pela aluna 02.

Então quando pergunto sobre a matriz D, de diferenciação, e uma aluna (que não conseguimos identificar) pergunta quase sussurrando a um colega:

Aluna xx:	e^t entra?

Embora eu tenha percebido a questão preferi não interceder para incentivá-los a discutir entre si. Então justifico aos alunos sobre a necessidade de voltarmos a discutir como os vetores derivados são escritos em relação à base em questão. E após a escrita pergunto se tem alguém em dificuldades. Ao mesmo tempo em que registro as ideias assim que os estudantes as justificam, complemento as justificativas ou os incentivo a explica-las. Conforme me falam as coordenadas e volta a ocorrer um debate agora sobre a posição que estes vetores entram na matriz. Alimento a discussão e peço justificativas quando o aluno 02 já me parecendo mais seguro justifica que o vetor deve entrar transposto na matriz.Após construírem a matriz eu encerro a revisão e começo com o trabalho planejado para este encontro.

Continuando a caminhada

Deixo para eles a questão de ser essa matriz diagonalizável, o que poderia favorecer na reaplicação futura dessa transformação e a aluna 08 logo observa:

Aluna 08:	Como tem aula amanhã, e ele vai falar sobre matriz diagonalizável..., diz ela olhando para o professor.

Então para mantê-los familiarizados, volto à transformação $T(x, y) = (2x, 2y)$, e pergunto sobre qual seria o resultado de transformação T aplicada ao vetor $u = (-3, 5)$, e todos respondem em coro que daria $(-6, 10)$. Questiono sobre como utilizar matrizes para realizar esta operação e o aluno 01 mostra se lembrar claramente:

Aluno 01:	Vai ficar uma matriz $(-3, 5)^T$, aqui ele sinaliza com a mão a posição, multiplicando por T.

Discuto então sobre a ordem do produto e ele afirma que faríamos T vezes *u*. Aproveitando a oportunidade, incentivo-os a testar a conjectura do colega, pois o pensamento reflexivo depende de análise e inquirição. Rapidamente verificam que *Tu* é a forma de montar o produto e, então, elaboro mais um problema com a questão:

Pesquisador:	Eu tenho um vetor f, e pra não ter o trabalho de escrever mais nada, eu vou falar que f é este cara e aponto para uma derivada já feita. Derivem pra mim.
[Refiro-me a derivar uma função já derivada.]	

Então começa uma discussão entre os alunos de como proceder: derivar novamente as funções, encontrar a matriz que representa a derivada segunda e, o aluno 01, demonstra ter entendido o processo de diferenciação por matrizes:

Aluno 01:	Pega as coordenadas dele, pega o D e multiplica pelas coordenadas.

- Primeiramente ele reconhece um padrão e posteriormente consegue realizar uma edificação utilizando-se da matriz de derivação vista anteriormente e das propriedades de multiplicação de matrizes.

Sugiro que testem a validade do processo derivando por meio de matrizes e utilizando-se de técnicas de cálculo diferencial. Aproveito, também, para começar a escrever a operação como *Df, f(t)* = $-2e^t + 5te^t$. E o aluno 01 demonstra convicção em sua ideia de aplicar a matriz dizendo:

Aluno 01:	Se eu fiz errado, vai ficar errado.

Dei um tempo para que conferissem o resultado com o da função já derivada na lousa. Percebi que alguns erraram o produto. Resolvi fazer rapidamente o produto, depois de discutir a ordem da matriz resultado e questionei que função é equivalente ao vetor resposta. Responderam-me em coro claramente, utilizando o conceito de combinação linear.

Alunos:	$3\,e^t$

- Como respondem em coro parece-me claro que conseguem operar e compreender a resposta obtida pelo produto matricial.

Questionei sobre a integração ser uma transformação linear e o aluno 02 justifica que sim, que a integral preserva a soma e o produto por escalar.

- Aqui ele estava se utilizando da ação de reconhecimento do padrão usado para resolver o problema da derivada ser uma TL para sanar o problema.

Volto a encorajá-los reafirmando o trabalho que fizeram na representação da transformação derivada e sugiro que, se possível, representem a transformação integral.

Após alguns instantes cometo um grave erro de interpretação.

Aluna 08:	A integral não é uma antiderivada?
Pesquisador:	Será que você está me falando que a inversa dessa matriz integra? É isso que você está me falando?
Aluna 08:	Eu não tinha pensado por esse lado, mas no sentido da integral ser o inverso da derivada. Então a gente conseguiria fazer a mesma coisa achar uma...

Nesse momento, interpretei de forma equivocada a fala da aluna que, em seguida, mostrou não resolvida (apesar de estar próxima do resultado) a questão que eu imaginei.

Com esse erro, perdi a oportunidade de ajudá-los a perceberem uma possibilidade no debate com a aluna 08. Tentando corrigir o meu erro, continuei o debate, mas ela percebeu que fiquei desconcertado:

Pesquisador:	É, talvez não dê.
Aluna 08:	A inversa dela vai ser?
Pesquisador:	Não sei.
Aluna 08:	*Agora você já contou, ué... Agora já era.*

Procurei aproveitar a situação e sugeri que se dividissem em dois grupos para tentar das duas maneiras. Então, *referindo-se ao exemplo da derivada de* $-2e^t + 5\,te^t$, foi dada a sugestão:

Aluno 01:	*Se pegar o exemplo que já está derivado aí, e integrar, a gente já sai direto.*

Deixei livre o caminho, somente solicitei que me apresentassem a matriz, pois teriam oportunidades de crescimento em ambas as opções.

Alguns alunos pediram meu auxílio no processo e apenas sugeri que discutissem entre eles. Alguns instantes depois, alguns alunos me pediram para rediscutir com eles o processo de obtenção da matriz D. Aproveitei o momento para falar sobre a validade da matriz para outros espaços e percebi que entendiam que a matriz valia para essa base e nesse espaço. Assim consegui que voltassem a interagir e logo a aluna 04 disse para o aluno 02:

Aluna 04:	*Você vai pegar os vetores da base e integrar. Vai achar os mesmos números.*
Aluno 02:	*Não vão ser os mesmos, responde ele.*
[Ficou um pouco confusa esta fala, mas a aluna 04 logo disse.]	
Aluna 04:	*Tá, aí você vai construir a matriz. Aí você vai montar a transformação. Você pode testar com um* exemplo...

Um detalhe interessante é que essa aluna, até o momento, havia cursado apenas o Cálculo Diferencial e ainda não sabia integrar. Ela estava usando procedimentos de Álgebra Linear para contornar sua limitação.

Nesse momento, o aluno 01 e a aluna 07 jáhaviam terminado o processo. Incentivei-os a analisarem se daria certo só para tal exemplo que escolhemos ou se a validade do processo seria para qualquer função desse espaço, enquanto a aluna 07 tentava convencer alguns colegas da validade do processo com o uso de matrizes.

Esperei mais algum tempo e comecei a fazer as integrais com a ajuda dos alunos. Mantive a resposta na ordem natural da integral para observar se já estavam familiarizados com o processo e questionei sobre a forma da matriz I, que representa a integração nesse espaço: E qual é a forma da matriz I? Quem é a matriz I?

Eles montaram a matriz e lhes pedi para aplicarem a transformação no vetor que havíamos derivado conforme sugestão da aluna 08. O barulho no corredor começou a aumentar e percebi que o tempo daquele encontro já estava por se encerrar. Então decidi reforçar o processo da matriz inversa. Fui discutindo com eles e escrevendo conforme eles concluíam. Nesse momento, também houve debates das melhores opções para se fazer a inversa da matriz. Deixei como reflexão sobre qual processo seria mais fácil para executar a integração nesse espaço. Conversamos mais um pouco, agradeci a todos pela participação e finalizei o encontro.

O terceiro encontro

Este encontro realizou-se no sábado dia 18/06 entre 14:30 e 15:10h, após uma aula de exercícios iniciada às 13 horas e, com alguns alunos ainda tendo participado de uma aula de exercícios de Cálculo II que ocorrera pela manhã. Compareceram a este encontro os alunos 01, 02 e 04 e as alunas 01, 02, 03 e 08.

Embora esperasse dos alunos uma postura mais ativa, confesso que não esperava que chegassem a aceitar tão bem a proposta em tão pouco tempo de trabalho. Embora resistissem parece que eles queriam ter uma postura mais ativa. Este encontro acabou marcado por esta mudança de atitude. Em alguns momentos, ainda buscassem por uma autoridade que os respaldasse, mas este encontro foi marcado pela participação dos alunos que se pronunciaram mais neste encontro que nos outros dois encontros anteriores.

Dei início falando sobre o espaço, no qual, conseguimos exibiruma matriz que representa a derivação e outra que representa a integração. Na sequência, levantei uma questão que deixei em aberto no primeiro encontro: O conjunto E = [sen(x), cos(x)], é LI?

Observei que eles estavam com dificuldades e, como fiz nas transformações, também usei um exemplo numérico para ajudá-los a relembrar.

O aluno 01 mostrou se lembrar de como operar e vários outros entraram na discussão:

> *Aluno 01:* *Não poderia escalonar, por exemplo? Pra chegar à conclusão que é LI.*
> *Aluna 01:* *LI. Você escalona isto aqui? Pergunta para a aluna 03.*
> *Aluna 03:* *É LI sim.*
> *Aluno 01:* *Também você vê que não é LD porque não é combinação... do outro.*

Buscando manter o debate peço para que expliquem melhor.

> *Aluna 08:* *Você não tem como escrever um vetor como combinação linear do outro. Então não é LD. E se não é LD, é LI.*

Naquela oportunidade, dei um exemplo com três vetores e logo o aluno 02 disse que basta escalonar. Questionei-os sobre como fazer eos alunos foram me explicando como procederam. Então novamente questionei sobre a dependência linear do conjunto *E*.

Eles tentaram retornar à discussão sobre exemplos numéricos para tentarem avançarem. Perceberam que a análise sobre a expressão

asen(x) + b cos(x) = 0

Dividindo tudo por sen(x) e sendo manipulada, poderia ser trocada por:

cotg(x) = -a/b

Eles estavam até desconsiderando o problema de b ser igual a zero.

Confusos, buscaram outras estratégias:

> *Aluno 04:* Cotg(x) vai ser este valor.
> *Aluna 08:* Se isto acontecesse ia ser LI.

Então pergunto incentivando-os a reflexão:

> *Pesquisador:* Se isto acontecesse seria LI?
> *Aluno 04 e Aluna 08:* Não, respondem simultaneamente.

E percebem o problema da estratégia utilizada.

> *Aluno 01:* *Se isto acontecesse você não poderia ter nem o b ali igual à zero. E isto traria outro problema.*
> *Aluna 08:* Então não teria solução trivial.

Percebi que estavam se perdendo e também fiz uma manipulação, objetivando que eles percebessem que não se encontrava ali a questão. Logo o aluno 01 começou a perceber onde deveria focar.

> *Aluno 01:* *O ângulo que você pegar aí, se você pegar no 4º quadrante, você pode ter um complicador, né?*

Eles começaram a justificar, fixando um ângulo. Então lembrei-os sobre a necessidade de exibir “a” e “b”. Para tentar auxiliá-los, incentivei-os a montarem exemplos numéricos.

A discussão tomou a turma. Notei que, naquele momento, todos estavam envolvidos e concentrados. Tentavam usar todo o seu conhecimento para saírem daquela situação problema. Estavam argumentando, debatendo, ajudando uns aos outros e refletindo. Muitos falavam ao mesmo tempo. Entretanto estavam perdidos e continuei tentando ajudá-los sem dar a solução e sim procurando manter o debate ativo e buscando justificativas. Sugeri que escrevessem as contas que estavam dizendo para os diversos ângulos. Percebendo que a aluna 08 estava confundindo a si e aos colegas, incentivei-a a tentar escrever as suas argumentações.

Então decidi provocá-los:

Pesquisador:	*Vocês já falaram tanto que é, quanto que não é combinação linear, mas ninguém conseguiu dar uma justificativa de que é nem uma coisa, nem outra.*

Buscando por minha “autoridade”, a aluna 08 quase exigiu uma resposta me questionando se “está errado o caminho que a gente tá indo”. E sua insistência acabou por contagiar os colegas que já não estavam escrevendo, apenas prestando atenção em nossa conversa.

Após muita discussão e confusões, conseguiram perceber que era LI. Então lhes disse que esse conjunto gerava um espaço de dimensão dois. E questionei sobre a possibilidade de se construir uma matriz que representasse a derivada no espaço gerado pelo conjunto B = {sen(x), cos(x)}.

A aluna 08 me fez algumas perguntas como:

Aluna 08:	*Você vai derivar, primeiro o seno, depois o cosseno... É só isso?*
Aluna 08:	Qual é o nome da matriz mesmo?
Aluna 08:	É só colocar os vetores da derivada?

Como não parecia que ela estava refletindo, mas buscando acertar a resposta, recomendei, algumas vezes, que ela procurasse escrever suas ideias.

Voltei a incentivá-los a discutirem em grupos.

Começaram a falar da derivada e dos coeficientes e percebi alguma confusão sobre a ordem da matriz. Praticamente não interrompi o debate deles. A discussão findou com o aluno 04 tendo reconhecido o padrão do sistema e explicando para a aluna 08 que “Ali são duas entradas”. Também percebi que alguns alunos estavam tendo problemas em relação à ordem da base.

Perguntei sobre a matriz e os incentivei a utilizá-la e perceberam que o resultado não coincidia com a derivada tradicional. E logo conseguiram perceber o equívoco:

Aluna 08:	A primeira entrada tem que ser seno?
Aluno 01:	O sen(x) primeiro.

Perguntei sobre como escrever uma função e, logo em seguida, sobre a matriz que conseguiram apresentar após nova confirmação da ordem que estavam confundindo:

Aluno 04:	*Tá certo. A primeira entrada é seno e a segunda é cosseno. Tá certo.*
Aluno 01:	Tá certo. É mesmo.

Percebi que os alunos já estavam ficando cansados e decidi trabalhar o lado geométrico do pensamento e os incentivei a representar geometricamente as funções e suas derivadas. Sugeri o vetor *v= - sen(x) - 3cos(x)*. Eles pareceram confusos, então insisti pedindo que "desenhassem" os vetores. Me chamou a atenção como interagiam até em questões mais simples.

Aluno 02:	*Que o vetor é 3...*
Aluna 03:	*-1*.
Aluno 02:	*-1, isto eu sei..., confirma imediatamente. O vetor é três em x e menos um em y.*

Consequentemente tentei me certificar de como iriam se comportar com o vetor genérico *u = a sen(x) + b cos(x).* A aluna 08 já tentava se antecipar e responde:

Aluna 08:	*(-b, a)*?

Ela rapidamente aplicou a derivada ao vetor u.Eles continuaram a interagir. Começaram a trabalhar de forma conjunta como quando responderam sobre como escrevo o vetor u em relação à base apresentada.

Aluno 01:	a..., começa respondendo.
Aluna 03:	b.
Aluna 08:	Vai ser b..., confirma.

Perguntei novamente, o aluno 01 já respondeu*(a, b)* e os colegas concordaram. Então perguntei sobre o resultado de *Du* e o aluno 01 respondeu imediatamente que era*(-b, a)*. Eles também foram capazes de construir a matriz de diferenciação relativa a esse espaço e desenvolverem procedimentos para realizar esse produto.

Aluna 08: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$vezes *(a, b)*. E aí você vai obter *(-b, a)*.

Decidi retornar à representação geométrica por não terem percebido nenhuma relação na questão anterior. Assim sugeri que representassem um vetor genérico *u* = *(a, b)* e o vetor *Du*. Notei certa inquietação na metade dos alunos que estava pensando em como representar medidas genéricas. Mas como a maioria estava escrevendo, optei por deixar para que tentassem resolver por si mesmos.

Depois de alguns instantes de inquietação, dei algumas orientações sobre como proceder, pois notei o cansaço deles aumentando. Também transitei entre os alunos e aconselhei alguns a reconsiderarem a direção do vetor *Du*. Sugiri que representassem também a o vetor da derivada segunda de u. E logo a aluna 08 disse a todos:

Aluna 08: *Bom, a matriz da derivada é aquela ali, é só derivar o vetor de novo, não é não? É só multiplicar a matriz pelo vetor que você vai estar derivando de novo.*

Então, sabendo que ela encontrara uma saída válida, mas precisando ir em outra direção, questionei sobre outra maneira de resolver a questão. Não entendi suas falas e lhes pedi para repetirem e o aluno 01 disse:

Aluno 01:	*Ela disse o seguinte, e faz um sinal indicando a aluna 08, multiplicando-se duas vezes os vetores você acha a derivada segunda. Então eu estou dizendo, mas não tenho certeza, estou tentando fazer aqui uma forma de você achar uma matriz que você já consiga ir direto para a derivada segunda.*

Novamente, sugeri à aluna 08 que tentasse escrever sua ideia. Ela mostrou dificuldades em se expressar:

Aluna 08:	*Não, mas eu quero mesmo é achar outra matriz. E o que eu falei é que a gente calculando a segunda vez o resultado da diagonal, não, da matriz derivada ia dar derivada segunda.*

O aluno 01 interrompeu dizendo:

Aluno 01:	A matriz aqui, não sei se está correto, mas seria [-1, 0/ 0, -1].

Buscando avançar, decidi ajudar todos a entenderem o processo, por isso questiono como ele havia chegado a essa conclusão e ele respondeu:

Aluno 01:	*Eu peguei o sen(x) e derivei duas vezes, e achei conforme você achou ali, (0, 1) na primeira derivada e (-1, 0) e pro cos(x) achei (0, -1), quando você achou (-1, 0) ali. Aí eu montei.*

Eu esperava que ele tivesse montado o produto da matriz D^2 pelos vetores da base, daí incentivei-o a tentar escrever matematicamente o que a aluna 08 dissera. Era um tanto essencial esse resultado ser observado matricialmente. E ela continuou tentando se explicar aos colegas que participaram do debate. Para não gastar mais tempo, decidi ir ao quadro para representar e pedi a ela para que me dissesse como fazer a conta que ela havia feito mentalmente, mas comecei a observar enquanto debatiam:

Aluno 08: Então, *Dv*. Então peguei *Dv* vezes D e achei a derivada segunda.

Aluno 01: É o contrário. É *D* vezes *Dv.*

Aluno 04: É *D* vezes *Dv.*

Aluna 08: É, eu multipliquei a matriz pelo resultado, então é *D* vezes *Dv.*

Aluno 04: Vezes *(1, 3)*. Poe números lá, só pra gente ver.

[Pede o aluno 04, buscando um exemplo numérico.]

Tentei dar pistas e acabei por questionar sobre as propriedades da multiplicação de matrizes. E quando confirmaram que $Dx(Du) = (DxD)u$, direcionei-os um pouco para avançarem.

Pesquisador: Quanto é *DxD*?

Aluno 02 e Aluna 08: D^2.

Tentei conduzi-los a refletirem sobre a composta de duas transformações lineares. Como nada ocorreu, preferi ajudá-los a avançar. Percebi que os alunos já se encontravam um pouco cansados.

Incentivei-os a fazer o produto *DxD*. Também solicitei a eles que representassem o vetor v’’.

Insisti para que representarem os vetores v, v' e v'', sendo que *v= - sen(x) - 3cos(x)*. Assim que alguns alunos terminaram, sugeri que representassem os vetores u, u' e u'', onde *u= asen(x) +bcos(x)*. Então comecei a circular pela sala para procurar saber como eles estavam fazendo, e o aluno 01, com o auxílio do raciocínio geométrico, acabou resolvendo a questão que estava implícita:

Aluno 01:	A cada derivada você parece que desloca *90*^{0}.

A maioria estava concentrada e não percebeu a informação e continuava a derivar e tentar representar. Então fui à lousa, tentei chamar a atenção para a nova informação e o debate voltou a tomar a turma. Estavam focados no resultado de u'' e procurei dar algum tempo para eles debaterem. Assim que entraram em acordo, voltei a atenção deles para a conjectura do colega. Questionei sobre a derivada terceira e começaram a tentar pensar geometricamente.

Aluna 08:	*Aí é só... este dá no quarto quadrante, aí dá (-1, -3), responde após fazer um gesto com a caneta para descobrir o quadrante do vetor.*

Depois de algum debate, percebi que era necessário avançar devido ao cansaço já visível em alguns estudantes, e sugeri que encontrassem a matriz integral, pois naquele momento existiam duas questões: saber se conseguiam construir tal matriz e se iriam relacioná-la com D^3. Também incentivei a aluna 08 a encontrar D^4.

Deixei-os escrever um pouco e notei que o cansaço da maioria já era bem grande. Eles estavam há mais de duas horas trabalhando, pois participaram anteriormente de uma aula de exercícios, e decidi agilizar. Assim que alguns alunos manifestaram ter terminado, questionei sobre o resultado. Mais ainda, questionei sobre o processo, mesmo percebendo que se equivocaram no resultado. E obtiveram a matriz por processos diferentes. Um grupo produziu a matriz a partir do resultado da integral dos vetores da base e outro fez a inversa da matriz que representa a derivação.

Aluna 08:	A inversa.
Aluno 04:	Integrei aqui.
Aluno 01:	A inversa, mas eu não encontrei isto não.

Alguns outros estudantes se manifestaram sobre o resultado.

Logo a aluna 08 afirmou que o equívoco se deu por ela ter lido as linhas, enquanto os colegas leram as colunas, e ambos haviam encontrado o mesmo resultado. O aluno 01 também testou se sua matriz integrava, tendo executado a operação no vetor u. Esta e suas atitudes anteriores mostraram que ele assumiu uma postura de inquirição, buscando conjecturar e testar suas soluções antes mesmo de alguém questionar.

Nesse momento, solicitei-lhes que integrassem e representassem esse vetor também. Enquanto estavam operando, percebi que estavam ficando cansados. Assim que fizeram, questionei sobre D^4 e rapidamente a aluna 08 respondeu *[1, 0/ 0, 1].* Pedi que confirmassem e logo o aluno 01 confirmou e ela já utilizou o pensamento geométrico afirmando:

Aluna 08:	A gente foi só rodando os quadrantes, tem que estar certo.

Questionei sobre D^5 e a aluna 08 afirmou convictamente:

Aluna 08:	D^5é igual *D...*
Pesquisador:	*Por quê?*
Aluna 08:	*Porque já acabou o plano cartesiano todo, ué, responde ela girando a caneta. A gente já varreu todos os quadrantes.*

Então ela e o aluno 01 começaram a falar como se comemorassem a façanha. Disse a eles que gostaria que encontrassem uma relação antes que encerrássemos. E ela logo trouxe outra questão já esquecida por mim:

Aluna 08:	*A integral é o vetor inverso da derivada? Pergunta ela, sinalizando com um dedo para cada direção como se fossem vetores.*

Ela tentou explicar primeiramente usando um eixo de simetria perpendicular aos vetores e acabou por falar do sentido dos vetores. Então confirmei a eles que a relação que perceberam, $D^{4k+n} = D^n$, era verdadeira. Começam a falar sobre $D=-D^3$e $D^2 = -D^4$. E questionei-lhes sobre a rotação e a aluna 08 afirmou que era de 180^0. Para terminar, perguntei diretamente sobre a relação de I com as matrizes das derivadas sucessivas. A aluna 08 novamente afirmou que $I=D^3$e questionou o porquê. E os ajudei a perceberem sobre o período da transformação. Por fim perguntei sobre o que estudamos do conteúdo de Álgebra Linear.

Eles citaram: matriz de uma transformação, inversa, matriz de rotação e isomorfismo. Não havendo mais tempo para discutir sobre este último tópico, citei a composição de transformações e me despedi dos alunos. O cansaço e o horário já não permitiam mais que prosseguíssemos.

Entendemos que esta atividade apropriou-se resumidamente dos resultados apresentados no Capítulo 1 de nossa dissertação. Embora a turma tenha começado acanhada, foi se envolvendo e a discussão passou pelas principais propostas que eram possíveis ao tempo disponibilizado para sua realização. Acreditamos que a atividade realizou seu papel de ser social e reflexiva, A atividade teve um caráter de incentivo ao teste das conjecturas e formulação das mesmas e, apesar de não termos indícios de construções, temos de algumas edificações que se prestaram a resolver alguns problemas.

Considerações finais

Acreditamos que essa atividade é reflexiva por incentivar o surgimento das fases da atividade reflexiva descritas por Dewey (1959). Ela foi desenvolvida com o intuito de provocar o debate e uma participação mais ativa dos estudantes para facilitar o processo de construção do conhecimento compartilhado na acepção de Hershkowitz *et al* (2007). Para desenvolver esta atividade, também utilizamos algumas ideias de Ponte, Brocardo, Oliveira (2006) no sentido de "fazer matemática". Entendemos que essa dinâmica pode contribuir para aulas mais interessantes e envolventes que motivem os estudantes, fato este, que este pesquisador acredita ser um dos fatores mais importantes para a aprendizagem.

Essas conexões que citamos entre cálculo e álgebra linear podem auxiliar na consolidação dos conhecimentos, visto que ampliam o significado dos conceitos já estudados em situações mais gerais.

Um bom exemplo de conexão que pode ser aproveitada de forma pedagógica é o estudo do quadrado do binômio $(a+b)^2$ que, ainda no ensino superior, alguns estudantes insistem em crer que o resultado seria $a^2 + b^2$. Cremos que uma atividade com valores numéricos para a e b, com o auxílio da representação geométrica do quadrado de lado a, ao qual é acrescido b a sua base e altura e, até a extensão para o quadrado do trinômio $a + b + c$ possa auxiliar no entendimento desta questão.

O importante, em nossa visão, é um trabalho que incentive os estudantes não só a encontrar uma solução, como verificá-la e a justificarem esta solução, mesmo que através de argumentos e não de uma demonstração matemática.

Em nossa pesquisa, observamos que, durante nossa atividade, os estudantes apresentaram indícios do encadeamento de ideias para tentarem solucionar as questões que surgiram. Em alguns momentos, como na discussão sobre a independência linear de sen(x) e cos(x), mesmo quando procuravam justificar a resposta incorreta, mobilizaram saberes diversos e apresentaram boa argumentação e pensamento matemático.

Nosso trabalho foi realizado com turmas pequenas: três alunos no piloto e doze na pesquisa. Acreditamos que a atividade em uma turma com mais estudantes poderá trazer alguns obstáculos e vantagens como, por exemplo, poderá haver mais facilidade de se obter sugestões em turmas maiores, mas pode se tornar mais difícil manter o foco e a motivação dos estudantes. Esperamos, sinceramente, que este trabalho possa auxiliar alguns de nossos colegas no desenvolvimento de atividades, aulas e pesquisas na área.

Referências

DEWEY, J. Como pensamos: Como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição. Tradução de Haydée de Camargo Campos. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. Título original: How we think: restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.

HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. B; DREYFUS, T. Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 32, No. 2, pp. 195- 222, mar/2001.

HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. B; DREYFUS, T. HADAS, N. Abstracting Processes, from Individuals'Constructing of Knowledge to a Group's "Shared Knowledge".*Mathematics Education Research Journal*, v. 19, n. 2, 41–68, 2007.

PONTE J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA H*. Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ROGERS, J. W., Jr. Applications of Linear Algebra in Calculus, *The American Mathematical Monthly*, V. 104, N. 1., p. 20-26, jan/1997.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto