

Anderon Melhor Miranda

**AS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO NO  
ESTUDO DO CÁLCULO NA PERSPECTIVA DA  
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel.

OURO PRETO

2010

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da  
Aprendizagem Significativa**

Autor: Anderon Melhor Miranda  
Orientador: Dr. Felipe Rogério Pimentel

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Anderon Melhor Miranda e aprovada pela Comissão Examinadora.

Data:

Assinatura:.....

***Orientador***

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

Prof<sup>ª</sup>. Dra Márcia Maria Fusaro Pinto – UFRJ – RJ

---

Prof. Dr Frederico da Silva Reis – UFOP – MG

**Alfabeto de Significados Pessoais (1 ano de idade)**

**áá:** guaraná

**aana:** Alana (prima)

**aguía:** água

**babú:** bico, chupeta infantil

**bia:** Ademir (primo)

**caê caê:** órgão sexual masculino (próprio)

**eite:** leite

**fafé:** café

**fuêva:** chuva

**nanana:** Conceição (tia)

**ombu:** ônibus

**papaê:** papai

**pápuma:** cobra

**tlá:** bala, doces, guloseimas

**trim:** trem

**Zaída:** Railda (tia)

*Dedico este trabalho a meus pais e a meu irmão:*

*A minha mãe, Irony, por ter feito da sua vida “uma função linear” da minha, ou seja, esteve em todos os momentos dela, desde quando eu pronunciei as primeiras palavras, em uma língua que só ela entendia, até as longas saudades, amenizadas por telefone, de quando estávamos afastados por conta da realização deste trabalho.*

*Ao meu pai, André, por se sentir vaidoso em contar para seus amigos de futebol e bar, inúmeras vezes, que seu filho é um educador dedicado e determinado.*

*Ao meu irmão, Andrezinho, que dotado de muitas qualidades e ofícios – companheiro, educador, músico, cientista da computação, etc. – me ajudou, de forma significativa, no desenvolvimento pessoal e na construção da minha carreira profissional, como educador.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, e a todos os “Orixás Baianos” que abriram o meu caminho ao Olimpo, me dando força e energia para enfrentar os obstáculos e superá-los, com sabedoria e determinação.

Ao Grupo EMFOCO, e a todos os companheiros(as), amigos(as) e irmãos baianos. A energia que movimenta os membros deste grupo a estudar e a desenvolver sua formação continuada é algo imensurável. Sinto-me um felizardo em pertencer à família EMFOCO e o considero o maior co-autor da construção deste trabalho científico, me auxiliando e apoiando em todos os momentos e etapas da minha vida. Muito obrigado a todos os “emfoquianos”.

Ao Professor Felipe Rogério Pimentel, pela sua dedicação na orientação desta pesquisa em Educação Matemática; pela sua atenção dispensada na elaboração do trabalho – em produtivas discussões, em diversos momentos, ora em concordâncias ora em discordâncias – fazendo da relação orientador/orientando uma grande parceria de amizade e um momento rico e propício à formação e ao crescimento profissional de ambos. Muito obrigado, professor Felipe.

Aos professores e membros da Banca, Frederico da Silva Reis, Márcia Maria Fusaro Pinto e suplentes – Maria Clara Rezende Frota e Marger da Conceição Ventura Viana – que, além de uma banca de qualificação, considero-a uma banca de orientação o que me auxiliou com sugestões extremamente valiosas, para a construção e elaboração do processo analítico deste estudo.

Aos professores Dale Bean, Ana Cristina e Teresinha Kawasaki, pelas suas contribuições no projeto de pesquisa e em partes da dissertação, com leituras pertinentes e importantes sugestões para a construção dos capítulos.

A Lílian Santos (Lia), mulher, amiga, companheira de vida e de todos os momentos de estudo que, além de acreditar e me incentivar nessa conquista, me apoiou, ouviu e opinou com considerações preciosas para o desenvolvimento dessa pesquisa. Obrigado, nega véia.

Ao colega e amigo Leandro, pelas suas análises, críticas e sugestões, em partes do texto da dissertação.

A todos os professores do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP e colegas de mestrado, que me ajudaram, durante todo o curso, na elucidação de idéias e discussões e temas.

A todos os estudantes de graduação em Matemática da UFOP, que participaram para a coleta dos dados da pesquisa e que, em muitos momentos, ouviram as minhas lamúrias e meus risos pelas conquistas no processo de análise e construção dos instrumentos de coletas.

A professora Isabel, pelas correções ortográficas e textuais.

A Luciana, pelas correções traduzidas, do inglês para o português, nas citações.

Aos funcionários e secretárias da UFOP, Lurdinha, Maria Inês e Ivanildes, com suas contribuições administrativas e técnicas, para o desenvolvimento do mestrado.

## EPÍGRAFE

*“A mente que se abre a uma nova idéia  
Jamais volta ao seu tamanho original.”  
(Albert Einstein)*

## RESUMO

A presente pesquisa surgiu das experiências, como docente, vivenciadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e das leituras sobre os conteúdos, que abordam as dificuldades e direções norteadoras de seu ensino. Assim, com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, conceitos do Pensamento Matemático Avançado e Pensamento Visual-Espacial apresentamos uma proposta de ensino e aprendizagem para esta disciplina, nos estudos de funções reais de duas variáveis e gráficos em  $\mathbb{R}^3$ , auxiliadas com o uso de uma tecnologia informática. A metodologia – realizada em uma turma de Cálculo II do curso de licenciatura em Matemática – apresentou um caráter qualitativo, apoiada nos aspectos metodológicos de experimentos de ensino. Os métodos utilizados na coleta de dados foram observações de aulas, realizações de atividades matemáticas auxiliadas por um software e entrevistas semi-estruturadas. Os dados – orientados pelo questionamento das contribuições que um *software*, combinado com atividades, poderia oferecer para o ensino e aprendizagem de gráficos e superfícies no  $\mathbb{R}^3$  – apontaram alguns fatores determinantes, dentre eles, que as interações de novas informações com conhecimentos prévios e de aprendiz/aprendiz e aprendizes/professor desempenharam um papel fundamental para uma possível aprendizagem significativa, em gráficos do  $\mathbb{R}^3$ .

Palavras-Chaves: Tecnologias Informáticas. Ensino de Cálculo. Aprendizagem Significativa.

## ABSTRACT

This research has emerged from my experiences, as a teacher, in the discipline of differential integral calculus and the readings about the topics that broach the difficulties and guiding directions of teaching. Thus, based on the Theory of Meaningful Learning concepts and the Advanced Mathematical Thinking and Visual-Spatial Thinking, we present a proposal of for teaching and learning for this discipline concerned with studies of real functions of two variables and graphs in  $\mathbb{R}^3$ , aided by the use of a computer. The methodology was put into practice in a math undergraduate course class – under the discipline “*Cálculo II*” – and presented a qualitative character, supported by the methodological aspects of teaching experiments. The methods used to collect data were: The classroom observations, math achievement tests, supported by a software, and interviews. The Data - guided by the questioning contributions that a software, combined with activities, could provide for teaching and learning graphs and surfaces in  $\mathbb{R}^3$  - pointed out some factors, among them, the one such that the interactions of new information with prior knowledge and learner / apprentice and apprentice / teacher played a key role in a possible, meaningful learning in  $\mathbb{R}^3$  graphics.

keywords: Information Technologies. Teaching Calculus. Meaningful Learning.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 - O <i>Continuum</i> da aprendizagem significativa com a aprendizagem mecânica</b>	<b>50</b>
<b>Figura 2 - O <i>Continuum</i> da aprendizagem por descoberta com a aprendizagem por recepção, na perspectiva da aprendizagem significativa</b>	<b>55</b>
<b>Figura 3 - Interação entre definição e imagem conceitual na perspectiva da aprendizagem significativa</b>	<b>72</b>
<b>Figura 4 – Esboço do gráfico da estudante Walda.</b>	<b>98</b>
<b>Figura 5 – Esboços gráficos dos estudantes Raíssa e Dago.</b>	<b>100</b>
<b>Figura 6 – Esboço gráfico da estudante Gláucia.</b>	<b>101</b>
<b>Figura 7 - Interação entre definição e imagem</b>	<b>151</b>
<b>Figura 8 – Dedução puramente formal</b>	<b>151</b>
<b>Figura 9 – Dedução seguindo o pensamento intuitivo</b>	<b>152</b>
<b>Figura 10 – Resposta intuitiva</b>	<b>152</b>

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1 – Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições, contemplados no modelo final de pensamento visual-espacial.</b>	<b>37</b>
<b>Quadro 2 – Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que partem da aprendizagem automática ou da aprendizagem significativa.</b>	<b>56</b>
<b>Quadro 3 – Princípio de assimilação da TAS de Ausubel</b>	<b>62</b>
<b>Quadro 4 – A teoria da assimilação com todas as suas fases</b>	<b>63</b>
<b>Quadro 5 – Acertos dos estudantes referentes à 1ª questão da Atividade – 2.</b>	<b>104</b>
<b>Quadro 6 – Acertos dos estudantes referentes à 2ª questão da Atividade – 2.</b>	<b>105</b>

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CAE – Educação Auxiliada por Computadores

CEAD – Centro de Educação Aberta e à distância

FAMEC – Faculdade Metropolitana de Camaçari.

ICEB – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

IES – Instituição de Ensino Superior

MEC – Ministério da Educação

NIEPEM – Núcleo Interdisciplinar de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática

PMA – Pensamento Matemático Avançado

SHCM – Seres Humanos Com Mídias

TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

TIC – Tecnologia de Informação e Comunicação

TI – Tecnologias Informáticas

UCSAL – Universidade Católica do Salvador

UFF – Universidade Federal Fluminense

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto

USP – Universidade de São Paulo

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	13
1.1 Inquietações .....	13
1.2 Questão de Investigação .....	14
1.3 O Objetivo da Pesquisa.....	15
1.3.1 Tarefas para alcançar o objetivo da pesquisa: .....	15
1.4 Justificativa .....	15
1.5 Estrutura da Dissertação .....	16
2 O ENSINO DE CÁLCULO E AS TIC.....	18
2.1 Nossas Leituras .....	18
2.2 Cálculo Diferencial e Integral.....	20
2.2.1 A disciplina e o seu contexto .....	20
2.2.2 As dificuldades e implicações no ensino de Cálculo.....	22
2.3 As TIC e a sua Aplicabilidade no Ensino .....	27
2.3.1 O uso de computadores no ensino .....	27
2.3.2 O professor e o computador.....	31
2.4 A Simulação e a Visualização nas Relações de Ensino e Aprendizagem .....	33
2.4.1 A visualização na Matemática e na Educação Matemática.....	34
2.4.1.1 O pensamento visual-espacial e o ensino de Cálculo.....	35
2.4.1.2 Simulação e visualização em gráficos de funções reais através das TIC ....	38
3 O ENSINO DE CÁLCULO NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA .....	47
3.1 O Capítulo.....	47
3.2 A Teoria da Aprendizagem Significativa Ausubeliana .....	47
3.3 Elementos e Características da Aprendizagem Significativa.....	51
3.4 Tipos de Aprendizagem Significativa.....	53
3.4.1 Aprendizagem subordinada .....	58
3.4.2 Aprendizagem superordenada.....	60
3.4.3 Aprendizagem combinatória.....	60
3.4.4 Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora .....	61
3.5 Princípio da Assimilação .....	61
3.6 A Aprendizagem Significativa & O Ensino de Cálculo: possíveis relações .....	63
3.6.1 Elementos do Pensamento Matemático Avançado e os conceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa .....	66
3.6.1.1 Imagem Conceitual, Definição Conceitual, Subsúncios e Princípio de Assimilação: buscando interações.....	68
3.6.1.2 Como fica o ensino e aprendizagem do Cálculo nessa perspectiva?.....	73
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	80
4.1 Retomando a Questão de Investigação e o Objetivo da Pesquisa.....	80
4.2 A Opção Metodológica.....	80
4.2.1 Experimentos de ensino .....	81
4.2.2 Escolha dos métodos de coleta de dados .....	83
4.3 O Software .....	85
4.4 Contexto.....	86
4.4.1 Aprendizes participantes.....	87
4.5 Pesquisa de Campo .....	87
4.5.1 Piloto das atividades .....	87
4.5.2 Descrição das etapas .....	88

4.5.2.1 As observações em sala de aula.....	88
4.5.2.2 Descrição na aplicação das atividades (Atividade – 1 e Atividade – 2): o esboço de uma análise inicial.....	89
4.5.2.3 As entrevistas.....	94
5 ANALISANDO E DISCUTINDO OS RESULTADOS.....	95
5.1 Análise Inicial dos Dados Coletados na Atividade – 1.....	95
5.2 Análise Inicial dos Dados Coletados na Atividade – 2.....	104
5.3 Dialogando com os Autores da Fundamentação Teórica.....	108
5.3.1 A aprendizagem significativa na relação de aspectos algébricos e gráficos.....	109
5.3.2 Aspectos da aprendizagem significativa a partir da visualização e formalização de conceitos.....	111
5.3.3 A utilização da visualização para validar a solução de problemas e exercícios de Cálculo, apoiada na TAS.....	114
5.3.4 A exploração de modelos e situações problemas mais complexo, nas atividades, sob o olhar da aprendizagem significativa.....	118
5.3.5 As impressões dos aprendizes sobre o uso e a aplicabilidade do <i>software</i> Winplot e as suas possíveis contribuições para a aprendizagem dos estudantes.....	121
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	131
APÊNDICE A – Atividade 1.....	136
APÊNDICE B – Atividade 2.....	141
APÊNDICE C – Roteiro do Professor-Pesquisador.....	145
APÊNDICE D – Roteiro de Perguntas para as Entrevistas.....	150
ANEXO A.....	151

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Inquietações

Dos estudos realizados no curso de especialização em Educação Matemática da Universidade Católica do Salvador (UCSAL), dos debates temáticos sobre as tendências desta área efetuados pelos colegas do EMFOCO<sup>1</sup> e da minha prática docente, começou a emergir um anseio de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação<sup>2</sup> (TIC) nas minhas aulas, mais especificamente, os *softwares* matemáticos, buscando suas possíveis relações com o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Atuando como docente em duas turmas do ensino superior da Faculdade Metropolitana de Camaçari (FAMEC), percebi dificuldades nos alunos quanto à construção, análise e interpretação de gráficos, mais especialmente, em superfícies e gráficos no  $\mathbb{R}^3$  (sistema tridimensional). Acreditamos que as atividades, as apostilas elaboradas por professores da instituição e alguns exercícios extraídos de livros didáticos favoreceram a aprendizagem desses conteúdos, além das abordagens metodológicas utilizadas e do uso de materiais e recursos.

Ainda assim, alguns estudantes não conseguiam estabelecer relações entre a expressão analítica da equação e o traçado do gráfico correspondente, devido, provavelmente, às dificuldades de visualização e, possivelmente, à falta de base de conteúdos matemáticos do ensino médio (conceitos do  $\mathbb{R}^2$  – sistema bidimensional).

Com isso, na tentativa de amenizar esse problema, foi utilizado um *software* matemático Winplot<sup>3</sup>, em laboratórios de Informática, através de atividades exploratórias e investigativas para desenvolver estudos orientados aos alunos da disciplina de Cálculo II<sup>4</sup>, com o objetivo de discutir algumas idéias e explorar alguns conceitos de Cálculo, a partir de visualizações do traçado das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , ainda que de maneira improvisada, ou seja, sem utilizar nenhuma orientação pedagógica, tutorial, nem o próprio manual do *software*, e sim apenas os

---

<sup>1</sup> EMFOCO – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática formado por professores do Estado da Bahia; Núcleo da SBEM-Ba. Site do grupo: [www.grupoemfoco.com.br](http://www.grupoemfoco.com.br)

<sup>2</sup> Tomaremos como sinônimos dessa palavra, Tecnologias Informáticas e Mídias, no decorrer da redação, a fim de evitar repetições de TIC.

<sup>3</sup> Software desenvolvido pelo Professor Richard Parris "Rick" ([rparris@exeter.edu](mailto:rparris@exeter.edu)), da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. Escrito em C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. Com o lançamento do Windows 3.1, o programa foi rebatizado de "Winplot". A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

<sup>4</sup> Redução do nome da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II. Utilizaremos na redação, a palavra Cálculo em substituição à Cálculo Diferencial e Integral a fim de evitar repetições e tornar a leitura dinâmica.

conhecimentos prévios de Informática e Matemática, juntamente com o manuseio de ferramentas oferecidas pelo *software*.

A escolha pelo Winplot ocorreu por condições de acessibilidade e facilidade de operacionalização, sendo bem aceito pelos alunos que, em poucas aulas, já estavam dominando bem algumas de suas ferramentas.

Posteriormente, participei de um curso – como aluno especial, (não regular) do Mestrado em Ensino Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia – onde tive contato com as leituras de Marco Antônio Moreira<sup>5</sup> sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel<sup>6</sup> (1963, 1968, 1978, 1980). Assim, com essas leituras e a experiência vivenciada e relatada, anteriormente, da relação de alguns aspectos da teoria com a minha prática docente, emerge a nossa questão de investigação, como objeto principal de estudo desta pesquisa, apresentada no tópico a seguir.

## 1.2 Questão de Investigação

Através das disciplinas cursadas no mestrado, das discussões ocorridas em sala de aula, do apoio dos professores orientadores da pesquisa e da literatura de temas que abordam a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), o ensino e a aprendizagem de Cálculo e o uso das TIC na educação, levantamos a nossa pergunta de investigação:

**Como o uso de um *software* e de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráficos no IR<sup>3</sup>, de estudantes de Cálculo de várias variáveis?**

Para esta pergunta norteadora da pesquisa, temos como palavras chaves: Tecnologias Informáticas, Ensino e Aprendizagem de Cálculo, Aprendizagem Significativa.

---

<sup>5</sup> Pesquisador de nacionalidade brasileira, Professor de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com muitas contribuições no ensino de Física com a Teoria da Aprendizagem Significativa.

<sup>6</sup> A teoria fundada por Ausubel, referências da teoria ver em: AUSUBEL, D.P. (1968). **Educational psychology: a cognitive view**. New York, Holt, Rinehart and Winston.

### 1.3 O Objetivo da Pesquisa

Investigar como o uso de um *software* em conjunto com a aplicação de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir e favorecer as relações entre os subsunçores<sup>7</sup>/conhecimentos prévios dos estudantes – de Cálculo de várias variáveis – e as construções, análises, interpretações e compreensões de conceitos matemáticos em gráficos do  $\mathbb{R}^3$ .

#### 1.3.1 Tarefas para alcançar o objetivo da pesquisa:

- Realizar estudos diagnósticos com os aprendizes, para levantar subsunçores/conhecimentos prévios de conceitos matemáticos, para a construção e análise de gráficos (método de teste);
- Utilizar tecnologia informática (*software*) no estudo de conteúdos matemáticos;
- Estudar conceitos matemáticos analisados no  $\mathbb{R}^2$  e estendê-los para o  $\mathbb{R}^3$ , através de elementos da Teoria da Aprendizagem Significativa;
- Criar uma atividade orientada para professores da disciplina de Cálculo que contemple uma proposta de ensino voltada para a Teoria da Aprendizagem Significativa.

### 1.4 Justificativa

A pesquisa consiste na construção, interpretação e análise de gráficos no  $\mathbb{R}^3$ , a partir de conhecimentos prévios do  $\mathbb{R}^2$ , com o auxílio de uma mídia informática, na perspectiva da TAS. Para isso, é necessária a existência de um aporte teórico adequado e relevante ao estudo pretendido e que este possa ser útil para atingirmos o objetivo proposto na pesquisa, oferecendo posteriormente uma análise de dados dialogada com os autores que abordam os assuntos referentes à utilização das TIC, no ensino de Cálculo.

---

<sup>7</sup> Palavra utilizada na Teoria da Aprendizagem Significativa referenciando as idéias existentes na estrutura cognitiva de um indivíduo.

Nossa proposta justifica-se pelas inquietações citadas anteriormente, diante das dificuldades encontradas no ensino dessa disciplina e das experiências docentes vivenciadas em sala de aula e em laboratórios de Informática, com as TIC.

Assim acreditamos que essa pesquisa, que visa à construção de atividades de ensino e aprendizagem baseada na TAS, sirva como subsídio e incentivo a pesquisadores e professores de Cálculo, para que reflitam sobre as suas pesquisas e práticas docentes, repercussões geradas na aprendizagem dos estudantes e a utilização de *softwares* e recursos computacionais, sem deixar de levar em conta aspectos da aprendizagem significativa.

## 1.5 Estrutura da Dissertação

A dissertação é composta de 6 (seis) capítulos: o primeiro trata da presente Introdução. Em seguida, apresentamos os capítulos 2 e 3 que tratam do aporte teórico utilizado na pesquisa. Os capítulos 4 e 5 descrevem a metodologia utilizada e a análise de dados, com base nos aspectos da teoria de Ausubel, dialogada com os estudiosos e pesquisadores citados anteriormente. E, por último, o capítulo 6 (Considerações Finais) que aponta algumas implicações da pesquisa, bem como sugestões e conclusões.

No capítulo 2, sob o título Ensino de Cálculo e as TIC, tratamos das questões relacionadas às dificuldades no ensino de Cálculo e das suas implicações para a aprendizagem numa sala de aula com computadores, fazendo um diálogo com pesquisas que discutem esses dois temas, analisando as relações de ensino dessa disciplina com as TIC.

Iniciamos o capítulo 3 – O Ensino de Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa – com assuntos, definições de caracteres, nomenclaturas e particularidades referentes à TAS, procurando esclarecer ao leitor a possibilidade de usarmos esta teoria na prática educativa e no ensino de Cálculo. Acreditamos que, isso gere implicações diretas na sala de aula, podendo contribuir de forma positiva e significativa para a aprendizagem de estudantes dessa disciplina. Ainda nesse capítulo, fizemos uma ligação de conceitos teóricos (*concept image* e *concept definition*)<sup>8</sup> do Pensamento Matemático Avançado (PMA) com elementos da Teoria da Aprendizagem Significativa.

---

<sup>8</sup> Utilizaremos a tradução da Profa. Dra. Márcia Pinto (imagem conceitual e definição conceitual). Embora, nas citações, tenhamos outras traduções, como conceito imagem e conceito definição (GIRALDO; TALL, 2003; DIAS, 2002; MEYER, 2003). Contudo, entendemos que ambas as traduções tenham os significados iguais.



No capítulo 4, com o título Procedimentos Metodológicos, retomamos da questão de investigação e detalhamos os procedimentos adotados para a coleta de dados, numa forma de pré-teste. Explicitamos os momentos de construção e preparação para a obtenção desses dados e acrescentamos aspectos relevantes analisados e observados num teste “piloto”, realizado numa turma de Cálculo II, da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), no semestre de 2008.2, que serviu como referência para o aprimoramento dos instrumentos de coleta: as Atividades 1 e 2 (veja Apêndices A e B). Depois de feitas as revisões e modificações necessárias e pertinentes, com base nos aspectos da TAS, realizamos a coleta dos dados numa turma de licenciatura em Matemática, da UFOP, regida pelo orientador dessa pesquisa, o Professor Dr. Felipe Rogério Pimentel, no semestre de 2009.1.

O capítulo 5, sob o título Analisando e Discutindo os Resultados, consistirá na análise feita a partir dos dados coletados, estabelecendo um diálogo desses dados com o referencial teórico da dissertação.

O capítulo 6 – Considerações Finais – o último desta dissertação, traz alguns questionamentos, sugestões e conclusões, a partir das evidências criticamente observadas e discutidas nas categorias da análise dos dados.

Esperamos que o estudo desenvolvido nesta pesquisa possa contribuir com outros que seguem a mesma linha, melhorar qualitativamente o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo e, conseqüentemente, promover, de forma significativa, mais um instrumento de desenvolvimento da Educação Matemática no ensino superior.

## 2 O ENSINO DE CÁLCULO E AS TIC

### 2.1 Nossas Leituras

Segundo Lévy (1993), passamos das discussões verbais, bastante freqüentes na Idade Média, para, nos dias de hoje, a análise e interpretações individuais e silenciosas de mapas de esquemas, gráficos, tabelas e dicionários, através de visualizações favorecidas pelo computador e, finalmente, de atividades científicas encontradas em artigos e nas práticas cotidianas dos laboratórios. Quanto às questões de visualização, localização e interpretação de mapas, através de computadores, o autor diz que estes “parecem mostrar que representações de conexões em três dimensões seriam menos embaraçadas e mais fáceis de consultar, dada uma mesma quantidade, que as representações planas.” (LÉVY, 1993, p. 38)

As leituras iniciais sobre os dois temas – Cálculo e TIC – propostos neste capítulo foram realizadas a fim de conhecermos o assunto de estudo de nossa pesquisa e de elaborarmos um aporte teórico sobre o ensino de Cálculo com uso das TIC, buscando manter uma convergência dos pontos de vista de autores e teóricos que discutem esses temas. (ALLEVATO, 2007; BORBA e PENTEADO, 2003; BORBA, 1996; LÉVY, 1993; OLIVEIRA, 2006; VALENTE, 2002) Enquanto, alguns autores (BARUFI, 1999; REZENDE, 2003) abordam o ensino de Cálculo, sem necessariamente utilizar as TIC, outros transitam entre as duas temáticas (ensino de Cálculo **com** e **sem** TIC), por exemplo: Villarreal (2002), Machado (2008), Nasser (2003, 2007), Olimpio Júnior (2006, 2007), Tall e Vinner (1991 à 2008) e que escrevem também sobre as mesmas perspectivas, defendendo que essa utilização contribui, de maneira satisfatória, para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Em relação à utilização das TIC, diversos pesquisadores da Educação Matemática defendem que as tecnologias informáticas são ferramentas de auxílio, nas relações de ensino e aprendizagem, em sala de aula. Oliveira (2006) afirma que o educador deverá ser o sujeito mediador entre o aluno e o conhecimento matemático, e esta relação pode ser desenvolvida com a presença da informática, como um elemento de mediação.

Para Borba (1996, 2003), o uso de tecnologias informáticas em sala de aula pode consistir num mecanismo de mudança para o ensino de Matemática. Esta mudança não corresponde apenas à substituição do tópico de um conteúdo por outro e, sim, ao enfoque

que será dado a um determinado tópico, a uma radical mudança na postura do professor, ou seja, como o professor passa a relacionar-se com alunos e com a máquina.

Na visão desse autor, a inserção do computador e o uso das tecnologias informáticas, nas práticas docentes e no ensino da Matemática, contribuem para mudanças que exigem novas posturas do professor, tanto no âmbito social, quanto em questões de metodologias e pedagogias utilizadas por ele.

Valente (2002) afirma que as mudanças devem ser tanto na postura do professor, como de todo o ambiente escolar.

A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: na sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos e na relação com o conhecimento. (p. 29)

Outros autores (Nasser, 2007; Borba; Penteado, 2003) sugerem, para o ensino da Matemática e do Cálculo, que não se valorizem apenas o conhecimento do aluno, mas também a prática docente do professor em utilizar diversas metodologias e pedagogias de ensino, para promover a aprendizagem dos educandos. Segundo esses autores, a aprendizagem de conceitos do Cálculo ocorre diferentemente do que é esperado pela maioria dos professores, como vemos neste trecho do Vinner (1991, p. 67, grifo do autor):

Quando decidido sobre a pedagogia do ensino de matemática, tem-se que levar em conta não só questões sobre como se espera que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos, mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem aqueles conceitos.

Para o uso das TIC no estudo do Cálculo, esses autores sugerem que elas sirvam como um meio para a aprendizagem de estudantes nessa disciplina e que, através delas, o professor elabore atividades utilizando recursos computacionais, para que os aprendizes se apropriem das definições e conceitos de Cálculo, de forma mais apreensiva e significativa. Machado (2008) acredita que as ferramentas computacionais são bons instrumentos para a resolução de problemas, pois permitem aos alunos vivenciar verdades matemáticas, experimentar e fazer conjecturas e:

De maneira geral, as tecnologias permitem uma simulação que facilita, em pouco tempo, os estudos de diferentes situações e de experimentação a custo baixo, possibilitam a construção de novas relações entre os homens e os ambientes informatizados e apresentam-se como ferramentas de auxílio ao processo de ensino e aprendizagem. (p.21)

Para isso, temos a utilização de diversos *softwares* no ensino de Cálculo, alguns com aplicativos para o traçado de gráficos, outros na aprendizagem da Geometria e da Álgebra; todos eles com diversas ferramentas operacionais para construções e aplicações de conceitos em Matemática e Estatística. Seguem alguns exemplos mais utilizados, conforme as nossas leituras, no ensino de Cálculo: Winplot, Wingeom, GraphEquation, Geogebra, Cabri-Geometre, Geometricks, Graphmatica, Maple, Régua e Compasso, etc.

## 2.2 Cálculo Diferencial e Integral

### 2.2.1 A disciplina e o seu contexto

Nesta nossa pesquisa, abordaremos os conceitos matemáticos sobre o estudo de funções reais de duas variáveis, mais especificamente, gráficos e superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Estes conteúdos são estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em cursos de graduação.

O estudo da disciplina de Cálculo ocorre nas Instituições de Ensino Superior (IES), principalmente nos cursos da área de Ciências Exatas da Natureza e da Terra. Cada instituição tem a autonomia para elaborar as ementas e os conteúdos programáticos dessa disciplina, obedecendo-se a critérios exigidos pelas diretrizes curriculares adotadas pelo MEC. Os conteúdos do tipo: funções, limites, derivadas, integral, várias variáveis, séries e equações diferenciais constituem alguns dos temas gerais que compõem as ementas da disciplina.

Na tentativa de amenizar muitos problemas e dificuldades encontradas no ensino de Cálculo como, por exemplo, a defasagem de conteúdos matemáticos em estudantes egressos do Ensino Médio e a grande quantidade de assunto existente no currículo da disciplina, a maioria das IES brasileiras o distribui em novas disciplinas, com diferentes nomenclaturas como, por exemplo, Cálculo (0, I, II, III,...) ou ainda Cálculo (A, B, C, D,...) Com isso evita-se o acúmulo de conteúdo por semestre. (REZENDE, 2003)

Segundo Barufi (1999) e Rezende (2003), muitas dessas instituições têm eliminado a disciplina de Cálculo dos currículos de alguns dos seus cursos de graduação, diminuindo a carga horária e/ou reduzindo a quantidade de conteúdo nas ementas. Esses autores justificam esse fato com o grande número de não-aprovações nessa disciplina, como vimos nesses dados analisados pelos autores:

O índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%, isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 1)

Rezende (2003, p.2) informa que na UFF: “a variação do índice de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, este não é inferior a 65%.” Estes dados fazem parte da sua tese de doutorado realizada em cursos de cálculo, na referida instituição, no período de 1996 a 2000, segundo o autor, muito mais catastróficos, comparados aos da USP, citados anteriormente.

É possível relacionarmos essas não-aprovações à eliminação ou redução da carga horária nas disciplinas de Cálculo? Muitas IES, atualmente, têm achado que sim, pois o número de estudantes evadidos se torna cada vez maior, principalmente aqueles que não conseguem acompanhar o encadeamento e a abordagem dos conteúdos, em seus cursos. Assim, em contraposição à legislação educacional vigente, para manter os alunos matriculados nos seus cursos, essas instituições alegam que a disciplina não é **tão** necessária, em alguns dos cursos superiores oferecidos por elas.

Na USP, por exemplo, [...] [...] as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral oferecidas para os cursos de Matemática e Arquitetura passam a ser anuais a partir de 1993, contrapondo-se ao padrão da periodicidade semestral das demais disciplinas. (REZENDE, 2003, p. 3)

O autor destaca ainda dois fatos ocorridos na UFF: o primeiro, a eliminação da disciplina de Cálculo 5 e o segundo, a inserção da disciplina de Matemática Básica no curso de Arquitetura tendo como objetivo oferecer um suporte teórico de conceitos matemáticos aos estudantes, nas disciplinas de Cálculo:

A partir de 1998 a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 5 não faz mais parte da grade curricular do curso de Arquitetura; e, por último, a disciplina de Matemática Básica, introduzida na grade curricular do curso de Matemática / Niterói da UFF a partir do segundo semestre de 1997, tem por objetivo auxiliar e dar um embasamento à disciplina de Cálculo 1. O relato desses dois fatos serve para dar a dimensão exata da gravidade do problema do ensino de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 2-3, grifo do autor)

Para Rezende (2003), as ações realizadas por essas instituições, na eliminação e/ou redução de conteúdos da disciplina ou, ainda, a criação de disciplinas subsidiárias para o ensino de Cálculo, identificam os primeiros sintomas que as coisas não andam muito bem com o ensino da disciplina e representam, um aumento progressivo nos problemas que o afligem.

### 2.2.2 As dificuldades e implicações no ensino de Cálculo

Existem muitas dificuldades e implicações inerentes ao ensino da Matemática e de Cálculo, por estarem inseridas nesse contexto, acabando por serem atingida, e sofrendo, de forma direta, as conseqüências.

Segundo Valente (2002), o ensino da Matemática ainda é caracterizado pelo controle do professor, ou seja, ele atua como o “transmissor de informações” e os aprendizes comportam-se apenas como “receptores dessas informações”, gerando, assim, uma aprendizagem baseada apenas em metodologias tradicionais de ensino: o professor fala e o aprendiz ouve. Nesta metodologia, o professor é considerado o detentor do conhecimento e os aprendizes passam a ser alunos (“sem luz”, pela etimologia da palavra), que recebem as informações, sem nem ao menos fazer uma reflexão crítica daquilo que possa ser internalizado e/ou memorizado.

O quadro-de-giz simboliza aquele ensino (professor escreve, aluno copia, decora e reproduz) que deve ser abandonado se o que se quer é promover uma aprendizagem significativa crítica. Modernamente, o quadro-de-giz tem sido substituído por coloridas e animadas exposições em *power-point*. Dá no mesmo. (MASINI; MOREIRA, 2008, p. 58)

Esses autores acreditam que o quadro de giz não deva apenas ser substituído por outras ferramentas tecnológicas e modernas, apesar de que estas mídias possibilitem uma diversificação de estratégias e favoreçam a participação ativa e responsável do estudante,

na sua aprendizagem. No discurso do uso de TIC, para o ensino de Matemática, eles enfatizam a necessidade de mesclar o uso de tecnologias informáticas com outras tecnologias (quadro, giz, lápis e papel) e que a utilização apenas de uma forma ou tipo de mídia não constituiria uma eficiência nas relações de ensino e aprendizagem.

Tall (1991, p.143, tradução nossa) afirma que “[...] cada indivíduo constrói o seu próprio conhecimento matemático através do processo de abstração reflexiva.” Em busca de uma solução para essa implicação, Valente (2002, p. 8) sugere que:

A sala de aula deve deixar de ser o lugar das carteiras enfileiradas para se tornar um local em que professor e alunos possam realizar um trabalho diversificado em relação ao conhecimento. O papel do professor deixa de ser o de “entregador” de informação para ser o de facilitador do processo de aprendizagem. O aluno deixa de ser passivo, de ser o receptáculo das informações, para ser ativo aprendiz, construtor do seu conhecimento. Portanto, a ênfase da educação deixa de ser a memorização da informação transmitida pelo professor e passa a ser a construção do conhecimento realizada pelo aluno de maneira significativa, sendo o professor o facilitador desse processo de construção.

O modelo pedagógico citado, acima, continua como uma meta a ser atingida por escolas e professores, nos dias de hoje. Assim, essas mudanças abrangem questões referentes ao professor, quanto à sua prática docente e motivação em criar e elaborar aulas mais, interessantes para os educandos, com metodologias diferenciadas. Para isso, Valente (2002, p. 35) sugere que o professor “deverá trabalhar entre os extremos de um espectro que vai desde transmitir a informação até deixar o aluno totalmente isolado”, permitindo que ele descubra tudo ou “reinvente a roda.” O autor acredita que trabalhar nos extremos desse espectro faz com que o processo de ensino e aprendizagem torne ineficiente; porém a localização certa, o ponto mais adequado desse espectro é que vai garantir ao professor um trabalho diferenciado nessa abordagem educacional.

Observamos uma dificuldade que ainda aflige muitas universidades brasileiras: o “fracasso no ensino de Cálculo” que, atualmente, contribui para o aumento na evasão de estudantes, os baixos rendimentos e as metodologias mecanicistas de ensino e aprendizagem.

Em relação às implicações desse fracasso e as dificuldades de aprendizagem dos estudantes dessa disciplina, Rezende (2003, p.56) defende que:

As dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo têm sido estudadas através de projeções de natureza psicológica do problema de aprendizagem de um ou mais conceitos específicos do Cálculo. A fonte de nossas ações de mapear é bem outra: a epistemologia. Nessa perspectiva, o aluno não aprende não é porque não possui “estruturas cognitivas” apropriadas ao desenvolvimento de determinados conceitos, mas, isto sim, porque ainda não construiu os nós e os feixes de relações de conhecimentos necessários para se estabelecer novas conexões e a incorporação de novos nós à rede já construída.

O autor diferencia a sua idéia de natureza epistemológica – defendida por ele – das idéias da psicologia cognitiva para o ensino de Cálculo. Para ele, na perspectiva da natureza epistemológica, as raízes do fracasso estão além dos métodos e das técnicas, estão, até mesmo, antes do próprio espaço-tempo local do ensino da disciplina. O autor ainda ressalta que, para o ensino de Matemática, a ausência dos conhecimentos prévios e problemas construtores do Cálculo constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica para a disciplina.

Numa outra vertente, a da psicologia cognitiva, Rezende (2003) afirma que existe uma relação entre os problemas no ensino e aprendizagem de Cálculo e as características de natureza psicológica, visto que alunos não conseguem aprender, devido à ausência de elementos em sua estrutura cognitiva que não os permite assimilar a complexidade dos conceitos da disciplina. Para essa vertente, o autor identifica os estudiosos do grupo **Advanced Mathematical Thinking**<sup>9</sup>, liderado por Tall (1991), que estudam questões de ordem cognitiva dos aprendizes de Cálculo como, por exemplo, a história individual e psicológica destes.

Essas questões estão diretamente ligadas ao nosso foco de estudo, no qual pretendemos, através das perspectivas da TAS, discutir e repensar o ensino e aprendizagem do Cálculo. Trataremos melhor sobre esse assunto, posteriormente, no Capítulo 3 da dissertação.

Outra dificuldade observada e comentada por Rezende (2003) consiste em uma **modernização**<sup>10</sup> para o ensino de Cálculo, na falta de uso e/ou no uso inadequado de materiais didáticos e de recursos educacionais, utilizados pelos professores em sua prática docente. “Não há nada mais insensato do que modernizar a ignorância – a ignorância dos reais problemas de aprendizagem do Cálculo.” (REZENDE, 2003. p. 16, grifo do autor)

---

<sup>9</sup> Advanced Mathematical Thinking – Pensamento Matemático Avançado – grupo inglês, liderado por David Tall – Professor e Pesquisador da Educação Matemática na Universidade de Warwick (Inglaterra), tendo um livro intitulado com esse nome, citado na referência bibliográfica dessa dissertação.

<sup>10</sup> Termo usado pelo autor para informar como vem sendo o processo de inserção de tecnologias no ensino de Cálculo.



De nada adiantaria a existência de uma instituição de ensino superior com toda uma infra-estrutura em termos de materiais, recursos educacionais e tecnológicos disponíveis para serem utilizados por seus professores, se essa instituição não se preocupar em ter uma metodologia de aplicação bem estruturada ou elaborada, com objetivos e metas a serem alcançadas. (REZENDE, 2003)

O que precisamos fazer não são projetos para o uso de computadores no ensino de Cálculo, e sim, projetos para o ensino de Cálculo. O foco deve ser o Cálculo e o seu ensino, e não o uso de computadores. Primeiro, será necessário que se defina o que (nós professores) queremos com o ensino de Cálculo, qual o seu papel no ensino superior; isto é, questões pertinentes ao Cálculo e ao seu ensino, para, aí sim, num momento oportuno, definir qual a contribuição que este valioso instrumento da inteligência - o computador – possa vir a dar para este projeto. Do contrário, estaremos como já havíamos dito, apenas modernizando nossa ignorância a respeito das questões essenciais a respeito do ensino de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 16, grifo do autor)

Confirmamos as idéias do autor, quando ele afirma que, num projeto que visa ao uso do computador no ensino de Cálculo, deve haver primeiramente um planejamento bem estruturado, focando as questões pertinentes da disciplina para que, posteriormente, façamos uso do computador ou de uma tecnologia informática.

Exemplificando as discussões acima, citamos as práticas de professores que adotam um livro texto de Cálculo, no início do semestre, e ficam “presos” a ele durante todo o período, não levando em conta a diversificação de recursos disponíveis que ele pode utilizar, para diminuir as deficiências dos estudantes e promover desenvolvimento do ensino e aprendizagem a disciplina.

De acordo com Rezende (2003) os professores continuam utilizando-se de metodologias e estratégias de ensino tradicionais em suas aulas, repetindo-as em diversas turmas, ao longo da sua carreira docente. A formação acadêmica desses professores os influencia no ensino superior, diretamente na sua forma de pensar e agir, produzindo um reflexo na sua prática docente; educam seus aprendizes da mesma forma em que eles aprenderam, quando eram também estudantes. Constata-se, portanto, uma situação repetitiva e cíclica das relações de ensino e aprendizagem, que gera, no futuro professor de Matemática, sensações de insatisfação e medo.

Existem muitas pesquisas que abordam essas dificuldades existentes, oferecendo técnicas e metodologias que potencializam e aperfeiçoam o ensino e a aprendizagem do

Cálculo. Sawyer (1987 apud TALL, 1991a, p. 17, tradução nossa) sugere três passos para o ensino dessa disciplina:

Ensinar Cálculo bem é uma tarefa muito exigente. Três coisas têm de ser feitas: primeiro é mostrar através de um desenho que algum resultado é extremamente plausível. E em segundo lugar, dar contra-exemplos, que indicam as circunstâncias em que a conjectura seria reprovada o terceiro, para extrair a partir dessas considerações uma prova formal do resultado.

Concordamos com o autor, quanto ao fato de lecionar Cálculo se constituir uma tarefa exigente, porém discordamos de sua proposta para o seu ensino como uma necessidade de extrair provas formais dos problemas considerados. Outros autores (REIS, 2001; FROTA; COUY, 2007) também divergem da opinião desse autor, por exemplo, Reis (2001) acredita que apesar de ser inadmissível separar a intuição e o rigor no ensino de qualquer conceito matemático, é importante avaliarmos qual nível de rigor seria conveniente atingir, sem que, com isso, perca-se o sentido e a real compreensão das idéias Matemáticas.

[...] a solução dos problemas do ensino de Cálculo não é técnica, pois exige, antes de mais nada, uma reconceptualização das idéias epistemológicas, isto é, que se trabalhe o Cálculo de maneira problematizadora, explorando os múltiplos significados e representações destas idéias. (REIS, 2001, p. 189)

Assim, acreditamos que não existam passos ou, necessariamente, determinadas normas para atingirmos um ensino de qualidade na disciplina de Cálculo. Frota e Couy (2007) afirmam que, após o movimento de “reforma do Cálculo”, na década de 1980, que tinha como finalidade buscar meios pedagógicos para lecionar essa disciplina, iniciaram-se diversas discussões sobre a forma com que os conteúdos dessa disciplina eram ensinados, o que resultou no aparecimento de muitas pesquisas sobre o assunto. Com isso, essas experiências apontaram para uma diversificação de estratégias didáticas que poderiam contribuir para uma aprendizagem mais significativa dos conceitos matemáticos, surgindo a “Regra de três” (diversas representações Matemáticas usadas no ensino de Cálculo, dividida em gráfica, numérica e analítica).

Um dos princípios que devem guiar o ensino de Cálculo é a “Regra de três”: quaisquer que sejam os possíveis tópicos devem ser ensinados gráfica e numérica, como também analiticamente. A pontaria é produzir um curso onde os três pontos de vista são equilibrados, e onde os

estudantes vêem uma idéia principal sob vários ângulos. (BERRY; NYMAN, 2003 apud, FROTA; COUY, 2007, p.6)

Promover o estudo de Cálculo através da visualização gráfica, numa perspectiva que permita a comunicação entre as várias formas de representação Matemática e a passagem de um tipo de linguagem a outro pode, com efeito, elevar a qualidade da aprendizagem nos cursos de Cálculo. (FROTA; COUY, 2007, p.14)

Concordamos com as perspectivas apresentadas, quanto ao uso de diversas representações para o ensino de Cálculo. Contudo, ressaltamos, os estudos de Frota (2004 apud, FROTA; COUY, 2007) a respeito de inúmeras dificuldades encontradas por estudantes de um curso de engenharia sobre a utilização de representações gráficas, quando se trata de associar conteúdos gráficos e numéricos com conteúdos de Cálculo. Ainda em outros estudos, mais aprofundados, a autora verificou “que os alunos quase nunca lançavam mão de estratégias gráficas na solução de questões de integral; o esboço do gráfico era feito, segundo eles, apenas quando seu emprego era naturalmente sugerido, por exemplo, quando se pedia para calcular uma área ou um volume.” (FROTA; COUY, 2007, p.6). Trataremos melhor estas questões nos tópicos seguintes.

## 2.3 As TIC e a sua Aplicabilidade no Ensino

### 2.3.1 O uso de computadores no ensino

A utilização de computadores na educação, segundo Valente (2002), inicia-se na década de 50, com o propósito de resolução de problemas em cursos de pós-graduação. Nesta década, eles eram chamados de **máquina de ensinar**.

As máquinas de ensinar, nessa época, como o próprio nome diz, tinha como função o armazenamento de informação seqüenciada numa determinada metodologia e transmitida ao aprendiz, como afirma Valente (2002, p.1-2):

Quando o computador transmite informação para o aluno, o computador assume o papel de máquina de ensinar, e a abordagem pedagógica é a instrução auxiliada por ele. Essa abordagem tem suas raízes nos métodos tradicionais de ensino, porém, em vez da folha de instrução ou do livro de instrução, é usado o computador. Os *softwares* que implementam essa abordagem são os tutoriais e os de exercício-e-prática.

Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada. [...] [...]o aluno usa o computador para resolver problemas ou realizar tarefas como desenhar, escrever, calcular, etc. A construção do conhecimento advém do fato de o aluno ter que buscar novos conteúdos e estratégias para incrementar o nível de conhecimento que já dispõe sobre o assunto que está sendo tratado via computador. (Ibid, p.2)

Esse autor defende que os computadores deixem de ser **máquinas de ensinar** e passem a ser chamados de **máquinas para ensinar**, com o propósito de serem um instrumento que o aprendiz utiliza para a construção do seu conhecimento e, não, apenas uma mídia pela qual o aluno receba informações dos conteúdos matemáticos, de forma passiva, sem uma prévia abstração ou reflexão das informações que estão sendo “despejadas” na sua mente.

Nessa ótica – de o computador ser visto como uma máquina para ensinar – Tall (1991a) aponta as diversas maneiras de como ele era usado como uma ferramenta para o ensino da Matemática:

O computador pode ser usado como uma ferramenta para complementar o pensamento matemático avançado de várias maneiras. Em pesquisas, ele tem sido usado para fornecer dados que sugerem possíveis teoremas, procurar contra-exemplos e realizar Cálculos onerosos para provar teoremas envolvendo apenas um número finito de casos algorítmicos. Na área da educação, ele pode ser utilizado para os mesmos objetivos, e num outro propósito maior: ajudar os alunos a conceituar e construir, para si próprios, a Matemática que já tenha sido formulada por outros. (p.231, tradução nossa)

[...] o computador já demonstrou ser um instrumento poderoso no pensamento matemático avançado, tanto na pesquisa Matemática como no ensino da Matemática nos níveis mais elevados. A evidência empírica mostra o que se revela mais bem sucedido no processo educacional, quando este é utilizado para aumentar seu significado, quer através de uma programação em uma linguagem que contém os processos matemáticos, quer através da utilização de ambientes computacionais para a exploração e construção de conceitos. (ibid, p.243, tradução nossa)

Dentro desta perspectiva, Ausubel (1980) aponta que, quando se começou a utilizar os computadores no ensino, eles eram limitados na sua capacidade de lidar com informações e pouco confiáveis para funcionar satisfatoriamente no ensino, mas que, posteriormente, a partir da década de 60, vieram os computadores de quarta geração, mais modernos e que, em pouco menos de duas décadas, houve um novo avanço nas tecnologias que permitiram que esses computadores pudessem ser suficientes para desempenhar um papel útil na escola. Assim, acreditava-se que “A Educação Auxiliada por Computadores

[expressão oriunda do inglês *Education Aided Computer* – (CAE)] mostra-se promissora onde o aluno desempenha um papel proeminente na determinação do ritmo do novo aprendizado.” (AUSUBEL, 1980, p.293-294). Com essa idéia, o autor afirma que o aprendiz constrói seu conhecimento de maneira autônoma, de acordo com a sua motivação e disposição e, não, por idéias impostas a ele, que deveriam ser aceitas de modo passivo e não crítico, pois essas idéias, segundo o autor, não têm nenhum valor significativo para a sua aprendizagem.

Um outro exemplo que elucida essa discussão da inserção do computador, como um meio promissor na educação e no ensino de Cálculo, ocorreu, posteriormente, na década de 70, ainda de forma experimental, tanto no Brasil como nos demais países do mundo, com a Informática inserida na educação e nas universidades, através de seminários e congressos de especialistas. Assim, dessa década até os dias atuais, têm surgido no Brasil, na área de Educação Matemática, diversas pesquisas sobre o uso das TIC no ensino da Matemática e do Cálculo. Isto é uma consequência do aumento da utilização das tecnologias informáticas nas escolas e em diversos espaços educacionais, como instituições de ensino superior e grupos de estudos e pesquisas. Pesquisadores da área estudam as diversas utilidades das mídias para o ensino da Matemática. Particularmente, no ensino superior, a utilização de muitos *softwares* matemáticos vem crescendo progressivamente, no ensino de Cálculo.

Passados quatro décadas, acreditamos que as perspectivas dos autores acima, juntamente com o contexto histórico apresentado, sirvam de subsídio para explicar e justificar a forma com que os computadores foram e vêm sendo utilizados na educação. Num panorama contemporâneo, autores como Viana (2004) e Nasser (2007) corroboram o pensamento de Ausubel e defendem a idéia de Valente (2002) quanto à substituição de **máquina de ensinar** por **máquina para ensinar**, como vemos neste trecho:

O que não se pode perder de vista é que os pacotes computacionais não devem ser vistos como máquinas de ensinar, mas como, por exemplo, possibilidade de visualizar curvas e superfícies no espaço, construir gráficos de funções, além de auxiliar na resolução de problemas, permitindo a reflexão crítica e o desenvolvimento de idéias. (VIANA, 2004, p.133)

Valente (2002) e Viana (2004) advertem que, para as práticas educacionais, o computador não deve mais ser visto como uma ferramenta que venha apenas reforçar o ensino e a aprendizagem tradicionais.

Valente (2002) destaca o duplo papel que a Informática possui na escola: no primeiro momento, ela deve ser uma ferramenta de comunicação entre agentes internos e externos, dando um suporte de serviços de comunicação virtual ( emails, fóruns, etc.) e administrativos. Em outro momento, a Informática poderá ser usada para sustentar uma pedagogia que proporcione a formação dos alunos e o desenvolvimento das suas habilidades.

Segundo Borba (1996, 2003) e Penteado (2003), vê-se cada vez mais a inserção das tecnologias no ensino da Matemática. O uso dos computadores nas aulas ocorre diferentemente de outras disciplinas, como a Biologia e a Arquitetura, pois estas possuem seus laboratórios e escritórios como desenvolvimento tecnológico. Os autores profetizam e acreditam que as tecnologias mudarão profundamente a educação brasileira, principalmente o ensino da Matemática, pois comparando-o aos cursos citados, esta se encontra numa fase **iniciante** sobre as discussões do uso de computadores em sala.

Viana (2004) apresenta-se também bastante otimista quanto às mudanças que as tecnologias possam causar na educação e destaca o acontecimento de uma revolução para o ensino superior, particularmente no ensino de Cálculo, como vemos neste seu escrito:

Na verdade, já está ocorrendo verdadeira revolução no ensino de Cálculo, Geometria, Álgebra Linear e de Matemática em universidades brasileiras e existem *softwares* utilizados como apoio eficaz também no ensino de outras disciplinas, facilitando a compreensão e despertando maior interesse nos alunos pela aprendizagem. (p.132)

Apesar de a autora profetizar uma revolução no ensino superior com a existência de muitos *softwares*, principalmente no ensino de Cálculo, não podemos esquecer o papel do professor enquanto usuário e aplicador dessas mídias em suas aulas.

Nessa perspectiva, corroboramos as idéias desses autores, quando eles destacam a importância do aprendiz em utilizar o computador para a produção de conhecimento e, não, utilizá-lo, simplesmente, como uma máquina de ensinar. Contudo, acreditamos que o otimismo observado nas idéias dos autores, em relação às mudanças pela inserção de computadores no ensino, **não** seja tão profundo, como vimos nos parágrafos anteriores, servindo como solução para qualquer situação na educação, embora reconhecendo que o

uso de computadores, cada vez mais, tem ganho espaço em salas de aula, como uma ferramenta auxiliar e eficiente na abordagem de certos conteúdos.

### 2.3.2 O professor e o computador

Valente (2002) justifica a não utilização dos computadores pelo professor em suas aulas, com o seu desconhecimento em relação à operacionalização e utilização dessa mídia. O autor sugere que, na tentativa de reverter essa situação, é necessária uma formação bastante ampla e profunda dos educadores, não sendo suficiente apenas a criação de condições para o professor simplesmente dominar o computador ou o *software*, mas, sim, auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como o computador pode ser integrado no desenvolvimento do ensino da Matemática.

Nessa perspectiva, Tajra (2001) e Santiago (2006) indicam uma capacitação e mudança na postura desse professor, no ensino superior, quanto às questões do uso e da operacionalização dessas mídias e da Informática na educação, como vemos neste trecho:

Um dos fatores primordiais para a obtenção do sucesso na utilização da Informática na educação é a capacitação do professor perante essa nova realidade educacional. O professor deverá ser capacitado de tal forma que perceba como deve efetuar a integração da tecnologia com a sua proposta de ensino. O professor deve estar aberto a mudanças, principalmente em relação a adquirir uma nova postura: a de facilitador e coordenador de processos de ensino-aprendizagem; ele precisa aprender a aprender, a lidar com as rápidas mudanças, ser dinâmico e flexível. (SANTIAGO, 2006, p. 82-83)

Concordamos com as idéias desses autores, em relação à ausência de formação e de capacitação dos educadores no ensino superior – principalmente dos professores de Cálculo – o que não os torna aptos a inserirem as TI no ensino. O professor de hoje não teve, na sua formação acadêmica, requisitos necessários para trabalhar com Informática em suas aulas, exceto aqueles que teve a possibilidade de participar de cursos de extensão, congressos, encontros, seminários, programas de pós-graduação etc. e, com isso, estar habilitado a utilizar as TIC, em sua prática docente. Muitos desses professores começam a ter uma postura autodidata em relação às TIC, a partir do contato com essas mídias, de maneira improvisada e informal. Sem a orientação de nenhum especialista, acabam, por eles mesmos, observando um retorno satisfatório e qualitativo que o uso dessas TIC traz

para o ensino e a aprendizagem e uma contribuição para o aperfeiçoamento da sua prática, do seu desenvolvimento intelectual. Esses educadores usam o seu tempo de descanso e lazer para, individualmente, dedicar-se à aprendizagem, ao uso dessas mídias e para conhecer um pouco mais sobre as potencialidades que elas podem oferecer ao ensino. Eles buscam desenvolver atividades práticas auxiliadas por uma literatura pertinente sobre o tema; formam grupos de estudos e pesquisas para o desenvolvimento e aplicabilidade das TIC, no ensino de Matemática e, ainda, buscam apoio de outros professores que têm conhecimento e contato com as mídias e *softwares*, através de oficinas e minicursos oferecidos em encontros e seminários da Educação Matemática.

Além da formação e capacitação do professor de Matemática – fator relevante na aplicabilidade das TIC – existem outros desafios que ele deve enfrentar como, por exemplo, a relação entre os conteúdos a serem lecionados e os *softwares* a serem utilizados. O acréscimo do computador na prática docente do professor associado a outras tecnologias do tipo: quadro/giz, lápis/papel e *softwares* educacionais contribuirão com a produção de conhecimentos pelos **coletivos pensantes** [termo usado na teoria dos Seres-Humanos-Com-Mídia (SHCM) em BORBA, 2003].

A situação descrita, no parágrafo anterior, corresponde a uma perspectiva teórica apontada por Borba (2003) que vê a utilização dos computadores em sala de aula, como o acréscimo de uma mídia que possa estar em consonância com outras tecnologias. A integração dessas mídias possibilita a produção de conhecimento. Esse autor alerta que não devemos ignorar a aplicabilidade do computador no ensino e que devemos evitar interpretações sem fundamento que o considere uma mídia inatingível ou de difícil acesso e sem contribuição para a educação.

Quanto a essa contribuição na produção do conhecimento pelo **coletivo pensante** e nas relações de diálogos entre os SHCM, Steffe e Thompson (2000) e Costa (2005) afirmam que o professor pode criar uma aula em que os alunos dêem sugestões e discutam diferentes idéias. Isso é fortemente influenciado pela presença das TIC. Viana (2004) ainda ressalta a aplicabilidade do computador – quando usado corretamente, na resolução de problemas – e o tempo ganho – para outras atividades – em construções e visualizações de gráficos de funções.

Trataremos, no tópico seguinte, de pesquisas que abordem questões sobre visualização nas relações de ensino e aprendizagem.



## 2.4 A Simulação e a Visualização nas Relações de Ensino e Aprendizagem

Para Lévy (1993, p.122), “A crescente importância das linguagens ‘orientadas para objeto’ em informática mostra que os computadores são, cada vez mais, considerados como instrumentos de simulação [...]” O autor ainda afirma que a simulação feita por computador possa constituir mais um elemento na construção da aprendizagem do indivíduo, contribuindo para a formação de modelos, não ficando apenas a utilização de uma aprendizagem curta e imaginativa, como vimos aqui neste trecho citado pelo autor:

A simulação por computador permite que uma pessoa explore modelos mais complexos e em maior número do que se estivesse reduzido aos recursos de sua imagística mental e da sua memória de curto prazo, mesmo se reforçadas por este auxiliar por demais estático que é o papel. A simulação, portanto, não remete a qualquer pretensa irrealidade do saber ou da relação com o mundo, mas antes a um aumento dos poderes da imaginação e da intuição. (LÉVY, 1993, p 125 – 126, grifo do autor)

Atualmente, o uso de visualização e simulação – sendo esta última parte da primeira – torna-se amplamente reconhecido na forma de como se faz e se aprende Matemática. É que, hoje, a visualização não é usada apenas com uma finalidade para fins ilustrativos, mas também como um componente fundamental para o raciocínio na resolução de problemas e de demonstrações oriundas destes. (ARCAVI, 2003)

São diversos os autores que abordam a visualização. Frota e Couy (2009) destacam que são utilizados termos diferentes para representar a mesma idéia conceitual ou, ainda, por vezes, são usados termos iguais, representando significados distintos. Assim, as autoras afirmam que o termo visualização é empregado por diversos autores com base nas similaridades e diferenças encontradas nas demais definições na literatura, como as citadas abaixo:

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver idéias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (ARCAVI, 2003, p.217, tradução nossa)

Visualizar não é o mesmo que ver. Especificamente, neste trabalho, visualizar é desenvolver uma habilidade para criar imagens mentais daquilo que o indivíduo manipula. Nisto estimula a sua mente para

diferentes representações do conceito e, se necessário, utiliza papel e lápis, o visor da calculadora ou a tela do computador, para explorar, analisar e compreender a idéia Matemática em questão. (MACHADO, 2008, p.10)

A visualização é a habilidade de interpretar e entender a informação figural e a capacidade de conceitualizar e transladar relações abstratas e informações não figurais (representações) em termos visuais. Podem-se distinguir, assim, dois processos: interpretação da informação visual e a geração de imagens visuais de informações não figurais (representações) (BARBOSA, 2009, p.60)

Visualizar é um processo de criar e/ou interpretar e registrar idéias e imagens, que por sua vez podem desencadear novas idéias e imagens. Nessa perspectiva a visualização é parte do conjunto de processos de fazer Matemática, ao lado da intuição, criação, abstração, formalização, comunicação, entre outros, podendo ao mesmo tempo impulsionar o desenvolvimento de tais processos. (FROTA; COUY, 2009, p. 4)

Confirmamos todas as definições do termo ‘visualização’ apresentadas e a conceituação dos autores “como um processo que integra ações do homem ao interpretar e/ou criar imagens para comunicar idéias, utilizando para isso formas diversas de expressão dessas idéias.” (FROTA; COUY, 2009, p.3)

#### 2.4.1 A visualização na Matemática e na Educação Matemática.

Nos dias atuais, já se percebe um certo consenso entre os educadores matemáticos em se considerar a visualização como um processo importante no ensino-aprendizagem da Matemática. Essa tendência iniciou-se por volta dos anos 70 e se deu, em grande parte, pelo crescimento da Teoria Construtivista, enquanto opositora à behaviorista. Porém, somente na década de 90, é que a pesquisa sobre visualização ganhou força e reconhecimento como um campo significativo de pesquisa, sendo tema de diversas publicações e apresentações de artigos, relatos de experiência e pôsteres em encontros de educadores matemáticos de todo o mundo. (FROTA; COUY, 2007, p.3, grifo do autor)

A visualização em Matemática constitui resultados nas relações entre problemas e soluções; nesse viés, visualizar passa a ser uma forma de conceber uma imagem visual de algo que não se tem ante os olhos, um processo de formação de imagens (mental ou utilizando lápis, papel, material concreto ou ainda TIC) de conceitos abstratos. Barbosa (2009, p.60) compreende este fato como “um ato no qual é estabelecida uma conexão entre

a construção interna (o que está na mente) e alguma coisa acessada dos sentidos (está fora: papel, computador, etc.)” (MACHADO, 2008; BARBOSA, 2009)

A visualização Matemática, através da tela do computador, dá possibilidade de se elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir os conceitos matemáticos. (MACHADO, 2008, p.107)

De acordo com essas definições, Zulatto (2007) e Barbosa (2009) admitem que a visualização em Matemática está associada a uma habilidade de interpretar e entender informações figurais e que estas ocorrem por dois processos: uma refere-se ao processo de interpretação de uma imagem visual e a outra de criação de imagens visuais a partir de informações não figurais. Zulatto (2007) destaca que, na Educação Matemática, a visualização possui um valor pedagógico e está ligada à compreensão dos estudantes como uma possibilidade de traduzir “em representações internas ou externas, com ou sem uso de mídias.” (p.77). No caso das representações com o uso das mídias, a autora concorda com Machado (2008), quanto à relação de associação da visualização com o computador, a fim de proporcionar a aprendizagem de conceitos matemáticos aos estudantes.

#### 2.4.1.1 O pensamento visual-espacial e o ensino de Cálculo.

Os estudos sobre visualização, na Educação Matemática, têm integrado pesquisas sobre o pensamento visual; muitos investigadores (BISHOP, 1989; DÖRFLER, 1991; PRESMEG, 1989; ZIMMERMAN; CUNNINGHAM, 1991; COSTA, 2005; FROTA; COUY, 2009) têm dado ênfase ao raciocínio visual para a aprendizagem Matemática, sugerindo que este possa ser uma fonte poderosa para os estudantes desenvolverem conhecimento dessa disciplina. Resultados desses estudos geraram classificações para imagem, processos, capacidades mentais, associadas a esse pensamento.(COSTA, 2005; FROTA; COUY, 2009)

Costa (2005) acredita que os argumentos visuais podem ser bastante úteis para os estudantes estabelecerem certos conceitos de idéias de um conteúdo, porém Frota e Couy (2009) advertem sobre o papel que a visualização pode assumir no ensino de Cálculo que, por vezes, pode não ter apenas aspectos positivos, induzindo o aluno a chegar a conclusões e conjecturas incorretas ou a conceitos errôneos, sobre conteúdos de Cálculo. Ambos, os

pesquisadores acreditam que a visualização e o pensamento visual possam estar ligados a outras formas de representação de um conteúdo.

Costa (2005) classifica o pensamento visual em dois tipos: o visual e o espacial denominando-o de **pensamento visual-espacial**. A autora adverte que, na literatura, encontramos o pensamento visual ligado às questões de visualizações, ou seja, “o pensar visual é porque ocorre um fluxo contínuo de imagens mentais visuais.” (p. 88) e o pensamento espacial ou raciocínio visual e espacial associado às capacidades mentais e espaciais, ou seja, “pode envolver uma estrutura espacial percebida visualmente que incorpora descrições implícitas dos elementos das imagens e relações espaciais entre esses elementos” (p. 88). Assim a autora acredita que as duas formas de pensamento ocorrem simultaneamente e estas possam estar combinadas com informações visuais e espaciais interligadas.

O pensamento visual-espacial está na base de criações significativas da mente humana [...] [...] e, da literatura lida, induzo que conceitos, operações e processos mentais ou capacidades espaciais envolvidos nesse mesmo pensamento ainda permanecem sob uma certa obscuridade [...].  
(COSTA, 2005, p. 88-89)

Em sua pesquisa de doutorado, a autora investigou sobre o pensamento visual-espacial, em crianças de séries iniciais, com formas diferentes deste pensamento, classificando-o em: PVP (pensamento visual-espacial resultante da percepção); PVMM (pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens); PVR (pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens) e o PVE (pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento) A autora analisou estas formas de pensamento em um quadro, associando a ocorrência das características definidas dentro de cada modelo de pensamento predeterminado com os dados obtidos com as tarefas feitas com as crianças.

Modos de pensamento visual-espacial	Definição de cada modo de pensamento visual-espacial
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP)	Operações intelectuais sobre material perceptivo sensorial e de memória.
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação mental de imagens (PVMM)	Operações intelectuais relacionadas com manipulação e transformação de imagens.
Pensamento visual-espacial resultante da construção mental de relações entre imagens (PVR)	Operações intelectuais relacionadas com a construção mental de relações entre imagens, a comparação de idéias, conceitos e modelos.
Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	Operações intelectuais relacionadas com a representação, a tradução e a comunicação de idéias, conceitos e métodos.

**Quadro 1 – Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições, contemplados no modelo final de pensamento visual-espacial.**

Fonte: (COSTA, 2005, p. 188)

Quanto aos dados obtidos na pesquisa de Costa (2005), associados aos tipos de modos de pensamento, a autora acredita que os quatro modos de pensamento visual-espacial podem, por vezes, suceder-se, no sentido de, por exemplo, “[...] ao modo PVP se segue o modo designado por PVMM/PVR, e depois a este sucede o modo PVE. Conjectura-se ainda que o pensamento visual-espacial é um processo de andar de uns modos de pensamento para os outros [...]” (p. 111) O modo de pensamento PVE é diferente dos demais, pois “[...] ele é de certo modo uma espécie de condutor do pensamento visual-espacial [...]” (p. 112), na medida em que é por seu intermédio que é possível conhecer os modos PVP, PVMM e o PVR. (COSTA, 2005)

Esses modos elaborados por Costa (2005) serviram como referência na construção e elaboração dos modelos utilizados nas pesquisas de Frota e Couy (2007, 2009), sobre o ensino de Cálculo. Essas autoras utilizaram esses modos, acrescentando algumas considerações conceituais a cada um deles; utilizaram também as categorias de análise feitas por Costa e as idéias nas atividades sobre Geometria, desenvolvidas com as crianças em sua pesquisa. Assim, Frota e Couy (2009) analisaram essas atividades, reformulando-as com adaptações para o estudo de variações de funções e aplicaram-nas para alunos do ensino superior.

Um estudo mais aprofundado do trabalho de Costa (2005) permitiu-nos considerar que seu modelo teórico também poderia ser adequado para estudar os modos de pensamento visual evidenciados através de atividades envolvendo o Cálculo Diferencial, motivo pelo qual o modelo<sup>11</sup> é apresentado de forma mais detalhada. (FROTA; COUY, 2009, p.6)

Nessa pesquisa, as autoras evidenciam o interesse em estabelecer ligações entre os quatro modos de pensamento visual-espacial, de forma a propiciar o entendimento dos conceitos de Cálculo. Segundo as pesquisadoras, a descoberta prévia dos conceitos nas seqüências de atividades desenvolvidas pelos estudantes foi satisfatória, uma vez que as idéias apresentadas pelos alunos, através de vários processos visuais, foram atingidas mediante observações e experimentações. (FROTA; COUY, 2009)

Corroboramos as idéias conclusivas e sugestivas das autoras, quanto às construções mentais, através de conjecturas geradas pelos próprios estudantes em processos visuais (visualização), quando elas afirmam que “ao se investigar as idéias para uma posterior formalização coloca-se o aluno para fazer Matemática, preparando-o não só para reproduzir regras, mas principalmente para compreendê-las e aplicá-las, à luz dos conceitos teóricos.” (FROTA; COUY, 2009, p.19, grifo do autor)

Com isso, a pesquisa sugere que professores, principalmente de Cálculo, empreguem estratégias variadas de ensino para esta disciplina, pois os estudos apresentados apontaram uma estratégia relevante para o estudo de variações de funções, mostrando ainda meios necessários de ser utilizada no ensino de Cálculo, com um foco no pensamento visual.

#### 2.4.1.2 Simulação e visualização em gráficos de funções reais através das TIC

[...] Foi somente com a chegada do computador que os resultados dos Cálculos podem ser representados graficamente, levando a imagens surpreendentes e novas hipóteses a serem testadas primeiramente por desenho, e então por uma busca de prova formal [...] (TALL, 1991a, p. 232, tradução nossa)

---

11 Corresponde ao Quadro -1 (Modos de pensamento visual-espacial e respectivas definições, contemplados no modelo final de pensamento visual-espacial. Fonte: COSTA, 2005, p. 188)

O autor situa este ocorrido a partir das décadas de 1980 e 1990, com um aumento progressivo de *softwares* cada vez mais sofisticados que favorecem uma visualização em alta resolução, na investigação de diversos fenômenos; cita exemplos que vão desde o uso em estudos astronômicos, até a utilização no ensino de Matemática e, em particular, no ensino de Cálculo. O autor vislumbra para o ensino desta disciplina “uma nova possibilidade para o uso do computador na educação Matemática, através do desenvolvimento de *softwares* de computador projetado para ajudar o aluno a conceituar idéias Matemáticas.” (TALL, 1991a, p. 234, tradução nossa) “Nos estágios iniciais de desenvolvimento da teoria das funções, limites, continuidade, a visualização provou ser uma fundamental fonte de idéias.” (TALL, 1991c, p.1, tradução nossa) Estas idéias não se modificaram muito, ao longo de duas décadas, pois atualmente temos pesquisas que mostram o valor insinuado, pelo autor, a visualização como fundamental fonte de idéias, como vimos neste trecho de Machado (2008)

A representação gráfica é uma das ferramentas que se pode utilizar para o estudo do comportamento de funções. É interessante o seu estudo, pois ela é visual, isto é, possibilita a visualização do conjunto-domínio, do conjunto-contradomínio, conjunto-imagem e a regra de correspondência entre os conjuntos. Esses elementos contribuem para que os estudantes obtenham a impressão visual do comportamento da função (interpretação na determinação dos pontos máximos e mínimos, raízes e limites das funções, retas tangentes a curvas, pontos de inflexão e convexidade, comparação de funções e derivadas, etc), seja através do lápis e papel, calculadora gráfica ou *softwares* educacionais. (p.9)

Passados duas décadas, aproximadamente, entre as citações de Tall (1991a, 1991c) e de Machado (2008), percebemos uma consonância nas idéias destes dois autores, quanto ao uso de *softwares* para o ensino de Cálculo, particularmente de funções. As simulações e visualizações que esses *softwares* oferecem ao ensino de Matemática abrem novas possibilidades e potencialidades de abordar conteúdos de Cálculo e de melhorar o ensino de funções. Outros autores (NASSER, 2007; ALLEVATO, 2007; VIANA, 2004; BORBA; PENTEADO, 2003; VALENTE, 2002), além de Machado (2008) se, coadunam com as afirmações de Tall (1991) e desenvolveram pesquisas – utilizando-se de *softwares*, através de visualizações e simulações – com conteúdos de Matemática, que contribuiriam com dados e respostas significativas para a implementação em salas de aula. Contudo, podemos observar atualmente o uso e o desenvolvimento de muitos desses *softwares* no ensino de Cálculo para a construção, análise e interpretação de gráficos, como o Winplot, Geogebra, Graphmatica, Mathematica dentre outros, que servem para a construção de gráficos.

Estaremos, aqui, mostrando algumas experiências realizadas por esses pesquisadores que utilizaram as TIC para a construção e estudos dos diversos tipos de funções.

De início, descreveremos a pesquisa de Nasser (2007), realizada com alunos da disciplina de Cálculo, como uma experiência sobre transformações gráficas, numa mídia informática. Nesta experiência, os estudantes construíram diversos gráficos de funções, num mesmo sistema de eixos coordenados, para futuras comparações, conjecturas, análises e interpretações. Nasser (2007, p.10), afirma que:

Em Cálculo III, todos os alunos inicialmente apresentam deficiências em visualização espacial. As dificuldades vão desde retas e planos no  $\mathbb{R}^3$ , acentuando-se no traçado de curvas e superfícies no espaço tridimensional. Com esta estratégia de aplicar transformações a partir de gráficos básicos, os alunos identificam superfícies de parabolóides e cones com mais facilidade, e conseguem traçar seus gráficos.

Através desta citação, interpretamos que a autora acredita que, através da aplicação de uma estratégia de transformações a partir de gráficos básicos, os alunos conseguem suprir deficiências nas suas visualizações espaciais de superfícies no  $\mathbb{R}^3$ , conseguindo identificar mais facilmente superfícies no espaço tridimensional como, por exemplo, superfícies de parabolóides, cones, cilindros, etc.

Em Allevato (2007), foram desenvolvidas reflexões sobre as visualizações e as representações múltiplas que um *software* pode oferecer ao ensino de funções em ambientes informatizados. A pesquisa utilizou uma metodologia qualitativa, na forma de observação-participante, realizada com alunos do curso de Administração, utilizando o *software* Winplot, na resolução de problemas sobre funções. Os dados da pesquisa mostraram que os alunos, na resolução de problemas, necessitavam de registrar, comentar e realizar Cálculos algébricos ou numericamente. Constatou-se que esses alunos não usavam as visualizações nem as interpretações, para legitimar a resposta para a solução dos problemas.

Assim, Allevato (2007) conclui que, na ausência de recursos informáticos, o ensino de Matemática, principalmente na resolução de problemas, se concentra apenas em Cálculos algébricos ou numéricos e, na maioria dos casos, esses problemas não exigem do aluno questões referentes à interpretação de gráficos. Porém, a autora vem salientando, em diversos trabalhos, que relacionar aspectos algébricos a gráficos é uma prática



recomendável que pode auxiliar os alunos a ampliarem suas compreensões a respeito de determinados conceitos relacionados a funções.

Para Tall (1991c), as investigações em Educação Matemática mostram que os estudantes de Matemática, principalmente os de Cálculo, possuem pouca capacidade de visualização e de formalização de conceitos. O autor sugere uma relação mais próxima entre a intuição e o rigor, para melhorar o uso dessas idéias visuais. Estas, por sua vez, muitas vezes consideradas intuitivas por um matemático experiente, não são necessariamente intuitivas para um aluno inexperiente, o que sugere a existência de diferentes categorias de intuição e, com isso, também diferentes níveis de rigor, conforme discute Reis (2001), em sua tese de doutorado, sobre a necessidade de um rompimento de uma visão dicotomizada entre rigor e intuição, no ensino de Cálculo. Aparentemente, as idéias mais complicadas podem levar a uma intuição poderosa que favorece, *a posteriori*, a obtenção de provas e demonstrações matemáticas, com seu devido rigor.

A pesquisa realizada pela professora Viana (2004), em turmas da disciplina de Cálculo II na UFOP, teve como objetivos a identificação das influências do *software* Mathematica, no ensino da disciplina, e a verificação de que este realmente facilitava a aprendizagem dos conteúdos de funções. Para isso, a pesquisadora trabalhou com dois tipos de turmas: uma em que os alunos aprenderam a utilizar o *software* e outra com estudantes que não tiveram a mesma oportunidade. Depois disso ela fez as comparações dos resultados obtidos entre as turmas.

Os resultados e conclusões da pesquisa foram, de certa forma, quali-quantitativos. De acordo com a autora, entre os alunos que utilizaram o *software*, 90% deles conseguiram aprovação na disciplina. Entre aqueles que não tiveram contato com o *software*, apenas 50% conseguiram aprovação. Assim, concluiu que o *software* Mathematica trouxe bons resultados no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo II. Apesar de as interpretações conclusivas dessa pesquisa não atingirem diretamente nossos estudos, não podemos descartá-las totalmente, já que o fato de o uso do *software* trazer bons resultados no desempenho e rendimento dos aprendizes é importante para nossas pesquisas.

Tall apresenta em sua obra – **Advanced Mathematical Thinking** (1991a) – os resultados de algumas pesquisas realizadas em disciplinas de Cálculo, envolvendo aprendizes que constroem gráficos de funções, porém não compreendem nem interpretam os desenhos desses gráficos, assim como não conseguem estabelecer nenhuma relação existente entre as variáveis dependentes e independentes de uma função. No trecho a

seguir, Tall (1991a) dicotomiza o procedimento para a determinação da inversa de uma função, tanto algébrica quanto geometricamente, durante um experimento com um grupo de estudantes de Cálculo.

[...] Considere o caso de um grupo de 40 alunos de pós-cálculo do qual foi pedido para encontrar o inverso de uma função dada, tanto na forma algébrica quanto na gráfica. Noventa por cento deles foram capazes de fazer isso para o caso algébrico, com 55% sendo capazes de justificar os procedimentos adotados. Trinta por cento explicaram “refletindo através da reta  $y = x$ ” técnica para o caso geométrico, mas não souberam justificar o procedimento. (Não era conhecida a técnica de inversão do papel, girando-o 90 °) [...]. (TALL, 1991a. p.147, tradução nossa)

Para o autor, os estudantes responderam a questão proposta – sem ter certeza da resposta – apenas com o raciocínio algébrico, sem utilizar interpretações visuais e geométricas para o conceito de função inversa.

As pesquisas apresentadas, até o momento, indicaram as potencialidades e a aplicabilidade do uso de *softwares*, bem como de TIC, no ensino de Matemática. Com isso, não queremos dizer que essa utilização deva ser vista, apenas, como o único meio para desenvolvermos os conteúdos matemáticos, mas que a realização de atividades, num laboratório de Informática, seja útil para a representação de alguns desses conteúdos, no estudo de funções e construção de gráficos, e que o computador possa ser visto como uma mídia que auxilie na compreensão de determinados conteúdos matemáticos, facilitando a visualização e interpretação desses conceitos, gerando, assim, uma aprendizagem que não seja mecânica, como afirma Allevato (2007, p.5):

[...] nos ambientes em que o computador está disponível, ele pode ser empregado na análise da validade ou mesmo da correção de concepções que os alunos possuem a respeito de determinados conceitos matemáticos uma vez que, na presença do computador, os alunos frequentemente manifestam suas compreensões acerca de determinados conceitos [...]. Os ambientes informáticos favorecem atividades de natureza interpretativa, uma vez que desobrigam os alunos de realizarem tarefas essencialmente mecânicas e/ou operacionais. (ibid, p.15)

A autora acrescenta que cabe ao professor, utilizando-se da Informática, a elaboração de atividades desafiadoras, criativas e dinâmicas que levem o aluno a explorar, investigar e fazer conjecturas de conteúdos matemáticos, através dos dados obtidos com suas construções num *software*. Na conclusão da autora, os sujeitos da pesquisa tiveram

certo tipo de incredulidade para aceitar as respostas obtidas através das visualizações observadas no computador, que seriam, de certa forma, insuficientes para validar a solução de certos problemas. Ela ainda destaca a existência de alguns conflitos nos aprendizes como, por exemplo, o fato deles não terem feito nenhum registro, durante o processo de achar as soluções pelo computador; em outras palavras, identificou nos alunos concepções de que, para resolver um problema, seria necessário calcular, desenvolver e registrar algébrica ou numericamente um raciocínio, não levando em consideração a observação e interpretação de gráficos, via computador, como processos legítimos de resolução desses problemas.

Em relação a essas questões de conflitos e reações dos aprendizes em diversas atividades, Borba (2003) narra uma atividade realizada em um curso oferecido para estudantes que utilizariam um *software* e calculadoras gráficas e, através de duplas, fariam conjecturas abordando conteúdos e conceitos matemáticos, gerando debates que seriam orientados pelo professor mediador da atividade. Como esses estudantes não tinham acesso fácil a computadores – e alguns nunca tiveram – o autor comenta que a reação inicial deles foi de surpresa e empolgação e que o uso e o potencial que a máquina oferecia, a *posteriori*, geravam neles sensações assustadoras e de fascínio, simultaneamente.

Borba (2003) e Tall (1992) advertem sobre o uso de computadores para o ensino da Matemática, pois os gráficos obtidos através de *softwares* não possuem uma real imagem do que é visualizado no monitor do computador. O trabalho no computador é feito com diversas escalas, por exemplo, o gráfico de uma parábola representada em três janelas com escalas diferentes poderá gerar **alguns conflitos** (ALLEVATO, 2007) nos aprendizes, como dificuldades de interpretação na visualização do gráfico analisado.

Considerando mais uma questão relevante sobre isso, Borba (1996, 2003) acredita que trabalhar no computador – construções e interpretações de gráficos – com diferentes escalas trará, possivelmente, desafios para o professor com o uso da Informática em sala de aula, como afirma: “trabalhar esses atritos, deixá-los florescer em busca de um enfoque educacional com a marca da diversidade na sala de aula parece ser um desafio central para os professores que trabalharão com os computadores na sala de aula.” (BORBA, 1996, p.129)

Em geral percebemos, na perspectiva dos autores citados acima, quanto às questões relacionadas à utilização de computadores, *softwares* e monitores gráficos no ensino de Matemática, que estas mídias servem como uma ferramenta para a educação e que, quando utilizadas adequadamente, associadas aos conteúdos de uma disciplina a serem trabalhados

em sala de aula, elas podem, possivelmente, surgir como uma nova proposta de contribuir para o desenvolvimento acadêmico e intelectual dos estudantes e, com isso, para a inclusão deles na sociedade do conhecimento. (VALENTE, 2002)

Em Valente (2002), vemos autores como Baranauskas (et al. apud Valente, 2002) que possuem uma ótica bastante determinista, em relação às questões da utilização da Informática na educação e de como os ambientes informatizados contribuem para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos de uma determinada disciplina, conforme o trecho abaixo:

Considerando um cenário típico de uso de um ambiente de modelagem e simulação, o usuário constrói um modelo do fenômeno/objeto que deseja estudar, utilizando primitivas específicas para representação do modelo, fornecidas em geral por um editor de modelos, presente no ambiente computacional. Construído o modelo, o sistema o executa (simula) e apresenta resultados da simulação, em geral por meio de representações gráficas, animações, etc. O usuário observa a simulação e pode então analisar os resultados obtidos e recomeçar o ciclo de atividades. (Baranauskas, et al. apud Valente, 2002, p. 54)

Corroboramos esses autores quanto à existência de um sistema computacional poderoso que torne o ensino e a aprendizagem mais eficientes e que, através de um ambiente de construção de modelos, conseguirá induzir os estudantes:

[...] a definir mais precisamente seu conhecimento sobre o assunto. Além disso, a execução do modelo na máquina possibilita uma avaliação que pode levar o aprendiz a questionar o modelo, reavaliar seu conhecimento e expressá-lo novamente, continuando o ciclo de ações, ao estilo construcionista de aprendizagem. (PAPERT, 1986 apud Valente, 2002 p. 54)

Assim, acreditamos na potencialidade dessas representações de modelos matemáticos, em simulações e visualizações gráficas por computadores, para a aprendizagem de conteúdos de Cálculo, como a construção de gráficos de funções, em particular, as construções e representações das superfícies e curvas no  $\mathbb{IR}^3$ . Com um *software* que permita os movimentos (de translação e rotação) desses gráficos, o aprendiz poderá visualizar e manipular essas superfícies no espaço, potencializando o ensino e a aprendizagem desses conteúdos na disciplina de Cálculo de várias variáveis.

Quanto a essas questões de visualização e simulação, Tall (1991a, p. 197, tradução nossa) identifica algumas vantagens didáticas que o uso dos computadores oferece:

- a possibilidade de uma visualização dinâmica que torne o contexto gráfico-geométrico muito mais acessível e, quando devidamente explorado, possa ajudar a esclarecer as relações que existem entre a representação algébrica e geométrica;
- quando o contexto gráfico torna-se mais familiar, a unidade da representação gráfica do objeto funcional que é fornecida pode ajudar a estabelecer a imagem conceito dos conceitos fundamentais enriquecendo o estoque de imagens mentais;
- através de atividades experimentais com as simulações interativas, os estudantes podem ser iniciados em matemática como uma atividade construtiva científica;
- linguagens de computador apropriadas podem ajudar com os problemas de formulação, o uso construtivo de quantificadores e do rigor de desenvolvimento.

Numa visão mais contemporânea, Valente (2002) comunga com as vantagens didáticas afirmadas por Tall (1991a) e ressalta que a aprendizagem, por construção de modelos, ou por simulação, garante o aprendizado e que, neste processo, a mediação do professor é necessária para permitir que o aprendiz possa adaptar aos programas de simulação os fenômenos observados no mundo real.

Portanto, por si só a simulação ou modelagem não cria a melhor situação de aprendizado. Para que a aprendizagem ocorra, é necessário criar condições para que o aprendiz se envolva com o fenômeno e essa experiência seja complementada com elaboração de hipóteses, leituras, discussões e uso do computador para validar essa compreensão do fenômeno. Nesse caso, o professor tem o papel de auxiliar o aprendiz a não formar uma visão distorcida a respeito do mundo (que o mundo real pode ser sempre simplificado e controlado da mesma maneira que nos programas de simulação) e criar condições para o aprendiz fazer a transição entre a simulação e o fenômeno no mundo real. Essa transição não ocorre automaticamente e, portanto, deve ser trabalhada. (VALENTE, 2002, p. 96)

A necessidade de um ensino eficiente de Cálculo (relacionado ao traçado de superfícies), diferente dos moldes tradicionais que vêm sendo apresentados atualmente, exige mudanças nas apresentações e visualizações de gráficos em  $\mathbb{R}^3$ . Em adição aos livros textos, instrumentos de abordagem estática do assunto, deve-se tentar uma abordagem mais dinâmica com o auxílio do computador, de modo que os aprendizes possam visualizar e manipular os seus gráficos e construções, arrastando e movendo, através de ferramentas que o *software* oferece; porém alguns livros didáticos, atuais, de Cálculo, trazem uma abordagem utilizando-se de TIC e apresentam uma revisão de seus conteúdos, em novo estilo, com ilustrações, gravuras e exercícios de simulação em *softwares*, para a construção e interpretação de gráficos.

Ensino de cálculo tradicional tem-se centrado nas idéias gráficas da taxa de mudança e crescimento cumulativo, e da manipulação simbólica das regras de cálculo na diferenciação e integração. As fases iniciais geralmente começam com idéias informais do conceito de limite na forma geométrica, numérica e simbólica. [...] [...] embora os aspectos do mundo concreto sejam em grande parte representada por imagens estáticas, em vez de movimento dinâmico. (TALL, 2003, p.9, tradução nossa)

Finalizando este capítulo, vimos que os temas aqui tratados nos mostram que existem muitos estudos sobre o uso das TIC no ensino e que outras pesquisas têm surgido como acréscimo a essa gama existente, desenvolvendo resultados e implicando diretamente a aplicabilidade dessas TIC, na educação e no ensino de Matemática.

Assim esperamos que, através do aporte teórico apresentado e dos dados coletados, tenhamos um desenvolvimento nas relações de ensino e aprendizagem de Cálculo e que professores competentes, habilidosos e reflexivos sobre a sua prática docente possam sentir-se encorajados a associar e inserir, quando possível e necessário, no ensino de Cálculo, diversas tecnologias informáticas, como o computador e *softwares* matemáticos, durante a abordagem de conteúdos propostos pela disciplina.

## 3 O ENSINO DE CÁLCULO NA PERSPECTIVA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

### 3.1 O Capítulo

A construção deste capítulo justifica a necessidade de identificarmos as possíveis relações existentes no ensino de Cálculo com a TAS de Ausubel (1980).

Com base na ótica de Moreira (2006, 2008), que apresenta uma visão clara e explícita da teoria, a modo de implementar em sala de aula, apresentaremos, inicialmente, as definições de algumas características e de elementos da teoria, associando-as, quando possível, através de exemplos, aos objetivos dos nossos estudos, levando em conta as considerações feitas pelo criador da teoria (AUSUBEL, 1963; 1968, 1978, 1980) e as contribuições de Novak (1978, 1980) e de Hanesian (1980).

Posteriormente, na forma de um diálogo entre alguns estudos feitos por pesquisadores do PMA (TALL, 1991 - 2008) e os elementos da TAS, objetivamos inferir algumas implicações no ensino de Cálculo, através de reflexões a respeito das interseções e combinações desses elementos e características comuns da teoria de Ausubel com a imagem conceitual e a definição conceitual do PMA interpretadas sob nossa ótica e, como o produto dessa interação, poderemos obter uma contribuição para a discussão do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo.

### 3.2 A Teoria da Aprendizagem Significativa Ausubeliana

Dois autores, Ausubel e Rogers<sup>12</sup>, intitularam as suas teorias com o nome de **aprendizagem significativa**. Pontes Neto (2006) aponta diferenças entre elas: segundo o autor, têm o mesmo nome apenas em Português, pois, em Inglês, a expressão rogeriana para aprendizagem significativa é *significant learning*, enquanto que na ausubeliana é *meaningful learning*.

---

<sup>12</sup>David Paul Ausubel nasceu nos Estados Unidos, na Cidade de Nova York, no ano de 1918, filho de uma família judia pobre de imigrantes da Europa Central. Psicólogo e Teórico Educacional. Carl Ransom Rogers nasceu em Chicago em 1902. Formado em História e Psicologia, aplicou a Educação princípios da Psicologia Clínica, foi psicoterapeuta por mais de 30 anos.

Pontes Neto (2006) afirma que eles trabalham com enfoques diferenciados, por exemplo: o Rogers é humanista e seus estudos são orientados para os aspectos afetivos e relacionais da aprendizagem; já Ausubel é um autor voltado para as questões do cognitivismo, enfatizando aspectos relacionados à aquisição, organização e consolidação do conhecimento. Assim, nossos estudos estarão em consonância com o pensamento da teoria ausubeliana, nas questões referentes ao cognitivismo.

Para a teoria ausubeliana, a aprendizagem significativa é considerada núcleo central dos problemas direcionados à sala de aula e aos conteúdos escolares, respeitando uma aprendizagem influenciada, culturalmente e de forma única, por um caráter individual, pessoal e intransferível. (PONTES NETO, 2006; MOREIRA, 2006, 2008) Moreira (2006) ainda destaca, na teoria ausubeliana, a existência de aspectos dedutivos e indutivos.

Pontes Neto (2006), após contatos com o autor Ausubel, através de cartas e de uma conversa pessoal realizada em um seminário na PUC/São Paulo, em abril de 1979, afirma que a teoria ausubeliana não considera a teoria piagetiana<sup>13</sup> como suporte e base para a de sua autoria e, ainda, hipotetizou da possibilidade de F. C. Bartlett ter sido o inspirador para a TAS ausubeliana. Neste trecho, vemos as expectativas do autor em relação a sua conversa com Ausubel:

Eu esperava uma longa explanação, mas ele foi econômico nas palavras. Disse que criou a teoria de aprendizagem significativa inspirado na confusão que havia sido o seu curso de medicina, cheio de conteúdos desconstruídos e fragmentados. E a sua resposta ia ficar por aí, quando insisti sobre os estudos e os autores que subsidiaram a construção do seu arcabouço teórico. Então, com muito custo, ele mencionou apenas um autor: Bartlett, autor do clássico *Remembering* (1932) e nada mais. Talvez, não fosse mesmo necessário acrescentar mais nada, pois segundo Mayer (1981, trad.), Bartlett (1932) é considerado o maior precursor da psicologia cognitiva. (PONTES NETO, 2006, p. 121)

Com base nas diferenças identificadas e discutidas nas obras desses dois autores e no propósito de alinhar essas discussões para a resposta da nossa questão de investigação com o estudo que pretendemos desenvolver ao longo da pesquisa, apoiaremos-nos na TAS ausubeliana<sup>14</sup>, acrescentada e fundamentada pelas idéias de Novak e Hanesian,

---

<sup>13</sup> Jean Piaget (1896-1980) foi um renomado psicólogo e filósofo suíço, conhecido por seu trabalho pioneiro no campo da inteligência infantil. Piaget passou grande parte de sua carreira profissional interagindo com crianças e estudando seu processo de raciocínio. Seus estudos tiveram um grande impacto sobre os campos da Psicologia e Pedagogia.

<sup>14</sup> A teoria fundada por Ausubel teve complementações do autor Novak, referências da teoria ver em: AUSUBEL, D.P. (1968) **Educational psychology: a cognitive view**. New York, Holt, Rinehart and



posteriormente. Essa teoria recebeu algumas interpretações e contribuições de estudiosos e pesquisadores brasileiros, como Moreira (2006, 2008) – autor no qual apoiaremos para a fundamentação dessa teoria – com suas idéias de implementar a aprendizagem significativa, de maneira crítica, ao ensino e aprendizagem em salas de aulas, e ainda reflexões de Pontes Neto<sup>15</sup> (2006), com perguntas e respostas sobre a teoria.

Passados quase 50 anos é natural que tenham surgido novas visões da aprendizagem significativa, mas são todas complementares ou enriquecedoras da visão clássica. Por exemplo, Joseph Novak dá à aprendizagem significativa uma visão humanista: é ela que subjaz à integração positiva, engrandecedora, de pensamentos, sentimentos e ações. D. B. Gowin apresenta uma visão interacionista social vigotskyana na qual a aprendizagem significativa é uma decisão do aprendiz após ter captado significados, contextualmente aceitos, em um processo de negociação de significados, cujo objetivo é o compartilhar significados. M. A. Moreira, mais recentemente, defende uma visão crítica para a aprendizagem significativa, uma perspectiva na qual não basta captar significados aceitos no contexto da matéria de ensino, é preciso captá-los criticamente. (MASINI; MOREIRA, 2008, p. 40 – 41, grifo nosso)

Com base nas perspectivas dos autores sobre a aprendizagem significativa, Moreira (2006, 2008) complementa-a com uma análise crítica na forma em que o indivíduo aprende, com isso denominando-a de “aprendizagem significativa crítica.” Para essa concepção, o autor toma como referência o conceito central da TAS de Ausubel que consiste no:

[...] processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira **substantiva**<sup>16</sup> (não literal) e **não arbitrária**<sup>17</sup>, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo. Neste processo a nova informação **interage** com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de “conceito subsunçor” ou, simplesmente “subsunçor” [*ver definição no item 3.3 deste capítulo*], existente na estrutura cognitiva de quem aprende. (MOREIRA, 2006, p. 14-15, grifo nosso)

---

Winston; AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D. and HANESIAN, H. (1978) **Educational psychology: a cognitive view**. 2nd. ed. New York, Holt Rinehart and Winston.

<sup>15</sup> Doutor em Educação em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, Brasil. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação - F. F. C. de Marília - UNESP. email: japontes@femanet.com.br.

<sup>16</sup> [...], ou seja, o que é aprendido de maneira significativa tem também significados pessoais, idiossincráticos. Os conhecimentos têm significados denotativos que são compartilhados por certa comunidade de usuários e os conotativos que são pessoais. [...] (MASINI e MOREIRA, 2008, p. 15 – 16)

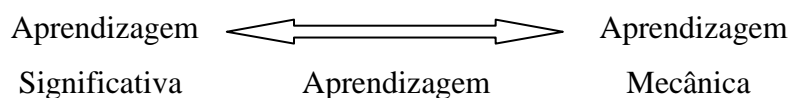
<sup>17</sup> [...] quer dizer, o novo conhecimento não interage com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algum conhecimento que seja especificamente relevante para dar-lhe significado. Isso implica que se não houver esse conhecimento prévio não poderá haver aprendizagem significativa. [...] (ibidem, 2008, p. 15 – 16)

Segundo o autor, em contraposição à aprendizagem significativa tem a aprendizagem mecânica, em que o autor coaduna com a idéia de Ausubel e a define:

[...] como sendo aquela em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos. A nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação. (MOREIRA, 2006, p. 16)

Corroboramos as interpretações citadas do autor, sobre o conceito central da aprendizagem significativa na perspectiva ausubeliana e a sua contraposição à aprendizagem mecânica, identificando as diferenças e particularidades em cada uma delas.

Apesar das duas aprendizagens apresentarem características conceituais diferentes, Ausubel (1980) afirma que não é estabelecida uma diferença dicotômica entre aprendizagem significativa e mecânica e, sim, um *continuum* entre elas. Observe na figura 1, abaixo, que a **aprendizagem** ocorre num intervalo, variando do extremo – aprendizagem significativa – até o outro extremo – aprendizagem mecânica.



**Figura 1 - O *Continuum* da aprendizagem significativa com a aprendizagem mecânica**

Fonte: Autoria própria

[...] Os conhecimentos têm significados para quem aprende. Tais significados podem, até mesmo, não serem aqueles compartilhados no contexto de uma matéria de ensino, mas ainda assim a aprendizagem é significativa. [...] [...] Porém, em última análise, a aprendizagem é significativa quando o aprendiz vê sentido nas situações de aprendizagem e atribui significado a elas. (MASINI; MOREIRA, 2008, p. 9)

Com base nas discussões dos autores sobre a aprendizagem significativa, procuraremos focar no seu conceito e, através dessa perspectiva, direcionar suas características para o objetivo e finalidade da nossa pesquisa. Estaremos desenvolvendo, no capítulo vigente, temas sobre a teoria ausubeliana, identificando elementos, características, tipos, dificuldades e possibilidades de ocorrência e estabelecendo algumas relações dela com o ensino de Cálculo.

### 3.3 Elementos e Características da Aprendizagem Significativa.

A aprendizagem significativa ausubeliana apresenta alguns elementos e características peculiares, dentro da Psicologia Cognitiva atual. Pretendemos, nesta seção, abordar e discutir com os autores alguns desses aspectos que são úteis para a ocorrência da aprendizagem significativa e que possam servir como um corpo teórico para a nossa pesquisa. Em relação à ocorrência da aprendizagem significativa, temos que ela:

[...] ocorre quando novos conceitos, idéias, proposições interagem com outros relevantes e inclusivos, claros e disponíveis na estrutura cognitiva, sendo por eles assimilados e contribuindo para a sua diferenciação, elaboração e estabilidade. ( MOREIRA, 2006, p. 136)

De acordo com Moreira (2006, 2008), Ausubel defende como característica principal dessa aprendizagem, os **subsunçores** que constituem “[...] a qualquer idéia, conceito, proposição existente na estrutura cognitiva do aprendiz [...]” e que servirão “[...] como ancoradouros para os novos conhecimentos, se interagir com esses na finalidade de obter a aprendizagem significativa.” (MOREIRA, 2006, p. 15)

Nada garante a existência dos subsunçores na estrutura cognitiva de um indivíduo, mas a sua construção, na estrutura cognitiva ocorre de maneira individual, ou seja, a partir do nascimento de uma criança, ela vai descobrindo e percebendo o mundo ao seu modo e, com isso, ela recebe informações a todo instante, muitas dessas informações se consolidam, ao longo da vida na estrutura cognitiva desse indivíduo e algumas delas se transformam em ancoradouros ou subsunçores para outras informações. (AUSUBEL, 1980)

Quanto a essa criação e construção dos subsunçores, Moreira (2006, 2008) afirma que a criação de significados se dá de forma gradual e idiossincrática em cada indivíduo. Assim exemplificando e destacando, de maneira bem similar a Ausubel, as aprendizagens por descoberta e por recepção, ou seja: uma criança pequena em que os conceitos são adquiridos por uma aprendizagem por descoberta, ao atingir a idade escolar começa a ter um conjunto de conceitos que permite a aprendizagem significativa por recepção, para depois começar a estabelecer novos conhecimentos e estabelecer uma assimilação de conceitos e, por fim, fazer a interação dos novos conceitos com os preexistentes na estrutura cognitiva; estes últimos, segundo o autor, constituem os subsunçores – os ancoradouros da estrutura cognitiva.

Ainda que estes possam existir e se apresentar estabelecidos, na estrutura cognitiva, bastante elaborados, claros, objetivos e estáveis ou, por outro lado, o contrário disso, limitados, pouco claros e instáveis, essas condições dependerão apenas de como estes foram fixados como um ancoradouro para as novas informações e de que maneira elas se interagiram.

Percebemos a existência destes subsunçores na estrutura cognitiva de um indivíduo, quando este consegue estabelecer as interações destes com as novas informações. Lévy (1993) destaca a necessidade de utilizar representações para absorção dessas novas informações e da existência de uma zona de atenção, na qual o indivíduo estará utilizando, sempre que lhe for consultada, numa possível interação.

Quando uma nova informação ou um novo fato surge diante de nós, devemos, para gravá-lo, construir uma representação dele. No momento em que a criamos, esta representação encontra-se em estado de intensa ativação no núcleo do sistema cognitivo, ou seja, está em zona de atenção, ou muito próxima a esta zona. Não temos, portanto, nenhuma dificuldade em encontrá-la instantaneamente. (LÉVY, 1993, p. 78 -79)

Então, com base na citação, como poderíamos, se é que possível, ativar ou acelerar essa(s) representação(ões) na estrutura cognitiva de um indivíduo? Poderíamos utilizar a aprendizagem significativa ou a mecânica, para essa finalidade?

Em alguns casos, Masini e Moreira (2008) indicam a aprendizagem mecânica eficaz, por exemplo, em cursinho de pré-vestibular, no qual o objetivo é ingressar o aprendiz num curso superior. Os autores afirmam que estes são preparados apenas com os conteúdos específicos das provas realizadas, bem no estilo estímulo-resposta, não tendo nenhum compromisso com a aprendizagem daqueles conteúdos. Os autores, também, ressaltam que de nada adiantaria usarmos manuais ou tutoriais de instrução para favorecer a aprendizagem significativa, pois “Qualquer manual que tenha que ser seguido favorece mais a aprendizagem mecânica que a significativa, mais o treinamento que a educação.” (MASINI; MOREIRA, 2008, p. 25 – 26, grifo do autor)

Para o planejamento e o ministrar de uma instrução, consistentemente, Ausubel (1980) sugere algumas tarefas iniciais e difíceis, que são:

[...] mapear a estrutura conceitual e proposicional do que vai ser ensinado, identificar quais são os subsunçores relevantes para a aprendizagem desse conteúdo, e identificar (ou “mapear”) a estrutura cognitiva do aluno. Essa última tarefa destina-se a verificar se o aluno tem os subsunçores relevantes à aprendizagem do novo material para, em

caso negativo, prover **organizadores prévios**<sup>18</sup> (ou, se for o caso, instrução adicional prévia), e, em caso positivo, obviamente, fazer uso desses subsunçores. (MOREIRA, 2006, p.179, grifo nosso)

### 3.4 Tipos de Aprendizagem Significativa

Segundo Ausubel (1980), existem três tipos de aprendizagem significativa: **representacional, de conceitos e proposicional**. Alertamos para o fato da aprendizagem significativa não querer dizer que é uma simples ligação da nova informação com elementos preexistentes na estrutura cognitiva, pois isso caracterizaria a aprendizagem mecânica, ao contrário da aprendizagem significativa, em que esse processo de aquisição de informações resulta em mudança, tanta na nova informação como nos subsunçores existentes no indivíduo.

A aprendizagem **representacional**, considerada por Moreira (2006) a mais básica da aprendizagem significativa, tendo as demais como dependentes dela, consiste em envolver “[...] a atribuição de significados a determinados símbolos (tipicamente palavras), isto é, a identificação, em significado, de símbolos com seus referentes (objetos, eventos, conceitos).” (p.25)

O autor exemplifica a ocorrência desse tipo de aprendizagem representacional, através de uma criança pequena que ainda não tem o conceito estabelecido da palavra **bola** na sua estrutura cognitiva e, mesmo assim, consegue fazer uma correspondência, não arbitrária e substantiva, da representação da palavra **bola** para com o objeto (uma bola específica), quando ouve o som dessa palavra. Um exemplo no Cálculo, para a aprendizagem representacional, pode ser observado no ensino, pelo professor da disciplina, dos símbolos  $y = f(x)$  e  $z = f(x,y)$  para a representação, das variáveis dependentes em funções,.

A aprendizagem de **conceitos** para o autor é adquirida por dois processos: formação e assimilação e consiste, também, em uma aprendizagem representacional:

[...] pois conceitos são, também, representados por símbolos particulares, porém, são genéricos ou categóricos já que representam abstrações dos atributos criteriais (essenciais) dos referentes, isto é, representam regularidades em eventos ou objetos. (MOREIRA, 2006, p.25)

---

<sup>18</sup> São materiais introdutórios apresentados antes do material de aprendizagem em si. [...] [...] organizadores são apresentados em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade. (MOREIRA, 2006, p.137)

Com base no exemplo dado pelo autor, para a aprendizagem representacional, Ausubel (1980) afirma que, na aprendizagem de conceitos, a criança estabelece associações da palavra **bola** a múltiplos referentes do objeto, ou seja, a diversas bolas com características, cores, formatos e tamanhos diferentes e, não, como foi visto na representacional, na qual ela associa apenas a um objeto, a uma única bola específica.

Poderíamos exemplificar a aprendizagem de conceitos em Cálculo, quando um estudante consegue associar os conceitos de integral e derivada ao conceito de limite. Contudo, no estudo de Cálculo I, os conteúdos limites, derivadas e integral são apresentados, consecutivamente, nesta ordem, e os estudantes, ainda de forma imatura nessa fase, passam a conhecer as propriedades e características inerentes em cada conteúdo, utilizando esses conceitos, através de fórmulas e propriedades nos problemas de Cálculo, sem levar em consideração ou atentar para as relações entre eles, ou seja, não consegue compreender que os conceitos de integral e derivada são oriundos do conceito de limite.

#### Na aprendizagem **proposicional**:

[...] contrariamente à aprendizagem representacional, a tarefa não é aprender significativamente o que palavras isoladas ou combinadas representam, e sim aprender o significado de idéias em forma de proposição. De modo geral, as palavras combinadas em uma sentença para constituir uma proposição representam conceitos. A tarefa, no entanto, também não é aprender o significado dos conceitos (embora seja pré-requisito) e, sim, o significado das idéias expressas verbalmente, por meio desses conceitos, sob forma de proposição. Ou seja, a tarefa é aprender o significado que está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição. (MOREIRA, 2006, p. 26-27)

Como vimos, esse tipo de aprendizagem não difere das anteriores, a respeito dos significados, pelo contrário, ela se caracteriza por ser mais geral do que a representacional e a de conceitos, sendo que estas podem servir como pré-requisitos para a proposicional, como foi dito pelo autor.

Para essa aprendizagem, exemplificaremos através do enunciado de um teorema matemático, no qual, para se aprender o significado da sua proposição, é necessário antes aprender os significados dos seus termos componentes, ou seja, dos conceitos das palavras utilizadas no enunciado do teorema, por exemplo, para entender o Teorema Fundamental do Cálculo é necessário o conhecimento de conteúdos de Derivada e Integral.

Para Ausubel (1983 apud MOREIRA, 2006, p.13), se queremos promover a aprendizagem significativa, é preciso averiguar esse conhecimento e ensinar de acordo:

[...] se tivesse que reduzir toda psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo.

O **averiguar** e o **ensinar de acordo** são tarefas bastante difíceis, defendidas pelo autor, pois averiguar consiste na revelação (mostrar, compreender) da estrutura cognitiva do aprendiz e no entendimento da sua organização; e o ensinar de acordo requer uma boa resposta dessa análise de averiguação, para que, só depois com os instrumentos básicos, recursos e metodologias de cada disciplina, o educador possa chegar a uma aprendizagem que seja significativa para o aluno e, não, a uma simples seqüência de atividades que possa induzir a uma memorização e/ou aprendizagem mecânica.

Como vimos, anteriormente, com a definição da aprendizagem mecânica ocorrendo com o sujeito, adquirindo informações com poucas relações entre os conhecimentos prévios e os novos, o aprendiz recebe a informação de forma não sistemática e **não** consegue associá-la aos conhecimentos prévios que possui. Já na aprendizagem significativa por **descoberta** e/ou **recepção**, o aluno interage com a nova informação, através dos seus conhecimentos prévios (subsunçores), relacionando-os a elementos com os quais ele possa aprender.

Para Ausubel (1980), tanto a aprendizagem por descoberta quanto a aprendizagem por recepção podem ser significativas não havendo necessariamente uma dicotomia entre elas. Assim, como a aprendizagem mecânica e a significativa (ver Figura 1) não constituírem algo dicotômico e, sim, um *continuum* que transita entre essas duas aprendizagens, de forma análoga, podemos estabelecer outro *continuum* para a aprendizagem por descoberta e recepção, na perspectiva da aprendizagem significativa.

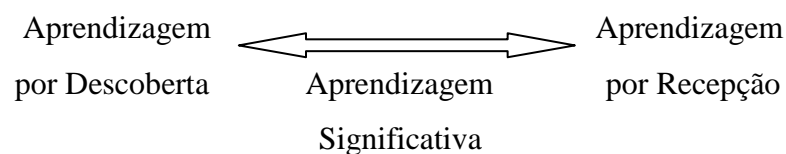
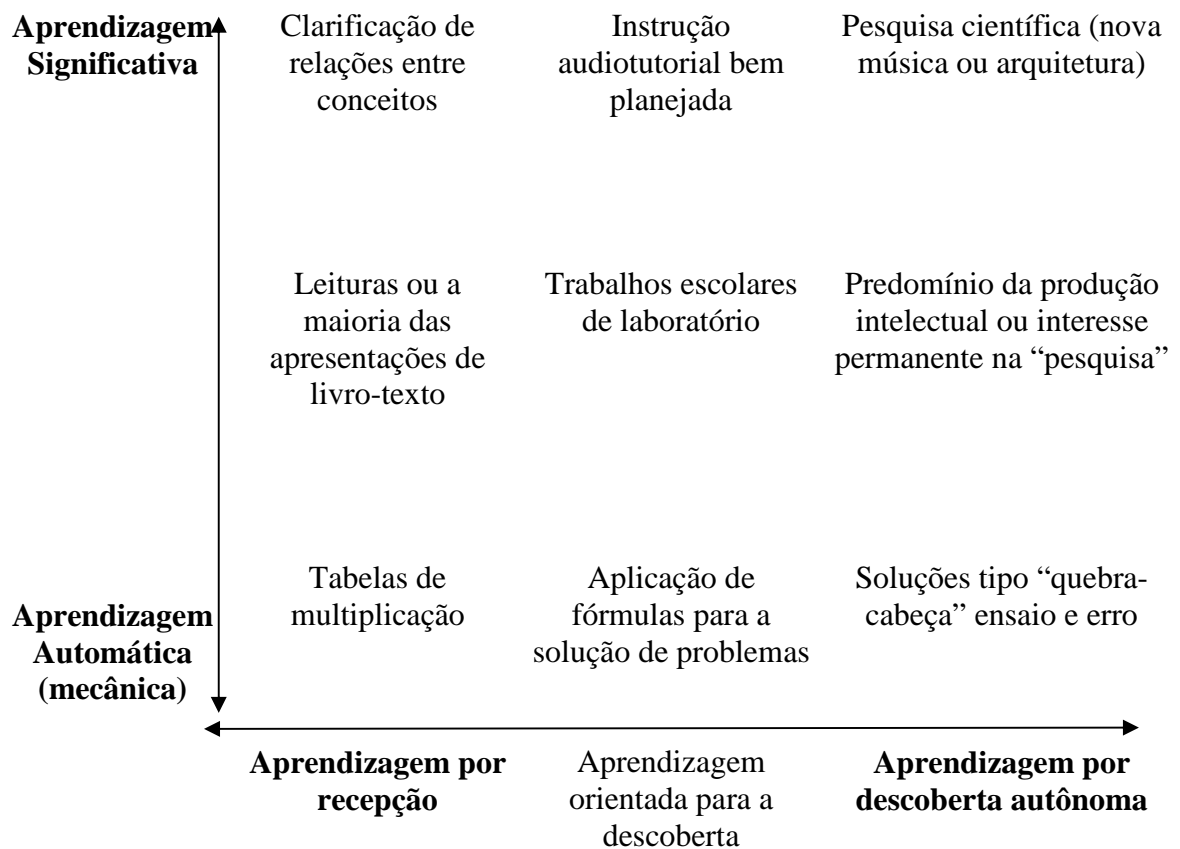


Figura 2 - **O Continuum da aprendizagem por descoberta com a aprendizagem por recepção, na perspectiva da aprendizagem significativa**

Fonte: Autoria própria

Apesar de idealizarmos, nesse *continuum*, a aprendizagem significativa variando entre os extremos das aprendizagens por descoberta e por recepção, este não torna excludente a existência e ocorrência da aprendizagem mecânica nesse processo (por descoberta e por recepção), dependendo da maneira de como a nova informação é interagida com os subsunçores e internalizada, na estrutura cognitiva. Assim, a ocorrência para a aprendizagem significativa não depende da forma de aprendizagem, mas sim do produto dessas interações, entre informações novas e subsunçores existentes, modificando-os e/ou criando novos.

No Quadro 2, abaixo, Ausubel (1980) generaliza as idéias apresentadas nas Figuras 1 e 2, englobando as aprendizagens mecânica e significativa num eixo *continuum* e as aprendizagens por descoberta e por recepção em outro eixo. O autor afirma que “[...] tanto a aprendizagem receptiva como a por descoberta podem ser automáticas [mecânicas] ou significativas dependendo das condições sob as quais a aprendizagem ocorre.” (AUSUBEL, 1980, p. 23, grifo do autor)



Quadro 2 – Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que partem da aprendizagem automática ou da aprendizagem significativa.



Ausubel (1980, p. 21) considera a aprendizagem por descoberta e por recepção dois tipos bastante diferentes, com papéis diferenciados:

É importante observar neste ponto que a aprendizagem receptiva e por descoberta diferem também com respeito aos seus respectivos papéis principais no funcionamento e desenvolvimento intelectual. Em geral, grande parte da aprendizagem acadêmica é adquirida por recepção, enquanto que os problemas cotidianos são solucionados através da aprendizagem por descoberta.

Para entender mais essas diferenças, Moreira (2006) referencia as idéias de Ausubel e estabelece uma definição para cada uma dessas aprendizagens. Na aprendizagem receptiva “o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz em sua forma final” (p.17), ou seja, a tarefa neste tipo de aprendizagem não envolve qualquer descoberta independente por parte do estudante, deste exige-se somente internalizar ou incorporar o conteúdo que lhe foi apresentado. Já para a aprendizagem por descoberta “o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo aprendiz [...]” (ibidem, p.17), ou seja, o conteúdo principal daquilo que vai ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno, antes que possa ser significativamente incorporado a sua estrutura cognitiva.

Ausubel (1980) defende essas possibilidades para a aprendizagem significativa (por descoberta ou recepção), se e somente se o novo conteúdo for incorporado, de forma não arbitrária e não literal, à estrutura cognitiva.

Moreira (2006, 2008) dá exemplos para as diferenças entre essas duas aprendizagens, como num caso de um quebra-cabeça, em que o aprendiz pode encontrar a solução do jogo por descoberta, mas a aprendizagem será mecânica; já em outro caso, de uma lei física, o aprendiz pode recebê-la já “pronta e acabada”, sem ter que descobri-la, porém pode usá-la significativamente, desde que tenha em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados.

De acordo com Moreira (2006, 2008), o aluno que busca essa interação do novo com os subsunçores, internalizando e integrando-os a sua estrutura cognitiva, estará construindo e produzindo conhecimento, através de um **princípio de assimilação**, com **diferenciação progressiva** e **reconciliação integradora** (seção 3.4.4 e 3.5):

Ele deve fazer uso dos significados que já internalizou, de maneira substantiva e não arbitrária, para poder captar os significados dos materiais educativos. Nesse processo, ao mesmo tempo em que está progressivamente diferenciando sua estrutura cognitiva, está também fazendo a reconciliação integradora de modo a identificar semelhanças e

diferenças e reorganizar seu conhecimento. Quer dizer, o aprendiz constrói seu conhecimento, produz seu conhecimento. (MOREIRA, 2006, p. 4)

Então vimos que, para Ausubel (1963, 1968, 1978, 1980) e Moreira (2006, 2008), a aprendizagem significativa quer dizer aprender de maneira não arbitrária e não literal e que, ao falarmos sobre aquilo que o aprendiz já sabe, não queremos nos referir, simplesmente, a idéia de pré-requisito, ou seja, para Ausubel a idéia é mais ampla, consistindo em aspectos específicos da estrutura cognitiva que são relevantes para a aprendizagem de nova informação. Moreira (2008) exemplifica através das relações existentes nas disciplinas de Física I e Cálculo I, como pré-requisitos para a Física II.

Ausubel (1980) não considera o ensino e aprendizagem extensivos, ou seja, se tivermos um ensino bastante eficaz, isso não irá garantir a aprendizagem; esta relação é vista pelo autor como uma das condições que influencia a aprendizagem significativa. Nesse caso, ainda é possível que os aprendizes estejam desmotivados, desatentos, não querendo aprender, mesmo que com um ensino de qualidade. E também, por outro viés, podemos ter a possibilidade de um aprendiz ser autodidata e não necessitar do professor. “[...] o ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é o aprendizado por parte do aluno[...] [...] e assim o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino.” (AUSUBEL, 1980, p. 12)

Para a existência e ocorrência dos tipos de aprendizagem significativa discutidos nessa seção – representacional, de conceitos e proposicional – descreveremos, no tópico seguinte, como ocorrem e são caracterizadas essas formas de aprendizagem.

### 3.4.1 Aprendizagem subordinada

A aprendizagem subordinada ocorre quando “[...] a nova informação adquire significado por meio da interação com subsunçores, reflete uma relação de subordinação do novo material relativamente à estrutura cognitiva preexistente.” (MOREIRA, 2006, p.32)

Consideramos uma forte relação da aprendizagem subordinada com a afirmação de Lévy (1993), quando este diz que, ao ouvir uma palavra, esta faz ativar de forma imediata a sua mente numa rede de outras palavras, conceitos ou modelos, como também numa

associação de imagens, sons, odores, sensações proprioceptivas, lembranças, afetos, etc. O autor exemplifica esta situação com a palavra maçã:

[...] a palavra maçã remete aos conceitos de fruta, de árvore, de reprodução, faz surgir o modelo mental de um objeto basicamente esférico, com um cabo saindo de uma cavidade, recoberto por uma pele de cor variável, contendo uma polpa comestível e caroços, ficando reduzido a um talo quando comemos; evoca também o gosto e a consistência dos diversos tipos de maçãs, a granny mais ácida, a golden muitas vezes farinhenta, a melrose deliciosamente perfumada; traz de volta memórias de bosques normandos de macieiras, tortas de maçãs, etc. (LÉVY, 1993, p. 23, grifo do autor)

A aprendizagem subordinada divide-se em dois tipos: **derivativa** e **correlativa**.

A aprendizagem subordinada **derivativa** “ocorre quando o material aprendido é entendido como um exemplo específico de um conceito já estabelecido na estrutura cognitiva, ou apenas corrobora ou ilustra uma proposição geral, previamente aprendida.” (MOREIRA, 2006, p.33)

O autor exemplifica essa aprendizagem com os diferentes conceitos de Física sobre **campo**, por exemplo, campo de temperaturas, campo de pressões, campo de energias; se o aprendiz tem bem claro e definido na sua estrutura cognitiva esse conceito e, mais particularmente, o de campo escalar, a aprendizagem dos demais campos citados é derivativa desse último, já estabelecido na estrutura cognitiva.

A aprendizagem subordinada **correlativa** consiste em:

[...] o material é aprendido como uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos ou proposições previamente aprendidos. Ele é incorporado por interação com subsunçores, mais inclusivos, contudo seu significado não está implícito e não pode ser adequadamente representado por esses subsunçores. Este é o processo pelo qual, mais tipicamente, um novo conteúdo é aprendido. (MOREIRA, 2006, p.33)

Para essa aprendizagem, Moreira (2006, p. 33) utiliza como exemplo “a identificação do campo produzido por um fluxo magnético variável com um campo elétrico induzido.” Para o autor, este conceito novo terá novos significados na interação com o de campo elétrico, apesar deste possuir características próprias e com possibilidades de modificar o conceito preexistente.

### 3.4.2 Aprendizagem superordenada

Segundo Moreira (2006, p. 34), a ocorrência da aprendizagem superordenada se dá “à medida que ocorre a aprendizagem significativa, além da elaboração dos conceitos subsunçores, é também possível a ocorrência de interações entre esses conceitos originando, assim, outros mais abrangentes.”

O autor exemplifica a aprendizagem superordenada da seguinte forma:

[...] à medida que uma criança adquire os conceitos de cão, gato, leão, etc. ela pode, mais tarde, aprender que todos esses são subordinados ao conceito de mamífero. À medida que o conceito de mamífero é adquirido, os conceitos, previamente aprendidos, assumem a condição de subordinados, e o conceito de mamífero representa uma aprendizagem superordenada. (MOREIRA, 2006, p.34)

Para Moreira (2006, p. 35), “O indivíduo pode estar aprendendo novos conceitos por subordinações e, ao mesmo tempo, estar fazendo superordenações. Posteriormente, voltar-se-á essa questão da dinâmica da estrutura cognitiva.” Em Cálculo, percebemos a subordinação e a superordenação da aprendizagem significativa, através do conceito de limite, exemplificado anteriormente, ou seja, se o estudante tiver esse conceito bem claro e definido em sua mente, perceberá, facilmente, que os conceitos de integral e derivada estarão subordinados ao conceito de limite e, possivelmente, através de cada um deles conseguirá, por um processo de superordenação, uma melhor compreensão na aprendizagem dos seus significados e da sua aplicabilidade.

### 3.4.3 Aprendizagem combinatória

Essa aprendizagem acontece por meio de proposições e combinações de conceitos, de forma mais ampla e mais geral, sem estabelecer uma relação nem de subordinação nem de superordenação.

Para Ausubel (1980 apud MOREIRA, 2006), a aprendizagem combinatória é exemplificada na relação de equivalência entre massa e energia com conteúdos gerais e relacionáveis aos conteúdos de Física. O autor ainda cita outras relações de aprendizagem combinatória, como a do calor com o volume e a da demanda com o preço. Em Cálculo, a ocorrência, de uma aprendizagem combinatória acontece nas relações de limite com

funções, por exemplo, as formas algébricas utilizadas na resolução do limite de funções exigem conhecimentos de operações algébricas.

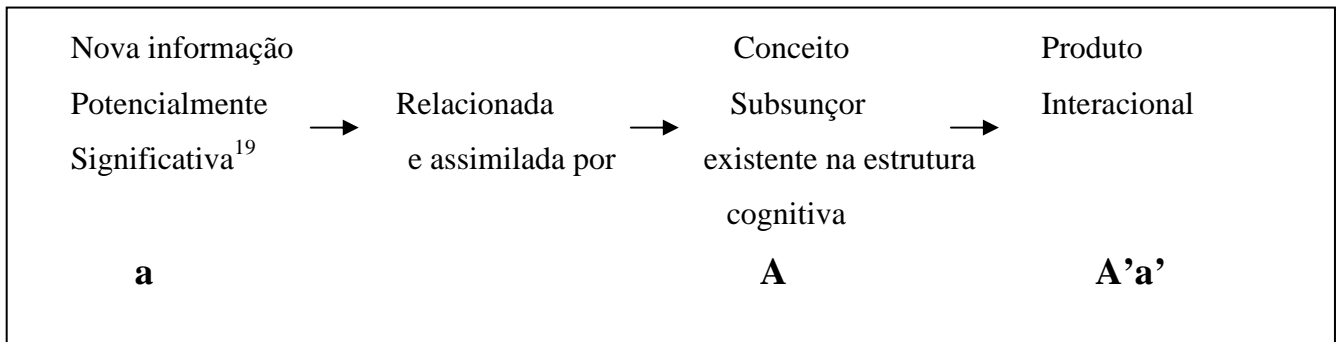
#### 3.4.4 Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora

A **diferenciação progressiva** “[...] é o princípio pelo qual o assunto deve ser programado de forma que as idéias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino sejam apresentadas no início da instrução e progressivamente diferenciadas ao longo da instrução.” (MOREIRA, 2006, p.174), enquanto que a **reconciliação integradora** “é o princípio segundo o qual a instrução deve também explorar relações entre idéias, apontar similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes.” (ibid, p.174)

### 3.5 Princípio da Assimilação

Como foi dito que o produto da aprendizagem significativa é a aquisição de significados, Ausubel (1980) introduz o “princípio de assimilação” ou “teoria de assimilação” que, segundo o autor, é o resultado da interação dos novos conhecimentos com os existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, com uma assimilação de antigos e novos significados que contribui para a diferenciação dessa estrutura.

Quando uma nova idéia *a* é aprendida significativamente e relacionada à idéia relevante estabelecida *A*, tanto as idéias são modificadas como *a* é *assimilada* pela idéia estabelecida *A*. [...] [...] *A* e a nova idéia *a* sofrem modificações, formando o produto de interação *A'a'*. Por exemplo, se *A* é o conceito que a criança tem de pecado, *a* pode representar um novo conselho parental de que jogar comida fora é pecado, modificando assim o conceito da criança de pecado. (AUSUBEL, 1980, p. 104, grifo do autor)



Quadro 3 – Princípio de assimilação da TAS de Ausubel

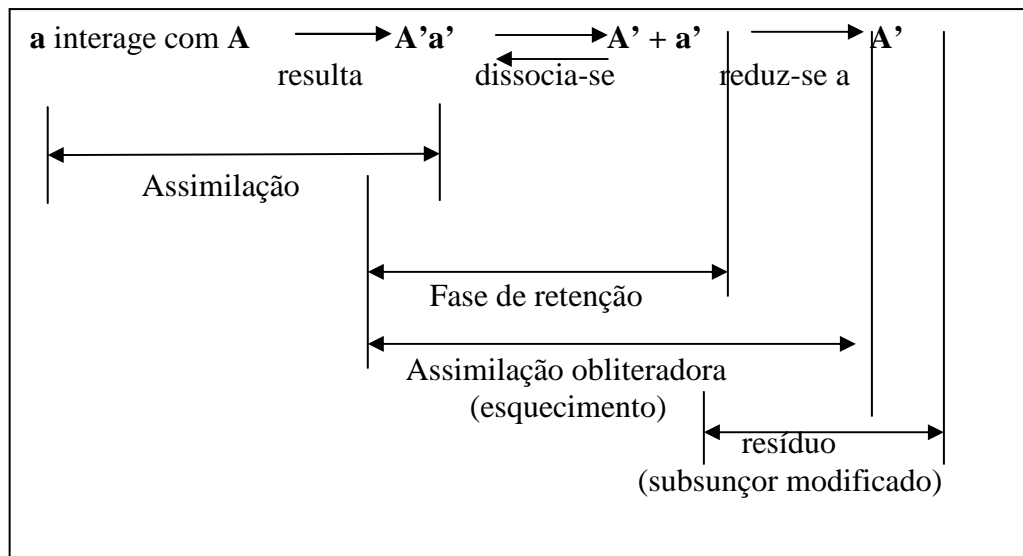
Fonte: (Moreira, 2006, p. 29)

A relação observada no quadro acima e esboçada por Moreira (2006, 2008) corrobora a idéia de que “[...] no sentido mais completo do termo, portanto, o produto interacional real do processo de aprendizagem significativa não é exatamente o novo significado de **a**, mas inclui a modificação da idéia básica e é o significado composto **A'a'**.” (AUSUBEL, 1980, p. 106, grifo nosso)

Depois desse produto de relações que gerou o **A'a'**, Moreira (2006, p.30) aponta um segundo estágio, o da assimilação obliteradora, que consiste em:

As novas informações tornam-se, espontânea e progressivamente, menos dissociáveis de suas idéias-âncora (subsunoçores) até que não mais estejam disponíveis, isto é, não mais reproduzíveis como entidades individuais. Atinge-se assim um grau de dissociabilidade nulo, e **A'a'** reduz-se simplesmente a **A'**. (ver quadro abaixo)

<sup>19</sup> Corresponde a uma informação capaz de estabelecer interações com os subsunoçores existentes na estrutura cognitiva do indivíduo ( ver em Ausubel, 1980)



Quadro 4 – A teoria da assimilação com todas as suas fases

Fonte: (MOREIRA, 2006, p. 31)

### 3.6 A Aprendizagem Significativa & O Ensino de Cálculo: possíveis relações

Nesta seção pretendemos construir um aporte teórico no ensino de Cálculo, na perspectiva da teoria ausubeliana, associando-a, quando possível, às TIC; para isso utilizaremos os conceitos, definições, elementos e características da teoria da Aprendizagem Significativa, para fazer algumas relações possíveis com o ensino de Cálculo.

Nas discussões referentes ao ensino de Cálculo, nos apoiaremos em estudos do grupo **Advanced Mathematical Thinking** – que remetemos, as questões de caráter cognitiva do indivíduo relacionadas ao ensino dessa disciplina, utilizando as tecnologias informáticas – computadores e *softwares* – como apoio para compreender e estabelecer as conexões entre as formas de pensar e as idéias mentais utilizadas no ensino e aprendizagem de Cálculo, no contexto escolar.

Um computador também pode dar o necessário sentido aos conceitos matemáticos que os alunos podem sentir como "não pertencentes ao mundo físico", mas da mente, ou de algum mundo ideal. É geralmente aceito que as idéias são mais fáceis de entender quando se tornam mais "concretas" e menos "abstratas." Quando uma idéia abstrata é executada ou representada em um computador, então ela é concreta na mente, pelo menos no sentido de que ela existe (eletro-magneticamente, se não

fisicamente) O constructo do computador não só pode ser apenas usado para executar os processos representados pela idéia abstrata, mas pode ser manipulado, as coisas podem ser feitas nele. Isso tende a tornar mais concretas, principalmente para a pessoa que construiu. É verdade que, em geral, quando uma pessoa constrói algo em um computador, uma construção correspondente é feita na mente da pessoa. É possível orquestrar esta correspondência fornecendo as tarefas de programação em uma linguagem de programação adequada, projetada de forma que as construções mentais resultantes sejam idéias avançadas que aumentam o entendimento e o conhecimento matemático do aluno. Além disso, uma vez que várias construções existem no computador, é muito útil para refletir sobre o que elas são (em termos de como o computador faz) e em que processos elas se empenham (TALL, 1991a, p. 235, tradução nossa)

Apesar da visão deste autor datar do início da década de 90, ela nos remete às discussões e concepções de autores contemporâneos, citadas no capítulo 2, sobre o uso de computadores no ensino associado às idéias mentais de um indivíduo, como processo de aprendizagem e aplicabilidade em nosso mundo físico, com possibilidades de resolver problemas concretos na vida desse indivíduo. Com base nessa citação, esperamos construir, nesta seção, um elo com as discussões feitas no capítulo 2, sobre as TIC e o ensino de Cálculo, obtendo um constructo teórico para pesquisadores, professores e estudantes – atores de um ambiente educacional – estarem refletindo novas abordagens, posturas e utilização de recursos na sua prática docente e nas relações de ensino e aprendizagem, criando condições, habilidades e competências necessárias ao professor para a elaboração de atividades Matemáticas, através das tecnologias informáticas.

Tall (1991a) pensa que, para um ensino de Cálculo trabalhando com as abstrações dos aprendizes em construções gráficas através do computador, seja necessário um **agente de organização** (*organizing agent*, tradução nossa), que pode ser a orientação de um professor, um livro didático ou um material de Informática apropriado e a abordagem metodológica educacional, porém todos fundamentados em três fases:

- uma primeira fase de familiarização e de negociação de significado. É realizado na forma de diálogo entre o professor e os estudantes, um diálogo designado como o "modo socrático melhorado", o termo "melhorado" referindo-se à ajuda fornecida pelo computador para comunicação:  
"A Matemática não está mais apenas na cabeça do professor, ou estaticamente registrada em um livro. Ela tem uma representação externa no computador como um processo dinâmico."
- uma segunda fase do trabalho autônomo dos alunos [...].
- [...] a última fase de discussão e avaliação, no intuito de estabelecer o ponto e garantir que as imagens conceituais construídas pelos alunos sejam compatíveis com as da comunidade dos matemáticos. (TALL, 1991a, p. 187, grifo nosso, tradução nossa)



Em nossos estudos, a identificação de subsunçores nos alunos remete a possibilidade de relacioná-los com os conhecimentos prévios do  $\text{IR}^2$  e outros conceitos matemáticos para, posteriormente, desenvolvermos construções e interpretações de gráficos no  $\text{IR}^3$ . Assim, pretendemos focar nossas atenções para as questões inerentes ao ensino de Cálculo com fundamentos na Psicologia Cognitiva, procurando estreitar os laços entre os conceitos matemáticos de Cálculo e os da TAS.

Através dessas interações dos conhecimentos prévios, que os alunos carregam consigo, com os novos conhecimentos, corroboramos Moreira (2006, 2008) com o nosso estudo de pesquisa, em que os alunos devem aprender significativamente conceitos do  $\text{IR}^3$ , através de uma tecnologia informática, associando-os com os subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva e que, assim, possa ocorrer a aprendizagem significativa.

Conhecimento novo contradiz freqüentemente o velho, e a aprendizagem efetiva requer estratégias para lidar com tal conflito. Algumas vezes uma ou outra deve ser abandonada, e outras vezes as duas podem conviver a salvo, mantidas em compartimentos mentais separados. ( PAPERTE, 1980, p. 121 apud TALL, 1992, p. 497 - 498)

Em geral, aprendizagem de uma idéia nova não destrói uma idéia anterior. O estudante, ao se deparar com uma questão ou tarefa, tem agora duas idéias, e pode reter a nova ou a velha. O que está na aposta não é o possuir ou não possuir uma idéia nova; e sim a seleção (na maioria das vezes inconsciente) de qual delas será retida. Combinações das duas idéias são sempre possíveis, freqüentemente com resultados sem sentido. (DAVIS; VINNER, 1986, p.284 apud TALL, 1992, p. 497 - 498)

Tendo como base a Psicologia Cognitiva e as citações acima, percebemos uma interação existente e possível de conceitos do PMA com a aprendizagem significativa, gerando um enriquecimento para o ensino de Matemática, particularmente de Cálculo, através de vínculos com questões referentes ao cognitivismo dos aprendizes, a respeito de conteúdos e abordagens metodológicas utilizadas na disciplina. Assim, criamos a próxima seção, com o intuito de identificar as similaridades existentes entre elementos do PMA e os conceitos da TAS.

### 3.6.1 Elementos do Pensamento Matemático Avançado e os conceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa

Da década de 1970, até os dias atuais, o grupo do PMA, liderado por David Tall, realiza muitas pesquisas sobre os conteúdos de Cálculo, na perspectiva de concepções do cognitivismo, tendo um respeito mundial nesta área. Visando diversas contribuições para o ensino de Cálculo, consideramos os estudiosos desse grupo pesquisadores dedicados, compromissados e atentos para os problemas no ensino superior, com análise e discussões sobre as questões inerentes à Psicologia Cognitiva do aprendiz, no PMA.

Tall (1991, apud Reis, 2001, p. 46) caracteriza o PMA “como aquele que dá atitude produtiva de se considerar a contextualização de um problema, numa investigação matemática, leva à formulação produtiva de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova.”

O PMA requer uma difícil transição, pois os conceitos baseados nas intuições e nas experiências poderão passar, depois de certo tempo, para um rigor com definições formais e deduções lógicas, permanecendo na mente do aprendiz sempre como experiências prévias que poderão se tornar conflitos cognitivos e atuar como obstáculos didáticos e epistemológicos para a aprendizagem. (TALL, 1992)

Nos estudos do PMA temos o questionamento de certos conceitos, teoremas e definições Matemáticas, alguns casos aprimorando os já existentes e, em outros, os modificando com transições necessárias para o pensamento avançado. (TALL, 1991a, 1991c, 1992, 2003, 2008) Tall (1992) mostra um exemplo prático de sala de aula, os conflitos e conceitos matemáticos marcados na mente de professores e aprendizes, sendo transmitidos de uma geração para outra:

[...] a idéia de que uma função  $y = f(x)$  assume um único valor tem sido parte de nossa cultura matemática e nós poderemos estranhar ao encontrar estudantes afirmando que um círculo  $x^2 + y^2 = 1$  pode ser uma função. O termo função implícita ainda continua a ser usado nos livros textos para descrever tais expressões. (p. 496, grifo do autor)

Para essas questões de conflitos e inconsistência nos conceitos transmitidos de geração em geração, recomendamos uma reconciliação integradora (AUSUBEL, 1980), pois acreditamos que, através, desta é possível minimizar os conflitos gerados na mente de professores e aprendizes, no ensino e aprendizagem de conceitos e proposições que vão se combinando e transformando, ao longo do tempo, na estrutura cognitiva de um indivíduo.

Esta recombinação dos elementos existentes na estrutura cognitiva denomina-se reconciliação integradora. Por exemplo, os alunos podem saber que ervilhas e tomates são vegetais, mas estes são classificados como frutos em biologia. A confusão inicial que o aluno pode experimentar é resolvida quando se aprendem novos significados combinatórios e o estudante compreende que a classificação nutricional dos alimentos não é igual à classificação botânica. Assim cenoura, beterraba e inhame são vegetais e raízes, ou tubérculos, mas ervilhas, pepinos, e tomates são vegetais e frutos. Após a reconciliação integradora da informação botânica, os conceitos e proposições aprendidas anteriormente são modificados e os novos significados são adicionados à estrutura cognitiva. (AUSUBEL, 1980, p. 104, grifo do autor)

Defendemos, assim, a uma reconciliação integradora do indivíduo e um estreito laço das interações nas definições da aprendizagem significativa com alguns conceitos estudados no PMA. Segundo Tall (1991a), o educador matemático deve olhar para os processos cognitivos utilizados pelos aprendizes na resolução de problemas, processos que, na maioria das vezes, constituem generalizações e abstrações na Matemática sobre determinados conteúdos, por exemplo: o autor exemplifica a generalização do  $R^N$  como uma cadeia de idéias que forma o  $R^1$  para formar o  $R^2$ ,  $R^3$  e, assim por diante, até o  $R^N$  e, neste contexto, constitui um passo importante para conseguir abstrair a noção de espaço vetorial e de suas características.

Quando Vinner (1991) afirma que, para explicar e compreender a ocorrência do uso das definições em contextos não técnicos (fora da sala de aula), em resposta aos significados das palavras ou na resolução de problemas, as pessoas utilizam as experiências humanas e do cotidiano para atribuir significados e, muitas das vezes, ignorando as definições formais ou solicitando-as, quando necessário; com isso percebemos uma forte relação destas com o processo em que decorre a aprendizagem significativa por descoberta. Segundo Ausubel (1980), esta aprendizagem se dá pelo uso de ferramentas utilizadas para a resolução de problemas, seja essa oriunda de experiências no cotidiano, da vivência do indivíduo, até da construída no contexto escolar.

São diversas as teorias, conceitos e definições estudadas no PMA; com base em nossas leituras, identificamos algumas obras de autores, como: Dubinsky, Dreyfus, Harel; Kaput e Eisenberg (TALL, 1991a), sobre o pensamento avançado que perpassam por condições de aprendizagem e possuem estreitas ligações com a Psicologia Cognitiva e os conceitos da teoria ausubeliana. Com base nessas contribuições teóricas do PMA, optamos pelos estudos de Vinner (1991) sobre imagem conceitual e definição conceitual, por entender que este assunto apresenta concordância, em diversos aspectos teóricos, com o da

teoria da aprendizagem significativa e acreditar que as contribuições desse autor possam ajudar a responder a nossa pergunta de investigação, nesta pesquisa. Na seção seguinte, apresentamos as idéias desse autor sobre imagem e definição conceitual, estabelecendo as possíveis relações com a TAS.

### 3.6.1.1 Imagem Conceitual, Definição Conceitual, Subsunçores e Princípio de Assimilação: buscando interações.

Conforme foi discutido anteriormente, sobre subsunçores e o princípio de assimilação de Ausubel, daremos início a esta seção com uma abordagem sobre as duas “idéias conceituais” (imagem conceitual e definição conceitual) de Tall e Vinner (1991) e estabeleceremos, sob nossa ótica, as relações existentes dessas idéias com os conceitos da TAS.

Enquanto Tall se baseava na sua percepção de trabalhos realizados com alunos, em que a mente se constitui parte indivisível da estrutura do cérebro e serve como uma forma dele trabalhar, Vinner pensava na mente separada do cérebro, com resultados de experimentos que serviram para analisar o que acontece, quando alunos focam, de maneira diferente, imagens e definições. Essa discussão leva-nos a interpretar que Tall considera a definição conceitual como parte da imagem conceitual existente na mente do indivíduo, justamente por ela compor palavras que podem ser escritas ou faladas. Por outro lado, Vinner classifica a imagem conceitual e a definição conceitual em duas células distintas e, através delas, acredita na realização de análises diferentes e refinadas das diversas formas de trabalhar cada célula.(MEYER, 2003; SOUZA; SILVA, 2007).

A imagem conceitual é ativada, quando, dado o nome de um conceito, sendo este visto ou ouvido, ele passa a ser um estímulo para nossa memória, ou seja, algo é evocado para nossa mente com o nome do conceito, mesmo que usualmente não seja uma definição conceitual, ou que o conceito tenha uma definição, a imagem conceitual existirá e será:

[...] algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. As representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais. (VINNER, 1991, p. 68)

O autor afirma que devemos restringir a imagem conceitual a um indivíduo e, mesmo assim, ao ouvir conceitos em diferentes situações, ele terá para cada uma destas reações diversas; por exemplo, quando se pronunciam certas palavras, estas levam o indivíduo a uma associação de outros conceitos e símbolos existentes na sua estrutura cognitiva. Vinner (1991, p. 68) afirma que, quando é ouvida a palavra função “faz lembrar a expressão  $y = f(x)$ , da visualização do gráfico de uma função ou de funções específicas, como  $y = x^2$ ,  $y = \sin(x)$ , etc.” Souza e Silva (2007) apresentam um outro exemplo de situação, em que a pessoa ao ler ou ouvir a palavra “casa” pode associá-la a diversas imagens, a um sobrado, a uma **casa** localizada numa rua tranqüila, etc.

É o conceito imagem que esse indivíduo tem a respeito da palavra “casa.” Outra pessoa pode imaginar a casa onde reside ou a casa de seus sonhos – esse será o “seu” conceito imagem referente a essa palavra. Esse conceito pode ser alterado a partir do momento em que o indivíduo vivencia novas experiências. (p.3)

Estendendo o conceito de imagem conceitual, Tall (1991a) e Vinner (1991) definem a **imagem conceitual evocada** como aquela evocada em nossa mente de certo conteúdo ou de noções deste, num determinado momento, e não de tudo que existe na mente de um indivíduo.

Vinner (1991) afirma que, na aquisição de um conceito, o indivíduo cria uma imagem conceitual para ele e, mais ainda, para entender e compreender na forma que ele acredita o significado deste conceito, será necessário ter essa imagem conceitual em sua estrutura cognitiva.

Já para a **definição conceitual**, “[...] as representações visuais, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais.”(VINNER, 1991, p.68). Assim, a definição conceitual passa a ser uma forma verbal de representar e definir um determinado conceito. O autor sugere o uso de certos significados associado a palavras, por exemplo, alguns dos conceitos do cotidiano, como casa, laranja, gato, nada têm a ver diretamente com as definições, porém alguns desses e outros são introduzidos com o uso das definições.

A palavra floresta poderia ser apresentada a uma criança dizendo muitas, muitas, árvores juntas (a definição do dicionário Merriam Webster um extenso e denso desenvolvimento de árvores e arbustos é, sem dúvida, uma definição sem utilidade para uma criança pequena) Definições como essa ajudam a formar uma imagem conceitual. Mas a partir do momento em que a imagem é formada, a definição se torna dispensável. Ela

permanecerá inativa, ou até mesmo será esquecida, quando as afirmativas sobre o conceito considerado são manipuladas. (VINNER, 1991, p. 69, grifo do autor, tradução nossa)

Definiremos conceito como objetos, eventos, situações ou propriedades que possuam atributos essenciais comuns que são designados por algum signo ou símbolo. [...] [...] Na formação de conceito, os atributos essenciais do conceito são adquiridos por meio de experiência direta e através de estágios sucessivos de formulação de hipóteses, teste ou generalização. Desta forma, as crianças aprendem o conceito cachorro por meio de encontros sucessivos com cachorros, gatos, vacas, e assim por diante, até que possam generalizar os atributos essenciais que constituem o conceito cultural de “cachorro.” Neste caso, o signo cachorro (ou cachorrinho) é aprendido geralmente antes do conceito, mas o inverso pode ocorrer para outros conceitos, tais como argumento ou mamífero. (AUSUBEL, 1980, p. 47, grifo do autor)

Nessa perspectiva teórica da imagem conceitual e da definição conceitual, percebemos as suas similaridades com os subsunçores existentes na estrutura cognitiva dos aprendizes e o princípio da assimilação da teoria ausubeliana, pois tanto no PMA quanto na TAS, a aprendizagem ocorre individualmente, ou seja, a imagem conceitual, no PMA, restringe apenas o indivíduo e as relações com os conceitos e proposições para a sua própria aprendizagem; na TAS, a aprendizagem se torna significativa, quando o aprendiz estabelece por si próprio, de maneira não arbitrária e substantiva, os novos conceitos com os subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva.

Numa atividade matemática, noções matemáticas não são apenas usadas de acordo com suas definições formais, mas também o são por meio de representações mentais que podem divergir de pessoa para pessoa. Estes modelos individuais são elaborados a partir de modelos espontâneos (modelos que existem antes da aprendizagem da matemática, e que se originam, por exemplo, na experiência cotidiana) que interferem na definição matemática. (TALL, 1992, p. 496, tradução nossa)

Assim, a imagem conceitual e a definição conceitual, na perspectiva do pensamento avançado, estabelecem relações feitas por um indivíduo ao ouvir palavras (função, casa, florestas, etc.), ler o enunciado de um teorema matemático ou assistir a um vídeo, através de associações aos conceitos e aos subsunçores existentes na estrutura cognitiva, nos remetendo a identificar, assim, alguns dos tipos e formas existentes na aprendizagem significativa (seção 3) Para compreender melhor como ocorrem essas relações na

aprendizagem de um indivíduo, Vinner (1991) construiu modelos esquemáticos<sup>20</sup>, denominando-os de **formal**, **intercambio intuitivo** e **Real**. (TALL, 1991a; VINNER, 1991) Assim, muitos pesquisadores (DIAS, 2002; GIRALDO; CARVALHO, 2002; MEYER, 2003; SOUZA; SILVA, 2007) utilizaram, em seus estudos, os conceitos e idéias de Tall e Vinner (1991) Abaixo, vemos a concepção de Dias (2002) sobre as relações entre as células da imagem conceitual e as da definição conceitual:

O conceito definição pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem que ele e a definição do conceito tenham necessariamente significados coincidentes, ou ainda, o conceito definição pode ser uma descrição do conceito imagem. O conceito definição é considerado inexistente quando ainda não é formado ou esquecido. O conceito definição, também, pode existir e ser inativo, como a memorização de uma definição. A formação do conceito definição pode ocorrer no ato em que o indivíduo é questionado para explicar um conceito. ( p.3)

Nas denominações citadas no parágrafo anterior, para as relações entre a imagem e a definição conceitual, Vinner (1991, p. 71) cita uma relação de intercâmbio para as duas células e acredita que “Quando uma tarefa cognitiva é colocada para um estudante, espera-se que as células da imagem conceitual e da definição conceitual sejam ativadas.”

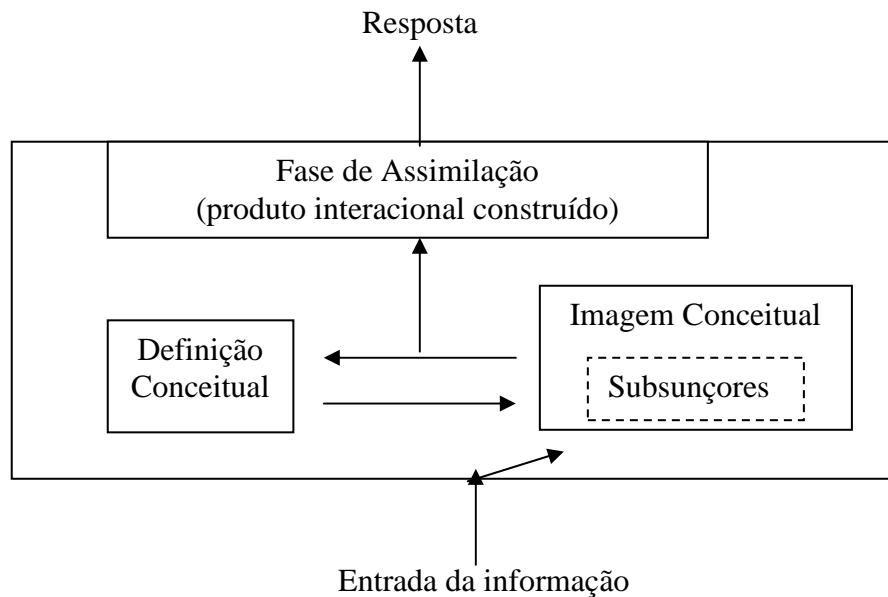
Com base nas características da TAS, apoiadas nas idéias e modelos de Vinner (1991) e nas discussões decorridas em sala de aula com colegas, professores e especialistas<sup>21</sup> que discutem sobre o tema, sugerimos uma proposta de interação da célula da imagem conceitual com a da definição conceitual. A nossa proposta utiliza as interações entre a imagem conceitual e a definição conceitual, com a entrada da informação pela imagem conceitual, podendo existir interação desta com os subsunçores, localizados em seu interior, para depois com a definição conceitual, resultando, assim, em um produto interacional das relações obtidas entre as duas células. Este produto retido num quadro denominado “Fase de Assimilação” passa por um processo análogo ao do **princípio de assimilação** [ver quadro 3, na seção 3.5], através da **diferenciação progressiva** e da **reconciliação integradora** na TAS (AUSUBEL, 1980).

---

<sup>20</sup> Ver em anexo A.

<sup>21</sup> Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP – MG, Prof<sup>a</sup>. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto – UFRJ – RJ

Na Figura 3, abaixo, de forma esquemática, mostramos a proposta:



**Figura 3 - Interação entre definição e imagem conceitual na perspectiva da aprendizagem significativa**

Fonte: Própria (baseado nos modelos de Vinner, 1991. Ver em anexo A)

A partir da Figura – 3, observamos que os subsunçores, como parte da imagem conceitual, se justificam devido ao fato de que a imagem conceitual constitui a estrutura cognitiva total na mente de um aluno. (GIRALDO; CARVALHO, 2002; TALL; VINNER, 1991) Nessa perspectiva, vemos os subsunçores como uma possível **unidade cognitiva**, ou seja, “cada uma das porções da estrutura cognitiva em que um indivíduo foca atenção para desenvolver uma idéia matemática” (TALL; BARNARD, 1997 apud, GIRALDO; CARVALHO, 2002, p.103) Os autores exemplificam, através do gráfico de uma equação do segundo grau – uma parábola – com ela constituindo uma unidade cognitiva – ancoradouro, subsunçor – e, possivelmente, contribuindo para a formação da imagem mental do gráfico associada a uma dada função quadrática. Para Giraldo e Carvalho (2002, p.103), “a mente humana é capaz de focar a atenção num pequeno número de unidades cognitivas ao mesmo tempo. A formação de uma imagem conceitual rica provém do estabelecimento do maior número possível de correlações dentro das unidades cognitivas e entre elas.”



### 3.6.1.2 Como fica o ensino e aprendizagem do Cálculo nessa perspectiva?

Segundo Tall; Smith e Piez (2008), a pesquisa em Cálculo, a nível universitário, é de uma safra mais recente do que a pesquisa em ensino e aprendizagem de Matemática. Os autores analisaram os resumos de 40 dissertações concluídas, nos últimos dez anos, sendo que 29 foram estudadas mais profundamente. Nestas foi identificado o aparecimento de algumas idéias e categorias de análise interessantes para os autores, por exemplo: 4 delas mostraram que as tecnologias foram usadas de forma inadequada, não contribuindo para aprendizagem de conceitos matemáticos, na disciplina de Cálculo; 2 mostraram-se parcialmente inclinadas a alguma mudança, na postura dos estudantes em aprender; 15 provaram que a tecnologia integrada, inteligentemente, com o currículo e a pedagogia produz ganhos mensuráveis à aprendizagem e 8 mostraram uma relação concentrada apenas no uso de calculadoras gráficas e computadores, sem muitos ganhos na aprendizagem.

Analisando, por esse viés, o nosso estudo compreende uma pesquisa que utiliza a tecnologia integrada numa abordagem educacional, visando à aprendizagem significativa; esperamos que nossa pesquisa se situe na maior das categorias vistas, a que apresentou 15 pesquisas, das 29 analisadas pelos autores. Nesta seção, apresentaremos algumas das pesquisas realizadas pelo grupo do PMA, correlacionando-as com a TAS e identificando, através destas, pontos convergentes no ensino de Cálculo, com o foco em nosso estudo.

Tall (1992) define como foco principal da Educação Matemática, em níveis superiores, a iniciação do aprendiz na compreensão do mundo matemático profissional, não só no rigor que é exigido, mas também na vivência e experiência que fundamentam os conceitos. Assim, o autor descreve a transição que ocorre entre duas componentes fundamentais, caracterizadas por ele de definições Matemáticas precisas e de dedução lógica de teoremas a partir destas. Ele discute, também, da interferência das experiências dos alunos, antecedendo ao contato com as definições formais, gerando dificuldades na compreensão de certos conteúdos, inclusive limites, continuidade, noções de funções e geométricos, citando trabalhos realizados de outros autores que abordam essas questões; por exemplo, de um teste feito por Barnes (1988 apud TALL, 1992), no qual estudantes do ensino médio e universitário foram questionados a respeito da possibilidade das representações  $y = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  e de uma função definida por várias sentenças representar o  $y$  como função de  $x$ . O resultado deste teste analisado pelo pesquisador identificou que:

[...] a maioria decidiu que a primeira não definia, porque o valor de  $y$  não dependia do valor de  $x$ , muitos decidiram que a segunda é uma função (porque é um círculo que é familiar), enquanto a terceira apresentou dificuldades porque parecia definir não uma função, mas várias. (p. 502-503)

Os resultados desse teste empírico indicaram a necessidade de reflexões sobre questões que versam compreender, no aluno, as influências da imagem conceitual para a definição conceitual, levando em consideração as experiências do cotidiano desse aluno e do seu conhecimento prévio (TALL, 1992) Ainda com base nessas experiências, Tall (1992, 1991c) escreveu um artigo, abordando as relações entre rigor e intuição, considerando que uma das razões para a dificuldade de estabelecer uma boa relação entre esses conceitos, no ensino de Cálculo, é gerada por um problema de compreensão e entendimento, no funcionamento cognitivo de um indivíduo, ou seja, o que é intuitivo, para especialistas e professores, não necessariamente será, também, para o aprendiz, apesar deles acharem que seja.

A intuição é uma ressonância global no cérebro e que depende da estrutura cognitiva do indivíduo, que por sua vez também é dependente da experiência anterior do indivíduo. Não há razão para supor que o novato terá as mesmas intuições que o experiente, mesmo considerando aparentemente simples percepções visuais. Pesquisas em educação matemática mostram que as idéias dos alunos sobre vários conceitos não é o que se poderia esperar. Por exemplo, porque a idéia formal de limite é difícil de compreender nas fases iniciais do cálculo, é ainda introduzida geralmente através de idéias visuais, como a derivada pode ser vista como o limite de uma seqüência de secantes se aproximando de uma tangente. (TALL, 1991c, p.5, tradução nossa)

Assim, o autor idealiza apelarmos para o visual, pois “A idéia é fazer um apelo ao poder de padronização visual do lado direito do cérebro metafórico, de tal forma que coloque intuições apropriadas para servir a dedutibilidade lógica da parte esquerda do mesmo.” (TALL, 1991c, p. 8, tradução nossa) Para isso, o autor sugere que, em vez de solucionarmos esses problemas apresentando conceitos matemáticos mais simples de Cálculo, paradoxalmente, deveríamos apresentar os mais complicados. Essa metodologia um pouco inusitada e diferente da que estamos habituados, segundo o autor, despertará cognitivamente no aprendiz o entendimento dos conceitos de Cálculo e, posteriormente, uma melhor compreensão para alguns dos detalhes nas demonstrações formais desses conceitos.

Para a relação entre a intuição e o rigor, na ótica da aprendizagem significativa, Costa (2005, p.18) entende intuição como “[...] uma estrutura cognitiva complexa cujo papel é organizar informação disponível (mesmo incompleta) em representações praticamente significativas, auto-evidentes, internamente consistentes, notoriamente coerentes.” Ausubel (1980) corrobora as idéias desses autores nas relações de intuição com dedução, ressaltando e questionando o uso, apenas, de um método indutivo puro, na solução de problemas, acreditando que este deva estar associado, possivelmente a outros métodos como o dedutivo e o formal.

Ausubel (1980) aborda um questionamento a respeito do princípio de assimilação constituir um processo indutivo ou dedutivo. O próprio autor responde dizendo que esse princípio não corresponde a um processo indutivo, mas, por essa negação, não o caracteriza como um processo dedutivo, afirmando que “[...] independentemente do fato de novas proposições serem adquiridas indutiva ou dedutivamente, suas incorporações na estrutura cognitiva ainda segue, sempre que possível, o princípio de diferenciação progressiva.” (AUSUBEL, 1980, p. 116)

Os seres humanos raramente partem do zero ao enfrentarem novos problemas. Ou empregam princípios explicativos explícitos (hipóteses) sobre uma base provisória e tentam adaptar os dados a estas hipóteses, ou, pelo menos, são orientados implicitamente, desde o início, por um conjunto de suposições gerais derivadas das experiências passadas. Neste sentido, portanto, a solução indutiva de problema propriamente dita pode ser considerada como uma fase subsidiária dentro de uma abordagem geralmente dedutiva. (AUSUBEL, 1980, p. 116)

Com isso, percebemos convergências das concepções de conceitos cognitivos do PMA (TALL, 1992, 1991c) com a teoria de Ausubel (1980), quanto à solução de problemas, partindo de um método indutivo-dedutivo e estendendo-o, posteriormente, para uma fase de generalizações, tentando formalizar (rigor) as concepções e conjecturas geradas nesse processo.

As idéias de Pinto e Tall (2002) caracterizam um estudo de caso, em que um aprendiz utilizou as suas próprias imagens mentais por visualizações espaciais, para obter um formalismo em questões e problemas matemáticos; “Ao invés de construir novos objetos a partir de processos cognitivos, ele reflete sobre os objetos mentais que já estão em sua mente e aprimora-os para construir sua própria interpretação da teoria formal.” (p. 1, tradução nossa) Esse estudo baseou-se nos dados da tese de doutorado da autora, que constituiu uma pesquisa qualitativa, na compreensão dos aprendizes a respeito de

conteúdos da análise real. A pesquisa mostrou que existem alunos que utilizam estratégias totalmente diferentes, na formalização de um conceito, a partir da sua definição, isto é, enquanto alguns utilizam construções algébricas e algorítmicas, outros recorrem à representações visuais e ao seu imaginário, para a compreensão e obtenção de uma dedução formal.

No estudo da definição do limite de uma seqüência, analisada pela ótica de um aprendiz, a pesquisa concluiu que este tenha construído uma forte ligação entre o verbal e o visual, não, apenas, na reprodução de uma definição formal, mas numa poderosa estrutura de conhecimento, constantemente sendo reconstruída e revista e que, certamente, poderá ser utilizada por ele, em outros contextos. (PINTO; TALL, 2002)

Para resumir, Chris nome do aprendiz interpreta a definição em termos de seu velho conhecimento, explora o conceito através da experiência de pensamento e reconstrói a sua compreensão da definição do conceito. Ele comprime informações em uma imagem, que ele evoca ao escrever as definições no papel. (PINTO; TALL, 2002, p. 8, grifo do autor, tradução nossa)

Com isso, os autores utilizaram a Psicologia Cognitiva para explicar como o aprendiz utilizou o pensamento avançado, através da imagem conceitual e das relações mentais imaginárias de abstração, para um refinamento e busca de uma solução para o conceito investigado; é partir daí que vemos pontos convergentes de aprendizagem significativa, quando os autores afirmam, na citação, que o aprendiz utilizou o seu velho conhecimento (subsunçores), explorando o conceito, interagindo com a nova informação (princípio de assimilação) e fazendo uma reconstrução (reconciliação integradora) para compreender a definição do conceito, ou seja, o aprendiz utiliza os subsunçores (imagem conceitual) existentes na sua estrutura cognitiva e, por um processo de reconciliação integradora, ele consegue alcançar uma formalização para as interações entre a imagem conceitual e a definição do conceito.

O estudo de Giraldo; Carvalho e Tall (2003), na perspectiva do PMA com a utilização de computadores, diagnosticou algumas limitações intrínsecas nas descrições obtidas e visualizadas pelo computador a certos conceitos matemáticos, porém, segundo os autores, isso gera um conflito útil no enriquecimento da imagem conceitual dos aprendizes. Os autores denominaram este conflito de **teórico-computacional**, que consiste em “qualquer situação pedagógica com a aparente contradição entre a teoria matemática e a

representação computacional de um conceito dado.” (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2003, p. 445, tradução nossa)

Eles exemplificam esse conflito, em seus estudos, com a experiência de um aprendiz que, quando perguntado a ele sobre a diferenciabilidade de uma função, dada sua expressão algébrica, afirmou que seria uma função diferenciável, se fosse possível aplicar fórmulas conhecidas e avaliar a derivada da função. Posteriormente, o aprendiz foi questionado sobre como poderia decidir sobre a diferenciabilidade dessa função, se fosse dado o gráfico da função na tela do computador, em vez da expressão; ele afirmou que iria ampliar o gráfico e ter o maior cuidado para visualizar, mas seria impossível ter a certeza, uma vez que os computadores não são perfeitos.

Os autores concluíram a evidência do conflito, visto que o aprendiz escolheu a resolução para a diferenciabilidade da função por métodos algébricos, porém advertem que a experiência com esse aprendiz não pode ser generalizada, uma vez que outros alunos não conseguiram identificar nenhum conflito e/ou nem perceberam limitações, quando estudado, a diferenciabilidade da função pelo computador. Assim, os autores propõem que a identificação desses conflitos pelos aprendizes sirva como um instrumento para enriquecer suas imagens [conceitual e definição] e obter, através destas, um raciocínio rico para a formalização de um conceito ou teorema matemático. (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2003)

Com base na proposta sugerida pelos autores, no parágrafo anterior, e nas idéias de que, em uma situação pedagógica, temos como objetivo o aprendizado de certo conceito ou teorema matemático; assim, buscamos analogias com a TAS e encontramos a sugestão de Ausubel (1980) para que exista um **material potencialmente significativo** para dar significados ao conceito de um teorema proposto e que este seja encontrado nas partes componentes que o formam, como um todo.

[...] na grande maioria das tarefas da aprendizagem potencialmente significativa, as partes componentes do material são também significativas; entretanto, nesses casos, a tarefa como um todo é apenas potencialmente significativa. Por exemplo, no aprendizado de um novo teorema geométrico, cada uma das partes componentes já é significativa, mas a tarefa como um todo (compreender o teorema) ainda está por ser realizada. Conseqüentemente, o material já significativo, assim como suas partes componentes também significativas, podem ser percebidos, ou de outro modo, pode-se reagir a eles significativamente, embora não possam ser compreendidos. (AUSUBEL, 1980, p. 42, grifo do autor)

Analisando essa sugestão e comparando-a destas com o conflito **teórico-computacional**, citado anteriormente, entendemos que a visualização obtida pelas representações computacionais com as suas devidas interpretações consista, também, em partes significativas do conceito ou teorema estudado e que **possam** e **devam** ser **potencialmente significativas** para dar condições necessárias à ocorrência da aprendizagem significativa.

Em busca de uma relação com esta aprendizagem e numa tentativa de amenizar esses conflitos, Tall (1991c) sugere o uso de um recurso de plotagem de gráficos com precisão, a fim de evitar as possíveis dúvidas conceituais, erros de visualização ou algum conflito teórico-computacional nesses gráficos e, ainda, de favorecer uma melhor interação entre as imagens conceituais e as de definição. Em estudos mais recentes, Giraldo; Carvalho e Tall (2003) apresentam meios e formas de utilizar esses conflitos em prol da aprendizagem dos estudantes.

O autor desenvolveu uma pesquisa com estudantes, procurando visualizar geometricamente, na tela de um monitor gráfico, qual o valor da ordenada dado o valor da abscissa igual a 1 [ $y = ?$ ,  $x = 1$ , analisando visualmente na tela do computador]. Sabendo da dificuldade em localizar o valor da ordenada correspondente ao valor dado da abscissa, apenas com uma janela exibida na tela do computador, foi sugerida a criação de outra janela com o mesmo gráfico, porém mais ampliada [utilizou o zoom do *software*], aumentando, assim, o campo de visão e análise para o ponto investigado. Contudo, o autor observou que a experiência levou a uma análise e diferença identificada na linha do gráfico da janela original, em comparação à da janela ampliada, sendo que esta última apresentou a curva mais reta, com menos partes “quebradas” do que a janela original.

Sobre as questões cognitivas desenvolvidas pelos estudantes que participaram dessa experiência, o autor concluiu que:

Esses aprendizes agora têm um conjunto de idéias significativamente muito diferente de outros aprendizes que são tradicionais. Eles são capazes de passar o olho ao longo de um gráfico e ver a sua evolução gradativa. Sua intuição visual é nítida. (TALL, 1991c, p.8 – 9, tradução nossa)

Dessas pesquisas estudadas e comentadas, surgem pontos relevantes para outras pesquisas contemporâneas, que tratam sobre o assunto. Embora existam diversos pontos de convergência nas interpretações dos dados coletados, em outra pesquisa, mais recente, em parceria com os estudiosos do PMA, buscou uma conceituação para o ensino de Cálculo,

afirmando ser necessário, a priori, compartilhar e compreender os seus conceitos com a comunidade de matemáticos e como estes são construídos individualmente. Para isso, os autores apresentam os estudos de Lakoff e Nunez (2000 apud TALL; SMITH; PIEZ, 2008), identificando que todas as idéias, fundamentalmente Matemáticas, são construídas a partir de origens humanas, usando ligações entre as idéias, conceitos e pensamentos como metáforas. Por exemplo, eles analisaram os números reais como uma "mistura metafórica", ou seja, essa mistura segundo os autores é composta de

[...] duas metáforas muito diferentes, uma é a metáfora geométrica visual da linha "real" e a outra é a metáfora numérica construída das atividades de contagem e medição dos números. Estes sistemas matematicamente isomórficos são cognitivamente muito diferentes. Numericamente um ponto não tem tamanho, mas geometricamente eles se encaixam para dar um intervalo de comprimento nulo. (LAKOFF; NUNEZ, 2000 apud TALL; SMITH; PIEZ, 2008, p.7, tradução nossa)

Diante de um conflito como esse, entre o formalismo e a estrutura visual, o matemático formal desconfia de uma distorção na teoria formal das demonstrações visuais, porém alguns dos seus colegas ou aprendizes utiliza essa “mistura metafórica.” Em busca de uma solução para essa situação, duas alternativas são oferecidas:

Uma delas é tomar um aspecto puramente formal e lidar exclusivamente com símbolos matemáticos e declarações quantificadas, que se provou ser notoriamente difícil para a maioria dos alunos. O outro é o de educar a intuição visual para que ela seja sólida o suficiente para que se construa sobre ela. As duas estratégias têm sido implementadas usando tecnologia, levando a diferentes abordagens para o cálculo. (TALL; SMITH; PIEZ, 2008, p. 7, tradução nossa, grifo nosso)

Com isso, esperamos que nossos estudos contribuam com as pesquisas já realizadas sobre imagem conceitual e definição conceitual do PMA e que possamos utilizar a segunda estratégia (grifada), da citação de Tall; Smith; Piez (2008), para os aprendizes obterem uma boa intuição nas visualizações gráficas, através de um *software*, conseguindo fazer interações com os subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva, gerando conjecturas, hipóteses, deduções e justificativas formais, para os conceitos de funções reais de duas variáveis. Surgiu como objetivo desta seção, também, elaborarmos um aporte teórico para subsidiar os estudos desenvolvidos no caminhar desta pesquisa, através das discussões abordadas sobre os conteúdos de Cálculo, através da utilização de uma tecnologia informática, sob o olhar da TAS, conjuntamente com as pesquisas do PMA.

## 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

### 4.1 Retomando a Questão de Investigação e o Objetivo da Pesquisa

**Como o uso de um *software* e de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráficos no IR<sup>3</sup>, de estudantes de Cálculo de várias variáveis?**

O objetivo da pesquisa consiste em investigar como o uso de um *software* em conjunto com a aplicação de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir e favorecer as relações dos subsunçores/conhecimentos prévios dos estudantes – de Cálculo de várias variáveis – com as construções, análises, interpretações e compreensões de conceitos matemáticos em gráficos do IR<sup>3</sup>.

À luz da questão de investigação e do objetivo da pesquisa, nossos estudos focam as relações de ensino e aprendizagem entre professores e alunos, a fim de oferecer um produto que contemple uma abordagem pedagógica, na perspectiva da teoria da aprendizagem significativa e de uma metodologia com atividades de ensino, através de uma tecnologia informática, para ser utilizada em Instituições de Ensino Superior, em turmas da disciplina de Cálculo.

### 4.2 A Opção Metodológica

A pesquisa apresentou uma metodologia qualitativa, apoiada em aspectos metodológicos de experimentos de ensino. O caráter qualitativo surgiu devido a alguns fatores determinantes na pesquisa, como: a obtenção dos dados de forma descritiva; o contato direto do pesquisador com a situação ou o objeto de estudo; uma maior valorização no processo do que no produto final e uma descrição das perspectivas dos sujeitos de pesquisa. (BOGDAN; BIKLEN, (1994); LÜDKE; ANDRÉ, 1986)

Para Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002, p.163) “As pesquisas qualitativas são características multimetodológicas, isto é, usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados.” Segundo Lüdke e André (1986), as escolhas dos métodos dependem do problema e da questão que vai ser investigada, pois os



autores afirmam que a investigação desenvolve-se numa fase exploratória, sucedendo para a decisória e a da descoberta.

A coleta de dados foi desenvolvida por meio de três métodos: **observações, entrevistas semi-estruturadas e aplicações de instrumentos de coleta**, estes intitulados de Atividade – 1 e Atividade – 2, para estudantes de Cálculo de várias variáveis, na forma de teste. Os métodos de coleta de dados utilizados apresentam similaridades com os métodos da entrevista clínica de Piaget e com os experimentos de ensino, porém Barbosa (2009) acredita que o experimento de ensino é mais do que uma entrevista clínica e se diferencia desta “[...] pelo fato de ser direcionado para o progresso dos estudantes e não para o conhecimento corrente dos estudantes, como se dá na entrevista clínica. Seu foco principal é a análise do raciocínio desses estudantes” (p.87). Com base nisso, caracterizamos a natureza da pesquisa realizada em qualitativa, sob alguns aspectos da metodologia de experimentos de ensino.

#### 4.2.1 Experimentos de ensino

O Experimento de ensino é um procedimento metodológico de coleta dos dados, que consiste em uma série de encontros entre os estudantes e o pesquisador por um determinado período de tempo. Nesses encontros, o pesquisador promove uma investigação sobre o modo como os estudantes produzem seus conhecimentos no processo de exploração de atividades pré-elaboradas (BARBOSA, 2009, p.86).

A metodologia de experimentos de ensino emergiu, na década de 70, com a estratégia de relacionar conteúdos com aprendizagem. O contato e a interação entre o pesquisador e o estudante, tanto favorecem o aprendizado deste último, como a obtenção e análise de dados em estudos de pesquisadores que utilizam a metodologia (STEFFE; THOMPSON, 2000; BENEDETTI, 2003; BARBOSA, 2009).

Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial no experimento de ensino (BARBOSA, 2009, p. 87).

Atualmente, muitas pesquisas qualitativas (STEFFE; THOMPSON, 2000; BENEDETTI, 2003; BARBOSA, 2009), no ensino de Matemática e em Educação Matemática utilizam características e aspectos da metodologia de experimentos de ensino. Esta metodologia apresenta atividades pré-elaboradas, com questões abertas e com o objetivo de que o estudante faça conjecturas que vão além dos quesitos propostos na atividade. Ratificando a idéia de Barbosa (2009), o papel do professor pesquisador, neste experimento, é de estar atento às questões e situações não previstas, anteriormente, na elaboração das atividades e, também, de hipóteses que surgirão com o uso dessa metodologia, respeitando as idéias e os procedimentos dos estudantes. Essas hipóteses são tarefas do professor em se colocar no lugar dos estudantes, agindo como se fosse um deles e “[...] tentando perceber de que forma agem e pensam em relação aos fatos apresentados. Isso não quer dizer que o pesquisador não tenha algumas hipóteses pré-estabelecidas, porém elas devem ser deixadas de lado durante o desenvolvimento do experimento de ensino” (BARBOSA, 2009, p. 88).

Barbosa (2009) aponta que, apesar da literatura indicar que o período de tempo utilizado nos experimentos costuma ser extenso (de um semestre a um ano), há pesquisas (BENEDETTI, 2003; MENK, 2005; OLIMPIO, 2006; SCUCUGLIA, 2006; VILLARREAL, 1999) “[...] que utilizaram uma variação desse procedimento, na qual os alunos puderam ser filmados e observados atentamente em períodos de tempo que dependiam das atividades e dos objetivos propostos por cada pesquisa” (BARBOSA, 2009, p.86). Assim, observou-se que nas pesquisas citadas pela autora o tempo necessário e utilizado para os métodos de experimentos de ensino se tornou bem flexível, dependendo dos objetivos e focos em cada estudo. Benedetti (2003), por exemplo, realizou atividades através de experimentos de ensino, em pouco mais de 1 mês, sobre os conteúdos de funções. Este exemplo justifica o tempo de 3 meses, aproximadamente, utilizado para a coleta de dados em nossa pesquisa.

Assim, de acordo com a fundamentação teórica, abordada nesta subseção, sobre a metodologia de experimentos de ensino e os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa ratificamos, que, estes apresentaram aspectos similares a essa metodologia.

#### 4.2.2 Escolha dos métodos de coleta de dados

A escolha do método de observação serviu para proporcionar uma maior aproximação entre o pesquisador e o seu objeto de estudo, além de auxiliar na elaboração e no desenvolvimento dos instrumentos de coleta, através da identificação de elementos e características que pudesse traçar o “perfil” da turma e descrever aspectos cognitivos observados no ambiente de aprendizagem, inerentes ao ensino de Cálculo. Para Lüdke e André (1986), tanto a observação, quanto as entrevistas são destaques em esquemas educacionais e, ainda, sendo usadas com outros métodos de coleta, possibilitam um contato pessoal e estreito do pesquisador com o seu objeto de estudo.

A observação direta permite também que o observador chegue mais perto da “perspectiva dos sujeitos”, um importante alvo nas abordagens qualitativas. Na medida em que o observador acompanha *in loco* as experiências diárias dos sujeitos, pode tentar apreender a sua visão de mundo, isto é, o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 26, grifo do autor)

O tipo de observação característico dos estudos qualitativos, porém, é a observação não-estruturada, na qual os comportamentos a serem observados não são predeterminados, eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2002, p. 166).

Ausubel (1980) afirma que, para a ocorrência da aprendizagem significativa é necessário materiais potencialmente significativos; que os aprendizes devem promover uma interação de nova informação com os conhecimentos existentes na sua estrutura cognitiva e que o produto dessa interação caracteriza fortemente a existência e a possibilidade para tal aprendizagem.

Assim, construímos instrumentos de coleta potencialmente significativos como base para a existência e ocorrência da aprendizagem significativa em nossos estudos; para isso foi necessário que os conteúdos das atividades e do **roteiro**<sup>22</sup> fossem claros, objetivos e que, nas questões propostas neles, o grau de dificuldade e abstração aumentasse gradativamente.

Na condução do desenvolvimento e mediação da aula ocorrida no laboratório, elaboramos um roteiro para servir ao pesquisador como guia, que consiste num exemplo de

---

<sup>22</sup> Roteiro do professor-pesquisador (ver em apêndice C).

tutorial, orientando o professor/pesquisador, no laboratório, a mediar uma prática pedagógica com os estudantes, nos procedimentos das tarefas a serem executadas no computador por eles, através da manipulação de ferramentas do *software* na construção, interpretação e análise de gráficos do  $\mathbb{R}^2$  e do  $\mathbb{R}^3$ . As atividades desse roteiro serviram, também, para que os alunos tivessem contato com o *software*, conhecendo a sua operacionalidade e aplicabilidade. O seu conteúdo se mantém aberto e flexível, de modo que o professor de Cálculo que for utilizá-lo, em sua prática, poderá modificá-lo, reestruturando-o ao seu modo e da conveniência do público que se destina, pois, para a elaboração do roteiro utilizado na pesquisa, usamos como guia as Atividades – 1 e 2 e estas, por sua vez, foram desenvolvidas com os conteúdos matemáticos propostos na pesquisa, no sentido de existir uma complementaridade entre elas.

As perguntas/questões da Atividade – 1 foram construídas com base nos conceitos da TAS, apresentados no capítulo 3, com o objetivo de induzir o aprendiz a refletir, conjecturar e construir gráficos de funções reais de duas variáveis (superfícies), a partir de conteúdos matemáticos – gráficos do  $\mathbb{R}^2$ , cônicas, expressões analíticas, funções – e dos conhecimentos prévios do  $\mathbb{R}^2$ , e de identificar os subsunçores existentes na estrutura cognitiva desse aprendiz e os aspectos ligados ao seu cotidiano e vivência, fora do ambiente escolar, para a ocorrência da aprendizagem significativa. A Atividade – 1 serviu como um guia/orientação para a elaboração do roteiro do pesquisador e, também, como complemento para a Atividade – 2.

O objetivo da Atividade – 2 foi de avaliar os trabalhos realizados no laboratório, durante a Atividade – 1, dando continuidade à construção e interpretação de gráficos e superfícies no  $\mathbb{R}^3$ , orientado pelo roteiro. A Atividade – 2, também de cunho investigativo, procurou compreender as relações entre os aspectos da TAS, servindo como avaliação para a elaboração de novos roteiros e/ou aprimoramento do que foi utilizado na pesquisa.

Para a última fase da coleta de dados, optamos pelas entrevistas, visando obter mais informações a respeito das conjecturas geradas nos diálogos e conversas informais entre os aprendizes e, também, compreender os seus pensamentos (idéias) nas respostas dadas às atividades realizadas no laboratório de Informática.

A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. Uma entrevista bem-feita pode permitir o tratamento de assuntos de natureza

estritamente pessoal e íntima, assim como temas de natureza complexa e de escolhas nitidamente individuais. Pode permitir o aprofundamento de pontos levantados por outras técnicas de coleta de alcance mais superficial, como o questionário (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

As entrevistas ocorreram de forma semi-estruturada, ou seja, com algumas partes mais estruturadas e outras menos. Pois estas caracterizam-se em perguntas específicas feitas pelo pesquisador, porém favorecendo uma “liberdade” ao entrevistado, para ele falar livremente as suas idéias e pensamentos, em seus próprios termos (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2002).

### 4.3 O *Software*

Para a escolha do *software*, levamos em consideração a sua aplicabilidade e limitação em nossos estudos. A partir daí, escolhemos o Winplot devido a sua facilidade de manuseio e acessibilidade, como foi dito anteriormente no item 1.1. Além disso, acreditamos que ele ofereça a possibilidade de investigarmos as suas contribuições na aprendizagem significativa dos aprendizes, para a construção de gráficos do IR<sup>3</sup>, através das relações entre os subsunçores/conhecimentos prévios dos aprendizes e gráficos do IR<sup>2</sup>.

Na pesquisa de doutorado de Barbosa (2009), sobre o estudo da regra da cadeia (Derivadas), utilizando o Winplot, encontramos evidências de elementos da TAS, quando a autora afirma que o *software* apresentou uma dinamicidade na simulação de conteúdos matemáticos e estabeleceu ligações entre os conhecimentos prévios dos estudantes e os tópicos de outras disciplinas, nas relações e interações dos estudantes.

A dinamicidade presente no *software* Winplot proporcionou simulações desencadeando interpretações de padrões e estabeleceu uma ligação com propriedades sobre determinados tópicos que os alunos ainda não tinham conhecimento. Outras vezes, relacionavam o tópico abordado com um conhecimento prévio, interligando-o com outros tópicos de diferentes disciplinas, formando um todo característico da interdisciplinaridade. A produção do conhecimento matemático ocorreu nas discussões com o parceiro e, fundamentalmente, no processo de interpretação individual, expresso na forma oral, na forma escrita, ou na ação de trabalhar com o computador. Esse processo individual não significa um indivíduo sozinho, mas imbricado de todo um coletivo que pensa junto com ele (BARBOSA, 2009, p.160).

Para nossos estudos, o *software* Winplot oferece a possibilidade de construir diversos e diferentes gráficos em duas e três dimensões (ao digitarmos como dados de entrada as suas expressões algébricas). Através de seus comandos, podemos visualizar as suas representações gráficas na tela do computador. E, ainda, pelo uso de outras de suas ferramentas que auxilia a construção de simulações gráficas, através da entrada de **parâmetros** (letras) em lugar dos coeficientes das variáveis nas expressões analíticas, conseguimos manipular e visualizar várias representações gráficas, mudando apenas os coeficientes das variáveis, nas expressões dadas.

#### 4.4 Contexto

A pesquisa foi realizada no semestre de 2009.1, com uma turma de 14 estudantes matriculados<sup>23</sup> na disciplina de Cálculo II, do curso de Matemática, no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB) da UFOP, cujo professor foi o próprio orientador da pesquisa, o Professor Dr. Felipe Rogério Pimentel.

Todas as etapas da coleta de dados foram realizadas, entre dois a três meses, pelo pesquisador/orientando, em salas de aula, laboratório de Informática, Núcleo Interdisciplinar de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (NIEPEM) e na sala dos professores substitutos da UFOP, através de observações, atividades desenvolvidas na forma de testes e de entrevistas, perfazendo aproximadamente um tempo total de 40 horas/aulas; posteriormente, descreveremos as etapas de coleta, com suas respectivas durações.

Segundo o professor da disciplina, para não interferir no cumprimento da ementa do curso, que se apresentava atrasada, a realização das atividades ocorreram em períodos extra classe. As atividades (Atividade 1 e Atividade 2<sup>24</sup>) ocorreram no NIEPEM e as do roteiro foram realizadas no laboratório de Informática. Todas elas foram confeccionadas e elaboradas, especificamente, para os nossos estudos, oferecendo a possibilidade e o intuito de serem utilizadas por professores de IES que atuarem na disciplina de Cálculo.

---

<sup>23</sup> Apesar da turma apresentar 14 estudantes matriculados, tivemos a participação de 11 deles (Cláudia, Cristian\*, Dago, Fabiane, Gilberto, Gláucia, Raissa, Rose\*, Sara, Tiana, Walda\* – pseudônimos, em ordem alfabética) no estudo desenvolvido. Usamos pseudônimos para identificar e preservar a identidade dos aprendizes participantes na pesquisa. (\* repetentes na disciplina)

<sup>24</sup> Esse instrumento de coleta foi elaborado a partir de atividades extraídas do livro *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. 3, (questões 37- 41 p. 9-10), do autor, Edwards & Penney.

As entrevistas ocorreram na sala 25 do ICEB – II, sala dos professores substitutos, da UFOP.

#### 4.4.1 Aprendizes participantes

O convite para participar da pesquisa de forma voluntária foi feito a uma turma, composta por 14 aprendizes, na faixa etária de 18 a 22 anos, porém apenas 11 deles aceitaram o convite. Denominamos de **aprendizes participantes**, todos eles foram esclarecidos sobre os objetivos e justificativa da pesquisa, dado o direito de desistirem, em qualquer etapa ou momento, ainda sob a garantia de privacidade e confidencialidade na omissão de suas identidades, através dos pseudônimos.

Os aprendizes participantes responderam às questões dos instrumentos de coleta, na forma de teste/questionário, utilizando em alguns momentos o lápis e papel e, em outros, o *software* Winplot, para confirmar as respostas dadas aos instrumentos de coleta.

Ainda dentre os aprendizes participantes, selecionamos três deles (Gilberto, Tiana e Walda), de maneira voluntária, para as entrevistas, a fim de obter mais informações e dados referentes ao objetivo da pesquisa.

### 4.5 Pesquisa de Campo

#### 4.5.1 Piloto das atividades

Fizemos um “piloto” das atividades no mês de outubro do ano de 2008, com uma turma de Cálculo II, da UFOP, composta por 26 aprendizes de diversos cursos, sendo a grande maioria de estudantes dos cursos de Engenharia.

A realização deste piloto foi bastante válida, pois os dados obtidos com as respostas dos aprendizes identificaram uma visível necessidade de consertos e modificações na estrutura dos instrumentos de coletas (atividades).

Na próxima seção, descreveremos o desenvolvimento metodológico da pesquisa de campo, apontando, em alguns momentos, na obtenção dos dados, os diálogos ocorridos durante as aplicações das atividades no laboratório de Informática.

#### 4.5.2 Descrição das etapas

Com base nos passos determinados de um projeto de pesquisa – que consistiu em um planejamento flexível e mutável – e nos dados de um piloto, realizado no semestre anterior, norteamos o andamento da pesquisa de campo.

O estudo da pesquisa remete-se ao conteúdo de funções reais de duas variáveis, mais especificamente, gráficos e superfícies no  $\mathbb{R}^3$ , conteúdo que, de acordo com o planejamento da disciplina, foi desenvolvido ao final do semestre de 2009.1.

##### 4.5.2.1 As observações em sala de aula

As observações nas aulas de Cálculo II, sob a regência do Prof. Dr. Felipe Pimentel, iniciaram-se no semestre de 2009.1, em março do ano vigente. As aulas ocorriam nas terças-feiras, no horário das 19h00min às 20h40min, e nas quintas-feiras, das 21h00min às 22h40min. Sendo assim, as observações foram realizadas, sempre, uma vez por semana, ou seja, escolhíamos o dia da semana (terça ou quinta) e assistíamos às aulas referentes a esse dia, intercalando uma aula observada entre outra não assistida. Com isso, acreditamos que esse espaço de tempo de uma aula observada para outra pudesse contribuir para uma coleta de dados mais sucinta, com informações necessárias e proveitosas para o estudo em questão, totalizando em 30 horas de observação em sala de aula.

As observações serviram para elucidar certos aspectos em nossos estudos, como as mudanças oriundas das relações de ensino e aprendizagem, no ambiente educacional, mais especificamente, detectar nos aprendizes fatores relevantes, tais como: motivações, dificuldades cognitivas com a disciplina, percepção, formas de compreensão, atenção, análise dos comportamentos no ambiente da sala de aula, atitudes, interações dialogadas, estados de humor, ansiedade e visão da metodologia e dinâmica adotadas pelo professor nas abordagens dos conteúdos.

Apesar de não ter existido um contato do pesquisador com os aprendizes, em todas as aulas, ocorreu em alguns momentos interferências, quando um aprendiz solicitava algo para resolver algum problema de Cálculo, ou sugestões para a resolução de um problema matemático exposto pelo professor e, ainda, em conversas informais com os aprendizes sobre o andamento do curso. Esses esporádicos momentos de contato não excluem a



inserção da categoria do método da observação não-participante, predominantemente ocorrida na pesquisa.

#### 4.5.2.2 Descrição na aplicação das atividades (Atividade – 1 e Atividade – 2): o esboço de uma análise inicial

Conforme Alves-Mazzotti e Gewandszajder (2002, p.170),

À medida que os dados vão sendo coletados, o pesquisador vai procurando tentativamente identificar temas e relações, construindo interpretações e gerando novas questões e/ou aperfeiçoando as anteriores, o que, por sua vez, o leva a buscar novos dados, complementares ou mais específicos, que testem suas interpretações, num processo de “sintonia” fina que vai até a análise final.

Baseados na visão desses autores, identificamos, ainda, na coleta de dados, mais especificamente, na aplicação das atividades, a “captação” de algumas informações, através dos diálogos dos estudantes e das suas conjecturas assinaladas. Contudo, daremos início nesta seção a um esboço da análise inicial dos dados obtidos.

Propomos um estudo, através de um *software*, na perspectiva da aprendizagem significativa em conjunto com os elementos da **imagem conceitual** e **definição conceitual** do PMA, em que o aprendiz estabeleça, a priori, algumas interações das novas informações contidas nas Atividades 1 e 2 – gráficos e superfícies em  $\mathbb{R}^3$  – com as idéias, conhecimentos prévios, pensamentos, intuições e os subsunçores ancorados na estrutura cognitiva. É importante que, com essas atividades, o aprendiz desenvolva uma visão dedutiva e formal desses conteúdos e que, a partir dessas interações, possamos, de forma gradativa, passar para um novo estágio que consiste na formalização dos conceitos matemáticos estudados em funções reais de duas variáveis.

Com a fase de observação adiantada, com os instrumentos de coleta reavaliados e modificados e com as aulas decorrendo sobre os conteúdos de **séries** – conteúdo da ementa do curso que, de acordo com o planejamento da disciplina, antecede o conteúdo de funções reais de duas variáveis – optamos em aplicar as atividades com o objetivo de que os estudantes passassem a ter um contato inicial com este conteúdo, explorando imagens conceituais e subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva, conforme o objetivo da pesquisa. As Atividades – 1 e 2 ocorreram em dois momentos – sábados consecutivos – com 4 horas/aula cada.

A Atividade 1, realizada no início do primeiro momento, composta de um material impresso, na forma de teste, foi dividida em duas etapas: a primeira etapa, através do *software* e de lápis/papel, os aprendizes responderam às questões matemáticas sobre os conteúdos de funções reais de **uma** e **duas** variáveis ( $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ ), com o objetivo de que eles pudessem utilizar os conhecimentos prévios de conceitos matemáticos, como funções e gráficos no  $\mathbb{R}^2$ , fazendo uma ligação destes com os conteúdos e conceitos de funções reais de duas variáveis ( $\mathbb{R}^3$ ), por exemplo; as questões iniciais da atividade abordaram os conteúdos matemáticos sobre a construção no plano cartesiano, cujas expressões foram:  $y = x^2$ ,  $y = 3$  e  $x = y^2$  e, depois, a fim de estabelecer uma conexão dos conhecimentos utilizados na construção destes gráficos com as superfícies em  $\mathbb{R}^3$  ( $z = x^2$ ,  $z = y^2$ ,  $z = x$  e outros). Essa atividade constou, também, de perguntas abertas sobre características específicas do  $\mathbb{R}^2$  e do  $\mathbb{R}^3$ , como: ausências de variáveis nas expressões analíticas e translação e rotação de eixos e de propriedades usadas nas representações gráficas das expressões algébricas citadas.

Depois de respondidas as questões da Atividade – 1, seguimos para o laboratório de Informática, para a etapa final desse primeiro momento, constituída pelo contato inicial dos aprendizes com o *software* Winplot, favorecendo-os na compreensão e aplicabilidade das ferramentas desta mídia. Com o uso do *software*, os aprendizes puderam avaliar, corrigir, verificar e comprovar, através das suas visualizações, as respostas dadas nas questões da Atividade – 1. Ainda no laboratório, o pesquisador mediador sugeriu, aos aprendizes, através de um roteiro de atividades, que eles fizessem um esforço individual (sem o uso do *software*) para imaginar/abstrair os desenhos das superfícies gráficas correspondentes às expressões analíticas mencionadas pelo pesquisador e associá-las aos conceitos e conteúdos de gráficos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Com isso, iniciou-se um diálogo entre pesquisador/aprendiz e aprendiz/aprendiz, com alguns momentos surpreendentes. Exemplificaremos uma situação em que foi perguntado aos aprendizes:

“Como se apresenta, ou como vocês imaginam o gráfico em  $\mathbb{R}^3$ , correspondente à expressão analítica  $z = x$  ?”

Alguns estudantes começaram a fazer conjecturas em voz alta, numa forma de diálogo entre eles. Em uma dessas discussões, um dos aprendizes respondeu ao pesquisador, indagando:

“*Seria um plano?*” (Gilberto).

Levando em consideração que esta resposta-interrogativa não surgiu de forma tão imediata, e que nem todos os participantes compreenderam o que se passou no pensamento do colega (o quê? por quê? em quê? e como?) para levantar tal conjectura, o pesquisador utilizou a hipótese mencionada e mediou a turma para uma discussão sobre a idéia do aprendiz, gerando outras respostas, do tipo:

“*Professor, eu sei que a função  $z = x$  no  $\mathbb{R}^2$  será uma reta, mas no  $\mathbb{R}^3$  vai ser...*”[pensando] (Sara)

Depois de certo tempo de reflexão entre os estudantes e da mediação do pesquisador, com o objetivo de que os alunos conseguissem individualmente ou coletivamente chegar a uma conclusão homogênea e aceitável sobre o assunto, a turma ficou pensativa por um momento e, posteriormente, alguns aprendizes afirmaram que a representação gráfica da expressão  $z = x$  seria realmente um plano; os demais confirmaram a veracidade da hipótese, com a construção e visualização da superfície, no *software* Winplot, comparando-a com as suas conjecturas individuais, anteriores.

Em outro momento do diálogo, foi perguntado aos aprendizes:

“*Como é o desenho do gráfico correspondente às expressões analíticas  $z = x^2$  e  $z = \sin x$  em  $\mathbb{R}^3$ ?*”

Com esta questão, damos continuidade ao processo, ou seja, os estudantes elaborando hipóteses para a da representação gráfica de expressões analíticas, antes da visualização no *software*. Muitos deles afirmaram que sabiam visualizar o gráfico “na mente”, mas não sabiam explicar com palavras como seria o traçado de sua curva.

Então, o pesquisador sugeriu:

“*Tentem imaginar alguma coisa real, concreta, em três dimensões, e associar com algo que vocês conheçam e que pareça com o que vocês estão pensando.*”

A turma ficou pensativa por um tempo, gerando possivelmente diversas conjecturas, pensamentos visuais e hipóteses mentais para a idéia sugestiva do

pesquisador. Exemplifiquemos essa situação com as idéias descritas nas falas dos aprendizes; por exemplo, para o gráfico correspondente à expressão  $z = x^2$ , um estudante disse:

*“Professor, para o gráfico de  $z = x^2$ , eu imagino uma parábola andante.”*

(Gilberto)

Já para o gráfico de  $z = \text{sen } x$ , tivemos outras respostas do tipo:

*“Nesse gráfico teremos a forma de uma onda.”* (Tiana)

*“Seria um tobogã?”* (Dago)

Nesse instante, observamos que os estudantes utilizaram gestos e mímicas para explicitarem as suas idéias. Alguns deles, com o uso das mãos na forma de uma calha (formato em U), fizeram movimentos horizontais, justificando a representação gráfica da superfície de  $z = x^2$ , no espaço.

Conclusões tiradas de vários estudos, destinados a compreender os gestos em situações onde estudantes argumentavam cientificamente acerca de modelos gráficos desenhados, modelos gráficos baseados em computador que se movimentam e modelos tridimensionais de estruturas arquitetônicas, afirmam: na ausência de discurso científico apropriado, os gestos dos estudantes apanham, descrevem e explicam os fenômenos científicos de maneira que são compatíveis com explicações científicas [...] (COSTA, 2005, p. 61).

Um outro estudante insinuou e realizou com as mãos o desenho de uma senóide no espaço, para a representação do gráfico, cuja expressão é  $z = \text{sen } x$ , sugerindo também que seria algo parecido a uma “onda” e/ou a um tobogã<sup>25</sup>. Posteriormente, com o uso do *software*, os aprendizes verificaram e comprovaram as suas conjecturas, comparando-as com as visualizadas na tela do computador, refazendo novas considerações.

O segundo momento da aplicação dos instrumentos de coleta ocorreu com a continuidade das atividades realizadas no laboratório, através das conjecturas dos

<sup>25</sup> Entendemos como um “formato” análogo para superfície  $z = \text{sen } x$ , pois segundo MICHAELIS o conceito físico de onda é: *Linhas ou superfícies concêntricas que se produzem numa massa fluida quando um dos pontos desta recebeu um impulso.* ( Dicionário Michaelis – UOL, 2006).

Tobogã entendemos como o “formato” análogo da superfície de uma *onda*, e está explicado acima, em MICHAELIS, tobogã consiste em: *Pista deslizante utilizada em parques de diversões.* ( Dicionário Michaelis – UOL, 2006).

aprendizes sobre a representação gráfica de expressões analíticas mencionadas pelo pesquisador e, também, da construção individual de gráficos no  $\mathbb{R}^3$ . As atividades, no laboratório de Informática, exigiram muita atenção do pesquisador aos diálogos entre os aprendizes, a fim de obter indícios que constatassem as estratégias e suas formas de pensar, na realização das tarefas.

Apesar de grande parte das construções gráficas desenvolvidas pelos aprendizes ter sido sugerida pelo pesquisador, através de um roteiro, tivemos também outras construções e análises gráficas de exploração individual. Observamos que essas explorações motivaram os estudantes a descobrirem propriedades e conceitos matemáticos, através dos desenhos e formas gráficas do  $\mathbb{R}^3$ , auxiliados pelo *software*. Ainda nessa etapa, trabalhamos as curvas de nível de maneira análoga ao processo feito com as superfícies e as expressões analíticas correspondentes, ou seja, uma vez conhecidas as expressões analíticas e a visualização das suas superfícies, respectivamente, na tela do computador, tentávamos associá-las as suas curvas de nível correspondentes.

A parte final desse segundo momento foi marcada com a realização da Atividade – 2, pelos aprendizes, utilizando-se das mídias, lápis e papel, composta por questões objetivas (relacionar superfícies a expressões e curvas de nível) e subjetivas. As de ordem objetiva associavam as expressões analíticas de funções reais de duas variáveis a gráficos de superfícies no  $\mathbb{R}^3$  e, ainda, relacionavam determinadas curvas de nível a gráficos e expressões analíticas correspondentes; já as questões de ordem subjetiva tratavam de conhecimentos e estratégias utilizadas, pelos estudantes, para responderem às atividades escritas e desenvolvidas no laboratório; e as outras, de cunho mais avaliativo, buscavam diagnosticar questões qualitativas no desenvolvimento das atividades, como em todo o processo de realização da pesquisa, com opiniões, sugestões e críticas feitas pelos seus participantes.

Após as Atividades – 1 e 2, retornamos à sala de aula com o objetivo de detectar, através de observações e com base na TAS, as possíveis contribuições que essas atividades ofereceram aos estudantes, quando estes iniciaram formalmente o estudo de funções reais de duas variáveis, com o professor da disciplina acrescentando algumas considerações ao conteúdo, através do quadro/giz e do livro-texto.

Dessas observações, ressaltamos que, em muitos momentos da aula, o professor solicitava dos aprendizes conceitos, características e propriedades das superfícies estudadas no laboratório, para a formalização e aprendizagem do conteúdo, principalmente, na parte que envolvia a construção e interpretação gráfica em  $\mathbb{R}^3$ .

#### 4.5.2.3 As entrevistas

“Parece-nos claro que o tipo de entrevista mais adequado para o trabalho de pesquisa que se faz atualmente em educação aproxima-se mais dos esquemas mais livres, menos estruturados [...]” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

Corroboramos a idéia dos autores e, por essa ótica, a última etapa da pesquisa de campo foi a realização de entrevistas semi-estruturadas, pois acreditamos que estas não possuam um esquema tão rígido, quanto as entrevistas estruturadas, com perguntas e padrões a serem seguidos, rigorosamente, pelo entrevistador. Foi necessário elaborarmos um **roteiro de perguntas** (Ver Apêndice D) para as entrevistas, porém a metodologia adotada caracterizou-as como um tipo de entrevista semi-estruturada, com perguntas contidas no roteiro que serviram como guia para o seu desenvolvimento, ainda que, em alguns momentos, percebemos a necessidade de levantar questões e dúvidas emergidas durante o diálogo, que não constavam ao roteiro.

Três aprendizes participantes – Gilberto, Walda e Tiana – foram entrevistados pelo pesquisador, com duração, em média, de 30 minutos cada, eles foram convidados de forma voluntária e aleatória com o propósito de que essas entrevistas acrescentassem aos dados da pesquisa alguns dos pensamentos, idéias, conhecimentos prévios/subsunçores dos aprendizes, pois acreditamos que alguns dados não citados nas respostas das atividades, nem observados e detectados pelo pesquisador, na coleta de dados, poderiam ser revelados nessas entrevistas.

## 5 ANALISANDO E DISCUTINDO OS RESULTADOS

O referido capítulo inicia-se com uma análise sobre as respostas dos aprendizes nas Atividades – 1 e 2. Posteriormente, apresentaremos as categorias de pesquisa para análise dos dados, dialogadas com o aporte teórico, somados às observações realizadas e aos dados coletados, em atividades e entrevistas, através de trechos de falas e das respostas dos estudantes.

Obtivemos, através da Atividade 1, a informação de que dos 11 aprendizes participantes que responderam às atividades, 8 (oito) deles cursando a disciplina pela primeira vez e os demais repetentes. Apesar desse dado não possuir implicações diretas com o objetivo da nossa pesquisa, acreditamos que ele sirva para mostrar que o nosso estudo foi aplicado em ambas as situações (estudantes repetentes e calouros em cálculo II), respeitando a heterogeneidade da sala de aula.

Nas duas seções (5.1 e 5.2) seguintes, faremos, sob a perspectiva da aprendizagem significativa, uma descrição das questões das Atividades – 1 e 2, apontando os objetivos e expectativas esperadas em cada uma delas e, ainda, uma análise e interpretação sobre as respostas dos aprendizes a essas questões, através de acertos, hipóteses, conjecturas e justificativas, em consonância com os conteúdos estudados.

### 5.1 Análise Inicial dos Dados Coletados na Atividade – 1.

**Questão 1:** Neste quesito, foi pedido o esboço dos gráficos correspondentes às equações  $y = x^2$  e  $y = 3$  no plano cartesiano e, posteriormente, com base nesses gráficos, os aprendizes responderam às letras a, b, c e d que tratavam das variáveis dependentes e independentes das equações e da ausência de variáveis na equação.

**Objetivo da questão:** A questão teve como objetivo identificar os subsunçores/conhecimentos prévios dos estudantes sobre a construção de gráficos no  $\mathbb{R}^2$  e, ainda, compreender as relações e ausências de variáveis, identificando-as, tanto no gráfico quanto nas equações.

**Análise:** Todos os aprendizes fizeram os esboços dos gráficos corretamente, sendo que 6 (seis) deles fizeram os dois gráficos, num mesmo sistema de coordenadas, os demais fizeram, cada gráfico, num sistema de coordenadas diferentes. Entretanto, a aprendiz Gláucia traçou o gráfico da equação  $y = 3$  apenas no domínio para  $x \geq 0$ .

As **letras a e b** questionavam a identificação das variáveis dependentes e independentes, para as equações  $y = x^2$  e  $y = 3$ , respectivamente. Para a equação  $y = x^2$ , tivemos 9 (nove) respostas corretas (a variável  $x$  como independente e a  $y$  como dependente), 1 (uma) errada (Cláudia) e 1 (uma) inconsistente (Fabiane), classificando  $x^2$ , em vez de  $x$ , como variável independente. Para a equação  $y = 3$ , tivemos apenas 1(uma) correta, (Gláucia) que respondeu a variável  $y$  como dependente e  $x$  como independente; 6 (seis) erradas; a variável  $y$  seria a dependente, mas em relação à variável independente ( $x$ ); eles tiveram muita dificuldade na sua identificação, com diversas respostas, do tipo: **o próprio y**, **0(zero)**, **3(três)**, **não existe** e/ou deixou em branco.

Para a **letra c**, que perguntava sobre quais os valores que a variável  $x$  assume no traçado do gráfico da equação  $y = 3$ , tivemos, na maioria das respostas, que  $x$  assumiria infinitos valores; com algumas, ainda, afirmando que seriam valores reais. Na resposta de Gláucia, observamos uma interpretação oriunda do esboço do seu próprio gráfico, pois a estudante traçou o gráfico de  $y = 3$ , sob o domínio de  $x \geq 0$ ; assim, conseqüentemente, respondeu que os valores que  $x$  assumiria eram maiores que 0. Outra resposta foi  $x = 0$  (Walda) e, por fim, a de Cláudia: “*A variável  $x$  poderá assumir qualquer valor; o valor de  $y$  independe do valor de  $x$ , tem valor igual a 3.*”

Na **letra d**, perguntamos sobre as influências da variável  $x$  no traçado do gráfico da equação  $y = 3$ . As respostas foram quase que unânimes, todos afirmaram que  $x$  **não** teria nenhuma influência no traçado do gráfico de  $y = 3$ , porém justificaram de forma diferente; por exemplo, Tiana explicou que: “*Independente do valor escolhido para a variável  $x$ , o valor de  $y$  sempre será 3*” (semelhante a justificativa de Cláudia, na questão anterior); os demais responderam de maneira análoga à resposta de Tiana, contudo ela afirmou que  $y$  permanece constante para qualquer valor de  $x$ . De acordo com as repostas dos aprendizes e suas justificativas diferenciadas, acreditamos que essa questão gerou muitas dúvidas, pois, para muitos, o fato da variável  $x$  apresentar-se “oculta” na equação  $y = 3$ , significaria a sua inexistência no plano cartesiano, fazendo com que muitos deles afirmassem que essa variável não teria nenhuma influência no gráfico de  $y = 3$ .

**Questão 2:** Nesta questão, os aprendizes escolhiam dentre algumas opções – bidimensional, tridimensional ou outras – qual delas representava os gráficos construídos na questão anterior (1ª questão).



**Objetivo da questão:** Estimular os aprendizes a pensarem na existência de gráficos em três dimensões, além de promover uma revisão para fixar os conhecimentos e conteúdos do  $\mathbb{R}^2$  (bidimensional)

**Análise:** Todos acertaram esta questão, assinalando que os gráficos da primeira questão foram construídos num espaço bidimensional.

**Questão 3:** Foi subdividida nas letras a, b e c. Na **letra a**, foi pedido aos estudantes o esboço dos gráficos das equações  $y = x^2$  e  $x = y^2$ , no mesmo sistema de coordenadas  $xOy$ . Na **letra b**, perguntamos quais os conteúdos matemáticos que eles utilizaram para traçar os gráficos da letra a. E na **letra c**, pedimos a identificação das diferenças entre os dois gráficos.

**Objetivo da questão:** Investigar os conhecimentos dos aprendizes na construção de gráficos, quando modificadas as relações de dependência entre as variáveis e, também, identificar os conhecimentos prévios/subsunçores utilizados na construção desses gráficos.

**Análise:** Para a **letra a**, a maioria construiu e representou corretamente os gráficos das equações, porém alguns aprendizes (Rose e Sara) esboçaram os mesmos gráficos da primeira questão dessa atividade [talvez elas não tivessem atentado que a equação  $x = y^2$  não era igual a  $y = 3$ , como na primeira questão]. A estudante Walda esboçou para a equação  $x = y^2$  uma curva acima do eixo  $x$ , ou seja, a representação gráfica da curva  $y = \sqrt{x}$  – parte da curva de  $x = y^2$ .

Para a **letra b**, a maioria dos estudantes utilizou os conteúdos de funções do 1º e 2º graus, plano cartesiano e função inversa, para a construção e o esboço dos gráficos da letra a, dessa questão.

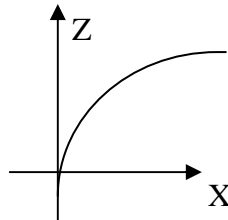
Na **letra c**, tivemos respostas que diziam que o gráfico de  $y = x^2$  é simétrico em relação ao eixo  $y$ , com o  $y$  assumindo valores positivos e o outro gráfico de  $x = y^2$ , simétrico em relação ao eixo  $x$  com  $x$ , também, assumindo apenas valores positivos. Muitos aprendizes perceberam o papel que as variáveis assumem, quanto à dependência e independência entre elas, por exemplo, citamos a conclusão da estudante Tiana: “No gráfico  $y = x^2$ ,  $y$  é a variável dependente, enquanto  $x$  é a variável independente [...] [...] No gráfico  $x = y^2$ ,  $x$  é a variável dependente, enquanto  $y$  é a variável independente”.

**Questão 4:** Subdividida em duas letras a e b. Para a **letra a**, pedimos um esboço para o gráfico da equação  $z = x^2$ , no plano cartesiano, nomeando os eixos. Para a **letra b**,

perguntamos aos estudantes se houve alguma mudança no traçado do gráfico de  $z = x^2$ , a partir da troca da variável  $z$  pela variável  $y$ , em relação à equação  $y = x^2$ .

**Objetivo da questão:** Para as **letras a e b**, esperávamos que os aprendizes, com base no gráfico de  $y = x^2$ , num sistema de coordenadas retangulares, construíssem o gráfico de  $z = x^2$  num plano cartesiano, identificando os seus eixos e percebendo a mudança da variável  $z$  dessa equação, em relação à variável  $y$  do gráfico de  $y = x^2$ .

**Análise:** A maioria dos aprendizes esboçou corretamente o traçado do gráfico de  $z = x^2$ , denominando o eixo  $z$  em substituição ao eixo conhecido e utilizado por  $y$ , no gráfico de  $y = x^2$ ; porém, a estudante Walda respondeu da seguinte forma:



**Figura 4 – Esboço do gráfico da estudante Walda.**

(Acreditamos que esta construção seja oriunda do mesmo raciocínio utilizado pela estudante, para a construção do gráfico de  $x = y^2$  que ela fez na questão anterior).

Todos os aprendizes responderam, para a **letra b**, que **não** haveria mudanças em relação à curva traçada do gráfico de  $z = x^2$ , em relação à curva do gráfico de  $y = x^2$ . Justificaram que o uso da variável  $z$ , em lugar da variável  $y$ , não mudaria nada no traçado do gráfico, nem na sua posição, apenas o eixo  $y$  que passaria a ser chamado de eixo  $z$ .

**Questão 5:** Perguntamos aos aprendizes sobre as diferenças percebidas por eles entre gráficos traçados em espaços bidimensionais e gráficos traçados em espaços tridimensionais. Depois, subdividimos o quesito em letras a, b, c e d. Para a **letra a**, indagamos a possibilidade de traçar gráficos de equações com duas variáveis, em espaços tridimensionais. Na **letra b**, oferecemos um sistema de eixo tridimensional e pedimos aos estudantes os esboços dos gráficos de  $z = x^2$  e de  $z = y^2$ , identificando as possíveis diferenças entre eles. Para a **letra c**, perguntamos se a ausência da variável  $y$ , na equação  $z = x^2$ , e da variável  $x$ , na equação  $z = y^2$ , influenciariam no traçado do gráfico dessas equações em  $\mathbb{R}^3$ . Na **letra d**, pedimos o esboço do gráfico de  $z = x^2 + y^2$  e indagamos se os itens anteriores desta questão os auxiliaram na construção e traçado deste gráfico.

**Objetivo da questão:** Esta questão evidencia as relações e os objetivos de nosso estudo, para o ensino de Cálculo com a TAS, pois em todas as letras da questão, pedimos uma justificativa das idéias utilizadas como respostas para os quesitos, com intuito de compreender as ligações estabelecidas pelos aprendizes, nos conhecimentos e analogias do  $\mathbb{R}^2$  com o  $\mathbb{R}^3$ .

A **letra c** exemplifica tal fato: indiretamente esperávamos que os alunos utilizassem conhecimentos prévios/subsunçores possivelmente existentes nas ausências de variáveis em  $\mathbb{R}^2$  e os relacionassem com o  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, na primeira questão, a ausência de  $x$  em  $y = 3$ , em  $\mathbb{R}^2$ , pudesse ser usada como analogia para a ausência da variável  $y$  em  $z = x^2$ , em  $\mathbb{R}^3$ . Com base nas equações  $z = x^2$  e  $z = y^2$ , esperávamos, para a **letra d**, que os estudantes fizessem a composição dessas equações e conseguissem sozinhos deduzir ou abstrair o traçado gráfico de  $z = x^2 + y^2$ .

**Análise:** Quando perguntado aos aprendizes sobre as diferenças observadas por eles entre gráficos bidimensionais e gráficos tridimensionais, tivemos como resposta que são diferentes, sendo que o gráfico bidimensional apresentou apenas a relação do  $x$  com o  $y$  e, para o tridimensional, apareceu mais uma variável ( $z$ ), determinando assim três eixos. Ainda em relação ao espaço bidimensional, alguns aprendizes afirmaram que serviria para gráficos de figuras planas, enquanto o tridimensional, para “figuras espaciais”, como vemos neste trecho da resposta de Tiana:

*“Nos gráficos traçados em espaços bidimensionais, é possível representar figuras planas. Já nos gráficos traçados em espaços tridimensionais, pode-se representar figuras espaciais. Ex:  $y = x^2$  (plano  $xy$ );  $y = x^2 + z^2$  (planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ ).”*

Para esta questão, outros aprendizes responderam que:

*“Os traçados em espaços bidimensionais têm apenas uma relação e não constroem ‘sólidos’ como nos tridimensionais”* (Gilberto, grifo do próprio)

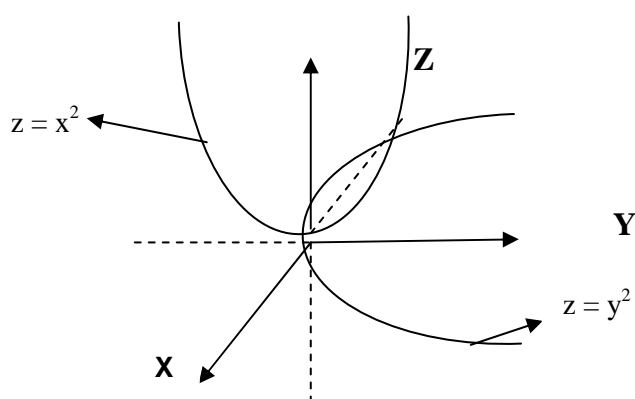
*“O espaço tridimensional possui um plano a mais que o bidimensional.”*(Dago)

Quando questionados, na **letra a**, da possibilidade de traçarem gráficos de equações de duas variáveis, em espaços tridimensionais, 7 (sete) deles afirmaram que sim, que seria possível, porém com uma condição: a variável  $z$  teria que ser igual a zero ( $z = 0$ ). Outros 2 (dois) estudantes, também, responderam que seria possível, mas em vez do  $z = 0$ , poderia ser com qualquer uma das três variáveis iguais a zero ( $x = 0$ ;  $y = 0$  ou  $z = 0$ ). Já 2 (dois) deles (Fabiane e Cláudia) disseram que não. Fabiane afirmou que não sabia responder, porque nunca tinha feito nada parecido. Já Cláudia disse que não poderia, justificando que precisaria da terceira variável, para definir o traçado em outro plano.

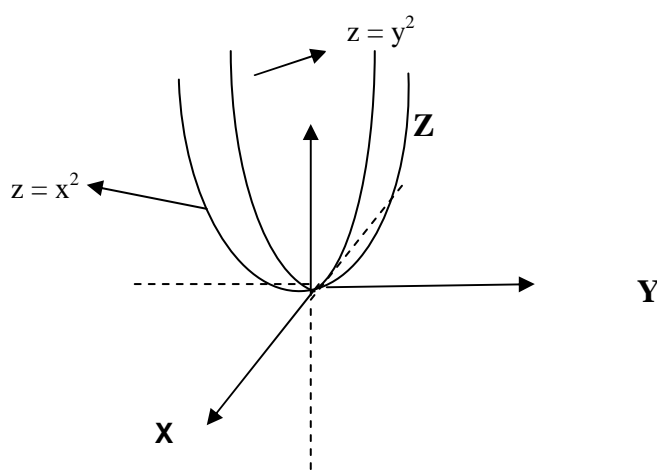
Para os esboços pedidos na **letra b** dos gráficos das equações  $z = x^2$  e  $z = y^2$ , num mesmo sistema de eixos, os aprendizes acreditavam que estes gráficos constituíam parábolas desenhadas em planos diferentes, porém justificaram seus traçados de diversas maneiras, por exemplo, a resposta de Dago foi:

*“A equação  $z = x^2$  é traçada no gráfico, no plano  $zOx$ . A equação  $z = y^2$  é traçada no gráfico, no plano  $zOy$ . Logo, os gráficos estão traçados em planos diferentes.”*

Já Raíssa, embora dando uma justificativa igual a de Dago – planos diferentes – apresentou um outro esboço. Seguem, abaixo, os esboços feitos por eles dois:



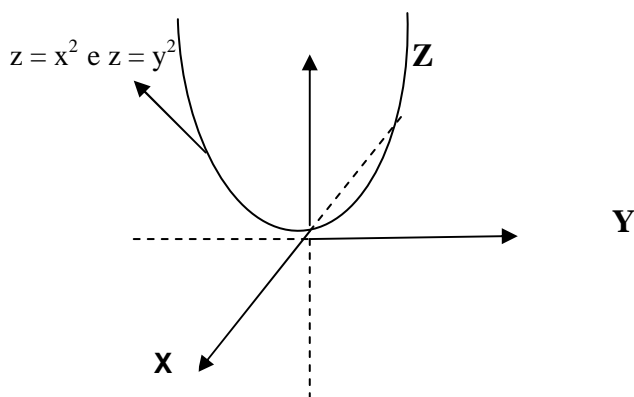
Esboço de Raíssa



Esboço de Dago

**Figura 5 – Esboços gráficos dos estudantes Raíssa e Dago.**

Para Gláucia, o traçado dos gráficos foi coincidente, como vemos abaixo:



**Figura 6 – Esboço gráfico da estudante Gláucia.**

Os demais estudantes responderam de forma análoga a Dago e Raíssa. Todavia, acrescentamos a justificativa de Tiana, que esboçou o seu gráfico semelhante ao de Dago, de que os gráficos estavam perpendiculares, embora a variável dependente ( $z$ ) fosse igual, em ambas as equações, com as variáveis independentes diferentes, definindo o eixo em que as curvas se encontravam. O esboço de Walda foi igual ao de Dago, e ela justificou que os gráficos se constituíam de funções “pares”. Ainda tivemos respostas de aprendizes afirmando que não imaginavam como seriam os gráficos em três dimensões e, conseqüentemente, não fizeram nenhum esboço.

Quando perguntado, na **letra c**, sobre a influência da ausência de uma das variáveis nas equações  $z = x^2$  e  $z = y^2$ , no traçado do gráfico dessas equações, Rose e Fabiane responderam que não sabiam [elas não conseguiram fazer o esboço gráfico das equações]. Contudo, quatro deles responderam que existia influência das variáveis ausentes nas equações, justificando que o gráfico foi traçado de “**forma bidimensional, num sistema tridimensional**”<sup>26</sup> e, se a expressão analítica apresentasse as três variáveis, corresponderia a um gráfico tridimensional. As respostas de Gilberto e Tiana auxiliam esta reflexão.

“Claro, a influência foi a não interferência no traçado do gráfico em que não aparecia, o traçado: teve relação com apenas 2 eixos, o que significa que as variáveis que não aparecem são iguais a 0.” (Gilberto)

<sup>26</sup> Gráficos de funções reais de uma variável ( $\mathbb{R}^2$ ), desenhadas e representadas em um sistema com três eixos. (funções reais de duas variáveis –  $\mathbb{R}^3$ )

“A ausência dessas variáveis nas equações teve influência no traçado do gráfico, pois isto fez com que os gráficos ficassem em um só plano.” (Tiana)

Os demais afirmaram que não influenciaria, mas justificaram de maneiras distintas, como vemos nas respostas abaixo:

“Não, pois o traçado continua o mesmo, ou seja, simétrico em relação a  $z$ . O que muda é o ângulo de visão.” (Cristian)

“Não, supõe-se em  $z = x^2$  que as coordenadas sejam  $(x, 0, z)$  e em  $z = y^2$ ,  $(0, y, z)$ ”. (Claúdia)

A resposta de Claúdia remete-se ao pensamento de Gilberto, citado acima, de uma variável nula; porém, nesse caso, a aprendiz adotou o zero como a não-existência para a variável. O esperado na **letra d** foi a construção de um esboço gráfico para a equação  $z = x^2 + y^2$ , que teve como referência gráficos de questões anteriores. Observamos que três dos estudantes não fizeram o esboço; seis fizeram o traçado de parábolas em sistema de eixos com três variáveis, como dissemos anteriormente, e alguns dos aprendizes fizeram apenas uma parábola, justificando que seria gerada da junção dos outros dois gráficos feitos anteriormente ( $z = x^2$  e  $z = y^2$ ). Por exemplo, Claúdia justificou a sua construção – que foi apenas uma parábola semelhante à Figura 6 acima, esboçada pela Gláucia – da seguinte maneira: “Fiquei confusa em relação ao gráfico. Os itens anteriores me auxiliaram em um único ponto: para quaisquer valores de  $x$  ou  $y$ , os seus correspondentes em  $z$  serão sempre positivos.” Ainda dois deles (Tiana e Gilberto) fizeram corretamente o desenho do gráfico (parabolóide) pedido, apesar de que, na justificativa, responderam que não tinham certeza do gráfico construído, mas salientaram que os itens e questões anteriores os auxiliaram no esboço e na construção do parabolóide, como vemos em suas justificativas: “Na verdade não sei se está certo, eles [itens, questões anteriores] me ajudaram a deduzir um possível gráfico, mas não sei se está correto.” (Gilberto). “Sim. Agrupando as informações anteriores, tornou-se mais fácil entender o que ocorreria nesta situação.” (Tiana)

**Questões 6 e 7:** Nestas questões, perguntamos aos aprendizes se já tinham utilizado algum *software* para a construção de gráficos em Matemática e, em caso positivo, quais deles? E, ainda, se o computador poderia contribuir para a aprendizagem em Matemática e, em caso positivo, de que maneira?

**Objetivo das questões:** Estas questões, de cunho mais investigativo e qualitativo, tiveram como objetivo conhecer um pouco a utilização de TIC pelos aprendizes participantes, diagnosticando os tipos de *softwares* usados por eles, assim como as

facilidades de manuseio e as possíveis contribuições de mídias, para o estudo de Matemática.

**Análise:** Todos os aprendizes participantes disseram que o computador auxiliaria a aprendizagem de Matemática, principalmente nas questões que permitissem a utilização da visualização, através do computador, a fim de obter uma melhor compreensão gráfica de funções.

Deles, 7 (sete) responderam que nunca utilizaram nenhum *software*, mas acreditavam que o computador poderia contribuir para o aprendizado de Matemática, como um motivador e como uma ferramenta útil para a visualização, construção e interpretação de gráficos em 2D e 3D, principalmente nos sistemas tridimensionais. Exemplifiquemos com a resposta de Cláudia:

*“Bastante. Porque ajuda na representação de gráficos, figuras em 3D. Podemos rotacioná-las [girá-las], ampliar nossa visão tridimensional, melhorar a capacidade de abstração através de imagens concretas que ficarão armazenadas no cérebro.”* [A aluna nunca utilizou *software* para estudar Matemática]

Os outros 4 (quatro) disseram que já tinham usado *softwares*, como Winplot, Geogebra, Matlab, R e Minitab. Eles afirmaram que o computador, além de auxiliar o aprendizado de Matemática, através do comportamento de funções e de visualização, oferece, também, detalhes em gráficos e em sólidos de revolução, melhorando a visão espacial e compreensão desses conteúdos matemáticos. Na resposta da estudante Tiana, semelhante à de Cláudia, citada acima, ela afirma que os computadores, juntamente com os *softwares*, auxiliam a exploração de concepções, abstrações, percepções e a precisão dos desenhos visualizados no computador, facilitando a compreensão do estudante, no estudo de conteúdos matemáticos:

*“Sim. Os computadores são recursos visuais que auxiliam em casos onde seria difícil visualizar mentalmente determinadas propriedades geométricas. Além disso, a eficiência nos desenhos é melhor no computador”*. (grifo nosso)

## 5.2 Análise Inicial dos Dados Coletados na Atividade – 2.

**Questão 1:** A questão relacionava expressões analíticas a superfícies (dadas 4 superfícies e 4 expressões analíticas, divididas em letras A, B, C e D) ou seja, o estudante tinha que associar cada expressão analítica a sua superfície correspondente.

**Objetivo da questão:** Verificar a contribuição das atividades realizadas no laboratório, pelos estudantes, sobre a compreensão de determinadas superfícies do  $\mathbb{R}^3$  e das relações existentes entre elas e suas expressões analíticas correspondentes.

**Análise:** No quadro abaixo, o X representa acertos obtidos pelos estudantes, nas relações das superfícies com suas expressões analíticas correspondentes. Com base no quadro, podemos afirmar que a maioria dos estudantes acertou as letras A e D. Por outro lado, poucos acertaram as letras B e C. Contudo, as letras A e D representavam expressões analíticas com polinômios de grau 3; já as letras B e C, que foram representadas por polinômios de grau 4, possuíam os termos iguais; porém, a expressão da letra C possuía um termo a mais do que a expressão da letra B, fato que pode ter originado a dúvida e, conseqüentemente, os erros dos estudantes (ver Apêndice B).

Aprendizes	Letras	A	B	C	D
Rose					X
Fabiane		X	X		
Dago		X			
Walda		X			
Sara		X			X
Claúdia		X			X
Cristian		X			X
Gláucia		X			X
Gilberto		X			X
Raíssa		X	X	X	X
Tiana		X	X	X	X

X – acertos dos aprendizes

Quadro 5 – Acertos dos estudantes referentes à 1ª questão da Atividade – 2.



**Questão 2:** Nesta questão, análoga à questão 1, pedimos aos estudantes que fizessem as associações das superfícies e expressões analíticas, nomeadas de E, F, G, H e I com as suas curvas de nível correspondentes (ver Apêndice B).

**Objetivo da questão:** A questão visou perceber a contribuição das atividades realizadas no laboratório, pelos estudantes, e a compreensão de algumas superfícies do  $\mathbb{R}^3$  e suas curvas de nível, e das relações existentes destas com as suas respectivas expressões analíticas.

**Análise:** O quadro abaixo aponta um crescimento na quantidade de acertos obtidos nesta questão, em relação aos da questão 1, na qual os aprendizes, de posse de algumas superfícies – uma referência gráfica – tinham que associá-las as suas expressões analíticas correspondentes. Na questão 2, os estudantes tinham mais referências para fazer as associações, ou seja, as relações das superfícies e curvas de nível (duas referências gráficas) com as expressões analíticas.

Ainda com base no quadro abaixo, observamos que os estudantes acertaram mais as curvas de nível das letras E, G e I, tendo, então, menos acertos nas curvas das letras F e H. Uma das possíveis justificativas para o acontecido é o fato de que as superfícies e curvas de nível correspondentes, que representavam as letras F e H, apresentavam aspectos característicos em suas formas bastante parecidas, gerando, assim, conseqüentemente, em muitas respostas dos aprendizes, a troca de uma letra pela outra.

Aprendizes	Letras	E	F	G	H	I
Fabiane						
Sara			X	X		
Rose		X				
Raíssa		X		X		X
Gláucia		X		X		X
Gilberto		X		X		X
Walda		X	X	X	X	X
Tiana		X	X	X	X	X
Claúdia		X	X	X	X	X
Cristian		X	X	X	X	X
Dago		X	X	X	X	X

X – acertos dos aprendizes

Quadro 6 – Acertos dos estudantes referentes à 2ª questão da Atividade – 2.

**Questão 3:** Perguntamos sobre as contribuições do *software* Winplot para a compreensão de Matemática.

**Objetivo da questão:** Saber a opinião dos estudantes sobre as possíveis contribuições que o *software* Winplot proporcionou às atividades e à compreensão dos conteúdos matemáticos estudados.

**Análise:** Todos os estudantes responderam que o *software* contribuiu para assimilação e aprendizagem dos conteúdos estudados, reverenciando as visualizações de superfícies, com base nas expressões analíticas dadas. Alguns afirmaram que o *software* possibilitou, de maneira mais clara e precisa, a compreensão e interpretação dos gráficos construídos, no quadro, em sala, salientando, ainda, a sua utilidade na compreensão das formas e esboços de superfícies visualizadas e analisadas no computador.

**Questão 4:** Pedimos aos estudantes que eles descrevessem as estratégias, pensamentos e hipóteses utilizadas para responder as questões 1 e 2, desta atividade.

**Objetivo da questão:** Esta questão buscou, através das respostas dos aprendizes, nos quesitos 1 e 2 da atividade, compreender algumas idéias, pensamentos, conhecimentos prévios/subsunçores utilizados pelos estudantes, no momento de realização da atividade.

**Análise:** Obtivemos diversas respostas dos estudantes afirmando a utilização de conhecimentos e lembranças de gráficos conhecidos no plano e que, através destes, compararam com as superfícies pedidas nas atividades. Para a 2ª questão – associação das curvas de nível às superfícies – eles associaram os desenhos das curvas de nível com as superfícies, observando os pontos mais altos (picos) e os mais baixos (depressões) dessas superfícies. Seguem, abaixo, respostas dos aprendizes, referentes a esta questão:

*“A minha idéia foi o seguinte: o gráfico de  $x^3$ , eu o imagino no plano bidimensional, depois eu preencho ele ‘na minha mente’ com as mesmas... só que paralelas a ele, pelo eixo z.”* (Sara)

*“Minha estratégia foi visualizar as funções a partir do eixo z, de cima para baixo, e, além disso, identificar os picos e os vales de cada função.”* (Cristian)

**Questões 5 e 6:** Nestas questões, foi pedido aos estudantes que avaliassem a utilização do *software* Winplot, na sua aprendizagem das visualizações de gráficos em  $\mathbb{R}^3$  e das curvas de nível dessas superfícies, justificando a sua resposta, dentre as opções: **acima das expectativas, muito boa, boa, regular, ruim e desnecessária.**

**Objetivo das questões:** Avaliar, na concepção do aprendiz participante, a validação das Atividades 1 e 2, auxiliadas pelo *software* Winplot, na compreensão e estudos de gráficos em  $\mathbb{R}^3$ .

**Análise:** Dos aprendizes, 8 (oito) responderam que a atividade foi  **muito boa**, e os demais que foi  **acima das expectativas**. Os que assinalaram a opção  **muito boa** justificaram as suas respostas através do ganho obtido na precisão, exatidão e visualização das superfícies construídas no Winplot, facilitando “*enxergar melhor os gráficos*” [expressão usada por um aprendiz]. Seguem, abaixo, algumas respostas:

*“Como tenho dificuldade em enxergar [visualizar, perceber] gráficos, me ajudou muito visualizar; logo o Winplot ajudou bastante o entendimento.”*(Dago)

*“Acredito que a questão do comportamento do gráfico e a relação entre as variáveis, principalmente as implícitas, deram outra perspectiva para mim, no significado de funções.”* (Gilberto)

As justificativas dos que responderam como  **acima das expectativas** foram relativas à compreensão de todo o conteúdo, principalmente, das curvas de nível. Estes estudantes afirmaram que não compreendiam e não conseguiam entender, visualizar as curvas de nível de uma superfície dada, mas que, posteriormente, a realização das atividades contribuiu para uma compreensão clara e objetiva desses conteúdos, sem a necessidade de serem transmitidas de forma passiva e mecânica. Abaixo, seguem algumas das respostas destes estudantes:

*“Faz com que compreendêssemos e não apenas aceitássemos.”* (Raíssa)

*“Porque eu não conseguia entender curvas de nível, depois, com a explicação dessa aula, eu entendi.”* (Rose)

*“Não tinha conhecimento em curva de nível e gráficos no  $\mathbb{R}^3$ , e o aprendizado foi muito importante.”* (Sara)

**Questão 7:** Nesta questão, de cunho avaliativo, deixamos um espaço aberto ao aprendiz participante para sugestões, críticas e opiniões sobre as atividades realizadas na pesquisa.

**Objetivos da questão:** Avaliar a pesquisa, os objetivos das atividades, as abordagens pedagógicas utilizadas em sala de aula e no laboratório, visando uma aprendizagem significativa para os estudantes. Incentivar futuras pesquisas em que sejam utilizados nossos resultados como referência.

**Análise:** Apenas 1 (um) estudante não respondeu à questão; os demais responderam que o estudo foi muito satisfatório para eles. Nessas respostas, interpretamos que as atividades desenvolvidas favoreceram a aprendizagem dos conteúdos de funções e construções de gráficos em  $\text{IR}^2$  e em  $\text{IR}^3$ , com uma valiosa contribuição.

Alguns aprendizes afirmaram que, após as atividades, eles passariam a usar o *software* frequentemente, justificando o seu uso de forma positiva, as suas potencialidades e aplicabilidades no estudo de funções. Dentre as sugestões e críticas apontadas, destacamos o pouco tempo na realização das atividades e que estas deveriam estar integradas nas aulas do curso de Cálculo II e, não, em aulas extraclasse. Citaremos algumas:

*“Na minha opinião a atividade foi muito rica, pois ajudou a aperfeiçoar o conhecimento sobre funções que já possuíamos e, sem dúvida, nos preparou para os novos conceitos que iremos aprender no Cálculo II e III. Com essa atividade, eu passei a acreditar ainda mais na potencialidade da Informática, na educação.”* (Tiana)

*“Achei muito interessante, não cansativa, muito esclarecedora e muito importante para mim; me esclareceu dúvidas que eu tinha sobre gráficos. Muito Legal!”* (Sara)

*“A atividade deveria ser incentivada para TODAS as turmas de Cálculo II.”* (Raíssa)

*“Foi muito bom, espero que outros mestrandos, professores e alunos façam atividades parecidas. Muito obrigado!”* (Gilberto)

*“A atividade foi ótima, muito interativa. Nada a reclamar, a não por ser realizar-se na parte da tarde de sábado. Fora isso, já estou com o programa em casa. Muito bom mesmo!”* (Dago)

### **5.3 Dialogando com os Autores da Fundamentação Teórica**

No capítulo 4, apresentamos, de forma não sistemática, um esboço inicial dos dados coletados nas observações e diálogos ocorridos no laboratório, através de falas e discussões entre os participantes. De forma análoga, o capítulo 5 apresentou, nas seções 5.1 e 5.2, as questões das Atividades 1 e 2, com o objetivo de analisar as respostas dos estudantes a cada questão.

Nesta seção, à luz da nossa pergunta de investigação – **Como o uso de um *software* e de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode**

**contribuir para o ensino e aprendizagem de gráficos no  $\mathbb{R}^3$ , de estudantes de Cálculo de várias variáveis?** – dialogamos as nossas interpretações sobre os dados coletados com as idéias dos autores citadas na fundamentação teórica, construída nos capítulos 2 e 3.

Para isso, as subseções seguintes foram divididas em categorias, a fim de obtermos um detalhamento de nossas interpretações. Identificamos 5 (cinco) categorias emergentes da literatura e dos dados coletados: a aprendizagem significativa na relação de aspectos algébricos e gráficos, aspectos da aprendizagem significativa a partir da visualização e formalização de conceitos, a utilização da visualização para validar a solução de problemas e exercícios de Cálculo, apoiadas na TAS, a exploração de modelos e situações problemas mais complexos, nas atividades, sob o olhar da aprendizagem significativa e as impressões dos aprendizes sobre o uso e a aplicabilidade do *software* Winplot e as suas possíveis contribuições para a aprendizagem dos estudantes.

### 5.3.1 A aprendizagem significativa na relação de aspectos algébricos e gráficos

Com base na fundamentação teórica construída, anteriormente, pelos autores Allevato (2007), Tall e Vinner (1991a) e Tall (2003), que pesquisaram o uso de elementos gráficos no estudo de Cálculo, oferecendo subsídios para as demonstrações analíticas e algébricas, analisamos as questões e os dados que envolveram aspectos algébricos e gráficos da pesquisa.

Esses autores advertem que, para o ensino de Cálculo, a valorização de aspectos algébricos e gráficos deve ser complementar, nas questões e problemas da disciplina, entretanto, na prática dos professores, é dada maior ênfase para os de caráter algébrico. Tal fato poderá justificar a escolha de alguns estudantes em utilizar mais um aspecto do que o outro, em suas conjecturas. Apresentamos, como exemplo, a análise da 1ª questão da Atividade – 1 (seção 5.1), quando perguntado aos aprendizes sobre a influência da variável  $x$  na expressão  $y = 3$ ; a maioria respondeu que não tinha nenhuma influência, apesar de muitos deles terem feito a representação gráfica dessa expressão corretamente. Com isso, concluímos que estes aprendizes não perceberam que a ausência da variável  $x$ , na escrita da expressão analítica, implicaria na sua existência e utilidade para a representação gráfica da expressão e que, além disso, assumiria infinitos valores nessa representação.

Outro dado de pesquisa, que elucida a concepção dos autores sobre as relações de aspectos algébricos e gráficos, foi visto na análise da 1ª questão da Atividade – 2 (seção

5.2), em que a maioria dos estudantes teve dificuldades em associar e relacionar as superfícies dadas com as suas correspondentes expressões analíticas, principalmente nas expressões das letra B e C,  $f(x, y) = y^4 + x^2$  e  $f(x, y) = y^4 + x^2 - 2y^2$ , respectivamente. Observamos que muitos aprendizes, no momento dessa associação trocaram as letras B por C ou não conseguiram fazer a questão (ver Quadro 5). Talvez esse fato se justifique pelos termos algébricos das expressões serem idênticos, embora a letra C possua um termo a mais do que a letra B ( $-2y^2$ ). De forma análoga, ocorreu com as letras F e H, da 2ª questão dessa atividade; porém, neste caso, as letras representavam duas curvas de nível com formatos similares (ver Apêndice B), o que levou, conseqüentemente, os estudantes a trocarem uma letra pela outra. Nesta última – 2ª questão – em comparação com a 1ª, os aprendizes obtiveram maior êxito, com um número maior de acertos, embora ela oferecesse mais vantagens que a outra, ou seja, possuía duas representações gráficas (as curvas de nível e as superfícies) para comparar com uma representação algébrica (expressão analítica), enquanto que, na 1ª questão, a comparação foi feita apenas de uma representação gráfica para outra algébrica.

As atividades foram construídas na perspectiva da aprendizagem significativa e de acordo com as concepções e sugestões dos autores citados nesta seção; as questões das atividades analisadas tiveram um intuito de aproximar as relações entre as representações algébricas (expressões analíticas) e gráficas (superfícies), dando a mesma ênfase para ambas.

As relações das expressões analíticas com as superfícies e as curvas de nível, realizadas pelos aprendizes, geraram um produto interacional resultante das interações dos subsunçores com as imagens conceituais e definições conceituais (AUSUBEL, 1980, VINNER, 1991, visto na Figura 3). A abordagem utilizada na realização das atividades remete-se a **aprendizagem significativa** variando entre os extremos de um *continuum* da aprendizagem **por recepção** e **por descoberta** (ver Figura 2).

Para isso, Ausubel (1980) e Moreira (2006; 2008) afirmam que, numa atividade de aprendizagem por recepção, o estudante a recebe na sua forma final e acabada, e será significativa se ele conseguir, por si só, desenvolvê-la e responder à proposta da questão, atribuindo significados a seus conceitos e proposições. Exemplificaremos esta situação com o ocorrido na 4ª questão da Atividade – 1 (seção 5.1), em que a maioria deles respondeu corretamente, afirmando que o traçado do gráfico de  $z = x^2$  seria igual ao traçado do gráfico de  $y = x^2$ , porém com a mudança no nome de eixo y para eixo z. Nessa

questão, os alunos não tinham ainda o contato com o *software* e, mesmo assim, percebemos, uma vez conhecido, a representação gráfica para a expressão algébrica  $y = x^2$ , ficou fácil deduzir, inferir e descobrir que o traçado gráfico de  $z = x^2$  teria, também, a mesma forma.

Situações ocorridas em sala de aula, também, foram percebidas e registradas no diário de observações. Na aula do dia 09/06/2009 [nessa aula os aprendizes já tinham feito as atividades de pesquisa no laboratório], o professor utilizou o conceito de funções reais de duas variáveis, de acordo com a definição de um livro didático<sup>27</sup>, seguido de esboços de superfícies, feitos à mão, no quadro. Num dado instante, o professor trabalhou com uma expressão analítica e pediu que os estudantes dessem um tratamento analítico para ela e, em momento algum, solicitou deles a representação gráfica da expressão. Com isso, o pesquisador-orientando interferiu na aula, perguntando a todos:

“*Pessoal, alguém consegue ver a forma da superfície daquela expressão analítica [apontando para o quadro] em  $IR^3$  [a superfície era um plano]?*”

O aluno Gilberto respondeu corretamente que era um plano, e os demais alunos pareciam concordar com a resposta do colega [balançando a cabeça afirmativamente]. Ainda nessa questão, o professor perguntou qual seria o domínio daquela expressão analítica, e o aluno Dago respondeu certo, afirmando que “*essa era muito fácil*”, pois uma vez visualizada a superfície, fica muito mais fácil descobrir o domínio e a imagem (aula do dia 09/06/2009, extraída do diário de observações). Com base nessa concepção do aprendiz Dago, destacamos um processo de interação de um conhecimento novo com outro já existente na estrutura cognitiva do indivíduo.

### 5.3.2 Aspectos da aprendizagem significativa a partir da visualização e formalização de conceitos

Conforme vimos no item anterior, os aspectos algébricos e gráficos podem favorecer uma relação mais próxima dessas representações, trazendo repercussões positivas a uma aprendizagem significativa de compreensão de certos conceitos, no estudo de Cálculo (TALL; VINNER, 1991).

---

<sup>27</sup> STEWART, James. **Cálculo**. vol. 2, São Paulo, Editora Pioneira Thomson Learning, 2005. (Livro que o professor utilizou em todas as aulas)

Nessa categoria de análise, identificamos que as atividades realizadas no laboratório, em conjunto com as questões das Atividades – 1 e 2, construídas com base na TAS, contribuíram para a formalização de conceitos, no estudo de funções reais de duas variáveis e, também, para a visualização de superfícies e curvas de nível (seções 5.1 e 5.2). Seguem, abaixo, alguns trechos das respostas dos aprendizes às Atividades – 1 e 2, que justificam o fato:

*“Os computadores são recursos visuais que auxiliam em casos onde seria difícil visualizar mentalmente determinadas propriedades geométricas. Além disso, a eficiência nos desenhos é melhor no computador.”* (Tiana, grifo nosso)

*“Porque ajuda na representação de gráficos, figuras em 3D. Podemos rotacioná-las [girá-las], ampliar nossa visão tridimensional, melhorar a capacidade de abstração através de imagens concretas que ficarão armazenadas no cérebro.”* (Cláudia)

É visto, atualmente, em IES, que muitos problemas e dificuldades encontradas por estudantes de Cálculo na visualização de um gráfico ou na compreensão de um conceito gráfico são oriundos de professores que utilizam métodos tradicionais para o ensino da disciplina, por exemplo, a utilização de imagens estáticas em livros didáticos ou esboços gráficos, mal traçados, no quadro/giz. (VALENTE, 2002; REZENDE, 2003; NASSER, 2007). Isso ocasiona diversos problemas para o contexto da disciplina, principalmente para a aprendizagem dos estudantes.

Com o objetivo de revertermos esse quadro, realizamos atividades que buscaram diagnosticar os possíveis subsunçores/conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva dos aprendizes participantes para, que, através de uma TIC, eles construíssem um produto interacional de idéias, pensamentos e conhecimentos prévios de conteúdos matemáticos para a visualização e formalização de conceitos no conteúdo de funções reais de duas variáveis, como superfícies e curvas de nível.

Descreveremos um momento observado em sala de aula e relatado no diário de observações, em que: *O professor começou a resolver uma questão no quadro e necessitou da visualização do gráfico da equação ‘ $y = x \cdot e^{-0,4x}$ ’, para solucioná-la. No momento, não havia nenhum software ou editor gráfico para visualizar seu traçado e a maneira encontrada pelo professor foi utilizar um esboço feito à mão, no quadro/giz, através de conhecimentos algébricos e de alguns cálculos. Os estudantes, aparentemente, não ficaram satisfeitos com a abordagem do professor, apresentando ainda dúvidas sobre o*



*processo de resolução e de visualização do esboço construído no quadro.* (aula do dia 14/04/2009, extraído do diário de observações).

Ainda nessa aula, outro fato e relacionado à visualização foi observado, no momento em que o professor desenhou uma superfície no quadro (o toro) e, a partir dela, fez um estudo analítico do gráfico. A sua explicação para a parte analítica e algébrica da questão foi entendida pelos estudantes, porém em relação à parte gráfica e ao desenho da superfície, eles apresentaram-se desconfiados e avessos ao desenho do toro, representado no quadro. Outras superfícies foram construídas, com um certo grau de subjetividade pelo professor, sendo exigido dos estudantes uma certa abstração para a compreensão das formas dessas superfícies. Exemplifiquemos essa situação em dois momentos, através dos comentários de Tiana e de Cristian ao colega:

*A aluna Tiana disse ao professor que não estava entendendo e ressaltou a sua dificuldade em enxergar [ver] a altura da casca cilíndrica de uma questão respondida no quadro por ele.* (A aula do dia 14/04/2009, extraída do diário de observações)

*O aluno Cristian comentou com o colega [Dago], ao lado, que não estava conseguindo entender [visualizar] as superfícies desenhadas no quadro, perguntando-lhe se ele estava entendendo. Ele respondeu gesticulando com a mão [como se quisesse dizer que entendeu mais ou menos]. Após esse momento, Cristian guardou seu material e saiu da sala, antes do final da aula, aparentando cansaço e sonolência.* (A aula do dia 14/04/2009, extraída do diário de observações)

Estas observações, além de mostrarem as dificuldades encontradas pelos estudantes em visualizar as superfícies desenhadas no quadro pelo professor, apontaram uma consonância com os problemas relacionados ao ensino de Cálculo, discutidos por Rezende (2003), na seção 2.2.

Nesse sentido, vemos a TAS auxiliada pelas TIC, como uma contribuição para a prática do professor de cálculo e para a formalização e visualização de conceitos nos conteúdos de funções reais de duas variáveis, principalmente em gráficos no  $\mathbb{R}^3$ , visando uma **aprendizagem combinatória** (AUSUBEL, 1980, ver definição em 3.4.3) de conteúdos algébricos (conceitos de domínio, imagem, continuidades, etc.) e de gráficos (superfícies esboçadas no quadro) com os conceitos já conhecidos e ancorados na estrutura cognitiva dos estudantes.

Ainda que o professor utilize mídias informáticas em sua aula, para que o aprendiz visualize as superfícies, de maneira mais precisa, e consiga, através delas, uma formalização do conceito pretendido, é necessário que consigamos desenvolver uma **reconciliação integradora** de todo o conteúdo estudado, defendida por Ausubel (1980) como solução para essa questão, pois é a “mais completa quando as possíveis fontes de confusão são eliminadas pelo professor ou pelos recursos didáticos. Portanto, pode-se ajudar o aluno a resolver as inconsistências ou conflitos aparentes entre conceitos ou proposições” (p. 104).

### 5.3.3 A utilização da visualização para validar a solução de problemas e exercícios de Cálculo, apoiada na TAS

Essa categoria emergiu da fundamentação teórica, pois vimos, em diversas pesquisas, autores (ALLEVATO, 2007; TALL, 1991a, 1991b, 2003, 2008; NASSER, 2007; FROTA, 2007; FROTA; COUY, 2009) que abordaram as dificuldades dos aprendizes na utilização da visualização, como meio para validar as suas hipóteses em certos problemas de Matemática.

Os dados encontrados para a categoria apresentam uma consonância com a pesquisa de Allevato (2007), na qual a autora identificou as dificuldades dos aprendizes em legitimar suas conjecturas, a partir de processos de visualização, via computador e a justificativa para este fato: a pouca ênfase dada às demonstrações geométricas e gráficas, pelos professores. Ela recomenda atividades que venham estabelecer esse vínculo, ou seja, que os alunos possam utilizar visualizações para validar suas hipóteses.

Com base na perspectiva de Allevato (2007), construímos algumas questões das Atividades – 1 e 2 que pudessem levar o estudante a utilizar visualizações para validar as suas conjecturas. Assim, encontramos nas respostas dos aprendizes participantes (seção 5.1 e 5.2) características que se coadunam com as pesquisas dos autores mencionados e, positivamente, com a TAS, através da visualização de conceitos em gráficos no IR<sup>3</sup>, facilitando a compreensão desse assunto, de maneira significativa. Abaixo, seguem alguns trechos que justificam essa questão:

*“Como tenho dificuldade em enxergar [visualizar, perceber] gráficos, me ajudou muito visualizar, logo o Winplot ajudou bastante o entendimento.” (Dago)*

*“[...] faz com que compreendêssemos e não apenas aceitássemos [...]” (Raíssa)*

Um fato “curioso” ocorrido antes da realização das atividades, no laboratório de Informática, foi quando, perguntado aos aprendizes (questões 6 e 7 da Atividade – 1) sobre o que eles achavam da utilização de computadores para o estudo de Matemática, apesar da maioria nunca ter utilizado *softwares* para estudar a disciplina, afirmaram que era importante utilizar o computador como meio de visualização para as representações gráficas de funções e que a sua ausência dificultaria o processo de imaginar e abstrair as representações gráficas de algumas funções, como dito abaixo:

*“Acredito que a questão do comportamento do gráfico e a relação entre as variáveis, principalmente, as implícitas, deram outra perspectiva para mim, no significado de funções.”* (Gilberto)

Para Allevato (2007) e Borba (2003), o computador oferece imagens que, de outra forma, seriam inacessíveis para os estudantes e comunica experimentalmente novas idéias visuais. As atividades realizadas no laboratório, como a correção da Atividade – 1 e as construções de superfícies e visualizações de curvas de nível, foram atividades em que os alunos mais utilizaram a visualização para validar as suas conjecturas e hipóteses sobre as perguntas feitas pelo pesquisador-orientando. Ainda nas respostas dos aprendizes para as 1ª e 2ª questões da Atividade – 2, eles utilizaram a visualização de superfícies e curvas de nível – impressas no papel – para estabelecerem relações entre elas e as expressões analíticas correspondentes. Nessa atividade, também, remetemos o uso da visualização para validar a resposta escolhida por cada estudante.

Na seção 2.4, do capítulo 2, foram discutidas diversas concepções de autores (ARCAVI, 2003; MACHADO, 2008; BARBOSA, 2009; FROTA; COUY, 2009) para o termo visualização. Apesar das convergências e divergências entre elas, defendidas por Frota e Couy (2009), todas possuíam estreitos laços, quanto às relações de visualização com imagens mentais e visuais. Assim, seria a visualização um método, recurso, forma metodológica ou meio para atingirmos a aprendizagem significativa? Esta interrogativa leva-nos às discussões do capítulo 3 sobre as relações da TAS com as idéias de Tall e Vinner (1991) sobre imagens conceituais e definições conceituais.

Apresentaremos alguns dados da entrevista, para responder à pergunta do parágrafo anterior e justificar a nossa idéia proposta no modelo intitulado “Interação entre definição e imagem conceitual, na perspectiva da aprendizagem significativa” (ver Figura 3),

elaborado com elementos da TAS – subsunçores e princípio de assimilação – em conjunto com os modelos de Vinner (1991). Exemplifiquemos com a resposta de Gilberto, ao qual foi perguntado sobre a visualização de superfícies, no estudo de funções reais de duas variáveis, sem a utilização do *software*:

*“Iche! Como é que eu acharia essa visualização agora! [apontou para o traçado de uma superfície na Atividade – 2] Ah! Eu não sei te falar o que aconteceria, eu acredito que se o professor passasse do jeito que ele passou... [ficou pensando e balançando a cabeça negativamente], porque ele só apresentou para a gente o parabolóide.”*

Perguntamos a Walda o que ela aprendeu com as atividades realizadas no laboratório:

*“Eu acho que foi a parte gráfica, mesmo; eu achei que ficou melhor, marcou mais a visualização.”* (Walda)

Esta estudante falava muito pouco, e assim tivemos dificuldade com sua entrevista, mas destacamos um momento entre ela e o pesquisador, em que a visualização gráfica foi apontada como uma certa importância, na opinião da estudante:

**Pesquisador:** *O que você achou mais legal do que você realizou nas atividades feitas em sala?*

**Walda:** *Como eu te falei, a parte da visualização do gráfico e das superfícies é que eu achei muito mais fácil.*

**Pesquisador:** *A questão da visualização foi o mais importante para você? Visualizar as superfícies correspondentes às expressões analítica dadas, foi isso?*

**Walda:** *Com o passar do tempo, eu aprendendo a mexer melhor no software, aí talvez eu vá inserir e ter outras opiniões a respeito disso; mas, a princípio, o que ficou foi a visualização.*

Numa outra vertente, a estudante Tiana identificou uma aplicabilidade para a visualização em seus estudos. A aprendiz afirmou, em entrevista, que pelo fato de não ter estudado inicialmente o conteúdo de gráficos em  $\mathbb{R}^3$ , em sala de aula, as atividades no laboratório favoreceram de maneira informal *“uma coisa mais intuitiva, sem*

*formalização” [fala transcrita da aprendiz] e que, posteriormente, em sala, ela compreendeu melhor a formalidade dada ao conteúdo, pois a visualização das superfícies no computador facilitaram a sua compreensão. Ainda nessa entrevista, perguntamos se, após as atividades no laboratório, ela voltou a utilizar o *software*, em algum momento, e a estudante respondeu o seguinte:*

**Tiana:** *[...] depois, eu usei durante o estudo para a prova, porque nem todos os exercícios do livro que a gente adota têm respostas, então para ter segurança no que eu estava fazendo e corrigir o que eu estava fazendo de errado, também, aí eu recorri ao Winplot, porque... enfim, foi mais por ter segurança, para visualizar, para eu ter certeza do que eu estava fazendo, é... para isso mesmo.*

**Pesquisador:** *E você acha que foi válido? Por quê?*

**Tiana:** *Foi válido, porque quando a gente tá aprendendo uma disciplina, a gente não tem tanta certeza, então, do que a gente tá fazendo, então conferir se está certo, se está errado, voltar é... Se você faz alguma coisa errada, você ter a possibilidade de ver que você fez errado e voltar e tentar, onde que você está errando, isso é muito válido, porque você tá estudando, né, isso aí ajuda no que você tem que estudar.*

A partir dos trechos citados acima, vimos o quanto a visualização foi útil ao processo de aprendizagem dos estudantes, ora em momentos informais, com intuições, abstrações e imagens conceituais, ora em momentos formais, associando o conteúdo aos subsunçores existentes na sua estrutura cognitiva e comparando-os com as definições conceituais.

Nesse viés, recordamos a pergunta que se encontra aberta nesta seção – seria a visualização um método, recurso, forma metodológica ou meio para atingirmos a aprendizagem significativa? Então, na tentativa de respondê-la, utilizamos a proposta do modelo da Figura 3, em conjunto com as falas dos aprendizes Gilberto, Walda e Tiana, que remetem a visualização como um meio necessário e útil em seus estudos, servindo como subsídio para a validação de suas conjecturas. Segundo a Figura 3, a combinação dessas conjecturas, pelo aprendiz, gera um produto interacional, nas relações entre as imagens conceituais, subsunçores e definições conceituais, visando uma aprendizagem de maneira **não arbitrária e substantiva** (formas de obtenção da aprendizagem significativa, seção 3.2, capítulo 3) dos conteúdos de funções reais de duas variáveis, mais precisamente, de gráficos em  $\mathbb{R}^3$ .

#### 5.3.4 A exploração de modelos e situações problemas mais complexo, nas atividades, sob o olhar da aprendizagem significativa

A categoria emerge da fundamentação teórica, nas idéias de Lévy (1993), quando ele afirma que a simulação por computador favorece a exploração de modelos mais complexos e que, sem o uso de uma TIC, esses modelos seriam de difícil compreensão, se utilizarmos apenas pensamentos e idéias mentais. Tall (1991c) corrobora Lévy e defende a idéia de trabalhar com problemas mais complicados em vez dos mais simples, pois, assim, segundo o autor, a formalização dos conteúdos de Cálculo seria mais fácil para a compreensão dos estudantes. Existem outras contribuições teóricas que discutimos na fundamentação teórica, tanto referente à perspectiva da TAS, quanto do PMA auxiliado pelo pensamento visual-espacial de autores (REIS, 2001; COSTA, 2005; TALL; VINNER, 1991; FROTA; COUY, 2009; MOREIRA, 2006; AUSUBEL, 1980) que tratavam sobre as questões e relações entre intuição, rigor, dedução e formalização.

Nessa categoria, destacamos a 5ª questão da Atividade – 1. Nesta fase, ainda sem o uso do computador como ferramenta, a questão induzia os estudantes a pensar nos conhecimentos do  $\mathbb{R}^2$ , gerar hipóteses e tentar abstrair, imaginar e construir gráficos no  $\mathbb{R}^3$ , além de requisitar outros conhecimentos prévios como plano cartesiano, funções, geometria analítica e conceitos de conteúdos em Matemática. Conforme a análise realizada na seção 5.2, verificamos que entre os aprendizes participantes, apenas dois deles conseguiram fazer os esboços das superfícies corretamente e de forma coerente com as suas respectivas expressões analíticas. As dificuldades encontradas por eles, principalmente, no traçado de gráficos em  $\mathbb{R}^3$ , são justificadas por Ausubel (1980), quando afirma que, para a aprendizagem significativa, a realização de uma atividade depende, em maior parte, dos alunos do que da atividade em si e, ainda, por mais que a atividade seja **potencialmente significativa**, cabe apenas ao estudante estabelecer os vínculos e estratégias necessárias para relacionar a nova informação com os subsunçores ancorados (se é que exista algum), na sua estrutura cognitiva. Caso não existam subsunçores, é necessário criá-los, com estratégias (*organizadores prévios*) da TAS, para que depois, então, seja realizada a atividade pretendida. O autor adverte que:

A aprendizagem significativa não deve ser interpretada simplesmente como a aprendizagem de material significativo. Na aprendizagem significativa, estes materiais são apenas *potencialmente* significativos. Se *já* forem significativos, o objetivo da aprendizagem significativa – ou

seja, a aquisição de novos significados – se completa por definição, antes mesmo de qualquer tentativa de aprendizagem (AUSUBEL, 1980, p. 42, grifo do autor).

Portanto, após uma familiarização dos estudantes no laboratório, com o uso do *software* e de suas ferramentas, verificando e discutindo as respostas dadas na Atividade – 1, o pesquisador, de posse de um roteiro de atividade, lançou mão de questões com um grau maior de complexidade, exigindo dos alunos um pouco mais de abstração sobre outros gráficos do  $\mathbb{R}^3$ , só que, dessa vez, na forma de diálogos, conforme discutimos em um esboço inicial, no capítulo 4.

Exemplificamos essa situação, partindo do conhecimento de um modelo simples para outro mais complexo, em um momento no laboratório, análogo à 5ª questão da Atividade – 1, em que pedimos aos estudantes as construções das superfícies  $z = \sin(x)$  e  $z = \sin(y)$  e que, através destas construções e visualizações na tela do computador, tentassem deduzir a superfície de  $z = \sin(x) + \sin(y)$ . Outras questões foram construídas nesse intuito, ou seja, uma vez dadas duas expressões analíticas com suas superfícies conhecidas, tentassem, por meio delas, deduzir a forma de outras superfícies geradas da combinação entre elas.

As entrevistas elucidaram que, quando trabalhamos com questões mais complexas, ficou mais difícil a visualização das superfícies, mas que, posteriormente, através de conceitos conhecidos e de uma **aprendizagem significativa subordinada**, os aprendizes conseguiram associar adequadamente a superfície ou curva de nível com a expressão analítica correspondente. Como é visto no diálogo abaixo:

**Pesquisador:** *Em relação àquelas imagens vistas na tela, você tinha respondido primeiro a Atividade – 1, depois corrigiu e viu o resultado no computador; correspondeu as suas expectativas? Era realmente o que você esperava ver ou foi uma novidade?*

**Gilberto:** *Para mim foi uma novidade, como eu te falei; na primeira parte, ali, que a gente tava até na metade [metade da atividade], vendo o polinômio [expressão analítica] e apresentando os gráficos, aí a gente pegou mais ou menos a “manha” [compreensão da atividade, entendeu a estratégia de resolução], entendeu? Só que, depois, quando você começa a fazer funções maiores [complexas], que envolvem variáveis de diferentes níveis [funções reais com expressões analíticas complicadas], né, depois que você entra nas trigonométricas, você vê como é diferente, como é difícil imaginar aquele sólido [superfície], eu acho difícil.*

Em relação às formas das superfícies e às representações gráficas de funções mais simples que apresentam como variável dependente o  $x$  ou o  $y$  (por exemplo,  $x = 2y$ ,  $y = 5z - x$ ,  $x = z^2 + y^2$  etc.), a maioria dos estudantes achou difícil abstrair essas curvas nos sistemas de coordenada de três eixos e, muitos deles não conseguiram visualizá-la, sem o auxílio do *software*. Contudo, destacamos um momento na entrevista de Tiana, em que, ao perguntá-la sobre este assunto, ou seja, o que mudaria na representação gráfica de funções que possuem a variável dependente diferente de  $z$ , a aprendiz demonstra uma sensação de descoberta, mas afirma que não seria uma situação complexa, pelo contrário, que seria fácil deduzir, até porque, nas atividades anteriores, tínhamos feito em  $\mathbb{R}^2$  o esboço do gráfico de  $x = y^2$ , no plano cartesiano.

**Tiana:** *Na verdade não, porque tanto no livro, quanto nesses exercícios, como nas aulas, sempre foi utilizado  $z$  igual...[pensando],  $z$  em função de  $x$  e  $y$ .*

**Pesquisador:** *Sempre  $z$  como dependente?*

**Tiana:** *É, inclusive você está falando isso agora, mas eu nem pensei na possibilidade de ter o  $x$  em função do...*

**Pesquisador:** *O  $x$  dependente, por exemplo?*

**Tiana:** *É, porque a gente não viu no livro*

**Pesquisador:** *Mas é fácil deduzir?*

**Tiana:** *É fácil, porque eu acho que é a mesma coisa desse exemplo que você deu, na primeira atividade, que a gente tinha que fazer  $y = x^2$  e depois o  $x = y^2$ , e mudava como se tivesse tido uma rotação entre os eixos; tá aí, um ponto que eu acho que poderia ser mais explorado, essa questão de mudar os eixos, de mudar a variável dependente, que a gente nem viu isso; de certa forma, a gente nem pára para pensar nisso, que a gente faz aqueles exercícios [refere-se a exercícios de livro] daquela mesma forma, então a gente nem pára para pensar em outras possibilidades e no que poderia ser mudado.*

Nesta última fala de Tiana, percebemos a influência da aprendizagem mecânica, ainda inserida nos conteúdos de diversos livros didáticos. Por mais que estes venham se modificando, nos últimos tempos, e apresentando uma nova abordagem com a inserção do uso de TIC no ensino, existe, ainda, muita resistência nas concepções de professores e autores de livros didáticos, quanto a esse assunto.

Finalizamos essa análise de categoria, com a afirmativa reflexiva da estudante, quando ela diz que “a gente nem pára para pensar em outras possibilidades e o que



*poderia ser mudado.*” Isto nos remete às discussões teóricas sobre a **aprendizagem significativa crítica**, defendida por Moreira (2006, 2008), em que o autor afirma que, para uma aprendizagem crítica, é importante que o aprendiz faça uma reflexão daquilo que está aprendendo e da forma como ele aprende, ou seja, faça uma avaliação crítica sobre a sua aprendizagem de um determinado conteúdo.

### 5.3.5 As impressões dos aprendizes sobre o uso e a aplicabilidade do *software* Winplot e as suas possíveis contribuições para a aprendizagem dos estudantes

**Walda:** “[...] *mas eu gostei bastante, achei muito interessante o software, eu achei que ele me ajudou bastante, pena que não foi junto com as aulas, né, se pudesse ser junto com as aulas, já aplicando esse software, eu acho que ficaria bem mais fácil para a gente aprender.*”

*[...] com a ajuda do software ficou mais fácil visualizar o gráfico, porque tem hora que fica difícil associar a parte algébrica à parte gráfica.*”

Estes trechos, na entrevista de Walda, demonstram a satisfação da aprendiz com a utilização e contribuição do *software* para o seu aprendizado, nos remetendo à seção 5.3.1, em que foram discutidas as relações entre as representações algébricas e gráficas, das expressões analíticas.

À luz da literatura estudada, observou-se, em algumas das concepções de autores (LÉVY, 1993; VALENTE, 2002) que abordam o uso de computadores para o ensino e da Matemática, uma visão mais holística sobre o uso da Informática para o ensino, valorizando as suas relações com a comunicação, escrita e oralidade, todas elas perpassando por questões humanas e de aspectos cognitivos do indivíduo. Estes aspectos, focados na perspectiva da Psicologia Cognitiva, foram fundamentados nos trabalhos de alguns pesquisadores do PMA, que discutem a aprendizagem dos estudantes apoiada ao uso de computadores (TALL, 1991a).

Autores brasileiros (ALLEVATO, 2007; BORBA; PENTEADO, 2003; VIANA, 2004; MACHADO, 2008; SANTIAGO, 2006), regados das concepções teóricas de autores clássicos, discutidas no parágrafo anterior, desenvolveram suas pesquisas no Brasil sobre a utilização de TIC para o ensino, analisando as contribuições, avanços, retrocessos e limitações de *softwares* usados na educação, particularmente, nas questões metodológicas no ensino de Matemática.

Com isso, a literatura estudada aponta que, para o uso de *softwares* no ensino de Matemática, seja necessário o devido cuidado com as suas aplicabilidades e limitações. É importante que o professor tenha competência e habilidade para utilizar uma TI coerentemente com os conteúdos a serem ensinados, conhecendo as suas potencialidades e limitações, respeitando as suas aplicabilidades e considerando-o um recurso auxiliar, na sua prática docente.

Através do olhar da literatura, na fundamentação teórica sobre o uso de TIC para o ensino de Matemática, mais especificamente, de Cálculo, em conjunto com a análise inicial e criteriosa das respostas dos aprendizes para as questões 6 e 7 da seção 5.1 e para as questões 5, 6 e 7 da seção 5.2, podemos concluir que a utilização do *software* contribuiu para a compreensão de conteúdos matemáticos, dentre eles, gráficos de funções e de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ .

*“Como tenho dificuldade em enxergar [visualizar, perceber] gráficos, ajudou muito a visualizar, logo o Winplot ajudou bastante o meu entendimento.”* (Dago)

*“[...] facilitando a visão de gráficos em dimensões acima de 2.”* (Cristian)

A maioria dos aprendizes participantes afirmou que, antes dessa atividade, nunca tivera usado um *software* para estudar Matemática. Apesar desse pouco contato – dos 11 aprendizes participantes da pesquisa e dos estudantes que participaram do piloto – com o *software*, percebemos a facilidade deles quanto ao uso das ferramentas do Winplot e a motivação que o *software* proporcionou ao estudo de superfícies (gráficos) no  $\mathbb{R}^3$ . Conforme os estudantes, além dele despertar a possibilidade para o uso de computadores no ensino de Cálculo, serviu, também, como um recurso de aprendizagem para outras disciplinas de Matemática. O trecho abaixo, com a opinião da estudante Tiana, mostra e justifica a contribuição do *software* para uma aprendizagem significativa, no estudo pretendido:

*“Na minha opinião a atividade foi muito rica, pois ajudou a aperfeiçoar o conhecimento sobre funções que já possuíamos e, sem dúvida, nos preparou para os novos conceitos que iremos aprender em Cálculo II e III. Com essa atividade eu passei a acreditar ainda mais na potencialidade da Informática na educação.”* (Tiana)

A impressão de alguns estudantes, sobre o uso de computador no ensino de Cálculo em atividades de laboratório, foi, inicialmente, de indiferença. No entanto, posteriormente, com as aulas desenvolvidas no laboratório de Informática, eles se interessaram pelo *software* ao conhecerem as suas ferramentas. Ao final das atividades, observamos que a sua utilização, para o estudo de gráficos no IR<sup>3</sup>, foi vista pela maioria dos estudantes como um recurso com diversas possibilidades e vantagens para os seus estudos e planos futuros e para suas perspectivas das demais disciplinas do curso.

As entrevistas e conversas informais, com os aprendizes participantes, mostraram que o uso do *software* Winplot favoreceu a quebra de alguns preconceitos e resistências quanto à utilização de uma mídia informática, como um recurso para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, potencializando as suas formas de raciocínio e interpretação, contribuindo para sua formação.

*“Ah, eu acho que todos os recursos que a gente pode usar para poder facilitar o ensino são válidos, né é... Eu não sou contra recursos antigos como quadro e giz, mas eu acho que se tem o novo, nós buscamos... [trecho obscuro – aluna se refere ao processo de planejamento do professor em utilizar novos recursos] ...como computador e outros que eu acho que virão aí, você só tem a acrescentar coisas boas para a sua prática, e se está tão presente no dia a dia de forma geral por que é que não pode acrescentar para o aprendizado em sala de aula, também?” (Tiana)*

A fala da aluna Tiana desperta a reflexão para algumas questões, quanto ao uso de *softwares*, fundamentada na literatura estudada, ou seja, alguns estudantes utilizaram, após as atividades no laboratório, o *software* Winplot em seus estudos, comparando as superfícies desenhadas na tela do computador com as superfícies estáticas apresentadas nos livros didáticos, e as respostas dadas nas atividades. Em certo momento da entrevista com a estudante, emerge uma situação que nos remete a um possível conflito **teórico-computacional** (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2003), com relações entre as imagens conceituais e as definições e características apresentadas nas formas de gráficos no IR<sup>3</sup>. O conflito ocorre, através da fala da estudante, quando ela associa a imagem conceitual das formas das superfícies apresentadas na tela do computador com as imagens estáticas do livro – nesse momento fica claro uma limitação do *software* Winplot em apresentar, de forma clara, precisa e mais próxima do real, os gráficos em IR<sup>3</sup>.

O diálogo, abaixo, entre o pesquisador e a aprendiz, apresenta a situação descrita no parágrafo anterior e mostra que ela aprendiz confirma, ao final de sua fala, que as superfícies do computador, apesar de apresentarem formas diferentes, comparadas às do livro, conservavam as mesmas características conceituais das imagens estáticas nele.

**Tiana:** “[...] a gente não tem a mesma habilidade que um professor tem de visualizar, de entender, e o gráfico ajuda, o software ajuda até ter um pouco menos de medo, até porque, quando eu conferia minhas respostas, de certa forma, era para ter uma segurança do que eu tava fazendo, e a gente não tem essa segurança, quando a gente está entrando em contato com determinado conhecimento; então eu achei que valeu a pena, se eu fosse professora, com certeza, utilizaria esse tipo de recurso. Eu acho que depende um pouco mais de planejamento e de organização, mas vale a pena. A maioria dos exercícios que eu fiz não tinha resposta, eu fui conferir no Winplot, e eu acertei.”

**Pesquisador:** Estava de acordo com a resposta que você utilizou antes, sem o software?

**Tiana:** Isso, exatamente, mas alguns eu errava e... valeu a pena, porque eu voltava atrás e via onde é que eu estava errando e... além disso, eu achei que, às vezes também, em alguns exercícios, com gráfico, you had to link the analytical expression to a graph and sometimes making the graph in Winplot, it appeared in a different form than in the book, so you had to observe a little more, you had to pay a little more attention to be able to make a link between that graph that appeared in Winplot, generated in Winplot, and the graph that was in the book; in reality it was the same, but it had a little difference, sometimes it was more closed, sometimes it was a little more open. (grifo nosso)

**Pesquisador:** Sei, a impressão do livro, a impressão da superfície que estava no livro...

**Tiana:** Era um pouco diferente.

**Pesquisador:** Da que aparecia no software ?

**Tiana:** Isso, hanram... [confirmou balançando com a cabeça], mas com um pouquinho de atenção, dá para ver que, na verdade, se tratava da mesma coisa.

Segundo Giraldo; Carvalho e Tall (2003), podemos afirmar que a aprendiz evocou uma imagem conceitual, ao perceber diferenças entre as superfícies traçadas no computador e as desenhadas no livro. E, posteriormente, através da relação da imagem conceitual com a definição conceitual, produziu um produto interacional desta relação e

gerou uma resposta conclusiva para a situação (ver Figura 3 e Quadro 3). Para Ausubel (1980), este produto interacional ocorre na fase denominada de princípio de assimilação – associações de novas informações com os conceitos, subsunçores e imagens conceituais ancorados na estrutura cognitiva do indivíduo – e favorece um resultado bastante pródigo para a aprendizagem significativa de determinados conteúdos, no caso particular da aprendiz, auxiliou uma **possível** aprendizagem significativa por descoberta de conceitos e características em gráficos no IR<sup>3</sup>.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, a questão de investigação – **Como o uso de um *software* e de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráficos no  $\text{IR}^3$ , de estudantes de Cálculo de várias variáveis?** – orientou a análise dos dados, identificando as possíveis contribuições de um *software* Winplot, combinado com atividades para o ensino e aprendizagem de gráficos e superfícies no  $\text{IR}^3$ . Os conteúdos sobre gráficos em  $\text{IR}^2$  e em  $\text{IR}^3$ , abordados nas questões das atividades, provocaram, individualmente, nos estudantes, interações de conhecimentos novos – gráficos no  $\text{IR}^3$  – com outros conhecimentos (subsunçores) ancorados e existentes na sua estrutura cognitiva.

A resposta para essa questão de investigação constitui em um conjunto, de fatores e ferramentas, que pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráficos no  $\text{IR}^3$ , por exemplo, a utilização da visualização no *software*, como meio para verificar e comprovar as conjecturas e hipóteses dos aprendizes participantes nas atividades; a construção de gráficos de funções; a formação do conceito de superfícies em gráficos do  $\text{IR}^3$ ; entre outros.

Os dados analisados apontam que essa combinação de atividades práticas, auxiliadas por mídias, lápis, papel e *software*, em conjunto com aspectos de uma abordagem metodológica de experimentos de ensino, favoreceram uma **interação** de conteúdos novos (gráficos no  $\text{IR}^3$ ), subsunçores e imagens conceituais dos estudantes. Portanto, entendemos que o termo **interação** exprime uma contribuição para a aprendizagem significativa dos estudantes sobre o conteúdo proposto na pesquisa e de acordo com a TAS (AUSUBEL, 1980), vimos que ele representa a palavra-chave para a ocorrência da aprendizagem significativa.

Interação é a palavra-chave: *interação entre conhecimentos novos e conhecimentos prévios*. Se não há essa interação, não há aprendizagem significativa. Havendo interação, ambos os conhecimentos se modificam: o novo passa a ter significados para o indivíduo e o prévio adquire novos significados, fica mais diferenciado, mais elaborado (MASINI; MOREIRA, 2008, p. 15, grifo do autor).

Essa noção de interação, defendida por Masini; Moreira (2008) e Ausubel (1980) como um meio pelo qual a aprendizagem significativa ocorre, foi relevante nas atividades realizadas na pesquisa, assim como em todo o processo de construção das atividades, coletas e análise dos dados. Tal processo foi permeado por componentes dessa teoria de

aprendizagem em que “o conhecimento prévio do aprendiz tem grande influência sobre a aprendizagem significativa de novos conhecimentos” (MOREIRA, 2006, p.158).

Concordamos com as idéias de Ausubel (1980) e Moreira (2006; 2008), quanto à ocorrência da aprendizagem significativa depender, em grande parte, do aprendiz, em conseguir estabelecer um conhecimento novo com outro, relevante, existente na sua estrutura cognitiva e que o processo metodológico, os recursos e objetos utilizados para esse fim devem ser acompanhados por um professor, e que também se dará em partes, de forma interativa para o aprendiz desse indivíduo.

Assim, entendemos que as atividades e a metodologia de pesquisa utilizada ofereceram os subsídios necessários para que os alunos estabelecessem interações entre conhecimentos prévios de Matemática (como gráficos e funções no  $\mathbb{R}^2$ , conceitos e definições de diversos tipos de funções) e outros do seu cotidiano do senso comum e que, através dessas interações, resulte um aprendizado mais significativo e menos mecânico de conceitos, características e propriedades de gráficos e superfícies no  $\mathbb{R}^3$ . Com base em uma faixa *continuum* (AUSUBEL, 1980, ver Figura 1), cujos extremos são aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, percebemos que a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa tendeu mais para o extremo da aprendizagem significativa.

Os dados analisados na seção 5.3, sobre as visualizações, utilizações e impressões dos estudantes, a respeito da utilização do *software* Winplot como um elemento determinante na aprendizagem de conteúdos de Cálculo, apresentaram uma contribuição para a aprendizagem significativa dos estudantes, em conteúdos de funções reais de duas variáveis. Ao nosso ver, o uso de uma TI em conjunto com as atividades, para aprendizagem de gráficos em  $\mathbb{R}^3$ , auxiliou tanto como um instrumento metodológico, quanto como um recurso necessário para que os aprendizes pudessem compreender as formas das superfícies e das curvas de nível. Com isso, entendemos que o *software* auxiliou o processo de construção, visualização, comparação e comprovação das conjecturas dos aprendizes, contribuindo de maneira significativa para a sua aprendizagem dos conteúdos pretendidos.

Ratificamos o papel e a contribuição do professor no processo de ensino e aprendizagem, como aspectos relevantes na pesquisa, ou seja, as relações entre os objetos (atividades, *softwares* e laboratórios), potencialmente significativos e as interações sociais de professor-aluno e aluno-aluno, fundamentais para a ocorrência da aprendizagem significativa.

Computador algum jamais pode ser programado com respostas para *todas* as questões que os alunos possam fazer. E nas áreas de conhecimento menos estabelecidas, a discussão e a interação aluno-aluno e aluno-professor são essenciais para a aprendizagem (AUSUBEL, 1980, p.323, grifo do autor).

A pesquisa estabeleceu um caráter qualitativo com a realização de experimentos de ensino em uma amostra de 11 aprendizes, contudo, afirmar que ocorreu a aprendizagem significativa nesses estudantes seria muita prepotência, além disso, não foi propósito da pesquisa. Comprovar essa aprendizagem se torna uma tarefa difícil, segundo Ausubel (1980):

Nem sempre é fácil demonstrar quando ocorre a aprendizagem significativa. Uma compreensão genuína implica o domínio de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Mas se tenta testar tal conhecimento pedindo ao indivíduo que relate os atributos essenciais de um conceito ou os elementos essenciais de uma proposição, ele poderá apenas responder verbalizações memorizadas mecanicamente (p. 122).

Levando em consideração o pensamento de Ausubel (1980) e as pesquisas analisadas, no viés da Psicologia Cognitiva, observamos o quanto é difícil quantificar e medir dados que comprovem a ocorrência da aprendizagem significativa ou de qualquer outro tipo de aprendizagem, todavia, isso se constituiria em um processo científico individual, idiossincrático, lento, árduo e apurado com uma amostra global de indivíduos e fatores relevantes e determinantes, que iriam demandar muito tempo de aplicação e análise dos dados. Não queremos com isso afirmar que este estudo identificou a aprendizagem significativa nos estudantes, mas sim, que todo o processo foi construído com base na TAS, e ofereceu subsídios para professores e estudantes refletirem sob essa perspectiva de aprendizagem, analisando suas possibilidades de aplicação no ensino e aprendizagem de Cálculo.

Com base nos resultados da pesquisa, sugerimos que professores de Cálculo (de várias variáveis) utilizem as TIC em suas aulas, compreendendo algumas das abstrações, idéias e pensamentos que seus aprendizes estabelecem nos diálogos entre eles, num ambiente informatizado. Este contexto possibilitará aos aprendizes, visualizações e simulações gráficas na aprendizagem de conceitos matemáticos de Cálculo.

As atividades desenvolvidas nesta pesquisa apresentam-se como um produto educacional, opcional, para professores de Cálculo, não que elas consistam em uma



“receita” ou algo parecido, mas, sim, numa possibilidade e disponibilidade para o professor escolher e decidir utilizar – nos mesmos moldes construídos na pesquisa ou com adaptações pessoais pertinentes e coerentes com a TAS – quando lhe for conveniente e de acordo com a sua realidade acadêmica. Anseio, também, que essas atividades, auxiliadas por uma TI, sirvam como referência para outras que o professor venha a desenvolver em sua prática docente.

[...] a construção visual ligada à antecipação e organização lógica precisam ser aprendidos e experimentados. Assim uma nova área de desafio, que precisa ser pensada seriamente nas suas conseqüências educativas, é a que está relacionada com o tipo de ambientes de ensino que devem ser promovidos de forma a provocarem o uso pelos alunos de um pensamento visual-espacial de qualidade e então uma formação de professores e desenvolvimentos curriculares adequados (COSTA, 2005, p. 197).

Os dados analisados, em conjunto com a fundamentação teórica, elucidam alguns pensamentos de autores que abordam a TAS e, demonstram aspectos conclusivos nesse estudo sobre o ensino e aprendizagem de gráficos em IR<sup>3</sup>. Em relação ao ensino, concordamos que ele deva “[...] ser planejado de modo a facilitar a aprendizagem significativa e a ensinar experiências afetivas positivas.” (MOREIRA, 2006, p.158) e que “[...] se consuma quando o significado do material que o aluno capta é o significado que o professor pretende que esse material tenha para o aluno.” (GOWIN 1981, apud, MOREIRA, 2006, p.163). Quanto à aprendizagem significativa, acreditamos que ela “[...] refere-se ao processo de *aquisição de significados* a partir dos significados potenciais apresentados no material de aprendizagem, e ao processo de *torná-los mais disponíveis*.” (AUSUBEL, 1980, p. 112, grifo do autor) e ainda que “[...] aquilo que o aluno já sabe, isto é, seu conhecimento prévio, parece ser o fator isolado que mais influência a aprendizagem subsequente” (AUSUBEL, apud, MOREIRA, 2006, p.55).

Assim, estas citações levam-nos a concluir que o estudo desta pesquisa, que combina elementos do pensamento visual-espacial (COSTA, 2005; FROTA; COUY, 2009), características da imagem conceitual e definição conceitual do PMA (TALL; VINNER, 1991) com algumas questões e reflexões sobre os conceitos da TAS, possa melhorar tanto significativamente as relações de ensino e aprendizagem de Cálculo, auxiliadas por uma TIC, quanto o desenvolvimento da Educação Matemática no ensino superior.

Esperamos que este estudo incentive os professores a utilizarem tecnologias informáticas como uma ferramenta facilitadora, para o ensino de Cálculo e que, através delas, os estudantes construam conhecimentos e desenvolvam aprendizagem sobre os conteúdos dessa disciplina, no viés da TAS. Ao mesmo tempo, almejamos que os resultados desta pesquisa juntem-se ao corpo de outras pesquisas com a mesma temática, oportunizando um espaço de discussão e estímulo para futuras pesquisas que venham relacionar aspectos da TAS com conceitos e definições de outras teorias, destacando pontos de consonâncias e convergências entre elas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **As Concepções dos alunos sobre resolução de problemas ao utilizarem o computador no estudo de funções.** PARADIGMA, Vol. XXVIII, Nº 1. p.131-156. UNESP-SP, Rio Claro-SP. Junho. 2007
- ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith.; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa.** São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 3. reimpr. da 2. Edição, 2002.
- ARCAVI, Abraham. **The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics.** Educational Studies in Mathematics, n. 52, p. 215-241, 2003.
- AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; e HANESIAN, H. **Psicologia Educacional.** Rio de Janeiro, Interamericana. Tradução para português, de Eva Nick et al., da segunda edição de **Educational psychology: a cognitive view (1968).** 1980.
- AUSUBEL, David P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Lisboa: Ed. Alicerce, 2000.
- BARBOSA, Sandra Malta. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.** Tese de Doutorado, UNESP – Rio Claro - SP, 2009. 199 p.
- BARUFI, Maria C. Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1999.
- BENEDETTI, Francisco Carlos. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes.** Dissertação de Mestrado da UNESP, Rio Claro – SP. 2003, 316p.
- BOGDAN, Roberto C. e BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Traduzido por: Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal, Porto Editora Ltda, 1994.
- BORBA, Marcelo de Carvalho. **Informática Trará Mudanças na Educação Brasileira?** Zetetiké , Campinas ,SP,v.4, n.6, p.123-134, jul./dez.1996.
- COSTA, Maria da Conceição Monteiro da. **Modelo do pensamento visual-espacial: tranformações geométricas no início da escolaridade.** Tese (Doutorado) - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 314p. 2005.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática .** Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 98p. (Coleção Tendências da Educação Matemática).
- DIAS, Marisa da Silva. **Reta Real Conceito Imagem e Conceito Definição.** Dissertação de Mestrado da PUC-SP, São Paulo, 2002, 98p.
- EDWARDS, Jr. C. H., PENNEY, David E. **Cálculo com Geometria Analítica,** trad. Alfredo Farias, volume 2 e 3, editora LTC, Rio de Janeiro, 1994.

FROTA, Maria Clara Rezende. **Representação e Visualização no Estudo de Funções**. In: Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, (IX ENEM), GT-04, em Belo Horizonte-MG, 2007.

FROTA, Maria Clara Rezende; COUY, Laís. **Estratégias para o Ensino-Aprendizagem de Funções com um Foco no Pensamento Visual**. In: Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IV SIPEM), GT-04, em Brasília-DF, 2009.

GIRALDO, V; CARVALHO, L.M. **Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, 3, No. 2. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. 2002, p.101-110.

GIRALDO, Victor; CARVALHO, Luiz. M. & TALL, David. O. **Descriptions and Definitions in the Teaching of Elementary Calculus**. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty and J. Zilliox (eds.) Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2, pp.445-452, Honolulu, USA. 2003. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003d-giraldo-carv-pme.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2009.

\_\_\_\_\_. **Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada**. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol. 1, p. 153 - 164, Rio de Janeiro, Brasil. 2003. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf>> Acesso em: 13 out. 2009.

LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência: O Futuro do Pensamento na Era da Informática**. Tradução Carlos Irineu Costa. – Rio de Janeiro. Ed.34, 1993 (Coleção Trans) 208p. 1956.

LÜDKE, Menga. ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986, 99p.

MACHADO, Rosa Maria. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP**. Tese de doutorado defendida na UNICAMP – Campinas – SP, 2008. 289 p.

MASINI; Elcie F. Salzano; MOREIRA, Marco Antônio. **Aprendizagem significativa: Condições para a ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos**. Ed vetor, edição 1 – São Paulo, 2008.

MEYER, Cristina. **Derivada/Reta Tangente: Conceito Imagem e Conceito Definição**. Dissertação de Mestrado da PUC-SP, São Paulo, 2003, 159p.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. – Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. 186p.

NASSER, Lilian . **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo.** In: **IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007, Belo Horizonte. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG : SBEM, 2007.

OLIMPIO JUNIOR, Antonio. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática** - uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. (Tese de doutorado) 2006.

\_\_\_\_\_. **Primeiro ano num curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo.** Bolema. Rio Claro, n.28, p. 39 – 6. 2007.

OLIVEIRA, C. E. **A Formação Inicial do Professor de Matemática para o uso da Informática na Sala de Aula**, Trabalho realizado para o PPGEM, UNESP/Rio Claro, 2006.

PINTO, Márcia. M. F.; TALL, David. **Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory.** For the Learning of Mathematics. V.1, n. 22, 2–10, 21p. 2002. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002a-pinto-flm.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2009.

PONTES NETO, José Augusto. **Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel: perguntas e respostas.** Série-Estudos - Periódico do Mestrado em Educação da UCDB. Campo Grande-MS, n. 21, p.117-130, jan./jun. 2006.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Campinas: Unicamp, Tese de doutorado, 2001. 302 p.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** In Machado, N.: Cunha, M.(org) Linguagem, Conhecimento, Ação-ensaios de epistemologia e didática. Escrituras. São Paulo. 2003.

SANTIAGO, Dalva Gonzalez. **Novas Tecnologias e o Ensino Superior: repensando a formação docente.** Dissertação de Mestrado em Educação. Orientador: Profa. Dra. Elizabeth Adorno de Araujo. PUC-Campinas, 2006, 108p.

SOUZA, Fernando Eduardo de; SILVA, Benedito Antonio da. **Conhecimento de Estudantes Universitários sobre o conceito de Integral.** In: Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, (IX ENEM), GT-04, em Belo Horizonte-MG, 2007. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Comunicacao\\_Cientifica/Trabalhos/CC24947808888T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC24947808888T.doc)> Acesso em: 18 jan. 2010.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. **Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements.** In: LESH, R.; KELLY, A. E. *Research Design in Mathematics and Science Education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p.267-307.

TAJRA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor.** São Paulo. Érica. 2001

TALL, David. O. **Advanced Mathematical Thinking**. London: kluwer Academic Publishers, 1991a, 289p.

\_\_\_\_\_. **Recent developments in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts**, *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*, M.A.A. Notes Vol. 20, 15–25. 1991b. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991i-comp-calc-maa.pdf>>. Acesso em: 14 out. 2009.

\_\_\_\_\_. **Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus**, *Visualization in Mathematics* (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105–119. 1991c. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigour-maa.pdf>>. Acesso em: 14 out. 2009.

\_\_\_\_\_. **A Transição para o Pensamento Matemático Avançado Funções, Limites, Infinito e Prova**, traduzido por Márcia Fusaro Pinto, Departamento de Matemática – Faculdade de Educação, UFMG. Publicado em Grows D. A. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, p. 495 – 511. 1992. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2009.

\_\_\_\_\_. **Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics**. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28. Rio de Janeiro, Brasil. 2003. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf>> Acesso em: 13 out. 2009.

TALL, David. O.; SMITH, David. e PIEZ, Cynthia. Technology and Calculus. In M. Kathleen Heid and Glendon M Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume I: Research Syntheses*, 207-258. 2008. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2008f-piez-smith-tall-calculus.pdf>> Acesso em: 14 out. 2009.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: SP - UNICAMP/NIED, 2002. 156p.

\_\_\_\_\_. **Por Quê o Computador na Educação**. Em J.A. Valente (Org.), *Computadores e Conhecimento: repensando a educação*. p. 24-44. Campinas, SP. Gráfica da UNICAMP. 1993.

VIANA, Marger da Conceição Ventura. **Vale Utilizar Softwares no Ensino de Cálculo**. II HTEM - 2º Colóquio História e Tecnologia no Ensino de Matemática, Editora IME-UERJ. p. 131-138. 2004.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1999.

VINNER, Shlomo. **O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática.** Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65 – 81. 1991.

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **A Natureza da Aprendizagem Matemática em um Ambiente *Online* de Formação Continuada de Professores.** Tese de Doutorado, UNESP – Rio Claro - SP, 2007. 174 p.

## APÊNDICE A – Atividade 1

### Atividade – 1

Nome: \_\_\_\_\_

Repete a disciplina: ( ) SIM ( ) NÃO

1) Faça os esboços dos gráficos das equações  $y = x^2$  e de  $y = 3$ , no plano cartesiano.

a) Quais são as variáveis (dependentes e independentes) existentes na **equação  $y = x^2$** ?

Dependentes: \_\_\_\_\_

Independentes: \_\_\_\_\_

b) Quais são as variáveis (dependentes e independentes) existentes na **equação  $y = 3$** ?

Dependentes: \_\_\_\_\_

Independentes: \_\_\_\_\_

c) Que valores a variável  $x$  assumiu no traçado do gráfico da equação  $y = 3$ ?

---

---

---

---

d) Qual(ais) a(s) influência(s) da variável  $x$  no traçado do gráfico da equação  $y = 3$ ?

---

---

---

---

2) Os gráficos traçados na questão anterior foram feitos num espaço:

a) ( ) Bidimensional

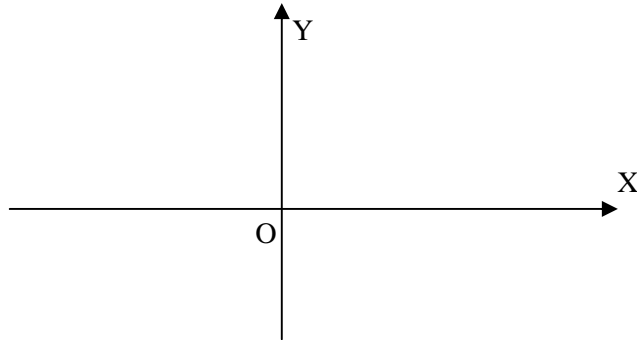
b) ( ) Tridimensional

c) ( ) Outros (justifique sua resposta) \_\_\_\_\_



3) Com base na análise das equações:  $y = x^2$  e  $x = y^2$ , responda as questões abaixo:

a) Faça um esboço dos gráficos destas equações no mesmo sistema de coordenadas cartesianas  $xOy$ :



b) Quais conteúdos de matemática, você utilizou ao traçar os gráficos no item anterior?

---



---



---

c) Identifique as diferenças entre os gráficos.

---



---



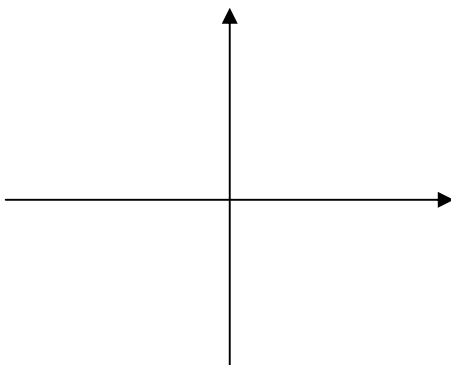
---



---

4) Considere um plano cartesiano, com o eixo  $y$  trocado pelo eixo  $z$ , e a equação  $y = x^2$  trocada por  $z = x^2$ .

a) Faça um esboço do gráfico  $z = x^2$  no sistema de coordenadas retangulares abaixo, identificando as variáveis  $x$  e  $z$  nos eixos.



b) Com esta troca de variável, houve alguma mudança no traçado do gráfico? Justifique a sua resposta.

---

---

---

---

---

5) Que diferenças você percebe entre gráficos traçados em espaços bidimensionais (sistema de coordenadas  $x$  e  $y$ ) daqueles traçados em espaços tridimensionais (sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ )? Exemplifique

---

---

---

---

a) É possível traçar gráficos de equações envolvendo apenas duas variáveis em espaços tridimensionais? Justifique e exemplifique.

---

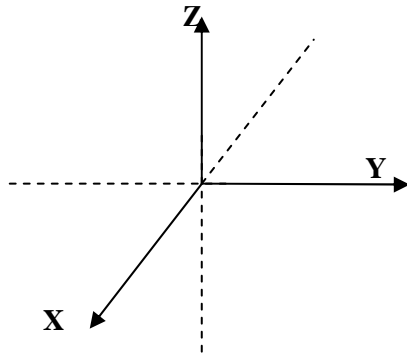
---

---

---

b) Quais são as diferenças entre os gráficos das equações  $z = x^2$  e  $z = y^2$ , traçados num mesmo sistema tridimensional? Faça um esboço destas duas equações no mesmo sistema de eixos dado abaixo.

---



c) A ausência da variável  $y$  na equação  $z = x^2$  [respectivamente, ausência de  $x$  em  $z = y^2$ ] teve alguma influência no traçado do gráfico? Justifique.

---



---



---

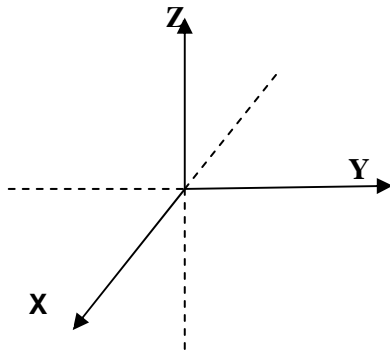


---



---

d) Agora tente esboçar o gráfico da equação  $z = x^2 + y^2$  no sistema de coordenadas  $x, y, z$ . Os itens anteriores serviram para te auxiliar na construção deste gráfico? De que forma?




---



---



---



---

6) Você já utilizou algum software para construção de gráficos matemáticos? Quais?

---

---

---

---

7) Na sua opinião o computador pode contribuir no aprendizado de matemática? De que maneira?

---

---

---

---

## APÊNDICE B – Atividade 2

### Atividade – 2

Nome: \_\_\_\_\_

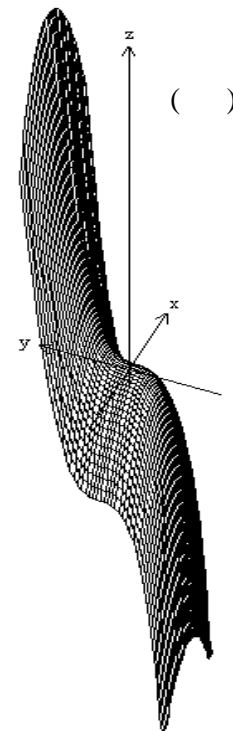
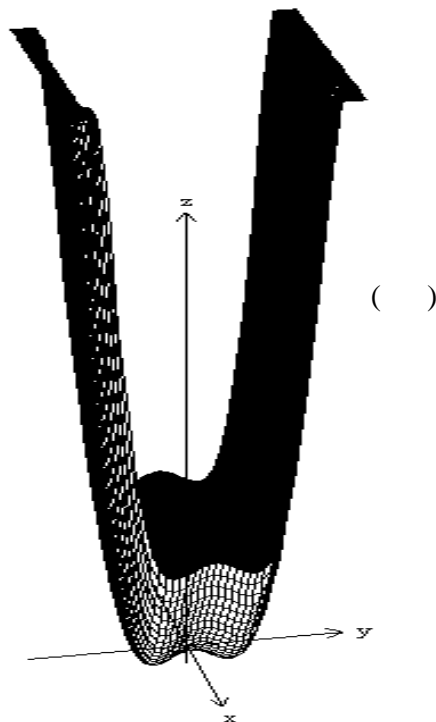
1) Associe cada função ao seu gráfico nas figuras abaixo:

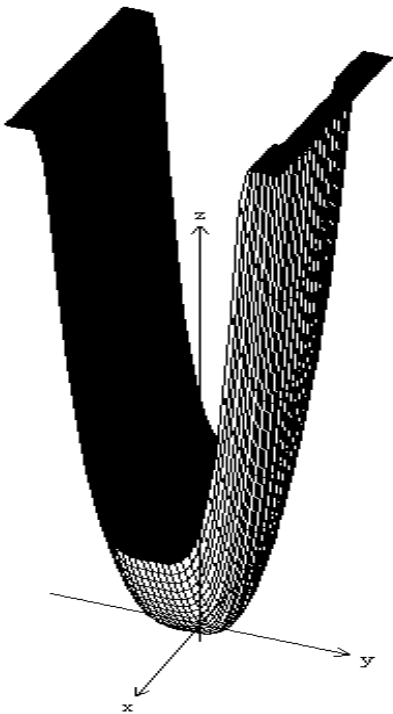
A.  $f(x, y) = y^3 - x^2$

B.  $f(x, y) = y^4 + x^2$

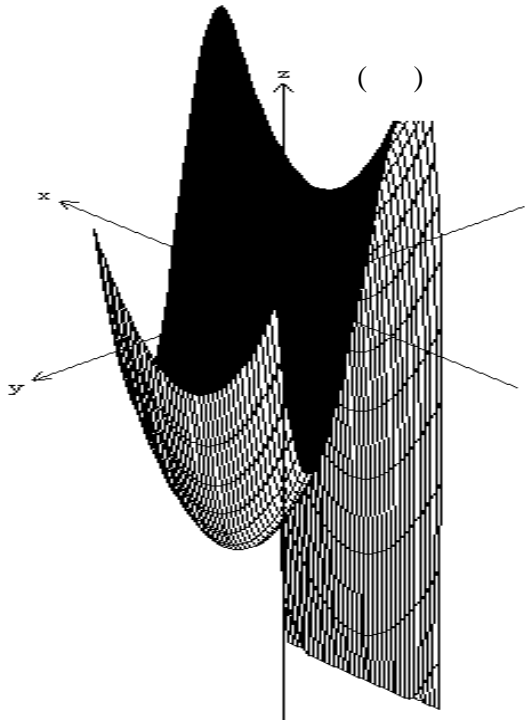
C.  $f(x, y) = y^4 + x^2 - 2y^2$

D.  $f(x, y) = 2y^3 - 3y^2 - 12y + x^2$



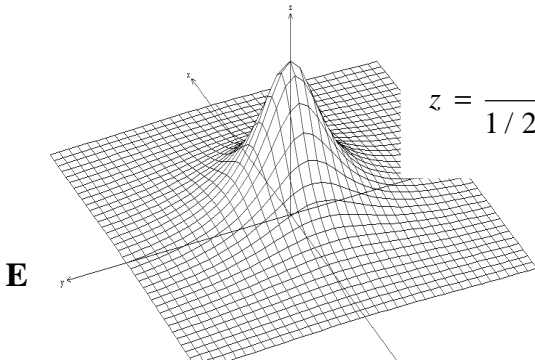


( )

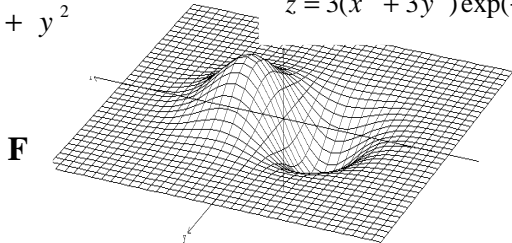


( )

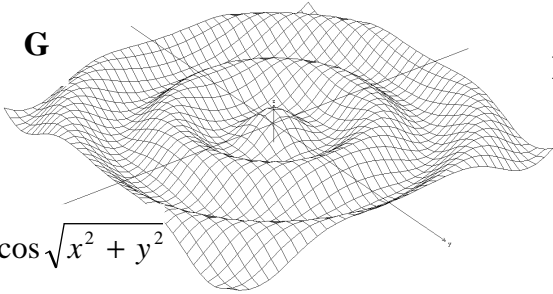
2) Associe cada superfície as suas curvas nível:



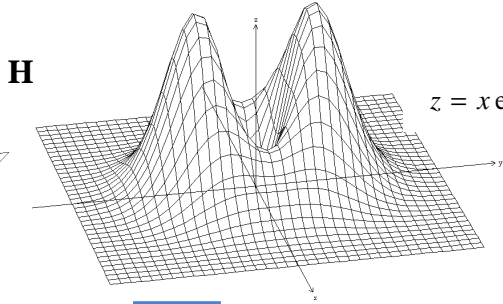
$$z = \frac{1}{1/2 + x^2 + y^2}$$



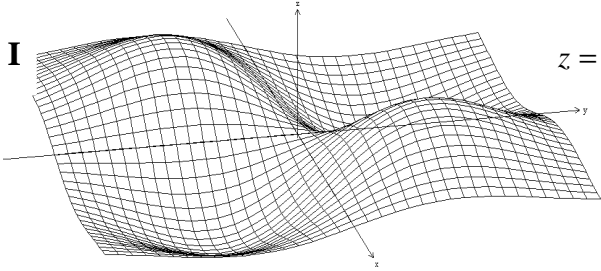
$$z = 3(x^2 + 3y^2) \exp(-x^2 - y^2)$$



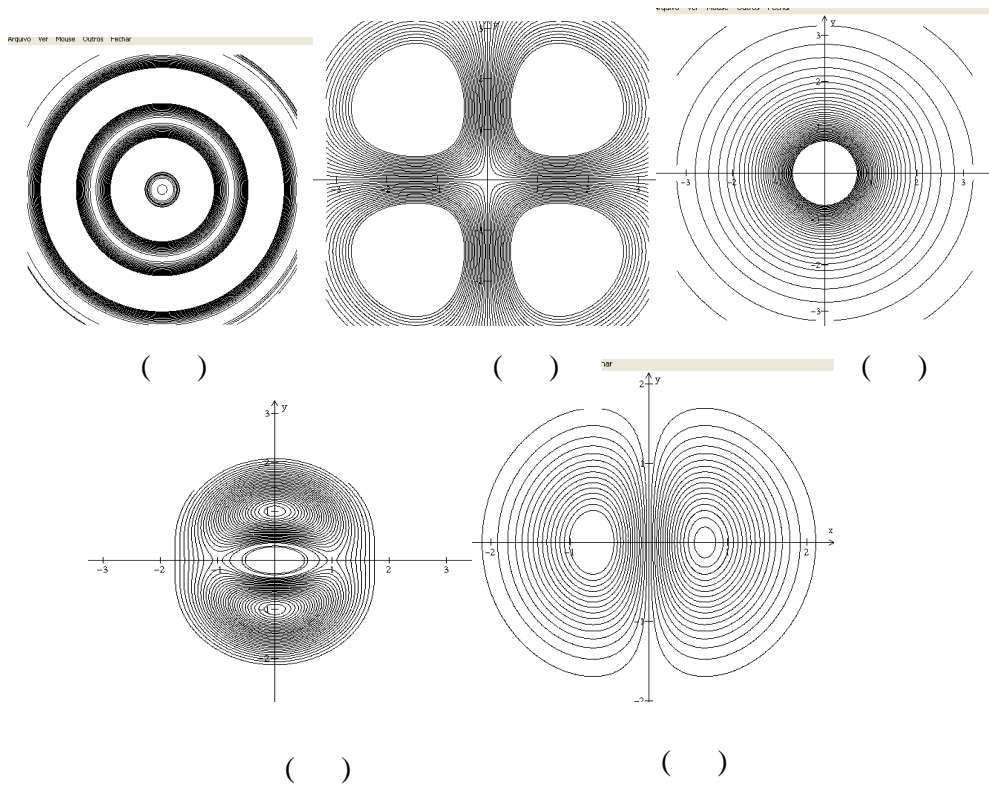
$$z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = x \exp(-x^2 - y^2)$$



$$z = xy \exp(-1/4(x^2 + y^2))$$



3) Houve contribuições para o seu entendimento de matemática nas atividades realizadas com o software winplot ? Caso afirmativo descreva.

---



---



---



---



---

4) Descreva as suas idéias, pensamentos e estratégias ao responder as questões 1 e 2 dessa atividade?

---



---



---



---



---

5) Em relação à visualização dos gráficos do  $R^3$  e das curvas de nível no software “Winplot”, você acredita que essa atividade contribuiu para a sua aprendizagem de forma:

- ( ) acima das expectativas
- ( ) muito boa
- ( ) boa
- ( ) regular
- ( ) ruim

( ) desnecessária

6) Justifique a sua escolha na questão anterior.

---

---

---

---

7) Espaço livre para *sugerir, criticar, opinar, etc.* a respeito das atividades desenvolvidas.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



## APÊNDICE C – Roteiro do Professor-Pesquisador

### Roteiro de atividades para o professor

**Dividiremos as etapas do trabalho em passos:**

#### **Construções no $\mathbb{R}^2$**

##### *Construção de Retas:*

1º Passo: Apresentação do software aos alunos, e configuração da área de plotagem e apresentação de algumas ferramentas a se utilizar no software (*2-dim e 3-dim*).

2º Construção de gráficos em espaços bidimensionais, utilizando-se das ferramentas (*2-dim  $\Rightarrow$  equação  $\Rightarrow$  explícita*).

Obs: Informar da possibilidade na construção de gráficos usando equações implícitas, principalmente no caso da equação  $x = y^2$ .

2.1 Construir o gráfico da função  $y = x$  (escolher a cor, com espessura de traço igual a 2)<sup>28</sup>.

2.2 Construir os gráficos das funções  $y = 2x$ ,  $y = 0,5x$  (obs: altere as cores dos gráficos para diferenciá-los), mostrar as equações na tela plotada

2.3 Utilizar os gráficos anteriores mudando o sinal, através das ferramentas: (*equação  $\Rightarrow$  inventario  $\Rightarrow$  editar*).

3º Passo: Utilizando a ferramenta (*inventário  $\Rightarrow$  gráfico*), oculte os gráficos das funções  $y = 2x$ ,  $y = 0,5x$ .

---

<sup>28</sup> O objetivo é destacar a função como padrão para posteriormente os alunos fazerem relações e comparações dela com as demais que serão construídas no mesmo sistema de coordenadas.

3.1 Com a ferramenta ( *inventario*  $\Rightarrow$  *editar*), edite a equação  $y = x$  mudando para  $y = ax$

3.2 Com as ferramentas ( *anim*  $\Rightarrow$  *parâmetros A – w*) movimente a barra de rolagem da janela ( *valor usual de A*) para a direita e esquerda, observando o que ocorre na tela plotada em relação aos valores de A na caixa de ferramentas sobreposta a ela, depois clique na ferramenta *auto cíclico* ou *auto reverso*

3.3 Para salvar as construções, utilizem as ferramentas: ( *arquivo*  $\Rightarrow$  *salvar como*)

4º Passo: Construa o gráfico da função  $y = ax + b$ , e siga os passos de 3.2 alternando na janela para ( *valores usuais de A e B*).

### ***Construção de Parábolas:***

1º Passo: Construção de gráficos em duas dimensões, utilizando as ferramentas ( *2-dim*  $\Rightarrow$  *equação*  $\Rightarrow$  *explícita*).

1.1 Construir o gráfico da função  $y = x^2$  [(PS: consultar a *biblioteca* do software, pois para  $x^2$  digitar  $xx$  ou  $x^2$ ) destaque a cor e a espessura com um traço igual a 2].

1.2 Construir os gráficos das funções  $y = 2x^2$ ,  $y = 0,5x^2$  (obs: altere as cores dos gráficos para diferenciá-los), mostrar as equações na tela plotada

1.3 Utilizar os gráficos anteriores mudando o sinal, através das ferramentas: ( *equação*  $\Rightarrow$  *inventario*  $\Rightarrow$  *editar*).

2º Passo: Utilizando a ferramenta ( *inventário*  $\Rightarrow$  *gráfico*), oculte os gráficos das funções  $y = 2x^2$ ,  $y = 0,5x^2$ .

2.1 Com a ferramenta ( *inventario*  $\Rightarrow$  *editar*), edite a equação  $y = x^2$ , mudando para  $y = ax^2$

2.2 Com as ferramentas ( *anim*  $\Rightarrow$  *parâmetros A – w*) movimente a barra de rolagem da janela ( *valor usual de A*) para a direita e esquerda, observando o que ocorre na tela plotada em relação aos valores de A na caixa de ferramentas sobreposta a ela, depois clique na ferramenta *auto cíclico* ou *auto reverso*

2.3 Para salvar as construções, utilizem as ferramentas: ( *arquivo*  $\Rightarrow$  *salvar como*)

3º Passo: Construa o gráfico da função  $y = ax^2 + bx + c$ , e siga os passos de 2.2 alternando na janela para (*valores usuais de A, B e C*).

Promover a familiarização dos alunos com o software, construindo(ao seu modo) outras funções no  $\mathbb{R}^2$  do tipo:  $y = x^3$ ,  $y = |x|$ ,  $y = a^x$ ,  $y = \log(x)$ ,  $y = \sin(x)$ ,  $y = \cos(x)$  e outras trigonométricas, etc., com o propósito de posteriormente introduzir as construções de gráficos no  $\mathbb{R}^3$ .

## Construções no $\mathbb{R}^3$

### *Construção de Planos e Cilindros (Calhas)*

1º Passo: Construção de gráficos em três dimensões, utilizando as ferramentas (*3-dim*  $\Rightarrow$  *equação*  $\Rightarrow$  *explicita*).

1.1 Construir o gráfico da função  $z = x$ , buscando relações com o gráfico no espaço bidimensional.

1.1.1 Como seria o gráfico de  $z = |x|$  e de  $z = x^2$  no espaço tridimensional? construir utilizando o software, verificando as relações com o espaço bidimensional. (*PS: consultar a biblioteca do software, pois para  $|x|$ , digitar  $abs(x)$* )

1.2 Construir o gráfico da função  $z = x^2$  e  $z = y^2$ .

Obs: os eixos desaparecem no momento da construção (solução: *ver*  $\Rightarrow$  *eixos*  $\Rightarrow$  *eixos ou ctrl E*). Aumentar a espessura dos eixos em (*ver*  $\Rightarrow$  *eixos*  $\Rightarrow$  *espessura tela e digite 3*).

Obs: Visualizar o que ocorre no traçado do gráfico na ausência do y e do x nas equações  $z = x^2$  e  $z = y^2$ , respectivamente.

1.2.1 Utilizar a ferramenta: *um*  $\Rightarrow$  *fatiador* (abrirá uma janela para o fatiador do traçado do gráfico, clique uma vez para ver o valor usual de  $x$  e depois clique para ver o valor usual de  $y$ )

1.3 Com os gráficos das funções  $z = x^2$  e  $z = y^2$  construídos no mesmo sistema de coordenadas (  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ ), verifique as interseções entre eles e tente imaginar como seria o gráfico da função  $z = x^2 + y^2$ .

1.3.1 Através das ferramentas ( dois  $\Rightarrow$  interseção  $\Rightarrow$  superfície-superfície ) busque as interseções e clique em *manter mudanças* nessa mesma janela, depois oculte os dois cilindros (calhas) e verifique as interseções na tela, utilize as setas de direção do teclado para melhorar a visualização e imaginar o gráfico desejado

### ***Construção de Parabolóides***

1º Passo: Construa o gráfico de  $z = x^2 + y^2$  e compare com a interseção dos gráficos(calhas) construídos. ( *Utilizar as setas de direção para movimentar os gráficos*)

1.1 Ocultar os gráficos  $z = x^2$  e  $z = y^2$

2º Passo: Mostre (tirar da posição de oculto) o gráfico da função  $z = x^2$  e construa o gráfico  $z = -y^2$ . (Ainda sem o uso do computador imagine como seria o gráfico de  $z = x^2 - y^2$ ? tendo como referência os gráficos já construídos e visualizados na tela gráfica.)

### ***Construção de outras superfícies***

Como seriam os gráficos de  $z = \text{sen}(x)$ ? e/ou  $z = \text{cos}(x)$ ? e/ou  $z = x^3$ ? (PS: consultar a biblioteca do software, pois para  $\text{sen}(x)$  digitar  $\text{sin}(x)$ ).

Obs: Promover a familiarização dos alunos com o software e com o espaço tridimensional construindo diversas e diferentes superfícies.

### *As Curvas de Nível das superfícies construídas*

Uma introdução sobre as curvas de nível, com base em reflexões sobre estas nos gráficos construídos anteriormente e posteriormente visualizar curvas de nível de outras superfícies construídas pelos aprendizes.

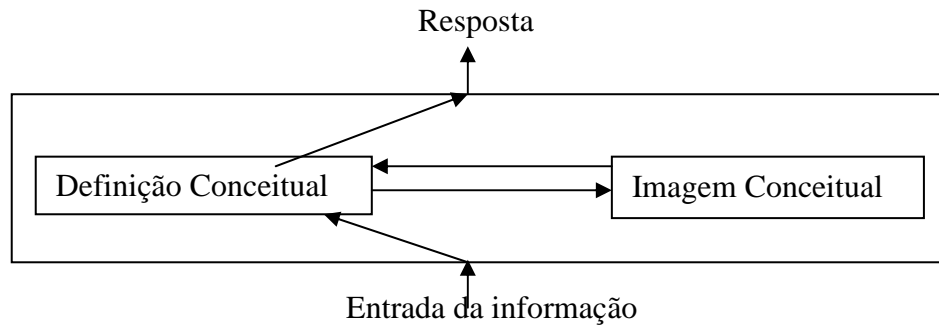
1º Passo: Com base nos gráficos construídos, utilizar as ferramentas (equação  $\Rightarrow$  inventário  $\Rightarrow$  níveis  $\Rightarrow$  auto  $\Rightarrow$  ver  $\Rightarrow$  todas).

Obs: Visualizar e comparar com a utilização do software as curvas de nível dos demais gráficos construídos individualmente pelos aprendizes.

## APÊNDICE D – Roteiro de Perguntas para as Entrevistas

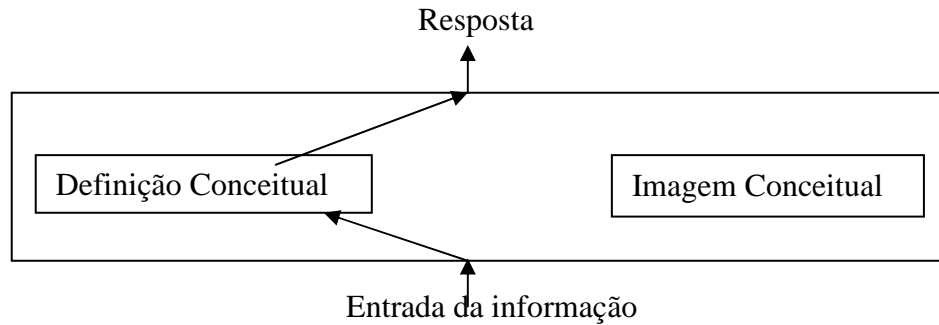
### Roteiro de perguntas para as entrevistas (semi-estruturadas)

- 1) O que você aprendeu com as atividades realizadas no Laboratório de informática?
- 2) As atividades realizadas no laboratório contribuíram para a aprendizagem do conteúdo de funções de duas variáveis? Por quê, De que forma?
- 3) Quais as idéias, pensamentos, conhecimentos prévios, associações que você teve e utilizou para responder sem uso do software Winplot:
  - 3.1) Quando questionado pelo professor-pesquisador para “imaginar” e abstrair as superfícies, através das expressões analíticas de funções de duas variáveis?
  - 3.2) E da atividade que associava as superfícies e expressões analíticas com as suas respectivas curvas de nível?
- 4) Após as aulas no laboratório com o software winplot, você voltou a utilizá-lo em algum momento? Em caso afirmativo, Para quê e de que forma? Em caso negativo, Por quê?
- 5) O que foi visto na tela, correspondeu as suas expectativas? Era o que você esperava ver? Foi novidade ou não? Explique dando suas opiniões sobre o software *Winplot*
- 6) Após as correções das atividades laboratoriais e das aulas apresentadas pelo professor em sala sobre funções de duas variáveis: O que você acrescentaria? discordaria? ou não saberia responder? Explique exemplificando?

**ANEXO A**

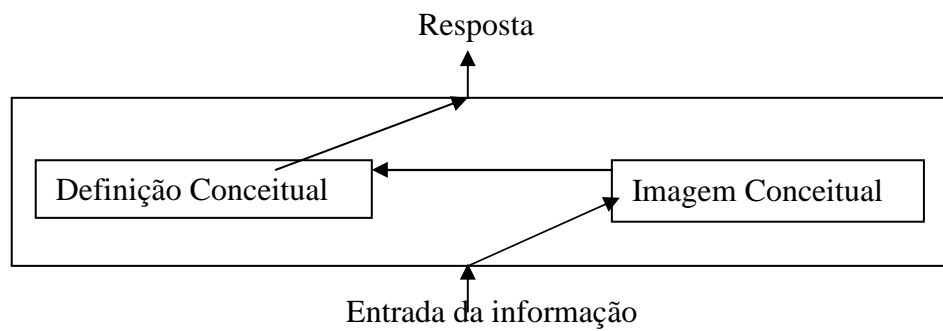
Fonte: (VINNER, 1991, p. 71, tradução nossa)

**Figura 7 - Interação entre definição e imagem**



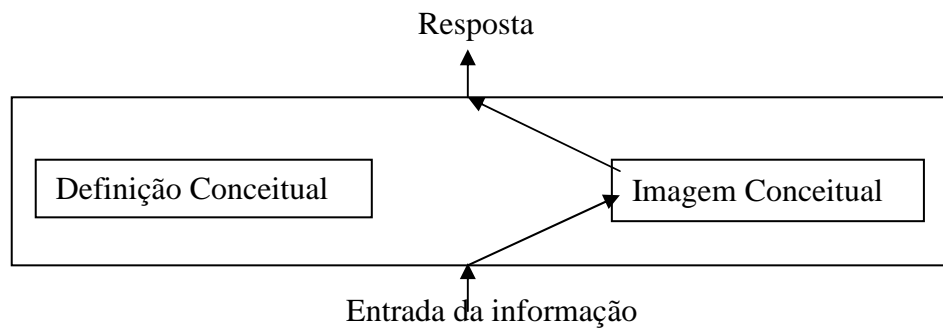
Fonte: (VINNER, 1991, p. 72, tradução nossa)

**Figura 8 – Dedução puramente formal**



Fonte: (VINNER, 1991, p. 72, tradução nossa)

**Figura 9 – Dedução seguindo o pensamento intuitivo**



Fonte: (VINNER, 1991, p. 73, tradução nossa)

**Figura 10 – Resposta intuitiva**