Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

**EXPLORANDO O CONCEITO
DE DERIVADA EM SALA DE AULA,
A PARTIR DE SUAS APLICAÇÕES
E SOB UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA.**

Autor: Daniel Gustavo de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Felipe Rogério Pimentel

Ouro Preto

2011

Ao Professor de Cálculo

Prezado professor, este material apresenta uma sugestão de atividades para o ensino da Derivada com a utilização de métodos históricos desenvolvidos por matemáticos, mais precisamente, Fermat, Descartes, Barrow e Newton, no século XVII.

As referidas atividades foram aplicadas a alunos de "Cálculo Diferencial e Integral I", alguns do curso de Licenciatura em Matemática e outros do Bacharelado em Estatística todos da Universidade Federal de Ouro Preto e fazem parte da nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Educação Matemática - *Explorando O Conceito De Derivada, Em Sala De Aula, A Partir De Suas Aplicações E Sob Uma Perspectiva Histórica* – que faz parte do programa de pós- graduação da Universidade Federal de Ouro Preto.

A sequência está estruturada em duas partes, a saber:

- A primeira está focada no conceito de reta.
- A segunda trabalha o conceito de reta tangente, ponto de partida para a determinação do conceito de Derivada, utilizando uma perspectiva histórica, a partir de métodos elaborados por eminentes matemáticos – Fermat, Descates, Barow e Newton – no sec. XVII.

A primeira etapa não foi aplicada para os alunos acima referidos uma vez que o assunto já tinha sido exaustivamente esgotado pelo professor, mas fica a nossa recomendação de que ela se faz necessária, caso o professor venha a aplicar esta sequência desde o início do tópico que trata das derivadas no ensino de Cálculo.

A segunda parte da sequência foi realmente o motivo do nosso trabalho.

O desenvolvimento deu-se da seguinte maneira: em um primeiro momento mostramos os métodos de determinação de reta tangente a uma curva, mais o método do polinômio, e, apresentamos as cinco atividades, nas quais os alunos tiveram que calcular o valor da derivada de uma função para cada método exposto.

Com esta proposta de ensino, procuramos trazer uma motivação para o ensino de Cálculo com a utilização da História da Matemática.

Prezado professor, esperamos que este material contribua de alguma forma para a sua prática pedagógica, bem como dê motivo a reflexões sobre a utilização da História da Matemática no ensino da Matemática.

ÍNDICE

1. Introdução

Optamos por uma sequência de ensino apoiada em fundamentos históricos para o aprimoramento do conceito de derivada. Para isso, inicialmente, achamos conveniente discutir um pouco sobre o ensino de Cálculo e um pouco sobre a utilização da História da Matemática na Educação Matemática.

1.1 Um pouco sobre o ensino de Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral, em geral, é a primeira disciplina com características de Matemática Superior que o aluno de um curso da área de Ciências Exatas encontra ao entrar para a Universidade.

O ensino da Matemática passa muito bruscamente dos aspectos intuitivos, com os quais o aluno estava largamente acostumado, para considerações teóricas e abstratas. Daí a grande possibilidade de reprovação:

> No Brasil, o ensino do Cálculo tem sido responsabilizado por um grande número de reprovações e de evasões de estudantes universitários. É comum em nossas universidades a reclamação, por parte dos alunos ou por parte dos professores de outras áreas, da inexistência de esforços para tornar o Cálculo interessante ou útil. (MEYER e SOUZA JÚNIOR, 2002, p.121).

O processo de ensino e aprendizagem do Cálculo tem motivado estudos por parte de vários teóricos da Educação Matemática, na tentativa de diminuir o expressivo número de reprovações nessa disciplina, em quase todas as instituições de ensino superior.

Ainda que existam vários motivos para essas reprovações, as principais pesquisas apontam para o tratamento dado aos conceitos envolvidos e para a prática pedagógica dos professores que ministram esses conteúdos.

Mendes (1994), estudando problemas de aprendizagem do Cálculo na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), destaca as causas dos insucessos que, segundo esse autor, podem ser atribuídos:

> - Ao aluno, porque não possuía a base necessária para o acompanhamento da disciplina de Cálculo;

> - À falta de recursos na universidade, principalmente material bibliográfico e espaço físico, contribuindo para a formação de turmas numerosas e heterogêneas;
> - Ao desempenho dos professores, isto é, à falta de competência técnico-pedagógica para desenvolver suas atividades de acordo com a realidade que se apresenta. (MENDES, 1994, p. 7)

Outro destaque interessante vem de Meyer (2003), que também traz uma consideração importante ao retratar o tratamento dado pelo aluno aos conceitos abstratos do Cálculo. Segundo essa autora, os estudantes apresentam muitas dificuldades para compreender os conceitos abstratos de taxa de variação, limite, tangente e funções.

Cabe ainda outro destaque apontado por Meyer. A facilidade que os estudantes normalmente demonstram com o aspecto “algorítmico” do cálculo da derivada. Segundo a autora, os cálculos de derivada de funções usando as regras de derivação são facilmente assimilados pelos alunos, que costumam aplicá-los corretamente. Isso acontece, talvez, pelo fato de essas aplicações aproximarem-se da forma com que o aluno aprendeu Matemática durante o Ensino Fundamental e Médio, baseada em regras de memorização de conceitos.

Percebemos, em nossa experiência inicialmente discente e depois docente, que o conceito de derivada é trabalhado em sala de aula, sem muito rigor. Mesmo a definição que envolve o “limite do quociente”, muitas vezes, é deixada de lado, para em seguida serem apresentadas as regras de derivação, ora demonstradas precariamente, a partir da definição, ora apenas relacionadas por uma tabela.

> Tenho observado que muitos de nossos alunos, após cursarem a disciplina de Cálculo I, são capazes de determinar a função derivada de diversas funções, utilizando-se de regras e procedimentos algébricos, ou mesmo, de reproduzir a definição formal de derivada de uma função. Mas, frequentemente, produzem significados para este conceito que não são compartilhados pela comunidade matemática e, portanto, não correspondendo aos significados pretendidos pelo sistema educacional. (MEYER, 2003, p. 4)

Corroborando com as ideias de Meyer (2003), de que os alunos sabem calcular a derivada, mas não produzem significados corretos do conceito de derivada, propomos neste trabalho contribuir para um melhor entendimento desse conceito, inserindo aspectos históricos e métodos antigos, usados por determinados matemáticos do século XVII. A seguir abordaremos um pouco das aplicações desse conceito de derivada.

Concordamos com esse dois autores (Mendes e Meyer) que estes argumentos, realmente interagem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

1.2 História da Matemática na Educação Matemática

As recentes pesquisas em Educação Matemática têm destacado a importância da História da Matemática e da Educação Matemática na formação dos estudantes, em todos os níveis de ensino:

> Existe um consenso quase unânime, entre os pesquisadores em Educação Matemática, acerca da importância da perspectiva histórica e da sua fundamentação epistemológica na formação científica. Nos últimos anos a história da matemática vem se incorporando, sobretudo, á teoria e à prática do ensino da matemática. Assim, se estabeleceu uma aproximação entre essas duas áreas de conhecimento, que já foram consideradas tradicionalmente alheias entre si. (VALDÉS, Juan E. Nápoles 2006, p.9)

O ensino da Matemática é apresentado numa sequencia lógica que é diferente da sequência histórica em que estes conhecimentos apareceram. Acreditamos que o professor encarregado deste ensino saiba deste fato e conheça a sequência histórica, não só para usá-la no seu magistério, mas também para que tenha uma visão mais humana da própria Matemática.

> É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só depois o cálculo diferencial. A idéia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a

> diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p.417)

A História da Matemática nos aproxima de homens que por diversos motivos ajudaram no desenvolvimento da Matemática:

> Com respeito a todos os temas básicos do cálculo infinitesimal... teorema do valor médio, série de Taylor,... nunca se sucita a questão: Por que assim precisamente? ou: Como se chegou a isso? Contudo todas essas questões foram, em algum período, objetivos de uma imensa busca, respostas a perguntas instigantes... Se voltássemos às origens dessas idéias, elas perderiam essa aparência de morte e de feitos dissecados e voltariam a ter uma vida fresca e pujante. (TOEPLITZ, apud VALDÉS, 2006, p.17)

Nas pesquisas narradas por Mendes (2006), o autor menciona o livro "Using history in mathematics education" do professor John Fauvel (1991), livro este que assinala inúmeras razões para usar a História na Educação Matemática:

> - A história aumenta a motivação e a aprendizagem da matemática.
> - Humaniza a matemática
> - Mostra o seu desenvolvimento histórico através da ordenação e apresentação de tópicos do currículo.
> - Os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram.
> - Contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação à matemática.
> - A comparação entre o antigo e o moderno estabelece os valores das técnicas modernas a partir do conhecimento desenvolvido ao longo da história da sociedade.
> - Ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural para a construção do conhecimento matemático.
> - Suscita oportunidades para a investigação matemática.
> - Pode apontar possíveis aspectos conceituais históricos da matemática que dificultam a aprendizagem dos estudantes.
> - Contribui para que os estudantes busquem no passado soluções matemáticas para o presente e projetem seus resultados no futuro.
> - Ajuda a explicar o papel da matemática na sociedade.
> - Faz da matemática um conhecimento menos assustador para os estudantes e para comunidade em geral.
> - Explora a história ajudando a sustentar o interesse e a satisfação dos estudantes.
> - Fornece oportunidades para a realização de atividades extracurriculares que evidenciem trabalhos de outros professores e/ou outros assuntos (caráter interdisciplinar da História da Matemática). (FAUVEL apud MENDES, 2006, p.86)

Foram estes motivos que nos levaram a adotar uma perspectiva histórica para elaborar esta sequência de ensino com a finalidade de reforçar e justificar o conceito de derivada ensinado no primeiro ano, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

2. A Reta

A equação y = ax + b que usamos para representar uma reta r não apareceu com Descartes nem com Fermat, que são considerados os criadores da Geometria Analítica.

Nem mesmo o sistema de eixos, chamado cartesiano (em homenagem a Descartes) está presente na obra desses autores, ambos do século XVII.

Foi apenas nos fins do século XVIII, quando foram editados os primeiros livros didáticos, que matemáticos, como Biot e Lacroix (ambos alunos de Monge na Escola Politécnica de Paris), sistematizaram a Geometria Analítica.

O ensino desta disciplina no Brasil começou na Escola Militar fundada por D. João VI em 1810 e o livro adotado foi o *"Traité Élémentaire de Trigonométrie Retiligne et Sphérique et D' Application de L'Algèbre a laGéometrie"* de Silvestre François Lacroix cuja primeira edição é anterior a 1803 .

Não foi possível determinar em que livro apareceu pela 1ª vez a equação da reta na forma chamada reduzida, que usamos hoje:

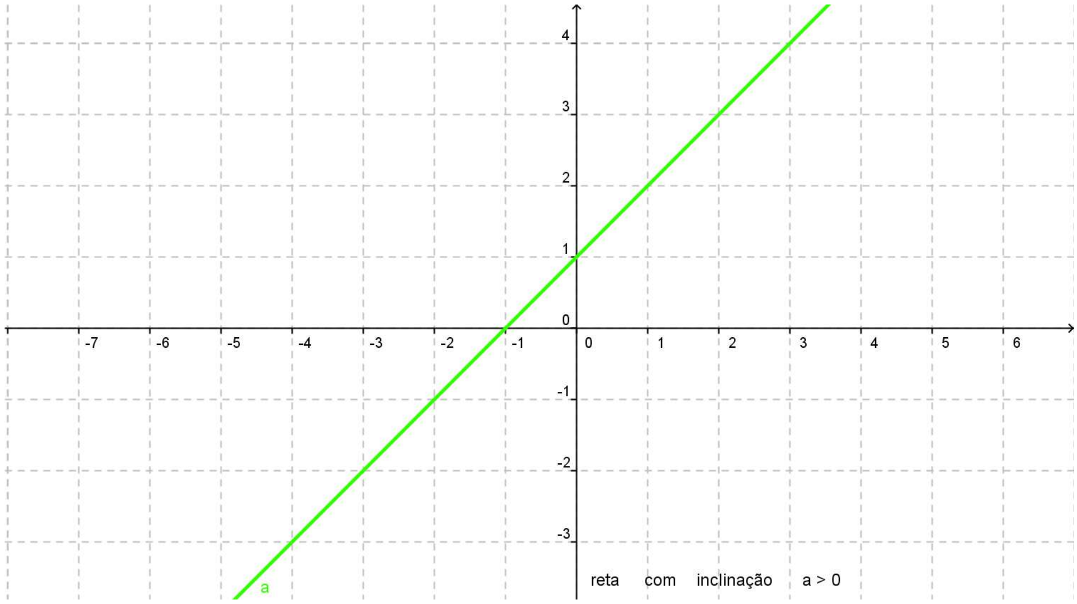
$$y = ax + b$$

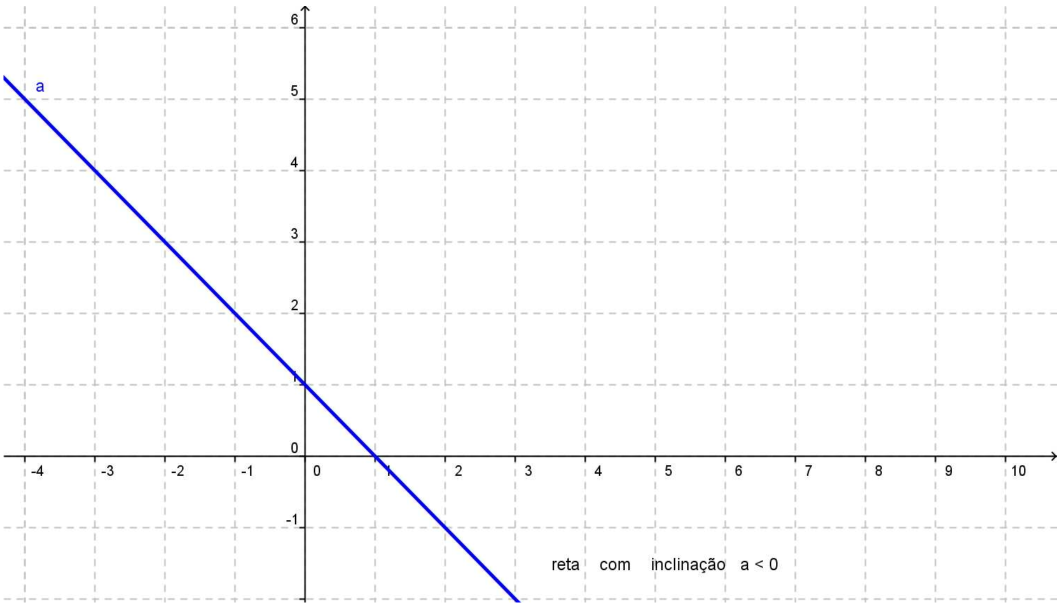
mas o texto de Lacroix já traz esta expressão.

A constante *a* é chamada "coeficiente angular" ou "inclinação da reta" e se identifica com a tangente trigonométrica do ângulo α que a reta determina com o sentido positivo do eixo OX. A constante *b* chama-se coeficiente linear e representa a ordenada do ponto em que a reta encontra o eixo OY.

Quando a reta é dada pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)\ e\ P_2 = (x_2, y_2)$, calculamos a sua inclinação pelo quociente:

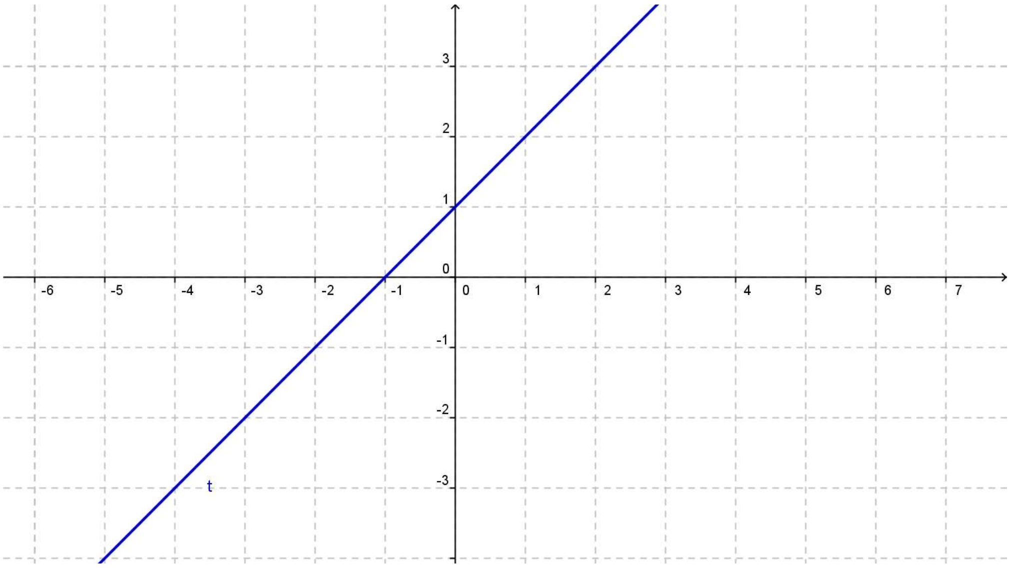
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$


a
reta com inclinação a > 0

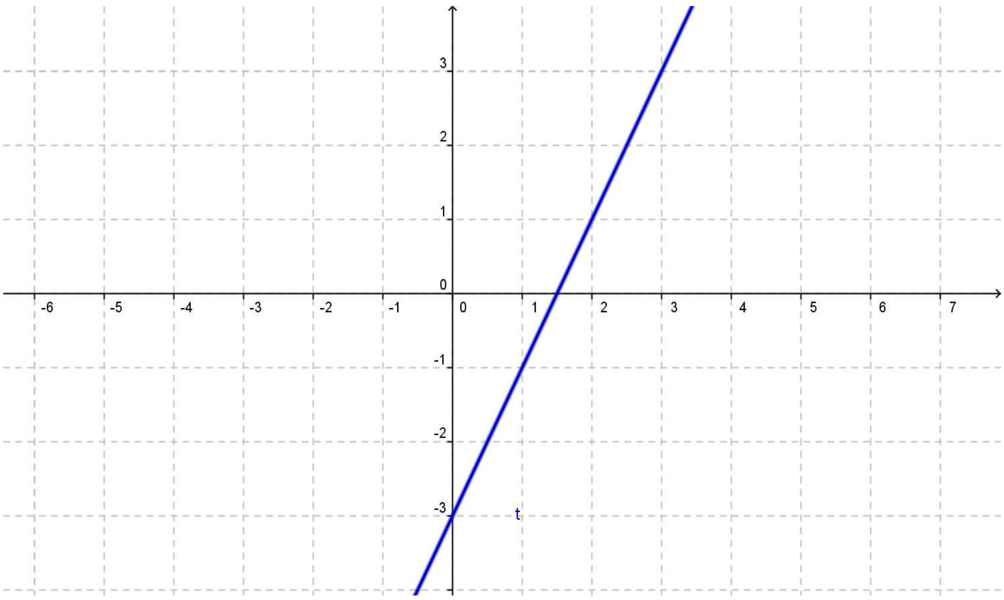

a
reta com inclinação a < 0

Exemplo 1

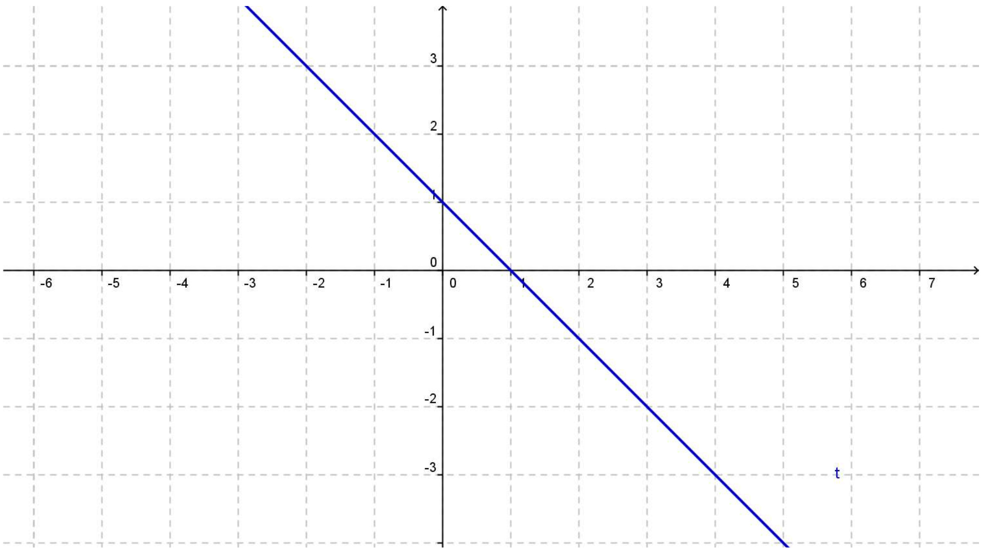
a) A reta $y = x + 1$ tem representação:



b) A reta $y = 2x – 3$ tem representação:



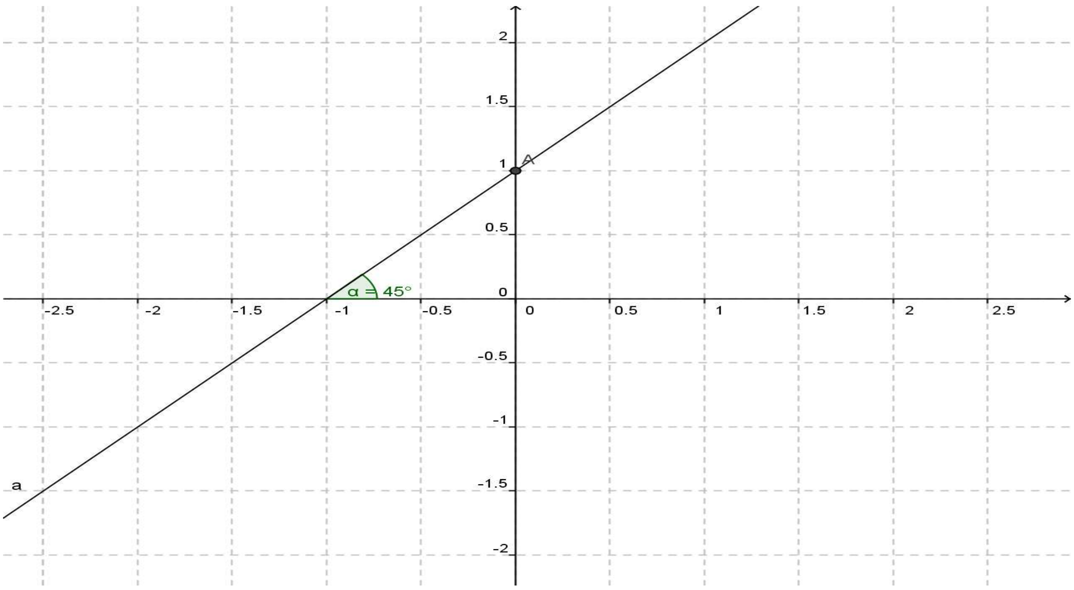
c) A reta $y = -x + 1$ tem representação



Exemplo 2

Escreva as equações das retas esboçadas abaixo:

a)



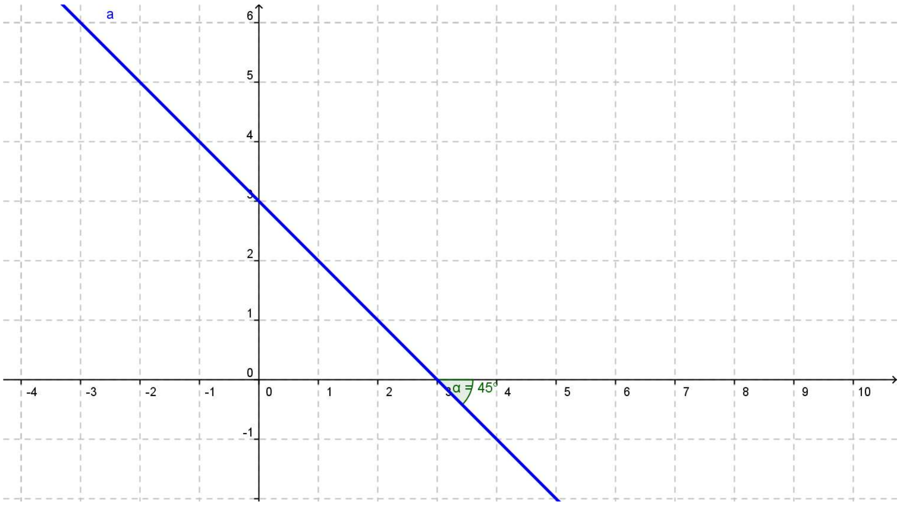
Ponto A (0, 1) e m = tg 45º = 1, temos:

$y - y_p = m\,(x - x_p)$

$y - 1 = 1\,(x - 0)$

$y = x + 1.$

b)



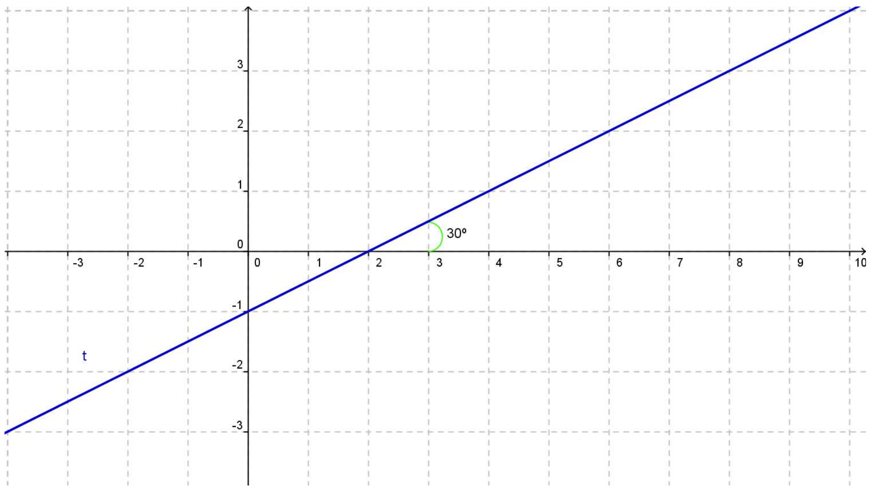
Ponto A (3, 0) e $m = -\ tg\ 45^o = -1$, temos:

$y - y_p = m\ (x - x_p)$

$y - 0 = -1\ (x - 3)$

$y = -x + 3.$

c)



Ponto A (2, 0) e $m = \ tg\ 30^o = \frac{1}{2}$, temos:

$y - y_p = m\ (x - x_p)$

$y - 0 = = \frac{1}{2}(x - 2)$

$y = \frac{1}{2}x - 1.$

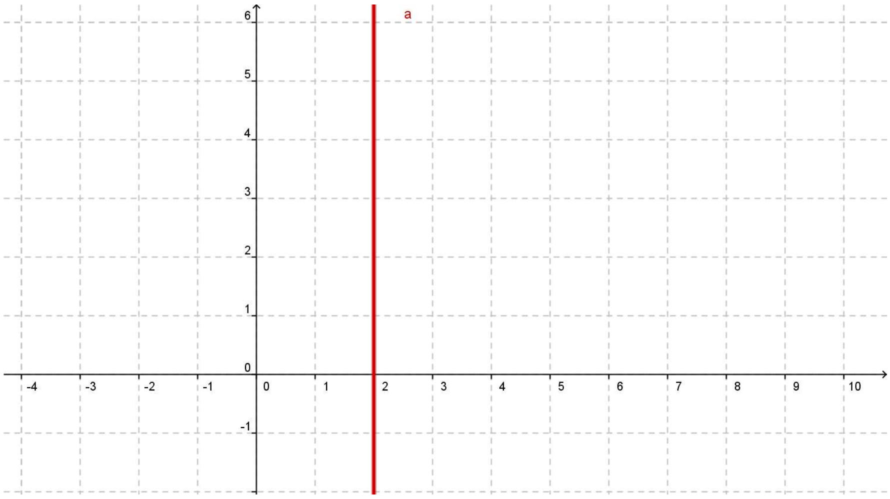
Tarefa para os alunos

1) Nos sistemas cartesianos abaixo, represente as retas que têm as seguintes equações:

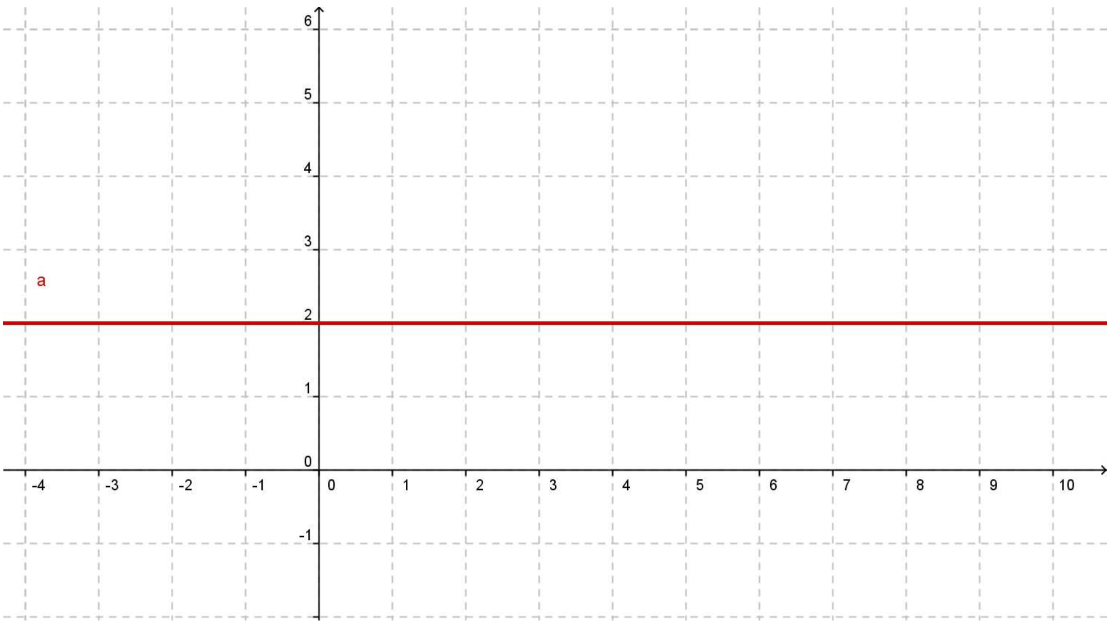
a) y = -3x – 2 b) y = 3x c) y = 2 d) y = -2x

2) Escreva as equações das retas esboçadas abaixo:

a)



b)



c)

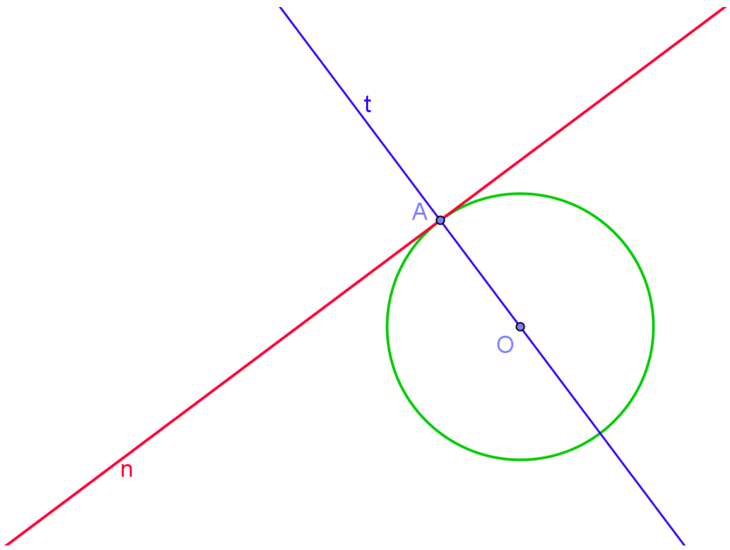
3. A Tangente

> "O Cálculo foi criado sobretudo para tratar dos principais problemas científicos do século XVII".
>
> *(KLINE, 1994, p. 452)*

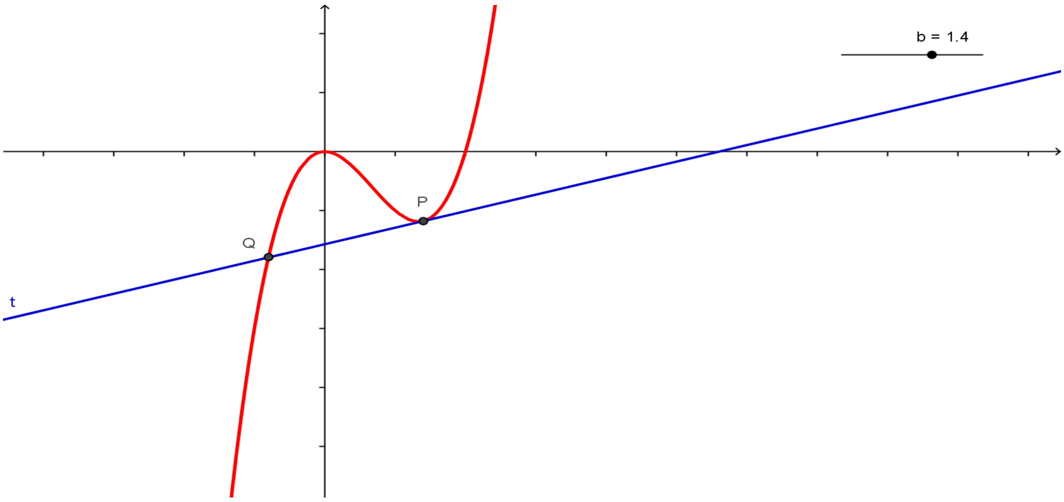
No século que é considerado o período da verdadeira "criação do Cálculo", podemos identificar quatro tipos principais de problemas que motivavam os estudiosos às noções ligadas a esse tema:

- O primeiro era sobre velocidade e aceleração; o segundo sobre a obtenção de uma tangente a uma curva; o terceiro, em como obter valores de máximo e mínimo de uma função e o quarto que era o de se obter o comprimento de curvas, as áreas delimitadas por curvas e volumes formados por superfícies.

O segundo problema gerou muitos estudos no desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Iremos definir o conceito de *tangente*, que do latim significa *tocar*. Assim, quando se trata de uma circunferência, o traçado de uma reta tangente a um de seus pontos se torna um problema simples de construção geométrica: basta traçar pelo ponto A escolhido e pelo centro O desta circunferência, uma reta normal n. A reta t perpendicular a n pelo ponto A é a tangente procurada.



Embora o termo tangente signifique “tocar”, este significado por si só não é suficiente para esclarecer a noção de reta tangente a uma curva. Na figura abaixo, por exemplo, a reta corta a curva em dois pontos, sendo um deles nitidamente um ponto de tangência e outro não.



Os gregos resolveram o problema da tangente para outras curvas, mas sempre de forma particular (um processo diferente para cada curva), utilizando raciocínios diferentes em cada caso.

O problema do traçado da tangente a uma curva qualquer só foi resolvido no século XVII. Fermat e Descartes apresentaram soluções diferentes para esta questão.

3.1 Método de Fermat

> “...a técnica de construir tangentes foi
> desenvolvida por meu pai em 1629 e a
> simplicidade é a sua principal característica...”
> (Clement Samuel)

> “Fermat também descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua idéia consistia em achar a *subtangente* relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo.
> (Eves, 2004, p. 430)

Em notação moderna, seja T = (x_0, y_0) um ponto genérico da curva pelo qual se pretende passar uma tangente, t. Na figura abaixo observa-se que $tg\ \alpha = \frac{TS}{MS}$. Se y = f (x) for a equação da curva e se denotarmos a “*subtangente*” $\overline{MS}$ por b, teremos

$$tg\ \alpha = \frac{f(x_0)}{b}.$$

A idéia de Fermat consiste em achar b.

Seja, então T' =(x_0 + E, f(x_0 + E)) outro ponto desta curva com T' muito próximo de T (Fermat dizia que o E deveria ser “sabiamente escolhido”).Então, devido à proximidade de T e T' Fermat considerava o ponto T' também pertencente à reta tangente e então haveria*“semelhança”* entre os triângulos TMS e T'MS'.

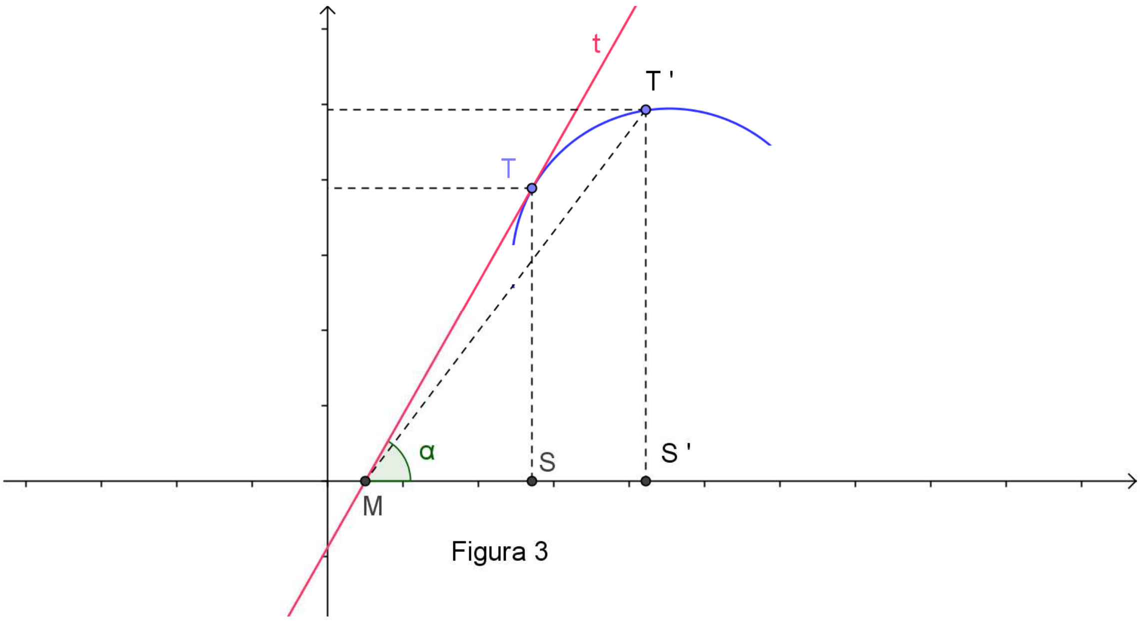


Figura 3

De modo que :

$$\frac{TS}{MS} = \frac{T'S'}{MS'} \rightarrow \frac{f(x_0)}{b} = \frac{f(x_0+E)}{b+E} \Rightarrow (b+E)\ \ f(x_0) = b\ \ f(x_0+E)$$
$$\Rightarrow b \cdot f(x_0)\ +\ \ E\ \ f(x_0) = b \cdot f(x_0+E)$$
$$\Rightarrow E \cdot f(x_0)\ \ = b \cdot \big(f(x_0+E) - f(x_0)\big) \Rightarrow\ b\ =\ \frac{E\ f(x_0)}{f(x_0+E)\ - f(x_0)}$$

Levando a expressão encontrada para a subtangente b em $tg\ \alpha\ = \frac{f(x_0)}{b}$, encontramos $tg\ \alpha\ = \frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}$.

Fermat não tinha o conceito de limite, mas ao dizer que E deveria ser “sabiamente escolhido” ele queria dizer que E deveria tender a zero. Em notação moderna e precisa,

$$tg\ \alpha\ =\ \lim_{E\to 0} \frac{f(x_0+E) - f(x_0)}{E}.$$

Esta expressão equivale, como sabemos, à derivada de f(x) no ponto T (x_0, y_0).

Fermat não costumava publicar seus resultados ele simplesmente os passava a **Mersene** que cuidava da sua divulgação entre outros matemáticos que também mantinham correspondência com ele.

Exemplo:

Seja F(x) = x^2, determine a tangente no ponto T (x_0, f(x_0))

$$tg \propto = \frac{f(x_0)}{base} \; ; \quad base = \frac{E\, f(x_0)}{f(x_0+E) - f(x_0)}$$

f(x) = x^2

$$\text{base} = \frac{Ex_0^{\,2}}{(x_0+E)^2 - (x_0)^2} = \frac{Ex_0^{\,2}}{x_0^{\,2}+2x_0E + E^2 - x_0^{\,2}} = \frac{Ex_0^{\,2}}{2x_0E+E^2} {}^{*} = \frac{x_0^{\,2}}{2x_0 + E}$$

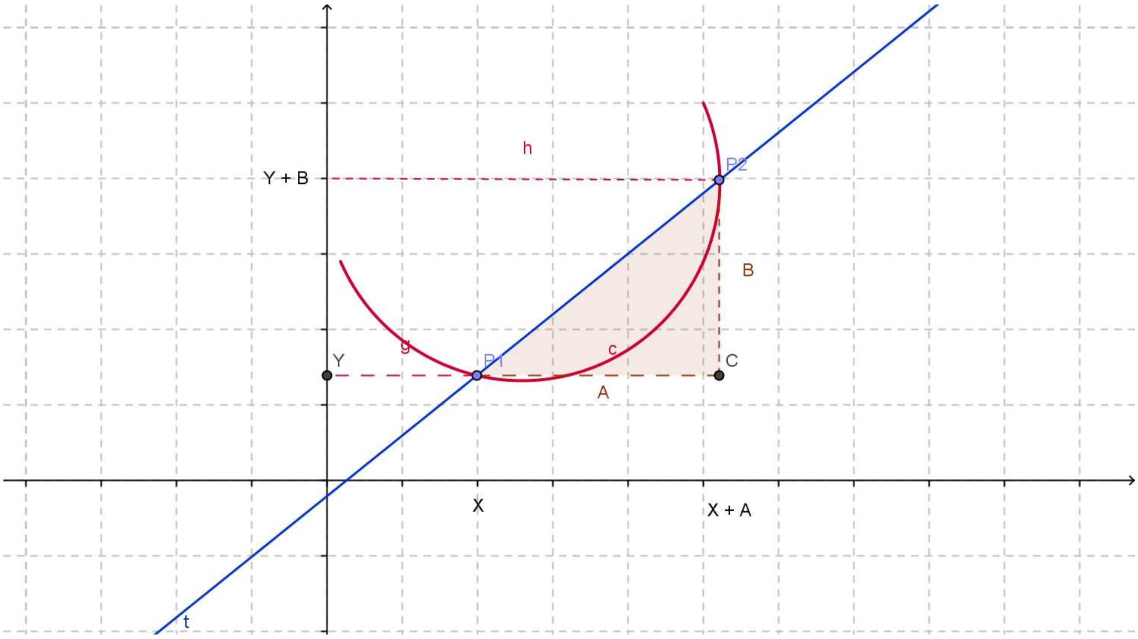
**Nesta passagem ele dividia por zero.*

$$\text{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{base} = \frac{x_0^{\,2}}{\frac{x_0^{\,2}}{2x_0 + E}} = x_0^{\,2} \cdot \frac{2x_0 + E}{x_0^{\,2}} = 2x_0 + E$$

$$\text{tg}\ \alpha = 2x_0$$

3.2 Método de Barrow

Este método é também conhecido como Método dos Pontos Coincidentes. Foi publicado em 1665 no livro Geometical Lectures.



Barrow representava a função y = f(x) na forma implícita f(x,y) = 0.
O coeficiente da reta t considerada como tangente é dado a "grosso modo" por:

$$\text{Coef.} = \frac{B}{A}$$

Segundo Barrow o adjetivo "grosseiro" pode ser retirado se $P_2 = P_1$. Se isto acontece, então A = 0.

É importante destacar que o A não foi interpretado como um incremento infinitesimal como fazemos hoje.
Com essas considerações tem-se:

$$P_1(x, y) = P_2(x + A, y + B)$$

Exemplo:

$y = x^2$

Na forma implícita $y - x^2 = 0$;

Usando x = x + A e y = y + B, tem-se:

$y - x^2 = (y + B) - (x + A)^2$

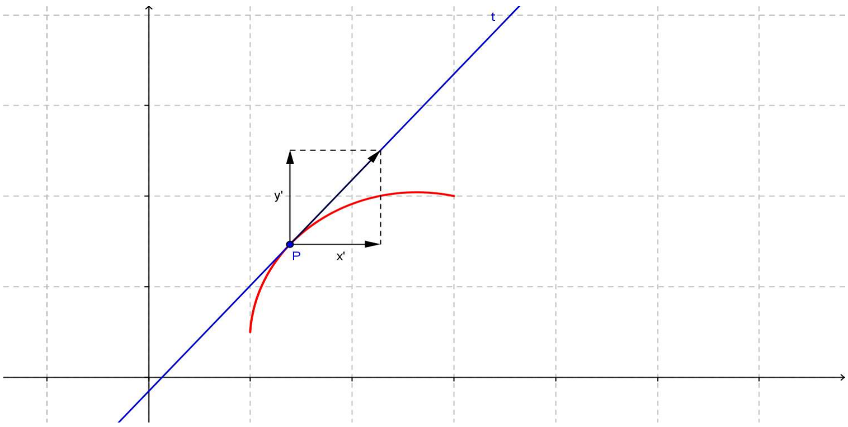
$\Rightarrow y - x^2 = y + B - x^2 - 2\,Ax - A^2 \ \Rightarrow B = 2Ax + A^2$

Barrow desprezava o termo A^2 por ele representar uma potência de grau maior que um de um termo já suficientemente pequeno. Sendo assim,

$coef = \frac{B}{A} = \frac{2Ax}{A} = 2x$.

3.3 Método dos Fluxos de Newton

O Método de Newton também é conhecido como Método dos Fluxos. Foi desenvolvido por Newton em 1667 e baseia-se no Método de Barrow.



Newton interpretou a curva como sendo a trajetória de um ponto P cuja velocidade tangencial projetada nos eixos OX e OY produz as componentes da velocidade$\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Para Newton x e y são quantidades que "fluem", por isso chamou-as de "fluentes" $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são as variações de x e y respectivamente, Newton chamou-as de "fluxos". ([1]*)

Para este intervalo de tempo *o* infinitamente pequeno (evanescente) as coordenadas de P, antes (x, y) passam a ser $(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$

A inclinação da tangente é o "fluxions".

$$\text{Fluxions} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

---

[1] (*) Em linguagem moderna $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Newton considera x e y como função do tempo, pois $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ representam o movimento uniforme.

Resumindo o método de Newton ou o método dos fluxos considera que :

$$\text{Fluxions} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

e

$$f(x, y) = f\,(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$$

Exemplo:

1) Cálculo do fluxions da curva $y = x^2$:

$f(x, y) = y - x^2$

$f(x, y) = f\,(x + \dot{x}o,\ y + \dot{y}o)$

$\Rightarrow y - x^2 = (y + \dot{y}o) - (x + \dot{x}o)^2$

$\Rightarrow y - x^2 = y + yo - x^2 - 2x\,\dot{x}o - \dot{x}^2o^2$

$\Rightarrow \dot{y}o = 2x\,\dot{x}o + \dot{x}^2o^2$

$\Rightarrow \dot{y} = 2x\,\dot{x} + \dot{x}^2o;$

Mas:

$\text{fluxions} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

então: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(2x + \dot{x}\,o)\dot{x}}{\dot{x}} = 2x + \dot{x}o.$

Por ser infinitesimal o pode ser desprezado.

Assim: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$

3.4 Método de Descartes

> "... desde 1631 tenho estudado cuidadosamente o problema das tangentes e agora (1633), finalmente dou-me por satisfeito. O método do círculo resolve esses problemas com simplicidade..."
> (René Descartes)

O método do Círculo, criado por René Descartes, encontra-se na segunda parte de *La Géométrie* e serve também para construir tangentes a curvas, conforme descrevemos a seguir. Sejam f(x, y) = 0 a equação da curva ζ, dada e (x_1, y_1) as coordenadas do ponto P, pelo qual se deseja traçar a tangente (veja figura 5).

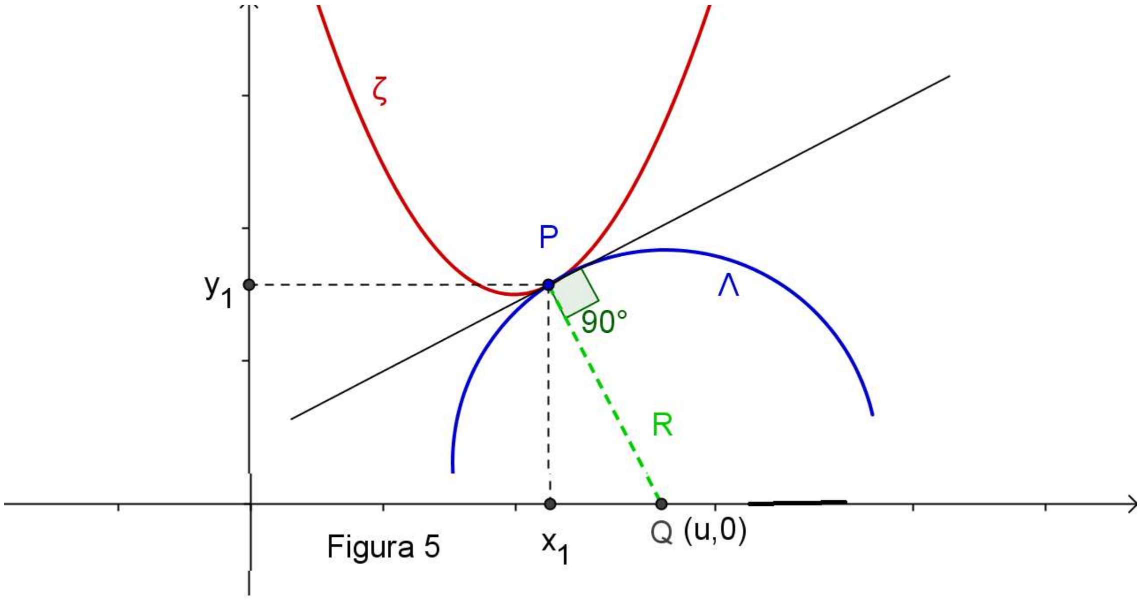


Figura 5

Seja Q = (u,0) um ponto do eixo x. Então a equação da circunferência Λ de centro Q e que passa por P é:

Λ: $(x - u)^2 + y^2 = R^2$; onde $R = \overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - u)^2 + {y_1}^2}$

Eliminando-se y do sistema formado pelas equações de ζ e Λ, obtém-se uma equação em x que leva às abscissas dos pontos onde Λ corta ζ. Determina-se a seguir *u* de modo que essa equação em x tenha um par de raízes iguais a x_1. Essa condição impõe que a circunferência Λ seja, agora, tangente à curva ζ em P, ou equivalentemente, que PQ seja perpendicular à tangente (veja figura 5). Esse procedimento se justifica pelo fato de a tangente à circunferência ser mais facilmente obtida. Finalmente obtemos a tangente desejada através (veja figura 6) de:

$$tg\ \alpha = \frac{u - x_1}{y_1} \qquad (*)$$

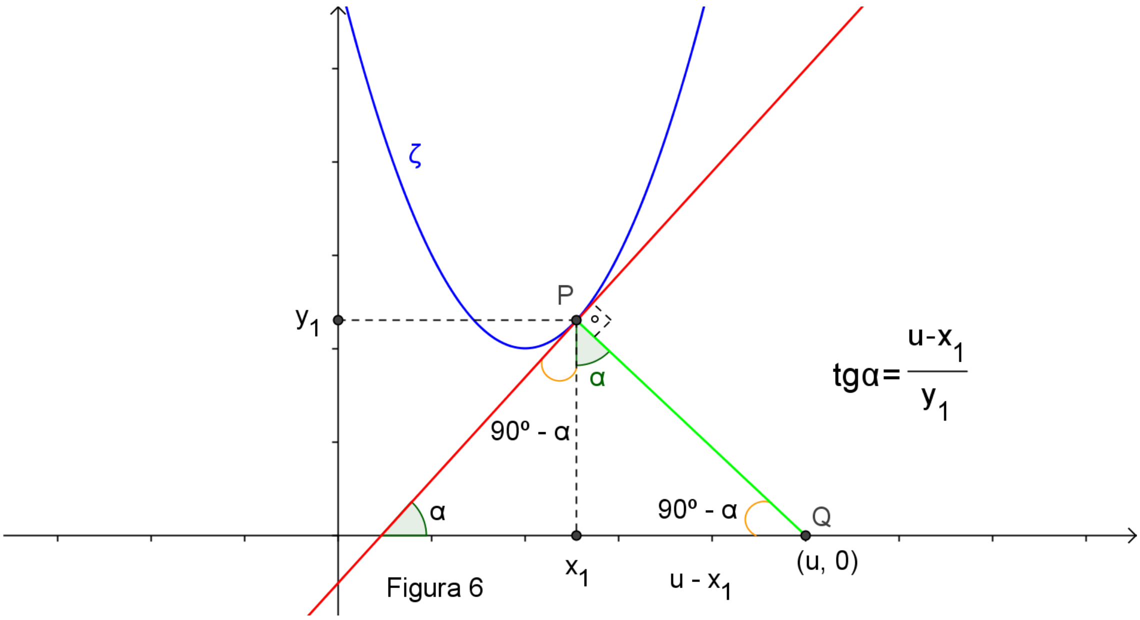


Figura 6

Para o caso particular em que ζ é dada por y = f(x), as intersecções com a circunferência procurada são pontos S = (x, y) de $\zeta \cap \Lambda$, que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \Lambda: (x-u)^2 + y^2 = R^2 \quad com \quad \mathrm{R} = \sqrt{(\mathrm{x_1} - \mathrm{u})^2 + \mathrm{y_1}^2} & (I) \\ \zeta : \mathrm{f(x)} = \mathrm{y}\,; & (II) \end{cases}$$

Levando (II) em (I), temos:

$$(x - u)^2 + [f(x)]^2 = (x_1 - u)^2 + y_1^2 \qquad (III)$$

Simplificando (III), vem que:

$$x^2 - 2\,ux + [f(x)]^2 - (\,x_1^2 - 2\,ux_1 + y_1^2) = 0 \qquad (III')$$

A determinação do centro Q (u,0) é conseqüência da imposição de que (III') possua um par de raízes iguais, quando for resolvida para x.

Suponhamos por exemplo y = $\sqrt{x^2+x}$. Neste caso, temos x_1 = 1, $y_1 = \sqrt{2}$ e f(x) = $\sqrt{x^2+x}$.

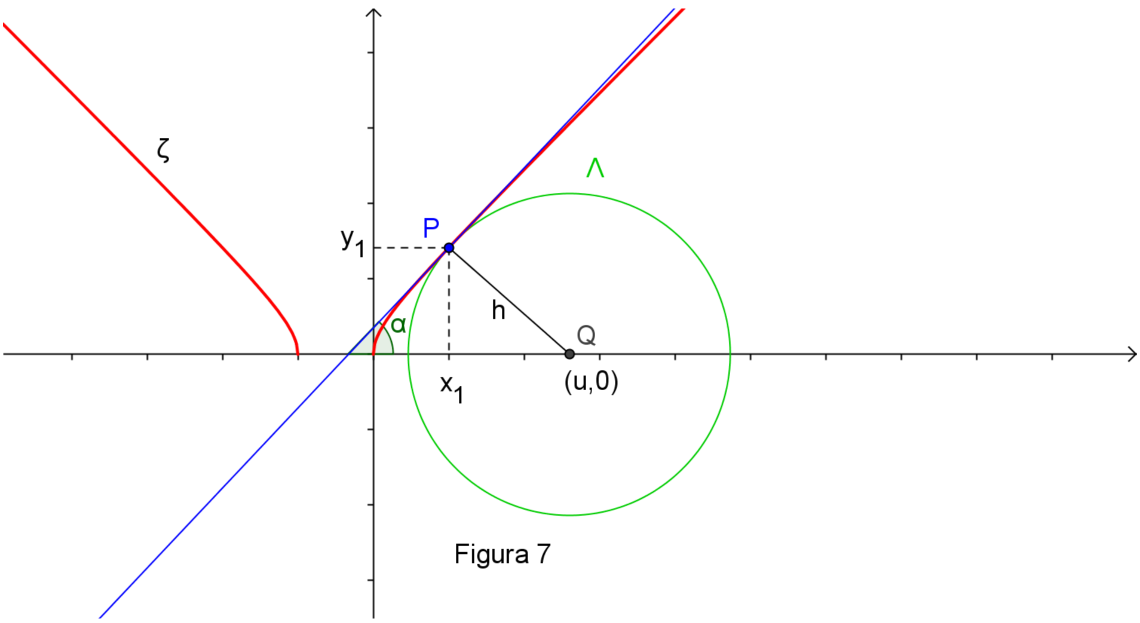


Figura 7

Vamos inicialmente considerar P = (x_1, y_1) genericamente e encontrar uma expressão para o valor da tangente em P. Assim, substituindo f(x) = $\sqrt{x^2+x}$ em (III') obtemos:

$$x^2 - 2ux + \left[\sqrt{x^2+x}\right]^2 - [x_1^2 - 2ux_1 + \left(\sqrt{x_1^2+x_1}\right)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ux + x^2 + x - [x_1^2 - 2ux_1 + x_1^2 + x_1] = 0$$

$\Leftrightarrow 2x^2 + (-2u+1)x - 2x_1^2 + 2ux_1 - x_1 = 0$ Essa equação terá raiz dupla $\Leftrightarrow$ seu discriminante for zero:

$$\Delta = (-2u+1)^2 - 4\,(2)\,(-2x_1^2 + 2ux_1 - x_1)$$

Então, $\Delta = 0$ se, e somente se,

$$(1-2u)^2 - 4\,(2)(-2x_1^2 + 2ux_1 - x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4u + 4u^2 + 16x_1^2 - 16ux_1 + 8x_1 = 0$$

$\Leftrightarrow$ 4 $u^2 + (-4 - 16x_1)u + 16x_1^2 + 8x_1 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-(-4-16\,x1) \ \pm \ \sqrt{(-4-16\,x1)^2 - 4(4)(16x_1^2 + 8x1 + 1)}}{8} =$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{+4+ \ 16\,x1 \pm \sqrt{16 + 128\,x1 + 256\,x_1^2 - 256x_1^2 - 128\,x1 - 16}}{8} = \frac{+4 + 16\,x1}{8} =$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1+4x_1}{2}.$$

Substituindo esse valor de u em $(*)$ vem que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{(u - x_1)}{y_1} = \frac{\frac{1+4x_1}{2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_1}} = \frac{\frac{1+4x_1 - 2x_1}{2}}{\sqrt{x_1^2 + x_1}} = \frac{1+2x_1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_1}}$$

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{2x_1 + 1}{2\sqrt{x_1^2 + x_1}} \qquad \text{(IV')}}$$

Observe que (IV') nada mais é do que a derivada da função y = $\sqrt{x^2 + x}$ no ponto genérico (x_1, y_1).

Para achar a tangente no ponto P = (1, $\sqrt{2}$) , basta tomar x_1 = 1e y_1 = $\sqrt{2}$ em (IV').

Temos assim, um processo geral para a determinação da tangente a uma curva; porém em casos mais complicados, a álgebra necessária era extremamente complicada, o que faz do método de Descartes menos eficiente que outros para a determinação das tangentes, como o de Fermat, por exemplo.

3.5 Método do Polinômio

O método do polinômio surgiu em 1657 e foi apresentado por Johan Hudde e René François Walter e integralmente publicado em 1673 no *Philosophical Transactions (a method of drawning tangents to all geometrical curves)* . Ele foi criado com a intenção de facilitar o cálculo de derivadas de polinômios de grau superior a quatro. Os cálculos para a determinação da reta tangente pelo método de Descartes para tais polinômios eram extremamente complicados na época, pois necessitavam de um algebrismo muito sofisticado. A seguir faremos um resumo do método, extraído exclusivamente do livro de Rigieri (1993).

A base deste método é o de Descartes e a fundamentação está numa propriedade que afirma que se um polinômio, *p(x)*, tem uma raiz dupla, *r*, então *r* também será raiz de um outro polinômio, $\overline{p(x)}$, que, na notação moderna, nada mais é do que o polinômio *x p'(x)*. Provavelmente os inventores deste método tinham conhecimento desta propriedade, sem saber que $\overline{p(x)}$ tratava-se na verdade do polinômio derivada de *p(x)* multiplicado pelo fator *x*. Embora o polinômio indicado por Rigieri (1993) contenha o fator *x*, vemos que esta propriedade continua válida, mesmo que não multipliquemos *p'(x)* por *x*. De fato, se *r* é raiz dupla de p(x), então p se fatora como

$$p(x) = (x - r)^2\, q(x),$$

onde q(x) é um polinômio de grau n – 2 (estamos supondo que o grau de p é n $\geq$ 2). Assim, $p'(x) = 2(x - r)\, q(x) + (x - r)^2\, q'(x) = (x - r)\, [\, 2\, q(x) + (x - r)\, q'(x)\,]$, o que mostra que r continua raiz de p' (x). Além disso, o método dos polinômios continua valendo mesmo quando consideramos p'(x) para ser o polinômio $\overline{p(x)}$, ao invés do polinômio x p'(x).

A seguir vamos determinar $\overline{p(x)}$, para dois polinômios: um de 2º grau e outro, de 3º grau.

"Se um polinômio

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

tem uma raiz dupla x_0 então x_0 também será raiz do polinômio

$\bar{P}(x) = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x^2 + \ldots$,

que é construído a partir de P(x).

Por volta de 1657, Johann Hudde e René François Walter, barão de Sluse, publicaram este método. Apresentamos abaixo duas aplicações:

- Com função do 2º grau

  $P(x) = 9 + 1(-6x) + x^2 = (x - 3)^2$

  $\bar{P}(x) = 0 \cdot 9 + 1 \cdot (-6x) + 2 \cdot x^2 = -6x + 2x^2 = 2x(x-3)$

- Com função do 3º grau

  $P(x) = 32 + 32x - 10x^2 + x^3 = (x-4)^2 (x-2)$

$\bar{P}(x) = 0 \cdot 32 + 1 \cdot 32x + 2 \cdot (-10x^2) + 3x^3 = 32x - 20x^2 + 3x^3$

Suponhamos por exemplo**:** $f(x) = x^n$

Da equação de Descartes, temos:

$[f(x)]^2 + (u - x)^2 - R^2 = 0$

$[x^n]^2 + (u - x)^2 - R^2 = 0$ Chamamos este polinômio de P(x)

$P(x) = x^{2n} + u^2 - 2ux + x^2 - R^2$

$P(x) = u^2 - R^2 - 2ux + x^2 + x^{2n}$ Logo $\bar{P}(x)$ é:

$\bar{P}(x) = 0 \cdot (u^2 - R^2) + 1 \cdot (-2ux) + 2 \cdot x^2 + 2n \cdot x^{2n} = 0$

$\bar{P}(x) = (-u + x + n \cdot x^{2n-1}) \cdot 2x = 0$ Isolando u – x no 1º membro, temos:

$u - x = n \cdot x^{2n-1}$ Substituindo no cálculo da tangente:

$\text{tg}\,\alpha = \frac{u-x}{f(x)} = \frac{n \cdot x^{2n-1}}{x^n} = n \cdot x^{n-1}$

4. Apresentando as Atividades

Elaboramos a seguinte sequência de ensino baseada nos métodos antigos para o cálculo da derivada.

4.1 Atividade 1

Calcule a tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ no ponto $T = (x, f(x))$ pelo método de Fermat.

4.2 Atividade 2

Calcule a tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ no ponto $T = (x, f(x))$ pelo método de Barrow.

4.3 Atividade 3

Calcule a tangente a $f(x) = x^3 + 3x^2$ no ponto $T = (x, f(x))$ pelo método de Newton.

4.4 Atividade 4

Calcule a tangente a f(x) = $\sqrt{x}$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método de Descartes.

4.5 Atividade 5

Calcule a tangente a f(x) = $\sqrt{x}$ no ponto T = (x, f(x)) pelo método do Polinômio.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo, **Várias Faces da Matemática; Tópicos para a Licenciatura e leitura geral**, Ed. Blucher, São Paulo, 2002, 182p.

ÁVILA, Geraldo, **Análise Matemática para a Licenciatura**, 3ª edição, Ed. Blucher, São Paulo, 2006, 246p.

BORBA, Marcelo C. e ARAÚJO, Jussara L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Autêntica Editora, Belo Horizonte 2006, 118p.

BARON, Margaret E. e BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Ed. Universidade de Brasília, Brasília 1985, vols. 3 e 5, 74p e 50p.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**, Ed. Atual, São Paulo, 1992, 93p.

BOYER, Carl B., **História da Matemática**, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1974, 488p.

BRAGA, Theodoro, **Desenho Linear Geométrico**, Icone editora, São Paulo, 1997, 229p.

CASSOL, Armindo. **Os significados possíveis para o Conceito de Derivada**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 1998.

DALL'ANESE, Cláudio. **Conceito de Derivada: Uma Proposta para seu Ensino e Aprendizagem.** 2000. Dissertação de Mestrado, PUC- SP, São Paulo, 2000.

EVES, Howard, **Introdução à História da Matemática**, Ed. Unicamp, Campinas, 2002, 843p.

EUCLIDES, tradução e introdução: Irineu Bicudo. **Os Elementos**, Editora Unesp, São Paulo, 2009, 600p.

FLICK, Uwe. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**, 3ª edição. Artmed Editora, Porto Alegre, 2009, 405p.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**, Editora livraria da Física, São Paulo, 2006, 346p.

IEZZI, Gelson, **Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica**, 5ª edição, Atual, São Paulo, 2005, 282p.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A. e VALDÉS, Juan E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** – Porto Alegre: Sulina, 2006. 182 p.

MENDES, M. **Dificuldades no Ensino de Cálculo**. Dissertação de Mestrado. UFRN. Natal, 1994.

MEYER, Cristina. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual.** 137 p. Tese de Mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2003.

MIGUEL, Antonio e MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Autêntica Editora, Belo Horizonte, 2004, 200p.

LEGOFF, Jaques, **Por amor às Cidades**, Ed. USP. São Paulo, 1988,160p.

POSKITT, de Kjartan. **Mortos de Fama. Isaac Newton E Sua Maçã**. São Paulo: CIA. das Letras, 2001, 192p.

PRADO, Elma Luiza Beraldo. **História da Matemática: Um estudo de seus significados na Educação Matemática**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista. UNESP, Rio Claro, 1990, 77p.

REIS, Frederico S. **A tensão entre rigor e intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – Universidade de Campinas. UNICAMP, 2001.

RICIERI, Aguinaldo Prandini, ***Assim* nasceu o Cálculo; origens de Derivadas e Integrais**, Ed. Prandiano, São José dos Campos, 1993, 112p.

RICIERI, Aguinaldo Prandini, **Matemático e Louco; Todos somos um pouco**, Ed. Prandiano, São José dos Campos, 1989, 227p.