



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



Análise Numérica de Elementos Estruturais com Interação Parcial

AMILTON RODRIGUES DA SILVA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

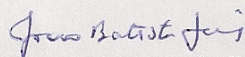
Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr.
Co-Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves

Ouro Preto, novembro de 2010

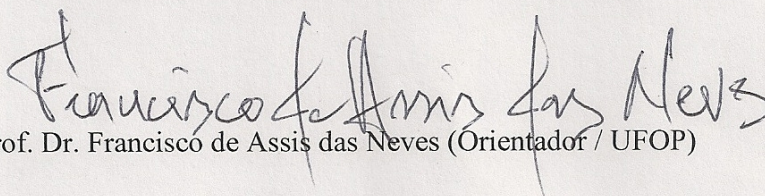
ANÁLISE NUMÉRICA DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS COM INTERAÇÃO PARCIAL

AUTOR: AMILTON RODRIGUES DA SILVA

Esta tese foi apresentada em sessão pública e aprovada em 05 de novembro de 2010, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



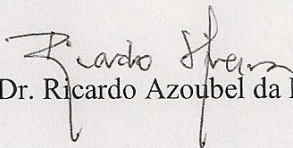
Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Jr. (Orientador / UFOP)



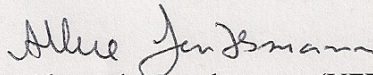
Prof. Dr. Francisco de Assis das Neves (Orientador / UFOP)



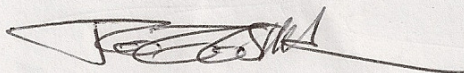
Prof. Dr. Marcílio Sousa da Rocha Freitas (UFOP)



Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira (UFOP)



Prof. Dr. Alexandre Landesmann (UFRJ)



Prof. Dr. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco (UERJ)

*“...Não sei onde estou indo
Só sei que não estou perdido
Aprendi a viver um dia de cada vez...
...Posso até ficar triste se eu quiser
É só por hoje, ao menos isso eu aprendi...”*

Renato Manfredini Júnior (Renato Russo)

Agradecimentos

À Universidade Federal de Ouro Preto, pelo valioso suporte institucional proporcionado.

Ao meu orientador, professor João Batista Marques de Sousa Jr., pelo apoio, atenção e clareza nas orientações durante a realização deste trabalho.

Aos demais professores e funcionários do PROPEC-UFOP, que com empenho e dedicação fazem com que a instituição tenha seu devido reconhecimento em âmbito nacional.

À minha esposa, Melina, pelo amor, carinho e presença em todos os momentos.

A meu pai, que do “andar de cima” me orienta em todas as situações.

A minha mãe, Maria Ribeiro da Silva, a qual devo não só a conclusão deste curso, como todas as fases da minha vida.

Aos meus irmãos, José Amélio, Almir e Alberto, pela companhia e reciprocidade.

À Róvia pelo exemplo de profissionalismo e simpatia.

Aos colegas de turma, Andréa, Arthur e Gisele, pelos momentos agradáveis vividos juntos.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

E, acima de tudo, a Deus, por estar sempre caminhando a nosso lado e às vezes nos carregando nos percursos estreitos dessa longa jornada.

Resumo da Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil

Análise Numérica de Elementos Estruturais com Interação Parcial

AMILTON RODRIGUES DA SILVA

Novembro de 2010

Orientadores: João Batista Marques de Sousa Jr.
Francisco de Assis das Neves

Elementos estruturais compostos por dois ou mais membros, com diferentes materiais e seções, conectados entre si através de ligações deformáveis, aparecem em diversas situações práticas de Engenharia. O exemplo clássico na Engenharia Civil é o caso da viga mista de aço e concreto, na qual uma laje de concreto se combina a um perfil metálico. Os conectores de cisalhamento que fazem a ligação entre os dois elementos permitem um deslocamento relativo entre os componentes, gerando um comportamento estrutural diferente de um sistema composto por dois elementos rigidamente conectados. No contexto das estruturas mistas este fenômeno é conhecido como interação parcial. Outras estruturas, como vigas de madeira formadas por múltiplas chapas coladas, apresentam comportamento semelhante.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento, implementação e teste de ferramentas numéricas, baseadas no Método dos Elementos Finitos, para a simulação computacional de estruturas onde haja conexão deformável. Desta forma, foram formulados, implementados e testados em uma plataforma computacional diversos elementos finitos capazes de representar estruturas com este tipo de comportamento.

Numa primeira etapa foram desenvolvidas formulações de elementos unidimensionais de interface, que acoplados a elementos de viga, permitem a solução do problema da conexão deformável, tanto no sentido longitudinal (deslizamento) como no sentido transversal (separação). Como extensão dos elementos tradicionais de Euler-Bernoulli, foram consideradas diferentes alternativas de acordo com a Teoria de Timoshenko para vigas. Uma análise extensiva sobre as vantagens e desvantagens de cada elemento, incluindo eliminação de comportamentos espúrios (travamento) foi realizada. Aplicações a estruturas em múltiplas camadas foram desenvolvidas, incluindo o desenvolvimento de uma nova formulação analítica para a solução exata do problema no caso linear.

Numa etapa posterior, com o objetivo de obter soluções mais precisas para o caso de vigas mistas de aço e concreto, desenvolveram-se elementos finitos de interface específicos para a conexão entre elementos de viga e elementos de placa. Para o elemento de viga de aço, uma formulação não-linear unidimensional foi desenvolvida com base na teoria de Timoshenko. Para o elemento de placa, baseado na Teoria de Reissner-Mindlin, com o objetivo de representar a não-linearidade física do concreto (fissuração e esmagamento), um modelo de camadas superpostas foi empregado. Em cada camada, um modelo constitutivo bidimensional baseado nas direções principais de deformação foi utilizado. A consideração de grandes deslocamentos foi feita através de hipóteses de Von Kármán. Com estas implementações tornou-se possível a simulação de pavimentos mistos de aço e concreto, com aplicações práticas relevantes, como a correta simulação do efeito de variação transversal das tensões cisalhantes, e a análise de larguras efetivas de vigas mistas.

Abstract of Thesis presented as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Civil Engineering

Numerical Analysis of Structural Element with Partial Interaction

AMILTON RODRIGUES DA SILVA

November of 2010

Advisors: João Batista Marques de Sousa Jr.
Francisco de Assis das Neves

Structural elements assembled by two or more members, with different materials and cross-sections, connected by means of a continuous deformable connection are present in several Engineering applications. The classical example in Structural Engineering is the composite steel-concrete beam, where a concrete slab is associated with a steel girder. The shear connectors which link the elements allow for relative displacements, producing a structural behavior different from the rigid connection case. In this context, the term partial interaction is usually employed. Other structural elements such as wood beams composed of several glued layers present similar behavior.

The purpose of this thesis is the development, implementation and test of numerical tools, based on the Finite Element Method, for the simulation of structures where deformable connections are present. Accordingly, a family of finite elements was developed and tested.

In the first stage, FE formulations of one-dimensional interface elements were developed. These elements, coupled to suitable beam counterparts, are able to simulate the deformable connection problem, in both the longitudinal (slip) and transverse (uplift) directions. As an extension to previously known Euler-Bernoulli elements, a set of Timoshenko theory based finite elements was developed and extensively tested. A study on the shear and slip locking of each of these alternatives was carried out. Applications to multilayered beams were presented, along with a new analytical formulation for the solution of multilayered beam problems in the linear case.

In the second stage, specific interface elements capable of connecting beam and plate elements were developed and tested. The main goal was to obtain a more precise and robust representation of the steel-concrete composite beam, with the possibility of representation of complete floors. For the steel beam element a nonlinear Timoshenko beam formulation was developed. The plate element was based on a Reissner-Mindlin theory, with a layered approach to account for material nonlinearity. In each plate layer a two-dimensional constitutive model based on principal strain was employed. Large displacements were taken into account in both formulations by means of von Kármán kinematical hypotheses. The final assemblage was able to robustly model composite floors, allowing for applications such as shear lag analysis and effective width prediction.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – MOTIVAÇÃO	1
1.1.1 – Análise de viga de Timoshenko.....	3
1.1.2 – Múltiplas camadas.....	3
1.1.3 – Separação vertical.....	4
1.1.4 – Análise de placa.....	5
1.2 – OBJETIVOS.....	5
1.3 – ORGANIZAÇÃO	7
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 – ESTRUTURAS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL.....	9
2.2 – ANÁLISE DE VIGA DE TIMOSHENKO EM VIGAS MISTAS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL.....	13
2.3 – VIGAS MISTAS COM MÚLTIPLAS CAMADAS.....	15
2.4 – ANÁLISE DE PLACAS.....	17
2.5 – LARGURA EFETIVA EM VIGAS MISTAS.....	20
CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA ANÁLISE DE VIGAS COM INTERAÇÃO PARCIAL	24
3.1 – INTRODUÇÃO.....	24
3.2 – ANÁLISE DE VIGA DE EULER-BERNOULLI (EB) FORMADA POR DOIS MEMBROS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL.....	27
3.2.1 – Formulação analítica considerando a teoria de viga de EB.....	28

3.2.2 – Formulação numérica para um elemento de viga de EB.....	32
3.2.3 – Formulação numérica para um elemento de interface para viga de EB.....	38
3.3 – ANÁLISE DE VIGA DE TIMOSHENKO FORMADA POR DOIS	
MEMBROS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL.....	38
3.3.1 – Formulação analítica considerando a teoria de viga de Timoshenko.....	38
3.3.2 – Formulação numérica do elemento de viga de Timoshenko.....	43
3.3.3 – Formulação do elemento de interface para viga de Timoshenko.....	49
3.4 – ANÁLISE DOS ESFORÇOS E RIGIDEZES GENERALIZADAS EM	
SEÇÕES MISTAS.....	55
3.4.1 – Geometria da seção transversal.....	56
3.4.2 – Materiais.....	56
3.4.3 – Obtenção dos esforços atuantes na seção mista.....	57
3.5 – UTILIZAÇÃO DE DIFERENTES ESQUEMAS DE INTERPOLAÇÃO E	
TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO.....	58
3.6 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	63
3.7 – EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	64
3.8.1 – Exemplo 1.....	65
3.8.2 – Exemplo 2.....	68
3.8.3 – Exemplo 3.....	75
3.8 – RESUMO E CONCLUSÕES.....	81
CAPÍTULO 4 – VIGAS MISTAS COM MÚLTIPLAS CAMADAS.....	84
4.1 – INTRODUÇÃO.....	84
4.2 – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE NEWMARK PARA n INTERFACES DE	
DESLIZAMENTO.....	86
4.3 – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA UM PLANO DE DESLIZAMENTO	
($n = 1$).....	94
4.4 – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DOIS PLANOS DE DESLIZAMENTO	
($n = 2$).....	95
4.4.1 – Viga bi-apoiada uniformemente carregada.....	96
4.4.2 – Viga bi-apoiada com carga concentrada no meio do vão.....	99
4.5 – SOLUÇÃO PARA TRÊS OU MAIS PLANOS DE DESLIZAMENTO.....	101
4.5.1 – Viga bi-apoiada uniformemente carregada.....	102

4.5.2 – Viga bi-apoiada com carga concentrada no meio do vão.....	103
4.6 – ANÁLISE NUMÉRICA.....	104
4.7 – EXEMPLOS.....	105
4.7.1 – Viga bi-apoiada com dois planos de deslizamento.....	106
4.7.2 – Viga bi-apoiada com três planos de deslizamento.....	109
4.7.3 – Travamento por deslizamento em vigas mistas com interação parcial longitudinal.....	111
4.7.4 – Influência da rigidez da ligação da placa de reforço na carga última.....	114
4.8 – RESUMO E CONCLUSÃO.....	117
CAPÍTULO 5 – PLACAS DE CONCRETO ENRIJECIDAS COM VIGAS DE AÇO COM CONEXÃO DEFORMÁVEL.....	119
5.1 – INTRODUÇÃO	119
5.2 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PLACA.....	122
5.3 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA.....	135
5.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE INTERFACE.....	142
5.5 – EXEMPLOS	151
5.5.1 – Lajes de Concreto simplesmente apoiadas.....	151
5.5.2 – Laje mista aço-concreto.....	153
5.5.3 – Vigas mistas aço-concreto.....	155
5.6 – RESUMO E CONCLUSÕES.....	164
CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	166
6.1 – SÍNTESE DO TRABALHO.....	166
6.2 – CONCLUSÕES.....	168
6.3 – TRABALHOS FUTUROS.....	168
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	171

Lista de figuras

CAPÍTULO 2

Figura 2.1 – Ilustração de uma estrutura mista.....	10
Figura 2.2 – Tipos de conectores e comportamento na interface (Oehlers e Bradford, 1995).....	11
Figura 2.3 – seções mistas com mais de um plano de deslizamento.....	15
Figura 2.4 – Tensão normal ao longo da largura da laje de concreto.....	21
Figura 2.5 – Largura efetiva baseada na variação da tensão normal.....	22

CAPÍTULO 3

Figura 3.1 – Deslizamento na interface de contato entre os diferentes membros.....	28
Figura 3.2 – Deformada de um segmento de viga de EB.....	32
Figura 3.3 – Sistema de referência global e local no elemento de barra.....	35
Figura 3.4 – Deslizamento na teoria de viga de Timoshenko.....	39
Figura 3.5 – Deformada de um segmento de viga de Timoshenko.....	43
Figura 3.6 – Deslocamento relativo horizontal e vertical.....	49
Figura 3.7 – Deslizamento na interface de contato entre os materiais.....	50
Figura 3.8 – Definição da seção mista.....	56
Figura 3.9 – Relação tensão deformação ilustrativa de um material.....	57
Figura 3.10 – Diferentes esquemas de interpolação.....	59
Figura 3.11 – Elemento de viga linear (a) e linear-quadrático (b).....	60
Figura 3.12 – Elemento de viga quadrático (a) e quadrático-cúbico (b).....	62
Figura 3.13 – Viga mista concreto-madeira bi-apoiada (dimensões em m).....	65
Figura 3.14 – Viga mista aço-concreto e seção transversal (cotas em cm).....	68
Figura 3.15 – Variação do deslizamento (a), deslocamento vertical (b) e curvatura (c) ao longo do vão da viga mista ($\alpha L = 1$).....	71
Figura 3.16 – Variação do deslizamento (a), deslocamento vertical (b) e curvatura (c) ao longo da viga mista ($\alpha L = 100$).....	73

Figura 3.17 – Viga mista e seção transversal.....	75
Figura 3.18 – Modelo constitutivo bi-linear para a conexão normal na interface.....	76
Figura 3.19 – Variação do deslocamento vertical (a), curvatura (b) e deslizamento (c) na viga mista em relação a rigidez vertical na conexão.....	78
Figura 3.20 – Variação da curvatura (a e b) e separação vertical (c e d) ao longo da viga mista ($\alpha L = 1$).....	79
Figura 3.21 – Variação da curvatura (a e b) e separação vertical(c e d) ao longo da viga mista ($\alpha L = 10$).....	81

CAPÍTULO 4

Figura 4.1 – Elemento de viga mista com múltiplas camadas deformado.....	86
Figura 4.2 – Forças em um elemento infinitesimal de viga mista com múltiplas camadas.....	88
Figura 4.3 – Esquema de conexão entre os elementos de interface e de viga.....	105
Figura 4.4 – Viga mista bi-apoiada (cotas em cm).....	106
Figura 4.5 – Deslizamento nos planos de topo (2) e base (1) ao longo da viga mista	107
Figura 4.6 – Deslocamento transversal ao longo da viga mista.....	108
Figura 4.7 – viga mista bi-apoiada (cotas em cm).....	109
Figura 4.8 – Deslizamento nos planos 1, 2 e 3 ao longo da viga mista.....	109
Figura 4.9 – Variação do deslizamento ao longo da viga mista.....	113
Figura 4.10 – Variação da curvatura ao longo da viga mista.....	114
Figura 4.11 – Viga mista contínua (cotas em mm).....	114
Figura 4.12 – Leis constitutivas para o concreto (a), aço (b) e conexão (c).....	115
Figura 4.13 – Curva carga-deslocamento da viga mista contínua.....	116

CAPÍTULO 5

Figura 5.1 – Graus de liberdade do elemento de placa e tensões em um elemento infinitesimal.....	123
Figura 5.2 – Curva tensão-deformação do concreto na tração.....	130
Figura 5.3 – Curva tensão-deformação do concreto na compressão.....	131
Figura 5.4 – Curva tensão-deformação do aço na compressão/tração.....	131
Figura 5.5 – Ilustração de um passo do processo incremental.....	134
Figura 5.6 – Ilustração do avanço do método incremental.....	134

Figura 5.7 – Graus de liberdade do elemento de viga e tensões em um elemento infinitesimal.....	135
Figura 5.8 – Graus de liberdade do elemento de interface.....	143
Figura 5.9 – Deslizamento longitudinal (s_l).....	144
Figura 5.10 – Deslizamento transversal (s_t).....	145
Figura 5.11 – Separação vertical (s_v).....	145
Figura 5.12 – Detalhes das lajes analisadas (Huang, 2003b)(cotas em mm).....	151
Figura 5.13 – Placa quadrada simplesmente apoiada.....	152
Figura 5.14 – Placa retangular simplesmente apoiada.....	153
Figura 5.15 – Laje mista aço-concreto (unidades em mm) Nie <i>et al.</i> (2008).....	154
Figura 5.16 – Curva tensão-deformação para o aço.....	154
Figura 5.17 – Curva carga-deslocamento no meio do vão.....	155
Figura 5.18 – Viga mista e seção transversal (cotas em cm).....	156
Figura 5.19 – Variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto....	157
Figura 5.20 – Tensão e flecha da viga mista para diferentes valores de b_v	159
Figura 5.21 – Seção transversal da viga mista (cotas em mm) (Amádio <i>et al.</i> , 2004)	160
Figura 5.22 – Curva tensão-deformação do aço para as barras de reforço (a) e perfil (b).....	161
Figura 5.23 – Força cortante versus deslizamento para um conector.....	162
Figura 5.24 – Curva carga-deslocamento no meio do vão.....	162
Figura 5.25 – Tensão normal na laje de concreto (interação total).....	163
Figura 5.26 – Tensão normal na laje de concreto (interação parcial).....	163
Figura 5.27 – Comparação do efeito <i>shear lag</i> na interação total e parcial para o nível de carregamento $P/P_{max} = 0.35$ (a) e $P/P_{max} = 0.87$ (b).....	164

Lista de Tabelas

CAPÍTULO 3

Tabela 3.1 – Esquemas de interpolação.....	58
Tabela 3.2 – Deslocamento vertical no meio do vão para soluções analíticas (mm)..	66
Tabela 3.3 – Deslocamento vertical no meio do vão para teoria de EB (mm).....	66
Tabela 3.4 – Deslocamento vertical no meio do vão para teoria de Timoshenko (mm).....	67
Tabela 3.5 – Erro $\eta(\%)$ para os melhores elementos da teoria de EB e Timoshenko	67
Tabela 3.6 – Valores máximos para solução analítica da viga mista da figura 3.13	72
Tabela 3.7 – Valores máximos para solução numérica da viga mista da figura 3.13	74

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1 – Deslizamento e deslocamento vertical considerando análise de viga de EB.....	108
Tabela 4.2 – Deslizamento e deslocamento vertical considerando análise de viga de Timoshenko.....	108
Tabela 4.3 – Deslizamento e deslocamento vertical máximos para o elemento IQC	110
Tabela 4.4 – Deslizamento e deslocamento vertical máximos para o elemento ITQ	111
Tabela 4.5 – Propriedades do aço.....	115

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 – largura efetiva.....	157
Tabela 5.2 – Flecha e tensão na análise simplificada.....	159
Tabela 5.3 – Largura efetiva através da comparação entre análise de placa mais..... viga e análise de viga mais viga.....	160
Tabela 5.4 – largura efetiva.....	163

Lista de Símbolos

b - Largura da laje de concreto em vigas mistas;

c - Posição da interface de conexão;

h - Distância entre os eixos de referência dos membros acima e abaixo da interface de conexão;

h_i - Distância entre os eixos de referência dos $n+1$ membros conectados;

w - Deslocamento vertical na seção transversal para um elemento de viga;

u - Deslocamento axial na seção transversal para um elemento de viga;

M - Momento na seção transversal em um elemento de viga;

N - Força normal na seção transversal em um elemento de viga;

Q - Força cisalhante na seção transversal em um elemento de viga;

E - Módulo de deformação axial do material;

G - Módulo de deformação transversal do material;

E_T - Módulo de deformação axial tangente do material;

M_α - Momento na seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

M_i - Momento na seção transversal dos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;

N_α - Força normal na seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

N_i - Força normal na seção transversal dos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;

N_x - Força normal (direção x) na seção transversal em um elemento de viga;

N_{xy} - Força cisalhante (direção y) na seção transversal em um elemento de viga;

N_{xz} - Força cisalhante (direção z) na seção transversal em um elemento de viga;

M_x - Momento de flexão na seção transversal em um elemento de viga;

T_x - Momento de torção na seção transversal em um elemento de viga;

Q_α - Força cisalhante na seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

V_i - Força cisalhante na seção transversal dos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;

A_α - Área da seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

A_i - Área da seção transversal dos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;

b_f - Largura na direção y da seção de contato entre os membros acima e abaixo da interface de deslizamento;

b_e - Largura efetiva da laje de concreto em vigas mistas;

b_v - Largura da laje de concreto na análise simplificada;

I_α - Momento de inércia da seção transversal nos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

W_{int} - Trabalho virtual devido às forças internas atuantes no elemento;

W_{ext} - Trabalho virtual devido às forças externas atuantes no elemento;

s_l - Deslocamento relativo longitudinal (deslizamento longitudinal) na interface de conexão entre os elementos de viga ou elementos de placa e viga;

s_t - Deslocamento relativo transversal (deslizamento transversal) na interface de conexão entre os elementos de viga ou elementos de placa e viga;

s_v - Deslocamento relativo vertical (separação vertical) na interface de conexão entre os elementos de viga ou elementos de placa e viga;

s_i - Deslocamento relativo longitudinal (deslizamento longitudinal) na interface de conexão de índice i , com i variando de 1 até n interfaces de conexão da viga mista com múltiplas camadas;

u_α^0 - Deslocamento axial no eixo de referência dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

u_i^0 - Deslocamento axial no eixo de referência dos $n+1$ membros conectados;

u_α - Deslocamento axial na seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;

- u^0 - Deslocamento axial no eixo de referência para um elemento de viga;
- v_α^0 - Deslocamento transversal no eixo de referência dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- v_α - Deslocamento transversal na seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- w_α^0 - Deslocamento vertical no eixo de referência dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- w_α - Deslocamento vertical na seção transversal dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- w^0 - Deslocamento vertical no eixo de referência para um elemento de viga;
- z_α - Posição do eixo de referência dos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- z_i - Posição do eixo de referência dos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;
- E_α - Módulo de deformação axial do material nos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- E_i - Módulo de deformação axial do material nos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;
- G_α - Módulo de deformação transversal do material nos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- S_b - Força cisalhante longitudinal por unidade de comprimento na conexão deformável;
- E_{S_b} - Rigidez da conexão deformável na direção longitudinal;
- S_{bi} - Força cisalhante longitudinal por unidade de comprimento da conexão deformável de índice i , com i variando de 1 até n interface de conexão da viga mista com múltiplas camadas;
- $E_{S_{bi}}$ - Rigidez na direção longitudinal da conexão deformável de índice i , com i variando de 1 até n interface de conexão da viga mista com múltiplas camadas;
- N_b - Força normal longitudinal por unidade de comprimento na conexão deformável;
- E_{N_b} - Rigidez da conexão deformável na direção vertical;
- V_b - Força cisalhante transversal por unidade de comprimento na conexão deformável;

- E_{V_b} - Rigidez da conexão deformável na direção transversal;
- N_i^w - Funções de forma para deslocamentos verticais, com i variando de 1 até nw ;
- N_i^θ - Funções de forma para rotações, com i variando de 1 até $n\theta$;
- q_i^u - Graus de liberdade do elemento de viga referente aos deslocamentos axiais, com i variando de 1 até nu ;
- q_i^w - Graus de liberdade do elemento de viga referente aos deslocamentos transversais, com i variando de 1 até nw ;
- q_i^θ - Graus de liberdade do elemento de viga referentes às rotações, com i variando de 1 até $n\theta$;
- q_i^{u1} - Graus de liberdade do elemento de interface referente aos deslocamentos axiais da face superior, com i variando de 1 até nu ;
- q_i^{w1} - Graus de liberdade do elemento de interface referente aos deslocamentos verticais da face superior, com i variando de 1 até nw ;
- $q_i^{\theta1}$ - Graus de liberdade do elemento de interface referente às rotações na face superior, com i variando de 1 até $n\theta$;
- q_i^{u2} - Graus de liberdade do elemento de interface referente aos deslocamentos axiais da face inferior, com i variando de 1 até nu ;
- q_i^{w2} - Graus de liberdade do elemento de interface referente aos deslocamentos verticais da face inferior, com i variando de 1 até nw ;
- $q_i^{\theta2}$ - Graus de liberdade do elemento de interface referente às rotações na face inferior, com i variando de 1 até $n\theta$;
- ε_α - Deformação axial na seção transversal nos membros acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de conexão;
- ε_i - Deformação axial na seção transversal nos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;
- ε_x - Deformação axial em um elemento de viga, e deformação axial na direção x do elemento de placa;
- ε_y - Deformação axial na direção y do elemento de placa;
- ε_{xz} - Deformação transversal em um elemento de viga, e deformação transversal na direção z da seção transversal de normal x do elemento de placa;

- ε_{yz} - Deformação transversal na direção z da seção transversal de normal y do elemento de placa;
- ε_{xy} - Deformação transversal na direção y da seção transversal de normal x do elemento de placa;
- θ_α - Rotação da seção transversal dos membros acima ($\alpha=1$) e abaixo ($\alpha=2$) da interface de conexão;
- θ - Rotação da seção transversal no elemento de viga e rotação da seção transversal à direção x do elemento de placa;
- ϕ - Torção no elemento de viga e rotação da seção transversal à direção y do elemento de placa;
- ϕ_α - Torção na seção transversal dos membros acima ($\alpha=1$) e abaixo ($\alpha=2$) da interface de conexão;
- γ - deformação transversal no elemento de viga;
- σ_α - Tensão normal ao longo da seção transversal nos membros acima ($\alpha=1$) e abaixo ($\alpha=2$) da interface de conexão;
- σ_i - Tensão normal ao longo da seção transversal nos $n+1$ membros da viga mista com múltiplas camadas;
- τ_α - Tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal nos membros acima ($\alpha=1$) e abaixo ($\alpha=2$) da interface de conexão;
- σ_x - Tensão normal na seção transversal em um elemento de viga, e tensão normal na direção x em um elemento de placa;
- σ_y - Deformação axial na direção y do elemento de placa;
- τ_{xz} - Tensão cisalhante na direção z da seção transversal de normal x do elemento de placa;
- τ_{yz} - Tensão cisalhante na direção z da seção transversal de normal y do elemento de placa;
- τ_{xy} - Tensão cisalhante na direção y da seção transversal de normal x do elemento de placa;
- τ - Tensão cisalhante na seção transversal em um elemento de viga;
- σ_{\max}^v - Tensão normal máxima na laje de concreto considerando análise simplificada;
- f_c - Resistência a compressão do concreto em MPa.
- f_t - Resistência a tração do concreto em MPa.

ε_{tr} - Deformação do concreto referente à tensão de tração máxima;
 ε_{cr} - Deformação do concreto referente à tensão de compressão máxima;
 ε_{tu} - Deformação última do concreto referente à tração;
 ε_{cu} - Deformação última do concreto referente à compressão;
 ν - Coeficiente de Poisson do material;
 δ - operador variacional;
 ∂ - operador diferencial parcial;
 d - operador diferencial total;
 \mathbf{u} - Vetor que define a posição de um ponto qualquer no volume de um elemento de viga composta;
 \mathbf{q} - Vetor dos deslocamentos nodais do elemento;
 \mathbf{q}_u - Vetor dos deslocamentos nodais na direção x do elemento de placa;
 \mathbf{q}_v - Vetor dos deslocamentos nodais na direção y do elemento de placa;
 \mathbf{q}_w - Vetor dos deslocamentos nodais na direção z do elemento de placa;
 \mathbf{q}_θ - Vetor dos deslocamentos nodais referentes às rotações no plano xz do elemento de placa;
 \mathbf{q}_ϕ - Vetor dos deslocamentos nodais referentes às rotações no plano yz do elemento de placa;
 Φ_u - Vetor das funções de forma para interpolação dos deslocamentos axiais;
 Φ_w - Vetor das funções de forma para interpolação dos deslocamentos verticais;
 Φ_θ - Vetor das funções de forma para interpolação das rotações;
 Φ - Vetor das funções de forma para interpolação dos deslocamentos do elemento de placa (elemento isoparamétrico);
 \mathbf{e} - Vetor referente às deformações no elemento de placa;
 \mathbf{e}_l - Vetor referente às deformações no elemento de placa (parte linear);
 \mathbf{e}_{nl} - Vetor referente às deformações no elemento de placa (parte não linear);
 \mathbf{s} - Vetor referente às tensões no elemento de placa;
 \mathbf{B}_w - Vetor com funções de forma para interpolação dos deslocamentos verticais usando técnica de deformação assumida;

\mathbf{B}_θ - Vetor com funções de forma para interpolação das rotações usando técnica de deformação assumida;

\mathbf{f}_{int} - Vetor de forças internas nodais;

\mathbf{f}_{ext} - Vetor de forças externas nodais;

\mathbf{N} - Vetor referente aos esforços de membrana no elemento de placa;

\mathbf{M} - Vetor referente aos esforços de momento no elemento de placa;

\mathbf{Q} - Vetor referente aos esforços cisalhantes no elemento de placa;

\mathbf{s}_{12} - Vetor referente às tensões plana nas direções principais;

\mathbf{s}_{xy} - Vetor referente às tensões plana em relação a eixos ortogonais quaisquer;

\mathbf{e}_{12} - Vetor referente às deformações plana nas direções principais;

\mathbf{e}_{xy} - Vetor referente às deformações plana em relação a eixos ortogonais quaisquer;

Ψ - Matriz com seus termos dados por funções de;

\mathbf{K}_T - Matriz de rigidez tangente;

\mathbf{K}_m - Matriz de rigidez tangente referente aos esforços de membrana;

\mathbf{K}_{mb} - Matriz de rigidez tangente referente aos esforços de membrana e flexão;

\mathbf{K}_{bs} - Matriz de rigidez tangente referente aos esforços de flexão e cisalhamento;

\mathbf{K}_{mu} - Matriz de rigidez tangente referente aos esforços de membrana (parte não linear);

\mathbf{K}_{bu} - Matriz de rigidez tangente referente aos esforços de flexão (parte não linear);

\mathbf{K}_σ - Matriz de rigidez tangente referente aos efeito de segunda ordem devido às tensões de membrana;

\mathbf{D} - Matriz constitutiva do material (relaciona tensão à deformação);

\mathbf{D}_p - Matriz constitutiva do material (parte referente às tensões de membrana);

\mathbf{D}_s - Matriz constitutiva do material (parte referente às tensões de cisalhamento);

\mathbf{B} - Matriz que relaciona deformação e deslocamentos no elemento de placa;

\mathbf{B}_l - Matriz que relaciona deformação e deslocamentos no elemento de placa (parte linear);

\mathbf{B}_{nl} - Matriz que relaciona deformação e deslocamentos no elemento de placa (parte não linear);

\mathbf{D}_{12} - Matriz constitutiva para o material em relação à eixos ortogonais nas direções principais considerando estado plano de tensões;

\mathbf{D}_{xy} - Matriz constitutiva para o material em relação à eixos ortogonais quaisquer considerando estado plano de tensões;

\mathbf{R}_{σ} - Matriz que relaciona tensões plana em relação a eixos ortogonais quaisquer, as respectivas tensões em relação aos eixos ortogonais dados pelas direções principais;

\mathbf{R}_{ϵ} - Matriz que relaciona deformações plana em relação a eixos ortogonais quaisquer, as respectivas deformações em relação aos eixos ortogonais dados pelas direções principais;

\mathbf{R}_s - Matriz que relaciona tensões e deformações plana em relação a eixos ortogonais quaisquer, as respectivas tensões e deformações em relação aos eixos ortogonais dados pelas direções principais;

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita uma descrição dos fatores motivadores que levaram os autores a pesquisarem sobre o tema, os objetivos deste trabalho e uma descrição da forma como este trabalho está organizado.

1.1 – MOTIVAÇÃO

Este trabalho é voltado para o estudo numérico do comportamento de elementos estruturais mistos com interação parcial (conexão deformável). Dentre os diferentes tipos desses elementos estruturais encontrados na prática da construção civil as vigas mistas e placas enrijecidas com vigas são avaliadas nesse trabalho. Como pode ser observado no texto motivador descrito nos parágrafos seguintes, a grande maioria dos casos práticos em engenharia civil deste tipo de elemento estrutural é dada por vigas mistas formadas por uma laje de concreto de seção retangular ligada por meios mecânicos a um perfil de aço de seção I. No entanto, outros materiais de construção e formas de seções transversais, como madeira e seções fechadas, motivaram a utilização neste trabalho de procedimentos que permitem a determinação dos esforços atuantes em uma seção transversal do elemento de viga que tenha forma dada por um polígono fechado qualquer e preenchida por um número qualquer de materiais.

Na maioria das construções em aço é adotada a solução de viga mista para aproveitar a altura da laje de concreto que é sobreposta à viga de aço, formando assim uma viga mista com comportamento estrutural superior ao da viga de aço. Esse ganho no comportamento estrutural do elemento misto, junto com o crescente uso de estruturas em

aço na construção civil no Brasil, tem gerado um relevante aumento na utilização desta técnica construtiva. Esse tipo de solução também é muito utilizado quando se quer vencer grandes vãos, como no caso de pontes e galpões industriais. Nie *et al.* (2004) cita nesses casos como vantagens das vigas mistas em relação às vigas simples, a alta relação vão versus altura da viga, menor deformação e uma alta frequência fundamental de vibração.

A utilização de sistemas mistos amplia consideravelmente a gama de soluções em concreto armado e em aço. Queiroz *et al.* (2001) lista como vantagens dos sistemas mistos aço-concreto a possibilidade de dispensa de formas e escoramentos, a redução do peso próprio e do volume da estrutura, o aumento da precisão dimensional da construção, a redução do consumo de aço estrutural, a redução das proteções contra incêndio e corrosão e o aumento na rigidez e resistência à flambagem. No caso de vigas mistas pode-se ainda citar a prevenção de flambagem da mesa superior do perfil de aço e flambagem lateral do perfil.

Um indicativo de crescimento no Brasil da utilização deste tipo de elemento estrutural na construção civil é a recente publicação da norma brasileira Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios (NBR 8800, 2008) que substitui a norma anterior Projeto e Execução de Estruturas de Aço em Edifícios (NBR 8800, 1986). Além da revisão do seu texto original, a NBR 8800 (2008) introduz o conceito de novas técnicas construtivas como os elementos estruturais de seção mista. Entre os diferentes elementos tratados encontram-se as vigas mistas, pilares mistos, lajes mistas e ligações mistas.

Os procedimentos de análise e dimensionamento de elementos mistos apresentados em normas técnicas (Eurocode 4 2001, AISC-LRFD 2005, ACI-318 2004 e NBR 8800 2008) adotam simplificações, como a da seção homogeneizada, que podem fornecer resultados não compatíveis com os da realidade. Geralmente esses resultados são a favor da segurança, porém contra a economia. Esse fato junto com a popularização de computadores cada vez mais velozes motiva a implementação de métodos numéricos capazes de simular o problema considerando, por exemplo, a interação parcial entre os elementos e a não linearidade física e geométrica.

Este trabalho é uma extensão da dissertação de mestrado do autor (Silva, 2006), intitulada ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS COM INTERAÇÃO PARCIAL. São introduzidos diversos desenvolvimentos adicionais, como:

- (a) A consideração do efeito da deformação por cisalhamento, ou seja, teoria de viga de Timoshenko.

- (b) A possibilidade do elemento de interface implementado associado aos elementos de viga de simularem problemas de vigas mistas com mais de um plano de deslizamento (múltiplas camadas), bem como o desenvolvimento de uma expressão analítica para problemas particulares de vigas mistas com múltiplas camadas considerando conexão deformável entre elas.
- (c) A possibilidade de separação vertical na interface de contato entre os materiais, sendo este comportamento simulado pelo elemento de interface.
- (d) Nas situações mais comuns de vigas mistas, avaliação do comportamento estrutural da laje de concreto por elementos de placa, ou seja, análise de placa enrijecida por vigas.

As motivações destes desenvolvimentos adicionais são descritas abaixo em forma de subseções.

1.1.1 – *Análise de viga de Timoshenko*

A consideração da deformação por cisalhamento em problemas de vigas mistas torna-se relevante quando se tem uma baixa relação vão versus altura da viga, o que pode acontecer em alguns casos práticos como o problema de vigas de pontes rolantes em galpões industriais e vigas de equilíbrios em fundações excêntricas.

Devido à consideração da deformação por cisalhamento na análise de viga de Timoshenko esta produz resultados mais próximos da realidade do que a análise de viga de Euler-Bernoulli. No entanto, em casos de análise numérica e em algumas situações podem acontecer erros na representação desta deformação fazendo com que sua resposta numérica não represente a realidade do problema, obtendo, para esses casos, respostas numéricas melhores quando se usa a teoria de viga de Euler-Bernoulli. Esses erros numéricos, chamados na literatura de travamento por cisalhamento (*shear locking*), podem ser evitados com uma escolha apropriada para as funções de forma do elemento utilizado na simulação numérica do problema.

1.1.2 – *Múltiplas camadas*

A maioria dos problemas práticos de vigas mistas com interação parcial refere-se a casos com um plano de deslizamento (duas camadas). No entanto, exemplos na prática da construção civil como, vigas de chapas de madeiras pregadas ou coladas, vigas mistas

formadas por uma laje de concreto, um perfil metálico do tipo I e uma chapa de aço ligada à mesa inferior do perfil I, e vigas sanduíches formadas por uma seção de concreto prensada entre duas chapas de aço, são elementos estruturais compostos com mais de um plano de deslizamento (múltiplas camadas).

A análise numérica de vigas com múltiplas camadas com conexão deformável longitudinalmente entre as diferentes camadas torna-se bastante complexa na tentativa de representar todos os diferentes deslizamentos dentro de um único elemento finito, como geralmente é feito em muitos trabalhos encontrados na literatura no caso de apenas um plano de deslizamento longitudinal (Salari *et al.* 1998, Gattesco 1999, Salari e Spacone 2001, Ayoub e Filippou 2002, Ayoub 2001, Dall'Asta e Zona 2002, 2004a, 2004b e 2004c, Ranzi e Zona 2007). No entanto, o uso de um elemento de interface que simule a conexão deformável e faz a ligação entre dois elementos de vigas que simulam as seções acima e abaixo da interface de conexão, pode ser utilizado para representar um número qualquer de planos de deslizamento longitudinal.

1.1.3 – *Separação vertical*

Os elementos estruturais mistos encontrados na prática da construção civil têm seu comportamento misto garantido através de uma ligação mecânica entre os diferentes componentes. Esta conexão tem uma rigidez nas direções longitudinal e transversal que impedem ou diminuem os deslocamentos relativos dos diferentes materiais nestas direções.

Vários trabalhos analíticos (Newmark *et al.* 1951, Faella *et al.* 2002), numéricos (Salari e Spacone 2001, Ayoub e Filippou 2002, Ayoub 2001, Dall'Asta e Zona 2002, Ranzi e Zona 2007) e experimentais (Ansourian 1981, Nie *et al.* 2006, Nie, Fan e Cai 2008, Loh *et al.* 2004) encontrados na literatura mostram que a influência da interação parcial longitudinal no comportamento estrutural de vigas mistas é significativa na avaliação dos esforços atuantes no elemento estrutural.

Já a influência da interação parcial transversal (separação vertical) no comportamento estrutural de vigas mistas pode ser relevante em casos onde uma carga concentrada é aplicada no elemento abaixo da interface de contato, o que pode acontecer na prática em pontos de encontro de vigas mistas aço-concreto sem a presença de um pilar.

Esta influência é avaliada nesse trabalho de forma numérica atribuindo ao elemento de interface, que simula o comportamento deformável da conexão, uma função bi-linear para a curva que relaciona força vertical por unidade de comprimento na interface com o

deslocamento relativo nesta direção, ou seja, a curva que representa a rigidez na direção vertical da conexão. Essa forma de avaliação foi baseada no trabalho de Ranzi *et al.* (2006).

1.1.4 – *Análise de placa*

O caso mais comum de elemento estrutural misto na construção civil é de forma incontestável representado por vigas mistas de aço-concreto. Nesses problemas práticos de engenharia, geralmente a viga mista aparece como uma simplificação do problema de placa associado a um elemento de viga usando o conceito da largura efetiva (Allen e Severn 1961, Adekola 1968b, Ansourian 1975, Amadio e Fragiaco 2002, Chiewanichakorn *et al.* 2004, Ahn *et al.* 2004, Castro *et al.* 2007, Nie, Tian e Cai 2008). Tal simplificação facilita os cálculos, mas pode gerar superestimação ou subestimação das tensões e deslocamentos do elemento estrutural avaliado.

Mesmo em situações de vigas mistas isoladas, o problema da variação da tensão normal ao longo da largura do elemento de concreto, efeito conhecido na literatura como *shear lag*, que é tão mais significativo quanto maior for a largura da seção de concreto, pode gerar erros consideráveis quando se avalia este elemento estrutural com a simplificação da teoria de viga para os diferentes componentes. Tais considerações motivam a simulação do comportamento não linear do concreto nestes tipos de estruturas por meio de elementos de placa. Nestes casos o problema de viga mista com interação parcial passa a ser tratado como um problema de placa enrijecida com conexão deformável.

1.2 – OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho consiste na implementação em um programa de elementos finitos de modelos numéricos unidimensionais de viga considerando a teoria de viga de Timoshenko, modelos bidimensionais de placa considerando a teoria de placa de Mindlin/Reissner, e modelos unidimensionais de interface capazes de simular o comportamento da conexão deformável de elementos mistos, como os casos particulares de vigas mistas aço-concreto e placas de concreto enrijecidas com vigas de aço.

Na implementação dos elementos unidimensionais considerando a teoria de viga de Timoshenko são utilizados diferentes tipos de esquema de interpolação dos graus de

liberdade do elemento, formando, junto com os elementos implementados em Silva (2006) referentes à teoria de viga de Euler-Bernoulli, uma família de elementos finitos para análise de viga mista com interação parcial. Através de exemplos numéricos os vários elementos implementados são verificados quanto ao comportamento em relação a problemas de travamento por cisalhamento e deslizamento. Também é verificada nestes exemplos a influência da consideração da deformação por cisalhamento na análise de vigas mistas com interação parcial para diferentes relação altura da seção transversal versus comprimento do vão da viga.

Neste trabalho também será explorada a capacidade do elemento de interface implementado em simular, além do deslocamento relativo na direção longitudinal da interface de contato entre os diferentes materiais (interação parcial longitudinal), o deslocamento relativo na direção vertical (interação parcial transversal). Outra possibilidade de aplicação deste tipo de elemento e explorada neste trabalho é a capacidade de simulação de problemas de vigas mistas com mais de um plano de deslizamento. Para comparação dos resultados numéricos dos problemas de vigas mistas com múltiplas camadas obtidos neste trabalho, foi desenvolvida uma formulação analítica para o comportamento deste tipo de estrutura para casos estaticamente determinados.

Um elemento de placa com nove nós e cinco graus de liberdade por nó é implementado neste trabalho com o objetivo de simular o comportamento da laje de concreto no caso mais comum de elemento misto na engenharia civil. Devido ao interesse na determinação da carga última destes elementos mistos, uma análise não linear física é considerada na formulação do elemento de placa. Análises numérica e experimental (Huang *et al.*, 2003b) de placas de concreto mostram que a carga última deste tipo de elemento é influenciada por efeitos de membrana, sendo, portanto, necessária à consideração de uma análise não linear geométrica na implementação do elemento de placa.

Um elemento unidimensional de viga e outro de interface, com graus de liberdade compatíveis com os do elemento de placa, são implementados para simularem problemas de vigas mistas ou placas enrijecidas com conexão deformável. Como uma aplicação dessas formulações é verificada a influência da interação parcial na determinação da largura efetiva de vigas mistas.

O trabalho deverá calibrar seus resultados com resultados experimentais e numéricos de outros autores, bem como o uso de expressões analíticas para casos particulares.

A implementação computacional será feita sobre uma plataforma de elementos finitos que emprega programação orientada a objetos. A arquitetura da aplicação permite sua extensão sem prévio conhecimento da estrutura global do programa, segundo os conceitos da programação orientada a objetos (POO).

Este trabalho pertence a uma linha de pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto (EM-UFOP) tendo como trabalhos já concluídos as dissertações de mestrado de Caldas (2004), Muniz (2005), Silva (2006) e Oliveira (2009), todas voltadas para análise numérica de estruturas mistas.

1.3 – ORGANIZAÇÃO

Este trabalho encontra-se organizado da forma descrita a seguir. No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre vigas mistas com interação parcial considerando o efeito da deformação por cisalhamento, separação vertical e consideração de múltiplas camadas com deslizamento relativo. Também é encontrada neste capítulo uma revisão bibliográfica sobre elementos de placa para análise não-linear de lajes de concreto, que se faz necessária ao considerar a viga mista como uma placa de concreto enrijecida com uma viga de aço. Devido à aplicação dos elementos implementados na verificação da influência da rigidez da conexão deformável na determinação da largura efetiva, uma revisão bibliográfica sobre esse fenômeno para vigas mistas aço-concreto também pode ser vista no capítulo 2.

No capítulo 3 é apresentada uma formulação para análise de vigas mistas com interação parcial considerando a deformação por cisalhamento. Uma família de elementos de viga de Timoshenko e de elementos de interface são implementados e validados através de exemplos numéricos e experimentais. Uma técnica de deformação por cisalhamento imposta é apresentada e utilizada em alguns elementos de viga de Timoshenko implementados para evitar problemas de travamento por cisalhamento, sendo a sua eficiência comprovada em exemplos numéricos.

Também no capítulo 3 é apresentada a capacidade do elemento de interface implementado em simular a separação vertical em problemas de vigas mistas. Para isso um exemplo numérico é avaliado, considerando diferentes valores para a rigidez vertical na interface de contato entre os componentes com o objetivo de avaliar a influência desta na análise estrutural da viga mista.

No capítulo 4 é apresentada uma formulação para análise de vigas mistas com interação parcial considerando múltiplas camadas, ou seja, mais de um plano de deslizamento. Também é apresentada neste capítulo uma expressão analítica para viga mista simplesmente apoiada e uniformemente carregada considerando um número qualquer de planos de deslizamento, usada para validar os elementos implementados na simulação deste tipo de problema.

No capítulo 5 é apresentada a formulação dos elementos de placa, viga e interface capazes de simular o problema de placa de concreto enrijecida com vigas de aço com conexão deformável. Como uma aplicação destes elementos é avaliada a influência da rigidez da conexão em vigas mistas com interação parcial na determinação da largura efetiva.

No capítulo 6 são apresentadas as considerações finais como resumo e conclusão do trabalho e possibilidades de trabalhos futuros. Por último, são apresentadas as referências bibliográficas citadas ao longo do texto.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentadas definições, conceitos e trabalhos relevantes sobre elementos estruturais mistos, vigas mistas com interação parcial (conexão deformável) considerando efeito da deformação por cisalhamento e múltiplas camadas. Assim como em relação à análise não linear de placas de concreto, e largura efetiva em vigas mistas.

2.1 – ESTRUTURAS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL

Os elementos estruturais mais comuns em engenharia civil envolvendo combinações de membros com conexão deformável são vigas mistas, lajes mistas, pilares mistos e chapas de madeiras coladas ou pregadas. Já os tipos de materiais mais utilizados são concreto, aço e madeira.

Devido à grande presença em edifícios de andares múltiplos, pontes e outras obras da construção civil o elemento misto aço-concreto é o tipo de membro estrutural com conexão deformável mais difundido. A figura 2.1 ilustra um destes tipos de elemento misto aço-concreto bastante comum em pisos de edifícios de andares múltiplos. Na figura pode-se observar uma laje mista, formada por uma laje de concreto armado sobre uma placa de aço com reentrâncias que garantem seu funcionamento conjunto, e uma viga mista, formada por um perfil de aço ligado por conectores do tipo pino com cabeça a uma laje de concreto.



Figura 2.1 – Ilustração de uma estrutura mista

A utilização de elementos com conexão deformável como membro estrutural pode ser tão antiga quanto à utilização da madeira em obras de pequenas pontes, contenções, moradias, entre outras, uma vez que a união de peças de madeira para aumentar a rigidez do elemento estrutural gera um elemento estrutural com conexão deformável. Já em termos de elementos mistos aço-concreto as primeiras estruturas surgiram em 1894 nos Estados Unidos (Griffis, 1994). Segundo De Nardim (1999), em 1914, na Inglaterra, os elementos estruturais mistos começaram a ser estudados. Os primeiros métodos de dimensionamento para vigas mistas surgiram em meados de 1930, sendo em 1944 e 1952 introduzidos nas normas americanas AASHTO (*American Association of State Highway*) e AISC (*American Institute of Steel Construction*), respectivamente. No Brasil este tipo de sistema estrutural foi introduzido na década de 50 e tem conquistado espaço nos últimos anos. A antiga norma brasileira Projeto e Execução de Estruturas de Aço em Edifícios (NBR 8800, 1986) ao ser revisada inseriu o assunto em 2008 passando a se chamar Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios (NBR 8800, 2008).

A conexão deformável entre os diferentes membros é garantida por meios mecânicos (conectores, mossas e ressaltos), por atrito, ou por simples aderência e repartição de cargas (Queiroz *et al.*, 2001). No caso de vigas mistas aço-concreto é adotado, na maioria dos casos práticos, o conector do tipo pino com cabeça (*stud*) para fazer a ligação entre os diferentes membros do elemento estrutural. Essa preferência se dá pela sua fácil execução e pela sua característica de apresentar um comportamento plástico na curva que representa a relação entre a força por unidade de comprimento e o deslizamento na interface da viga mista, como mostra a figura 2.2. Isso permite a redistribuição de esforços e presença de grandes deslocamentos antes da ruína.

A figura 2.2 mostra que o conector trapezoidal apresenta uma resistência última bem superior aos conectores do tipo pino com cabeça e formato-L. No entanto, esse tipo de

conector não apresenta uma deformação plástica antes da ruptura como verificada nos conectores pino com cabeça e formato-L.

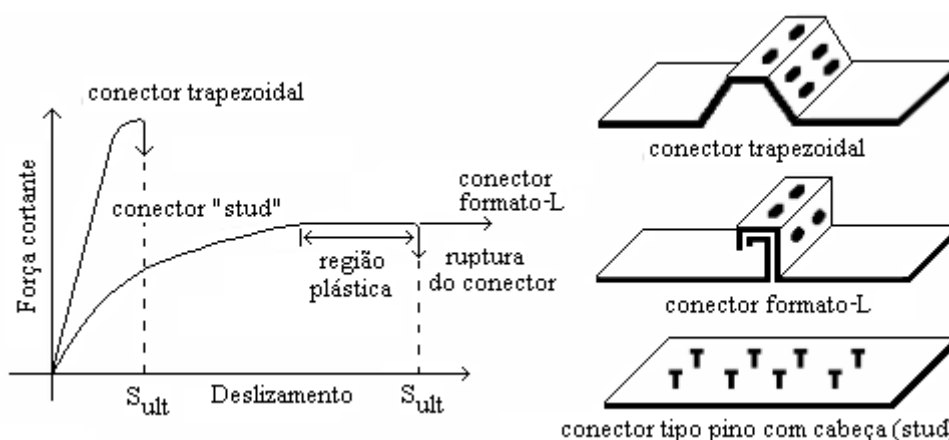


Figura 2.2 – Tipos de conectores e comportamento na interface (Oehlers e Bradford, 1995)

O problema de elementos estruturais com conexão deformável vem sendo estudado já há bastante tempo. Dentre os diferentes elementos estruturais mistos com conexão deformável a viga mista é a que mais tem sido estudada neste período de tempo. As primeiras soluções para este problema basearam-se em modelos analíticos, como a equação diferencial de Newmark desenvolvida há mais de 50 anos (Newmark *et al.*, 1951). Outros trabalhos envolvendo soluções analíticas para casos mais gerais podem ser vistos em Faella *et al.* (2002) e Ranzi *et al.* (2004). Um modelo semi analítico foi empregado por Oven *et al.* (1997) no desenvolvimento de um elemento finito baseado em uma formulação em deslocamento para simular o comportamento da interação parcial em vigas mistas. Wang (1999) propôs soluções analíticas para avaliar deflexões em vigas mistas e comparou os resultados obtidos em seu trabalho com resultados experimentais e numéricos.

A dificuldade de obter soluções analíticas para problemas práticos e problemas não lineares, tanto em relação aos materiais envolvidos quanto em relação à conexão deformável, levou ao desenvolvimento de soluções numéricas, sendo a maioria baseada no método dos elementos finitos (MEF). Nesse sentido, diferentes tipos de análises podem ser abordados. Uma análise tridimensional (3D) com elementos sólidos é a estratégia que produz resultados mais precisos e torna-se muito útil na simulação de fenômenos complexos. No entanto, em problemas práticos de engenharia, a análise 3D frequentemente tem um custo computacional elevado, e muitas vezes torna-se impraticável. Por outro lado, elementos finitos unidimensionais do tipo viga-coluna podem ser bastante econômicos em

termos computacionais e representar bem o modelo de viga mista para os propósitos práticos, o que torna este elemento um campo ativo de pesquisa.

Dentro desta linha de pesquisa ativa descrita no final do parágrafo anterior, Dall'Asta e Zona (2002 e 2004a) desenvolveram uma família de elementos finitos baseados em deslocamentos para análise não linear de vigas mistas com conexão deformável. Mais tarde os autores ampliaram o trabalho com o desenvolvimento de um elemento misto e discutiram os méritos das diferentes formulações (Dall'Asta e Zona, 2004b e 2004c).

Elementos mistos e elementos baseados em forças foram também os assuntos discutidos nos trabalhos de Salari *et al.* (1998), Salari e Spacone (2001), Ayoub e Filippou (2002) e Ayoub (2001). De forma sucinta pode-se dizer que a principal vantagem de uma formulação baseada em deslocamentos é a sua simplicidade e facilidade de implementação. No entanto, em alguns casos pode apresentar problemas de travamento (Dall'Asta e Zona, 2004a). Já os elementos baseados em forças fornecem resultados mais precisos para malhas pouco refinadas, porém não tão simples de serem implementados.

Souza Jr. e Silva (2006) simularam o comportamento de vigas mistas com conexão deformável associando dois elementos de viga, um representando a laje de concreto e outro o perfil de aço, a um elemento de interface que simula o comportamento da conexão deformável e faz a ligação entre os dois elementos de viga.

O primeiro trabalho encontrado na literatura sobre elementos de interface foi proposto por Goodman *et al.* (1968), comumente chamado de GTB (Goodman, Taylor e Brekke). Nesse caso o elemento de interface descrito tem por finalidade permitir o deslizamento e separação entre dois corpos em contato, ou separados por uma fina capa de material. Esses elementos estão associados a problemas bi ou tridimensionais, diferente do elemento usado em Sousa Jr. e Silva (2006), que está associado a um problema unidimensional.

Ainda em relação aos elementos de interface envolvendo problemas bi ou tridimensionais, Kaliakin e Li (1995) utilizaram o elemento de interface para simular a interação no contato entre uma sapata de fundação e o solo. Carol *et al.* (2001) utilizaram o elemento de interface para simular abertura de trincas na malha de elementos finitos usada para definição da curva tensão-deformação do concreto de forma numérica. Coutinho *et al.* (2003) desenvolveram uma adaptação para o elemento GTB eliminando a inconsistência cinemática quando este elemento é submetido a uma condição específica de impedimentos de seus graus de liberdade.

A maioria dos trabalhos citados anteriormente fazem referência ao problema de viga mista com conexão deformável apenas na direção longitudinal, desprezando uma possível interação parcial transversal (separação vertical), sendo utilizada na formulação dos elementos uma análise de viga de Euler-Bernoulli e apenas uma conexão deformável, ou seja, dois membros conectados.

Para os casos particulares de vigas mistas aço-concreto, o efeito da variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto (*shear lag*) também não é considerado nos trabalhos citados anteriormente. Tais considerações são objetos de implementações deste trabalho e tiveram suas motivações descritas no capítulo anterior. A seguir é apresentada uma revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo esses temas.

2.2 – ANÁLISE DE VIGA DE TIMOSHENKO EM VIGAS MISTAS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL

Como citado anteriormente, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura (Newmark *et al.* 1951, Salari *et al.* 1998, Gattesco 1999, Salari e Spacone 2001, Ayoub e Filippou 2002, Ayoub 2001, Dall’Asta e Zona 2002, 2004a, 2004b e 2004c, Faella *et al.* 2002, Ranzi *et al.* 2004) estão voltados para o problema de vigas mistas com conexão deformável apenas na direção longitudinal e baseados na teoria de viga de Euler-Bernoulli, que considera que após deformações as seções inicialmente planas e ortogonais à configuração indeformada permanecem planas e ortogonais à configuração deformada.

Apesar dos problemas práticos de vigas mistas poderem, em uma grande parte serem descritos pela aproximação da teoria de viga de Euler-Bernoulli, existem casos em que a teoria de viga de Timoshenko deve ser considerada.

Na análise de viga de Timoshenko considera-se que, após as deformações, as seções inicialmente planas e ortogonais à configuração indeformada permanecem planas, porém não mais ortogonais à configuração deformada. Essa teoria aproxima-se mais da realidade da deformação de elementos de vigas do que a teoria de viga de Euler-Bernoulli, sendo assim, a sua utilização em qualquer situação produz resultados mais próximos da realidade. No entanto, problemas de travamento em relação ao cisalhamento em análise numérica utilizando a teoria de viga de Timoshenko podem causar erros consideráveis em problemas particulares de vigas mistas. Nesses casos uma apropriada definição das funções de interpolação da deformação de cisalhamento que ocorre no elemento de viga de Timoshenko pode evitar esses erros numéricos.

Ranzi e Zona (2007) apresentam formulações analíticas e de elementos finitos para vigas mistas de aço-concreto considerando o efeito de deformação por cisalhamento no componente de aço junto com um estudo paramétrico extensivo a carregamentos de curta e longa duração. Os autores concluíram que a consideração do efeito de deformação por cisalhamento pode levar a resultados bastante diferentes quando comparados com análise de viga de Euler-Bernoulli, principalmente em sistemas contínuos.

Partindo do fato de que alguns elementos finitos baseados em deslocamentos para análise de vigas mistas podem apresentar travamento por cisalhamento, conhecido na literatura por *shear locking*, Schnabl *et al.* (2007) desenvolveram um elemento finito baseado em deformações para vigas mistas com conexão deformável longitudinal e um plano de deslizamento, empregando o princípio dos trabalhos virtuais modificado. As equações cinemáticas são introduzidas na formulação em um processo similar aos multiplicadores de Lagrange, obtendo um vetor do campo de deformações como uma incógnita a ser interpolada. Essa formulação apresenta a vantagem, em relação algumas formulações mistas e baseadas em deslocamentos, de não sofrer travamento por deslizamento.

No caso de conexão deformável transversal (ou interação parcial transversal) ocorrerá um deslocamento relativo transversal entre os diferentes membros que compõem a viga mista, ou seja, uma separação vertical destes membros. Tal deslocamento relativo pode acontecer, por exemplo, devido a deformações axiais no conector de cisalhamento ao longo do seu eixo.

O primeiro trabalho verificado na literatura considerando a separação vertical na interface de contato em vigas mistas foi desenvolvido por Adekola (1968a), que apresentou um modelo analítico para esse tipo de problema considerando os casos particulares de vigas mistas estaticamente determinadas com distribuição dos momentos conhecidas a priori.

Os efeitos da conexão deformável longitudinal e transversal em vigas mistas de aço-concreto foram avaliados experimentalmente por Chapman e Balakrishnan (1964). Robinson e Naraine (1988) apresentaram uma solução analítica para o problema de viga mista simplesmente apoiada com uma carga concentrada usando o modelo de Adekola.

Um trabalho recente nessa linha foi desenvolvido por Ranzi *et al.* (2006), onde os autores implementaram elementos finitos com diferentes polinômios de interpolação capazes de simular tanto a conexão deformável longitudinal quanto transversal em vigas mistas. Neste Trabalho e em Ranzi *et al.* (2006) foi considerada uma função bi-linear para

a curva que relaciona a força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo transversal na interface de conexão. No caso de contato, quando há uma tentativa de penetração entre os materiais, o problema é tratado simplificadaamente considerando um valor de rigidez muito elevado (método da penalidade).

2.3 – VIGAS MISTAS COM MÚLTIPLAS CAMADAS

Neste trabalho, consideram-se vigas mistas com múltiplas camadas os sistemas estruturais formados por uma associação de vigas de materiais e seções transversais, distintos ou não, ligadas por conexões deformáveis que permitem um deslocamento relativo entre as diferentes camadas.

Neste trabalho, foi desenvolvida uma formulação analítica para o problema desconsiderando a possibilidade de separação vertical. Em relação à solução numérica, os elementos de interface associados aos elementos de vigas, simulam o problema de vigas mistas com múltiplas camadas permitindo interação parcial longitudinal e transversal.

A maioria das pesquisas desenvolvidas para análise numérica e experimental de vigas mistas com interação parcial se concentra em problemas com duas camadas, ou um plano de deslizamento. Nos itens anteriores deste capítulo pode-se encontrar uma descrição dos trabalhos mais relevantes sobre vigas mistas com duas camadas ligadas por uma conexão deformável. Apesar da importância do caso de duas camadas, alguns sistemas estruturais são compostos por múltiplas camadas. Exemplos em engenharia civil são: vigas de chapas de madeiras pregadas ou coladas; vigas mistas formadas por uma laje de concreto, um perfil metálico do tipo I e uma chapa de aço ligada à mesa inferior do perfil I; e vigas sanduíches formadas por uma seção de concreto prensada entre duas chapas de aço. A figura 2.3 ilustra os dois últimos casos citados.

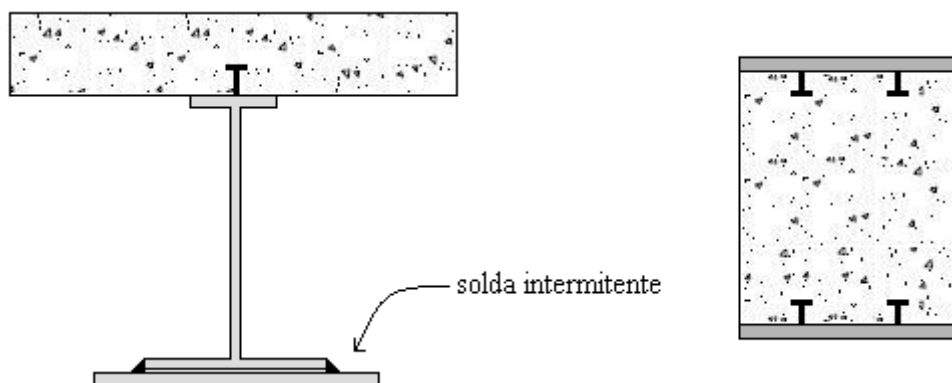


Figura 2.3 – Seções mistas com mais de um plano de deslizamento

Um dos primeiros trabalhos na modelagem de membros estruturais com mais de um plano de deslizamento foi desenvolvido por Goodman e Popov (1968). Os autores usaram uma extensão do modelo de Newmark (Newmark *et al.*, 1951) para simular vigas mistas com três membros conectados (dois planos de deslizamento) de seções transversais retangulares e iguais, aplicando esse modelo em problemas de vigas de madeira simplesmente apoiadas.

Chui e Barclay (1998) propuseram soluções analíticas para vigas simplesmente apoiadas com três camadas de diferentes seções transversais sujeita a dois diferentes tipos de carregamento, um carregamento uniformemente distribuído e uma carga concentrada no meio do vão. Schnabl *et al.* (2006) e Ranzi (2006) desenvolveram modelos analíticos genéricos para o caso de três membros conectados. Krawczyk *et al.* (2007) desenvolveram um modelo para vigas com múltiplas camadas considerando não-linearidade geométrica, deformação por cisalhamento e considerações de Von Karman para a definição das expressões das deformações.

Mais recentemente, Ranzi (2008) propôs um modelo analítico linear genérico para vigas com múltiplas camadas usando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. O autor obtém as formas forte e fraca do problema, chegando a um conjunto de equações diferenciais envolvendo deslocamentos longitudinais e transversais, suas respectivas derivadas, e condições de contorno. Forças de superfícies, peso próprio, forças nas extremidades dos membros e tensões iniciais foram consideradas na formulação do problema.

Assim como no caso de soluções analíticas para análise de vigas com múltiplas camadas, não são muitas as pesquisas publicadas em relação a soluções numéricas para esse tipo de problema. Heinisuo (1988) propôs uma formulação de elemento finito para três e cinco membros conectados com algumas limitações na forma e propriedades da seção transversal. A formulação foi chamada de exata porque as funções de forma foram definidas através das soluções das equações diferenciais. Krawczyk e Reborá (2007) implementaram um modelo de elementos finitos baseado em uma formulação co-rotacional para análise não linear geométrica de vigas com múltiplas camadas sobre as considerações de Krawczyk *et al.* (2007).

Baseado na forma fraca do seu modelo analítico proposto e na teoria de viga de Euler-Bernoulli, Ranzi (2008) desenvolveu uma formulação de elementos finitos para a teoria de Euler-bernoulli considerando diferentes esquemas de interpolação e um número qualquer de camadas para a seção. Duas famílias de elementos finitos com $2n + 4$ e $3n + 4$ graus de liberdade prescritos foram implementadas, onde n é o número de camadas

separadas por conexão deformável da viga mista. A presença de travamento quanto ao deslizamento nos elementos foi investigada pelo autor, que verificou que as funções de interpolação para os deslocamentos axiais devem ser no mínimo quadráticas (com interpolação cúbica para os deslocamentos transversais) para evitar este efeito de travamento, e que basta uma das conexões sofrer problema de travamento para que a curvatura seja significativamente afetada. Desta forma o autor conclui que os elementos com $3n + 4$ graus de liberdade representam bem o comportamento com conexão deformável longitudinal, enquanto que os elementos com $2n + 4$ graus de liberdade sofrem problema de travamento quando se tem pelo menos uma das conexões deformáveis com rigidez elevada.

2.4 – ANÁLISE DE PLACAS

Como mencionado anteriormente, um dos elementos estruturais com conexão deformável mais comum na engenharia civil é a viga mista formada por uma laje de concreto ligada por meios mecânicos a um perfil de aço. Este elemento é mais comumente analisado através de elementos unidimensionais de viga com sua conexão deformável representada por um elemento de interface, ou apenas um elemento unidimensional de viga que represente ambas as seções e permita deslocamentos relativos entre elas. Uma extensão lógica deste modelo e que procura representar melhor a realidade do problema é a representação da laje de concreto por um elemento de placa.

Uma vantagem dessa extensão é a possibilidade de representação de pisos de edifícios de andares múltiplos de uma forma única, sem ter que utilizar a aproximação da determinação de uma largura efetiva para cada viga mista. Outra vantagem é a representação da variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto da viga mista. Este efeito, denominado *shear lag* na literatura, é tão mais significativo quanto maior for a largura da laje, e não pode ser representado quando a análise é feita através de elementos unidimensionais de viga.

Desse ponto em diante, o problema de viga mista formada por uma placa ligada por meios mecânicos a um elemento de viga será referenciado como placa enrijecida com conexão deformável.

O efeito de membrana (não linearidade geométrica) é significativo em placas sujeitas a carregamento na direção de seu plano. Para carregamentos laterais (força perpendicular ao plano da placa) esse efeito pode ser considerável dependendo do nível do

carregamento. Huang *et al.* (2003b) verificaram através da comparação dos resultados experimentais e numéricos de duas placas considerando análise linear e não linear, que esse efeito de membrana se torna significativo para análise da resistência última de placas de concreto. Uma descrição das formulações do elemento finito de placa considerando análise não linear geométrica pode ser encontrada em Zienkiewicz e Taylor (1991), Crisfield (1991) e Bathe (1996).

Algumas formulações de elementos finitos têm sido desenvolvidas para a análise de placas ou cascas de concreto armado considerando a não linearidade do material. Geralmente estas formulações são baseadas em três modelos distintos: (i) o modelo de elementos finitos considerando o elemento de placa dividido em várias camadas; (ii) o modelo de rigidez efetiva e (iii) o modelo discreto.

No modelo de rigidez efetiva a fissuração do concreto e a degradação das propriedades mecânicas do material são avaliadas através da utilização do cálculo da rigidez de flexão ortotrópica média. Este conceito de rigidez efetiva é baseado na rigidez à flexão de vigas e estendido para aplicação em placas nos trabalhos de Scanlon e Murray (1982), Polak (1996) e Jofriet e McNeice (1997). Este método considera que após a fissuração o valor do módulo de Young do material não muda, porém o momento de inércia da seção varia com o grau do momento aplicado. Este momento de inércia efetivo (I_e) irá variar do seu valor máximo I_g (seção sem fissuras) até o seu valor mínimo I_{cr} , que é definido pela parte da seção do concreto comprimida e pelas armaduras de reforço. Portanto, o momento de inércia efetivo I_e está relacionado ao nível do carregamento aplicado. A principal desvantagem deste modelo é o fato de que a fissuração do concreto não pode ser considerada de forma progressiva ao longo da seção transversal da placa de concreto (Jiang e Mirza, 1997).

Na aproximação do modelo de elementos finitos discretos (Jiang e Mirza, 1997 e Phuvoravan e Sotelino, 2005) o concreto e as barras de aço de reforço são modelados separadamente por dois tipos diferentes de elementos. No modelo proposto por Jiang e Mirza (1997) a laje de concreto foi modelada por um elemento de placa com quatro nós que combina oito graus de liberdade de um elemento de tensões planas para modelagem da ação no plano, e doze graus de liberdade de um elemento de flexão de placa para modelagem da ação fora do plano, enquanto que as barras de reforço são modeladas por elementos do tipo viga-coluna. Devido ao grande número de graus de liberdade necessário no modelo discreto este pode se tornar bastante caro em termo de tempo de análise

computacional, o que é um fator importante na análise não linear desses sistemas estruturais, como verificado por Phuvoravan e Sotelino (2005).

O modelo de análise não linear baseado na divisão da placa de concreto em várias camadas tem sido freqüentemente usado na simulação de problemas estruturais envolvendo placas de concreto armado, principalmente na verificação da resistência última e na avaliação da fissuração sob ação de flexão e cortante (Loo e Guan, 1997). Nesse modelo, o elemento de placa é subdividido em várias camadas considerando propriedades mecânicas avaliadas de forma independente para cada material (concreto ou aço) de cada camada. As barras de reforço são transformadas em uma camada equivalente de aço com propriedades mecânicas consideradas apenas na direção das barras. Nesse tipo de análise geralmente é desprezado o efeito de cisalhamento ao longo da espessura de cada camada, considerando-a em um estado plano de tensões. É definido para cada camada um novo sistema de referência dado pelo espaço vetorial formado por uma base de vetores unitários nas direções das tensões principais, sendo a lei constitutiva do material definido neste novo sistema.

Usando o modelo de camadas descrito no parágrafo anterior e com base no trabalho de Bailey (1995), Huang *et al.* (1999) desenvolveram um elemento de casca não-linear físico subdividido em camadas para representação do concreto e armaduras de aço. Antes da fissuração ou esmagamento, o concreto é considerado isotrópico, homogêneo e elástico linear. Um modelo de fissuração distribuída é adotado, no qual a fissuração é identificada quando as tensões principais atingem uma superfície de falha. Após a fissuração, o concreto é tratado como um material ortotrópico com eixos principais normais e paralelos a direção da fissura. O concreto paralelo à fissura é considerado capaz de resistir à tração e compressão com base em uma relação tensão-deformação uniaxial. Após o esmagamento, assume-se que o concreto perde toda sua resistência e rigidez. Huang *et al.* (2003a) introduziram a não-linearidade geométrica no modelo, possibilitando uma melhor representação do comportamento de membrana. Uma formulação lagrangeana total foi adotada, assumindo pequenas deformações. O elemento de casca com nove nós implementado tem por base as hipóteses de Von Kármán (grandes deslocamentos e rotações moderadas).

Zhang e Bradford (2007) implementaram um modelo de camadas para análise não linear de placas/cascas considerando um modelo de fissuração semelhante ao apresentado por Huang *et al.* (1999). Os autores consideraram a teoria de Mindlin/Reissner (placas espessas) na implementação do elemento de placa e utilizaram uma função de viga de

Timoshenko para obter um elemento finito retangular com camadas livre de travamento por cisalhamento (*shear locking*). Essas funções de viga de Timoshenko foram propostas por Chen e Cheung (2000) e Soh *et al.* (2001) e consistem em utilizar a teoria de viga de Timoshenko para determinar as funções de distribuição das rotações e deformações por cisalhamento ao longo de cada lado do elemento de placa, enquanto que as rotações e deformações por cisalhamento no interior do elemento são determinadas por um método de interpolação proposto. Os autores verificaram a eficiência do método na análise de placas muito finas, não sendo verificado nenhum problema de travamento por cisalhamento, o que geralmente pode ocorrer em elementos tradicionais de placa baseados na teoria de Mindlin/Reissner, para placas muito finas e malhas pouco refinadas.

O modelo de dano para análise não linear de placas de concreto é baseado no método das camadas obtendo uma evolução da degradação da rigidez do material através de modelos de leis constitutivas para o material, que são obtidas através da relação tensão-deformação axial do material no espaço vetorial definido por uma base de vetores unitários na direção das tensões principais. Uma revisão da evolução deste modelo pode ser vista no trabalho de Pitangueira (1998). Caldas (2009) usa o modelo de dano para análise de placas de concreto sobre a ação de temperaturas elevadas.

Como mencionado anteriormente, uma vantagem da modelagem do problema de vigas mistas com conexão deformável como uma associação de elementos bidimensionais de placa mais elementos unidimensionais de viga e interface, é a possibilidade da avaliação da distribuição da tensão normal ao longo da largura da placa. Tal distribuição é utilizada na definição de métodos para determinação da largura efetiva de vigas mistas. Portanto, como uma aplicação da simulação do problema de viga mista através de um modelo de placa mais viga, pode-se avaliar a influência da rigidez da conexão deformável na determinação da largura efetiva em vigas mistas. No item seguinte é apresentada uma revisão dos métodos de determinação da largura efetiva e alguns trabalhos numéricos e experimentais encontrados na literatura sobre o assunto.

2.5 – LARGURA EFETIVA EM VIGAS MISTAS

Na análise estrutural de vigas mistas aço-concreto verifica-se que a deformação por cisalhamento na laje de concreto promove uma variação da tensão axial ao longo da largura da laje de concreto. Tal efeito é chamado na literatura de *shear lag*. A figura 2.4, adaptada de Ahn *et al.* (2004), mostra a variação da tensão normal ao longo da largura da

seção de concreto em uma viga mista. Em uma análise considerando a laje de concreto como um elemento de viga essa variação não ocorre, o que leva ao conceito da largura efetiva para tal simplificação, prescrita em vários códigos de projetos. Não há na literatura um método de determinação da largura efetiva que leve em conta todos os parâmetros que interferem em sua avaliação, o que vem motivando pesquisadores a desenvolver novos métodos, como pode ser visto nos trabalhos de Castro *et al.* (2007) e Nie *et al.* (2008).

Dois são os métodos mais difundidos na literatura para a determinação da largura efetiva. Um está relacionado diretamente com a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto e o outro está relacionado à rigidez da viga mista.

No método da distribuição de tensão normal ao longo da largura da laje de concreto, a largura efetiva (b_e) é determinada como sendo a largura da laje necessária para que uma tensão constante ao longo desta largura e igual a tensão de pico (σ_{\max}) produza uma distribuição equivalente a que acontece na seção real considerando a variação da tensão normal ao longo da largura, como é ilustrado na figura 2.5. Ou seja, a área do retângulo de largura b_e e altura σ_{\max} deve ser igual a área da região limitada pela curva $\sigma_x(y)$ e a largura b , sendo assim,

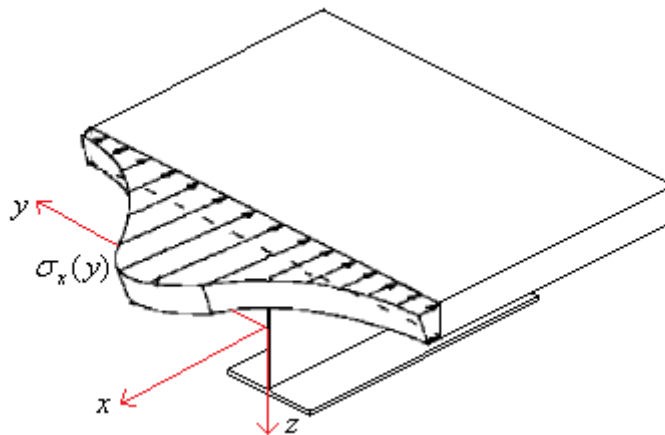


Figura 2.4 – Tensão normal ao longo da largura da laje de concreto

$$b_e = \frac{1}{\sigma_x(y=0)} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy. \quad (2.1)$$

Como pode ser observado da equação 2.1, esse método não leva em consideração a variação da tensão normal (σ_x) ao longo da espessura da laje, já que a tensão normal é avaliada em uma coordenada z qualquer constante (é comum escolher z sendo a

coordenada do topo da seção de concreto ou a coordenada média). Apesar disto, esse método é usado em quase todos os trabalhos sobre o assunto, devido a sua simplicidade. Fahmy e Robinson (1986) e Elkelish e Robinson (1986) sugerem em seus trabalhos uma versão adaptada da equação 2.1 para que o efeito da variação da tensão normal (σ_x) ao longo da espessura da laje seja levado em conta, como pode ser visto na equação 2.2.

$$b_e = \frac{\int_{-t/2}^{t/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy dz}{\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x(y=0) dz} \quad (2.2)$$

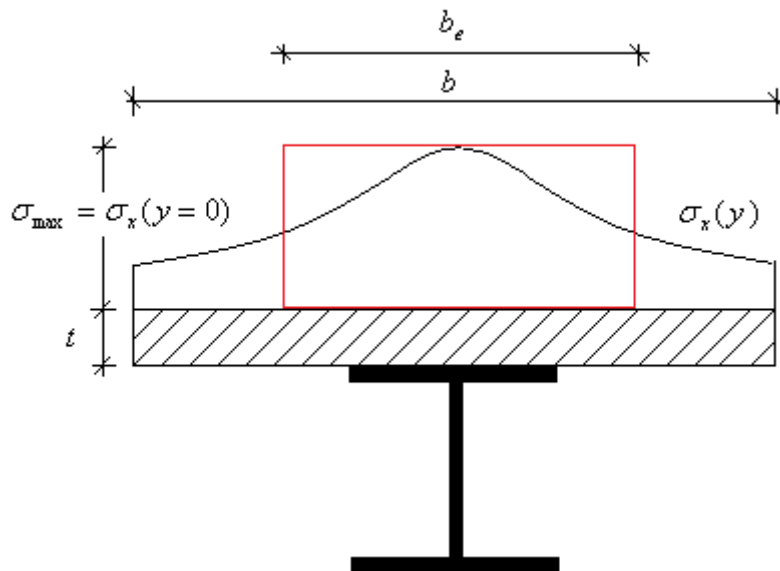


Figura 2.5 – Largura efetiva baseada na variação da tensão normal

Os procedimentos definidos em normas técnicas para a determinação da largura efetiva foram estabelecidos alguns anos atrás e estão na maioria dos casos ligados a pesquisas baseadas em um comportamento elástico dos materiais. Estudos mais recentes (Amadio e Fragiaco, 2002, Chiewanichakorn *et al.*, 2004, Castro *et al.*, 2007 e Nie *et al.*, 2008) mostram que a largura efetiva varia com diversos parâmetros, inclusive com o nível de carregamento, tornando-se próxima da largura real do elemento de placa quando a viga mista está perto do colapso. Ahn *et al.* (2004) fazem uma comparação dos procedimentos de diferentes códigos para avaliação da largura efetiva.

Os primeiros trabalhos sobre largura efetiva surgiram na década de 60. Adekola (1968b) calculou a largura efetiva de vigas mistas simplesmente apoiadas considerando a

variação de parâmetros geométricos. Em seu trabalho o autor usou as soluções analíticas definidas por Allen e Severn (1961). A largura efetiva definida como um quarto do vão da viga, usada em muitos códigos de projetos, foi verificada por Ansourian (1975). Através de análises numéricas usando o método dos elementos finitos, o autor verificou que as tensões na laje de concreto se aproximam dos valores reais quando a largura efetiva da laje de concreto é tomada como um quarto do vão da viga, já as tensões na viga de aço se aproximam dos valores reais quando é considerada uma largura efetiva para a laje de concreto igual a sua largura real.

Ansourian e Aust (1983) observaram que a largura efetiva depende fortemente das dimensões da laje de concreto e do tipo de carregamento. Eles sugerem que a largura efetiva da forma que é definida seja utilizada apenas para cálculo de tensões e deformações em situações de serviço. Outros autores, como Heins e Fan (1976), Elkelish e Robison (1986), Amadio *et al* (2004), também verificam através de análises numéricas e experimentais que a largura efetiva no estado limite último é maior que no regime elástico.

Amadio e Fragiacomio (2002) conduziram uma série de estudos paramétricos em vigas mistas bi-apoiadas e em balanço usando o programa ABAQUS. Ambas análises não linear e elástica, e diferentes níveis de deformabilidade da conexão foram avaliados. Os resultados para comportamento elástico mostram que a deformabilidade da conexão é um parâmetro muito importante na determinação da largura efetiva para análise de tensões.

FORMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA ANÁLISE DE VIGAS COM INTERAÇÃO PARCIAL

Neste capítulo são apresentadas as formulações dos elementos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, que associados aos respectivos elementos de interface, simulam o comportamento de vigas mistas com interação parcial. O capítulo foi dividido em uma introdução do problema, apresentação da formulação dos elementos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, descrição do método utilizado para determinação dos esforços atuantes, formulação dos elementos de interface para análise de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, implementação computacional, exemplos numéricos e conclusão.

3.1 – INTRODUÇÃO

Elementos estruturais envolvendo combinações de membros com conexão deformável (interação parcial), como o caso de vigas mistas de aço-concreto, têm conquistado espaço na construção civil nos últimos anos devido ao ganho de inércia da seção transversal em relação aos membros trabalhando isoladamente. No caso particular de vigas mistas aço-concreto, outra motivação da utilização deste elemento estrutural é o melhor aproveitamento das características dos diferentes materiais garantido por um nível de rigidez na conexão entre os membros e uma adequada composição da seção que permite o concreto trabalhar principalmente à compressão e o aço à tração. Essa ação conjunta dos diferentes membros é garantida através de uma ligação mecânica entre eles. Como todo

sistema mecânico, essa ligação possui certa rigidez, o que implica em deslocamentos relativos na interface de contato entre os diferentes membros, que serão maiores ou menores de acordo com tal rigidez. Esses deslocamentos relativos irão aumentar os deslocamentos totais influenciando na distribuição de esforços nas regiões de momentos negativos e positivos.

A utilização de elementos unidimensionais de viga na análise numérica de vigas formadas por dois membros com conexão deformável é muito difundida na comunidade científica. A maior parte das pesquisas está voltada à definição de um elemento de viga baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli (EB) capaz de simular tanto o comportamento das seções acima e abaixo da interface de contato entre os diferentes membros quanto à conexão deformável nesta interface. Uma revisão dos trabalhos mais significativos nesta área foi apresentada no capítulo 2, item 2.2 deste trabalho. O trabalho de dissertação de mestrado do autor (Silva, 2006) seguiu essa tendência e implementou dois elementos unidimensionais de vigas de EB capazes de simular o problema de viga mista com interação parcial. Os elementos implementados por Silva (2006) usam funções de forma dadas por polinômios cúbicos para interpolação de rotação e deslocamento transversal, e polinômios lineares e quadráticos para interpolação dos deslocamentos axiais.

Os elementos de interface descritos neste capítulo são uma adaptação do elemento de interface desenvolvido primeiramente por Goodman *et al.* (1968) em aplicações de problemas de duas ou três dimensões, simulando problemas de contato e camadas de materiais de espessura fina. Nessa mesma linha outros autores implementaram extensões do elemento de Goodman para problemas tridimensionais, como por exemplo, Schellekens e De Borst (1993) e Coutinho *et al.* (2003).

Essa adaptação do elemento de interface para simular o comportamento da conexão deformável em problemas unidimensionais de vigas mistas foi utilizada por Silva (2006). Neste trabalho foi implementado um elemento de interface capaz de simular a conexão deformável da viga mista e fazer a ligação entre dois elementos de viga de EB que simulam o comportamento dos membros acima e abaixo da interface de contato. Foi utilizado para os elementos de interface e os elementos de vigas associados a este o mesmo esquema de interpolação dos elementos citados no parágrafo anterior. A formulação deste problema é rerepresentada neste capítulo junto com a nova formulação para os elementos baseados na teoria de viga de Timoshenko.

A utilização do elemento de interface na simulação de problemas de vigas formadas por dois membros com conexão deformável permite avaliar tanto a influência do

deslocamento relativo horizontal (deslizamento) na análise dos esforços atuantes na viga, quanto à influência do deslocamento relativo vertical (separação vertical) na análise destes esforços, ou seja, interação parcial longitudinal e transversal. Esse deslocamento relativo vertical produz uma força vertical de tração por unidade de comprimento ao longo da interface de contato entre os diferentes membros quando os dois membros sofrem ação de um carregamento externo que tenta separá-los e, no caso contrário, uma força de compressão por unidade de comprimento é verificada ao longo da interface de contato entre os membros.

Uma revisão de alguns trabalhos considerando tanto a interação parcial longitudinal quanto transversal pode ser obtida no item 2.2 do capítulo 2 deste trabalho. Dentre estes trabalhos, os resultados numéricos obtidos por Ranzi *et al.* (2006) serão usados neste capítulo para validação dos elementos de interface implementados. Neste capítulo e em Ranzi *et al.* (2006), a relação força vertical por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical na interface de contato é definida como uma função bi-linear. O problema de contato, quando há uma tentativa de penetração entre os materiais, é abordado de forma simplificada considerando um valor de rigidez muito elevado (penalidade) para a parte negativa dessa função bi-linear, ou seja, nos pontos onde o deslocamento relativo transversal é negativo uma rigidez muito grande impede o avanço desta penetração entre os materiais.

Na análise de viga de Timoshenko considera-se que, após deformações, as seções inicialmente planas e ortogonais a configuração indeformada permanecem planas, porém não mais ortogonais à configuração deformada. O fato das seções poderem sofrer uma rotação em relação a um eixo normal a linha neutra do elemento de viga, o que não acontece na teoria de viga EB, faz com que os resultados numéricos obtidos por esta análise representem melhor a realidade de vigas com baixa relação vão versus altura, ou com esforços de cortantes elevados, como, por exemplo, em vigas de pontes rolantes e vigas de equilíbrio de fundações. No entanto, a consideração das seções planas não representa a realidade de uma maneira geral, causando erros na avaliação. Para seções retangulares este erro é da ordem de 1/6 na avaliação do esforço de cisalhamento atuante na seção.

A análise de viga pela teoria de Timoshenko fornece, em relação à teoria de viga de EB, resultados mais próximos da realidade. Logo, em uma análise analítica, a teoria de viga de Timoshenko deve ser preferida em relação à teoria de viga de EB. No entanto, em análises numéricas a representação de vigas com deformação por cisalhamento muito

pequena usando a teoria de viga de Timoshenko pode levar a erros significativos. Isso acontece em alguns elementos de viga devido à incompatibilidade dos polinômios interpoladores dos deslocamentos, esse processo é descrito na literatura como travamento por cisalhamento (*shear locking*).

Outro tipo de travamento em elementos unidimensionais que simulam comportamento de vigas com conexão deformável já bem definido na literatura para análise de viga de EB (Salari e Spacone, 2001, Dall'Asta e Zona, 2004a, Sousa Jr. e Silva, 2007, Ranzi, 2008, Silva e Sousa Jr, 2008) é o travamento por deslizamento (*slip locking*). Como no caso do travamento por cisalhamento este travamento também ocorre por incompatibilidade dos polinômios interpoladores dos deslocamentos e acontece tanto na teoria de viga de EB quanto de Timoshenko, como pode ser observado neste trabalho e em Ranzi e Zona (2007).

Neste capítulo é apresentada a formulação de três novos elementos de interface que, associados aos seus respectivos elementos de viga de Timoshenko, são capazes de simular o problema de viga formada por dois membros com conexão deformável considerando o efeito de deformação por cisalhamento. Diferentes funções de interpolação são utilizadas e os elementos são comparados entre si e com exemplos encontrados na literatura, verificando o comportamento de cada um em situações de travamento em relação ao deslizamento e à deformação por cisalhamento. Também será avaliada neste capítulo a influência no comportamento estrutural de vigas mistas devido à consideração da separação vertical na interface de contato entre os diferentes membros da seção transversal, verificando a capacidade dos elementos de interface implementados em simular problemas desse tipo.

3.2 – ANÁLISE DE VIGA DE EB FORMADA POR DOIS MEMBROS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL

Nesta seção é apresentada uma formulação analítica e numérica para análise de vigas formadas por dois membros com conexão deformável considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli (EB). A formulação analítica é obtida aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais a um elemento de viga analisado. Considerando um problema de viga estaticamente determinado chega-se a equações diferenciais para os deslocamentos axiais, transversais e deslizamento. Assim como na equação diferencial de Newmark (Newmark *et al.*, 1951), esse método apresenta limitações como, por exemplo: a distribuição do

momento atuante na viga deve ser conhecida; as propriedades geométricas da seção devem ser constantes em todo o elemento analisado; e as relações tensão deformação dos materiais devem ser lineares.

A formulação numérica referente à análise de viga de EB descrita neste item pode ser encontrada de forma mais detalhada em Silva (2006).

3.2.1 – Formulação analítica considerando a teoria de viga de EB

A interação parcial na interface de contato entre os diferentes membros provoca um deslocamento relativo horizontal (deslizamento) nesta interface. A figura 3.1 mostra esse deslizamento para um segmento de viga de EB. O valor do deslizamento é dado pela equação 3.1 a seguir: em que s_l é o deslizamento, u_2^0 e u_1^0 são, respectivamente, os deslocamentos axiais na linha dos eixos de referência dos membros acima e abaixo da interface de contato, h é a distância entre estes dois eixos de referência e w' é a rotação da seção composta.

$$s_l(x) = u_2^0 - u_1^0 + hw' \quad (3.1)$$

Como observa-se da figura 3.1, no desenvolvimento dessa formulação analítica as rotações e deslocamentos verticais são iguais para os membros acima e abaixo da interface de contato, ou seja, é considerada interação total na direção transversal.

Para a teoria de viga de EB as equações dos deslocamentos axiais e verticais para os diferentes membros ($\alpha = 1,2$) são dadas por

$$u_\alpha(x, y) = u_\alpha^0(x) - (z - z_\alpha)w'(x) \quad \text{e} \quad (3.2)$$

$$w(x, y) = w(x). \quad (3.3)$$

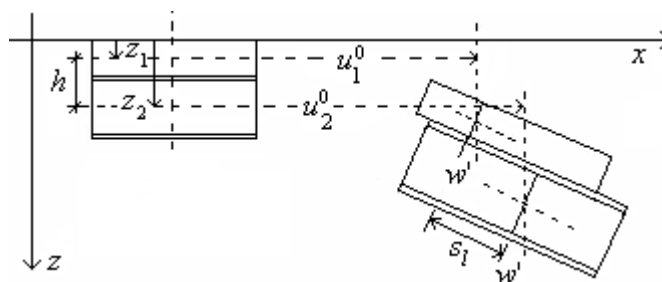


Figura 3.1 – Deslizamento na interface de contato entre os diferentes membros

Na equação 3.2, z_α representa as posições dos eixos de referência para cada membro da viga composta, como mostra a figura 3.1. Derivando a equação 3.2 em relação a x obtém-se a expressão para a deformação axial, isto é:

$$\varepsilon_\alpha(x, y) = u_\alpha(x, y)_{,x} = u_\alpha^0(x) - (z - z_\alpha)w''(x). \quad (3.4)$$

Admitindo comportamento elástico, a tensão normal na seção transversal de coordenada x está relacionada à deformação axial da forma

$$\sigma_\alpha = E_\alpha \varepsilon_\alpha, \quad (3.5)$$

onde E é o módulo de deformação axial do material. Aplicando um campo de deformação virtual compatível ao elemento de viga analisado tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\sum_{\alpha=1}^2 \iiint_V \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha dV + \int_0^L S_b \delta s_l dx = \int_0^L q \delta w dx. \quad (3.6)$$

Na definição da equação anterior é admitido carregamento externo apenas na direção transversal ao eixo da viga e S_b é a força de cisalhamento por unidade de comprimento na interface de contato entre os diferentes membros. Substituindo os variacionais da deformação e deslizamento na equação 3.6, tem-se

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_0^L \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha (\delta u_\alpha^0 - (z - z_\alpha) \delta w'') dA dx + \int_0^L S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta w') dx = \int_0^L q \delta w dx.$$

Como os esforços de momento e normal na seção transversal podem ser obtidos pelas

expressões, $M_\alpha = \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha (z - z_\alpha) dA$ e $N_\alpha = \iint_{A_\alpha} \sigma_\alpha dA$, tem-se

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_0^L (N_\alpha \delta u_\alpha^0 - M_\alpha \delta w'') dx + \int_0^L S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta w') dx = \int_0^L q \delta w dx. \quad (3.7)$$

Integrando por partes algumas das integrais da expressão 3.7, chega-se a expressão

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[- \int_0^L (N_{\alpha}' \delta u_{\alpha}^0 dx + (N_{\alpha} \delta u_{\alpha}^0)_0^L - \int_0^L M_{\alpha}'' \delta w dx + (M_{\alpha} \delta w)_0^L - (M_{\alpha}' \delta w)_0^L \right] + \\ + \int_0^L S_b \delta u_2^0 dx - \int_0^L S_b \delta u_1^0 dx - \int_0^L h S_b' \delta w dx + (h S_b \delta w)_0^L = \int_0^L q \delta w dx .$$

Para o caso particular de viga composta bi apoiada, as suas extremidades são livres de esforço de momento e normal, e o deslocamento transversal é nulo, portanto,

$$- \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_0^L N_{\alpha}' \delta u_{\alpha}^0 dx + \int_0^L M_{\alpha}'' \delta w dx \right] + \int_0^L S_b \delta u_2^0 dx - \int_0^L S_b \delta u_1^0 dx - \int_0^L h S_b' \delta w dx = \int_0^L q \delta w dx . \quad (3.8)$$

A equação 3.8 pode ser reescrita na forma

$$\int_0^L \left[-N_1' - S_b \quad -N_2' + S_b \quad - \sum_{\alpha=1}^2 M_{\alpha}'' - h S_b' - q \right] \delta \mathbf{u} dx = 0 . \quad (3.9)$$

Como visto nas equações 3.2 e 3.3, o deslocamento de um ponto qualquer no volume que define a viga composta pode ser obtido a partir do vetor $\mathbf{u} = [u_1^0 \quad u_2^0 \quad w]^T$. A equação 3.9 é satisfeita para qualquer campo de deslocamento virtual ($\delta \mathbf{u}$) compatível com a viga analisada se

$$\sum_{\alpha=1}^2 M_{\alpha}'' + h S_b' + q = 0 , \quad (3.10)$$

$$N_1' + S_b = 0 \text{ e} \quad (3.11)$$

$$-N_2' + S_b = 0 . \quad (3.12)$$

Assumindo uma relação linear entre a força de cisalhamento por unidade de comprimento (fluxo cisalhante, S_b) e o deslizamento na interface de contato entre os diferentes membros, tem-se

$$S_b = E_{s_b} s_l. \quad (3.13)$$

Na equação anterior, E_{s_b} é uma constante que caracteriza a rigidez da conexão longitudinal na interface de contato entre os diferentes membros. Substituindo a equação 3.5 na equação do momento atuante na seção transversal, e sabendo que $\iint_{A_\alpha} (z - z_\alpha) dA = 0$

quando o eixo de referência passa pelo centróide da seção, então

$$M_\alpha = -E_\alpha w'' \iint_{A_\alpha} (z - z_\alpha)^2 dA = -E_\alpha I_\alpha w''. \quad (3.14)$$

Definido $EI_0 = E_1 I_1 + E_2 I_2$, e substituindo as expressões 3.1, 3.13 e 3.14 em 3.10, chega-se a primeira equação de equilíbrio para o problema

$$EI_0 \frac{d^4 w}{dx^4} - E_{s_b} h \left(\frac{du_2^0}{dx} - \frac{du_1^0}{dx} + h \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q. \quad (3.15)$$

Substituindo a equação 3.5 na equação do esforço normal atuante na seção transversal e novamente tendo $\iint_{A_\alpha} (z - z_\alpha) dA = 0$ (eixo de referência passando pelo centróide da seção),

tem-se

$$N_\alpha = E_\alpha u_\alpha^{0'} \iint_{A_\alpha} dA = E_\alpha A_\alpha u_\alpha^{0'}. \quad (3.16)$$

Substituindo as expressões 3.13 e 3.16 em 3.11 e 3.12 e definindo $EA_1 = E_1 A_1$ e $EA_2 = E_2 A_2$, chega-se às demais equações de equilíbrio para o problema

$$EA_1 \frac{d^2 u_1^0}{dx^2} + K \left(u_2^0 - u_1^0 + h \frac{dw}{dx} \right) = 0 \text{ e} \quad (3.17)$$

$$EA_2 \frac{d^2 u_2^0}{dx^2} - K \left(u_2^0 - u_1^0 + h \frac{dw}{dx} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Integrando as equações 3.15, 3.17 e 3.18 e usando as condições de contorno do problema analisado definem-se as equações para o deslocamento transversal, os deslocamentos axiais e o deslizamento.

3.2.2 – Formulação numérica para um elemento de viga de EB

A figura 3.2 ilustra uma seção plana em um elemento de viga de EB antes e após a deformação. Desta figura determinam-se as expressões a seguir para os deslocamentos axiais e transversais, respectivamente, de um elemento unidimensional de viga com eixo de referência sobre a linha tracejada da figura 3.2.

$$u(x, y) = u^0(x) - yw'(x) \quad (3.19)$$

$$w(x, y) = w^0(x) \quad (3.20)$$

Nas equações anterior, o sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado e será omitido nas equações seguintes para facilitar a notação. Derivando a equação 3.19 em relação a x , obtém-se a expressão para a deformação axial, ou seja:

$$\varepsilon_x = u(x, y)_{,x} = u'(x) - zw''(x). \quad (3.21)$$

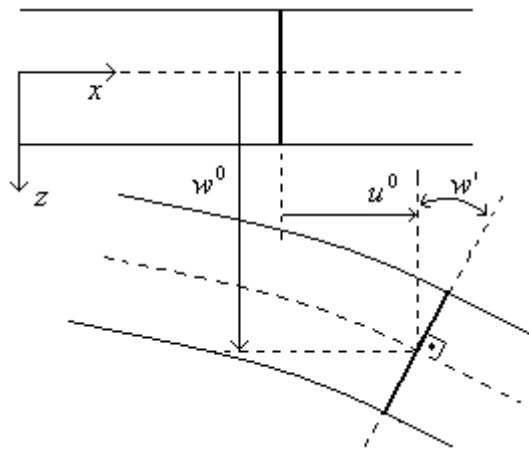


Figura 3.2 - Deformada de um segmento de viga de EB

A tensão normal na seção transversal de coordenada x está relacionada à deformação axial da forma

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (3.22)$$

em que E é o módulo de deformação axial do material. Para uma análise não linear física é utilizado um método numérico que toma aproximações lineares sendo, neste caso, E o módulo de deformação axial tangente obtido da curva tensão-deformação do material.

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.23)$$

onde σ_{ij} são as componentes de tensões de Kirchhoff, ε_{ij} são as componentes de deformação de Green-Lagrange, δ é o operador variacional e V é o volume do sólido indeformado. Para o caso de problemas de viga EB, as tensões a serem consideradas se reduzem apenas a tensão axial, desprezando-se as demais tensões, logo:

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV. \quad (3.24)$$

A variação da deformação axial (equação 3.21) é dada pela expressão

$$\delta \varepsilon_x = \delta u' - z \delta w''. \quad (3.25)$$

Substituindo a expressão 3.25 em 3.24, e observando que os deslocamentos u e w dessas expressões variam apenas ao longo do eixo do elemento, tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L \left[\int_A \sigma_x dA \delta u' - \int_A \sigma_x z dA \delta w'' \right] dx. \quad (3.26)$$

Definindo as variáveis $N = \int_A \sigma_x dA$ e $M = \int_A \sigma_x z dA$, para o esforço axial e momento fletor, respectivamente, atuantes na seção transversal do elemento de viga, a expressão 3.26 pode ser escrita na forma mais concisa dada por

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [N \delta u' - M \delta w''] dx. \quad (3.27)$$

Na aproximação de elementos finitos baseado em uma formulação em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Essas funções são representadas nas expressões 3.28 e 3.29 pelos vetores coluna Φ_u e Φ_w , que tem como elementos polinômios

interpoladores com grau que depende do número de pontos interpolados, ou seja, o número de elementos do respectivo vetor coluna.

$$u = [\Phi_u^T \quad \mathbf{0}_w^T] \mathbf{q} \quad (3.28)$$

$$v = [\mathbf{0}_u^T \quad \Phi_w^T] \mathbf{q} \quad (3.29)$$

Nas expressões acima, $\mathbf{q} = [q_1^u \dots q_{nu}^u \quad q_1^w \dots q_{nw}^w]^T$ em que nu e nv representam o número de graus de liberdade do elemento nas direções dos deslocamentos axiais e transversais. $\mathbf{0}_u$ e $\mathbf{0}_w$ são vetores coluna nulos com número de elementos dados por nu e nv , respectivamente. Sendo os deslocamentos u e w funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais são dados por

$$\delta u = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{q}} \right) e \quad (3.30)$$

$$\delta w = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (3.31)$$

Substituindo as expressões 3.30 e 3.31 em 3.27 chega-se a expressão abaixo para o trabalho virtual de um elemento de viga de EB.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L \left(N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} \right) dx \quad (3.32)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, onde \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. O elemento pode estar submetido a diferentes tipos de carregamento, estes por sua vez são distribuídos para os nós do elemento por meio de integração ao longo do elemento (Bathe, 1996) Da condição de $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$, tem-se

$$\delta \mathbf{q}^T \int_L \left(N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} \right) dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (3.33)$$

A expressão anterior deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$, sendo \mathbf{f}_{int} o vetor de forças internas dado pela expressão:

$$\mathbf{f}_{int} = \int_L \left(N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} \right) dx. \quad (3.34)$$

Substituindo na expressão 3.34 as derivadas das equações dos deslocamentos em relação aos deslocamentos nodais, tem-se:

$$\mathbf{f}_{int} = \int_L \left\{ \begin{array}{l} N \Phi_u' \\ -M \Phi_w'' \end{array} \right\} dx. \quad (3.35)$$

Na expressão 3.35 do vetor de forças internas, as derivadas das funções de forma devem ser tomadas em relação a variável x global. Como estas funções são em geral definidas em um sistema de coordenadas local deve-se usar a regra da cadeia para as derivadas. Admitindo que o sistema local seja definido de acordo com a figura 3.3, tem-se

$$x(\xi) = \frac{L}{2} \xi + \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3.36)$$

Portanto, as derivadas em relação à variável global x podem ser transformadas em derivadas em relação à variável local ξ da forma

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \frac{df}{d\xi}. \quad (3.37)$$

O mesmo deve ser feito para a integral, ou seja,

$$\int_L f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) \frac{L}{2} d\xi. \quad (3.38)$$

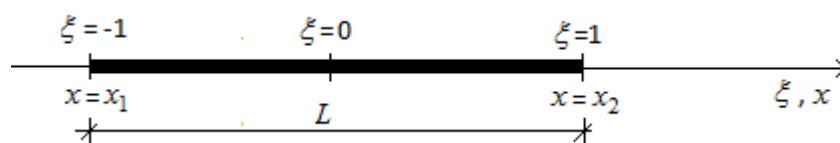


Figura 3.3 – Sistema de referência global e local no elemento de barra

A integral da expressão 3.38 pode ser resolvida de forma analítica ou através de métodos numéricos. Dentre os diferentes métodos numéricos pode-se destacar o método de integração numérica de Gauss. Uma vez que as funções de forma são definidas por polinômios, a escolha de um número apropriado de pontos de Gauss de integração fornece o resultado exato da integral. No entanto, pode ser de interesse em casos particulares, como problemas envolvendo travamento por cisalhamento e deslizamento, adotar um número reduzido de pontos de integração para obter um valor próximo e não exato da expressão.

Se a relação tensão-deformação do material usada na determinação dos esforços atuantes na seção (ver item 3.4) não for linear então o problema $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$ é não linear e se faz necessário a utilização de um método numérico para resolver o problema. Um dos métodos numéricos mais utilizados na solução de problemas de análise estrutural não linear é o método de Newton-Rapshon. Este método, na sua forma padrão, consiste em aproximar a função não linear $\Psi(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$ em cada passo do processo iterativo por uma função linear usando a matriz de rigidez tangente dada por:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{q}) = \frac{\partial(\mathbf{f}_{int}(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.39)$$

Na expressão anterior considera-se que o vetor de forças externas mantém-se constante com a mudança da configuração deformada do elemento. A matriz de rigidez tangente utilizada no processo de solução do problema não linear é obtida derivando o vetor de forças internas da expressão 3.35 em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{K}_T = \int_L \begin{bmatrix} \Phi_u \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_w \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dx. \quad (3.40)$$

Na expressão 3.40, a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \left(\int_A \sigma_x dA \right)}{\partial \mathbf{q}} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA, \quad (3.41)$$

em que $\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}$ é dada pela inclinação da tangente a curva tensão-deformação e será denotada

por E_T . Já a derivada da deformação axial em relação aos deslocamentos nodais é

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - z \frac{\partial w''}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_u' \\ -z \Phi_w'' \end{Bmatrix}. \quad (3.42)$$

Substituindo a expressão 3.42 em 3.41 e lembrando que os vetores coluna que representam as funções de forma variam apenas ao longo do eixo longitudinal do elemento, tem-se

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_u' \int_A E_T dA \\ -\Phi_w'' \int_A E_T z dA \end{Bmatrix}. \quad (3.43)$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se determinar a derivada do momento atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_u' \int_A E_T y dA \\ -\Phi_w'' \int_A E_T z^2 dA \end{Bmatrix}. \quad (3.44)$$

As expressões dos esforços atuantes na seção transversal N e M , bem como, das rigidezes, $\int_A E_T dA$, $\int_A E_T z dA$ e $\int_A E_T z^2 dA$, são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um polígono fechado qualquer. Esse tipo de integração além de fornecer uma solução exata para o problema, tem uma maior facilidade para representar seções compostas por diferentes materiais e vazios no interior da seção, quando comparados com métodos aproximados de integração como o método das faixas (fibras), que consiste em dividir a área de integração em um número finito de faixas (fibras). O item 3.4 deste capítulo descreve de forma simplificada o método utilizado neste trabalho para o cálculo destes esforços e rigidezes. Uma descrição detalhada deste método pode ser encontrada em Caldas (2004) e Silva (2006).

3.2.3 – Formulação numérica para um elemento de interface para viga de EB

Na análise de viga de EB formada por dois membros com conexão deformável, o elemento de interface simula a conexão deformável e faz a ligação entre os elementos de viga de EB que simulam os membros acima e abaixo da interface de contato. A formulação deste elemento de interface pode ser obtida da formulação do elemento de interface associado a dois elementos de viga de Timoshenko apresentada no item 3.3.3 deste capítulo, substituindo nas expressões onde aparecem as rotações das seções acima e abaixo da interface (θ_1 e θ_2) pelas derivadas das respectivas deformadas transversais (w_1' e w_2').

3.3 – ANÁLISE DE VIGA DE TIMOSHENKO FORMADA POR DOIS MEMBROS COM CONEXÃO DEFORMÁVEL

Neste item é apresentada uma formulação analítica e numérica para análise de vigas formadas por dois membros com conexão deformável considerando a teoria de viga de Timoshenko. A formulação analítica é obtida aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais a um elemento de viga analisado. Considerando um problema de viga estaticamente determinado chega-se a equações diferenciais para os deslocamentos axiais, transversais, rotações e deslizamento. Este método apresenta as mesmas limitações citadas para o método analítico para análise de viga de EB descrito no item 3.2.1 deste capítulo.

3.3.1 – Formulação analítica considerando a teoria de viga de Timoshenko

A interação parcial na interface de contato entre os diferentes membros provoca um deslocamento relativo horizontal (deslizamento) nesta interface. A figura 3.4 mostra esse deslizamento para um segmento de viga de Timoshenko. O valor do deslizamento é dado pela equação 3.45, em que s_l é o deslizamento, u_2^0 , u_1^0 , z_1 , z_2 , c , h , θ_1 e θ_2 são como mostrados na figura 3.4.

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + (z_2 - c)\theta_2(x) - (z_1 - c)\theta_1(x) \quad (3.45)$$

No desenvolvimento desta formulação analítica as rotações e deslocamentos verticais serão considerados iguais para os membros acima e abaixo da interface de

contato, ou seja, é considerada interação total na direção transversal. Neste caso, a curvatura será a mesma para os elementos acima e abaixo da interface de deslizamento implicando em rotação da seção plana iguais para os dois elementos, portanto,

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) + h\theta(x). \quad (3.46)$$

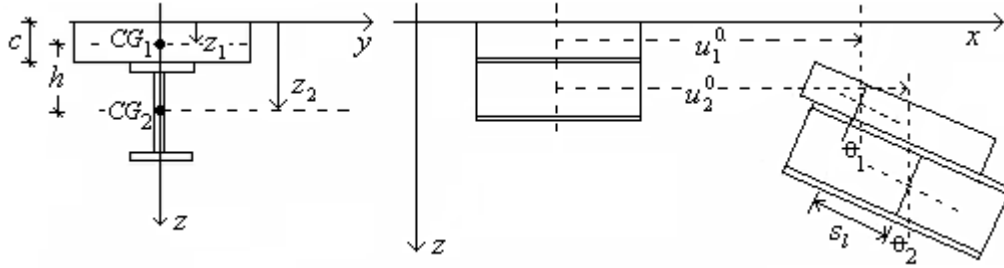


Figura 3.4 – Deslizamento na teoria de viga de Timoshenko

Para a teoria de viga de Timoshenko as equações dos deslocamentos axiais e verticais para os diferentes membros ($\alpha = 1,2$) são dadas por

$$u_\alpha(x, y) = u_\alpha^0(x) - (z - z_\alpha)\theta(x) \text{ e} \quad (3.47)$$

$$w(x, y) = w(x). \quad (3.48)$$

Na equação 3.47, z_α representa as posições dos eixos de referência para cada membro da viga composta, como mostra a figura 3.4. As equações das deformações axiais e transversais para teoria de viga de Timoshenko são, respectivamente,

$$\varepsilon_\alpha(x, y) = u_\alpha^0'(x) - (z - z_\alpha)\theta'(x) \text{ e} \quad (3.49)$$

$$\gamma(x) = w'(x) - \theta(x). \quad (3.50)$$

Admitindo comportamento elástico, a tensão normal e de cisalhamento na seção transversal de coordenada x são dadas por:

$$\sigma_\alpha = E_\alpha \varepsilon_\alpha \text{ e} \quad (3.51)$$

$$\tau_\alpha = G_\alpha \gamma, \quad (3.52)$$

sendo E e G os módulos de deformação axial e transversal do material, respectivamente. Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de viga analisado tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\sum_{\alpha=1}^2 \iiint_V (\sigma_{\alpha} \delta \varepsilon_{\alpha} + \tau_{\alpha} \delta \gamma) dV + \int_0^L S_b \delta s_l dx = \int_0^L q \delta w dx. \quad (3.53)$$

Na definição da equação 3.53 é admitido carregamento externo apenas na direção transversal ao eixo da viga e F é a força de cisalhamento na interface de contato entre os diferentes membros. Substituindo os variacionais das deformações e deslizamento na equação 3.53, tem-se

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_0^L \iint_{A_{\alpha}} [\sigma_{\alpha} (\delta u_{\alpha}^0 - (z - z_{\alpha}) \delta \theta') + \tau_{\alpha} (\delta w' - \delta \theta)] dA dx + \int_0^L S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta \theta) dx = \int_0^L q \delta w dx.$$

Como os esforços de momento, normal e cisalhamento na seção transversal podem ser obtidos pelas expressões, $M_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} (z - z_{\alpha}) dA$, $N_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \sigma_{\alpha} dA$ e $Q_{\alpha} = \iint_{A_{\alpha}} \tau_{\alpha} dA$, tem-se

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_0^L (N_{\alpha} \delta u_{\alpha}^0 - M_{\alpha} \delta \theta' + Q_{\alpha} (\delta w' - \delta \theta)) dx + \int_0^L S_b (\delta u_2^0 - \delta u_1^0 + h \delta \theta) dx = \int_0^L q \delta w dx. \quad (3.54)$$

Integrando por partes algumas das integrais da expressão 3.54, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \left[- \int_0^L (N_{\alpha}' \delta u_{\alpha}^0 dx + (N_{\alpha} \delta u_{\alpha}^0)_0^L) - \int_0^L M_{\alpha}' \delta \theta dx + (M_{\alpha} \delta \theta)_0^L - \int_0^L (Q_{\alpha}' \delta w dx + (Q_{\alpha} \delta w)_0^L) - \int_0^L Q_{\alpha} \delta \theta dx \right] + \\ + \int_0^L S_b \delta u_2^0 dx - \int_0^L S_b \delta u_1^0 dx + \int_0^L h S_b \delta \theta dx = \int_0^L q \delta w dx. \end{aligned}$$

Para o caso particular de viga composta bi apoiada, as suas extremidades são livres de esforço de momento e normal e o deslocamento transversal é nulo, portanto,

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha=1}^2 \left[\int_0^L N_{\alpha}' \delta u_{\alpha}^0 dx + \int_0^L M_{\alpha}' \delta \theta dx - \int_0^L Q_{\alpha}' \delta w dx - \int_0^L Q_{\alpha} \delta \theta dx \right] + \int_0^L S_b \delta u_2^0 dx - \\
& - \int_0^L S_b \delta u_1^0 dx + \int_0^L h S_b \delta \theta dx = \int_0^L q \delta w dx \quad (3.55)
\end{aligned}$$

A equação 3.55 pode ser reescrita na forma

$$\int_0^L \left[-N_1' - S_b \quad -N_2' + S_b \quad - \sum_{\alpha=1}^2 (M_{\alpha}' + Q_{\alpha}) + h S_b \quad - \sum_{\alpha=1}^2 Q_{\alpha}' - q \right] \delta \mathbf{u} dx = 0. \quad (3.56)$$

Como visto nas equações 3.47 e 3.48, o deslocamento de um ponto qualquer no volume que define a viga composta pode ser obtido a partir do vetor $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \theta \quad w]^T$. A equação 3.56 é satisfeita para qualquer campo de deslocamento virtual ($\delta \mathbf{u}$) compatível com a viga analisada se:

$$\sum_{\alpha=1}^2 (M_{\alpha}' + Q_{\alpha}) - h S_b = 0, \quad (3.57)$$

$$N_1' + S_b = 0, \quad (3.58)$$

$$-N_2' + S_b = 0 \text{ e} \quad (3.59)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 Q_{\alpha}' + q = 0. \quad (3.60)$$

Assumindo uma relação linear entre a força de cisalhamento por unidade de comprimento (fluxo cisalhante, S_b) e o deslizamento na interface de contato entre os diferentes membros, tem-se

$$S_b = E_{S_b} s_l. \quad (3.61)$$

Na equação 3.61, E_{S_b} é uma constante que caracteriza a rigidez da conexão longitudinal na interface de contato entre os diferentes membros. Substituindo a equação 3.51 na

equação do momento atuante na seção transversal e sabendo que $\iint_{A_\alpha} (z - z_\alpha) dA = 0$ quando o eixo de referência passa pelo centróide da seção, tem-se

$$M_\alpha = -E_\alpha \theta' \iint_{A_\alpha} (z - z_\alpha)^2 dA = -E_\alpha I_\alpha \theta'. \quad (3.62)$$

Substituindo a equação 3.52 na equação do cortante atuante na seção transversal, chega-se:

$$Q_\alpha = (w' - \theta) \iint_{A_\alpha} G_\alpha dA = (w' - \theta) G_\alpha A_\alpha. \quad (3.63)$$

Definido $EI_0 = E_1 I_1 + E_2 I_2$ e $GA_0 = G_1 A_1 + G_2 A_2$, e substituindo as expressões 3.46, 3.61, 3.62 e 3.63 em 3.57, chega-se a primeira equação de equilíbrio do problema

$$EI_0 \frac{d^2 \theta}{dx^2} - GA_0 \frac{dv}{dx} + (Kh^2 + GA_0) \theta + Kh(u_2 - u_1) = 0. \quad (3.64)$$

Substituindo a equação 3.51 na equação do esforço normal atuante na seção transversal, e novamente tendo $\iint_{A_\alpha} (z - z_\alpha) dA = 0$ (eixo de referência passando pelo centróide da seção), tem-se

$$N_\alpha = E_\alpha u_\alpha^{0'} \iint_{A_\alpha} dA = E_\alpha A_\alpha u_\alpha^{0'}. \quad (3.65)$$

Substituindo as expressões 3.61 e 3.65 em 3.58 e 3.59 e definindo $EA_1 = E_1 A_1$ e $EA_2 = E_2 A_2$, chega-se às demais equações de equilíbrio do problema

$$EA_1 \frac{d^2 u_1^0}{dx^2} + E_{S_b} (u_2^0 - u_1^0 + h\theta) = 0 \text{ e} \quad (3.66)$$

$$EA_2 \frac{d^2 u_2^0}{dx^2} - E_{S_b} (u_2^0 - u_1^0 + h\theta) = 0. \quad (3.67)$$

Substituindo a equação 3.63 em 3.60, obtém-se

$$\frac{d\theta}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q}{GA_0}. \quad (3.68)$$

Integrando as equações 3.64, 3.66 a 3.68 e usando as condições de contorno do problema analisado definem-se as equações para o deslocamento transversal, os deslocamentos axiais, rotações e o deslizamento.

3.3.2 - Formulação numérica do elemento de viga de Timoshenko

A figura 3.5 ilustra uma seção plana em um elemento de viga de Timoshenko antes e após a deformação. Dessa figura determina-se as expressões 3.69 e 3.70 para os deslocamentos axiais e transversais, respectivamente, de um elemento unidimensional de viga com eixo de referência sobre a linha tracejada da figura 3.5.

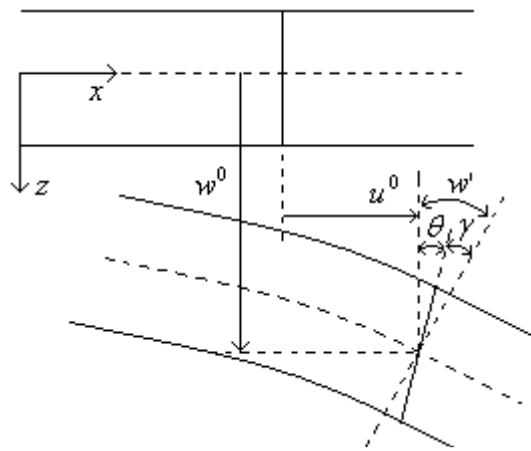


Figura 3.5 – Deformada de um segmento de viga de Timoshenko

$$u(x, y) = u^0(x) - z\theta(x) \quad (3.69)$$

$$w(x, y) = w^0(x) \quad (3.70)$$

Nas equações 3.69 e 3.70 o sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado e será omitido nas equações seguintes para facilitar a notação. Considerando

$u(x, y) = u_1(x, y)$ e $w(x, y) = u_2(x, y)$ e aplicando a expressão $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$ das deformações de Green Lagrange às equações de deslocamento, tem-se

$$\varepsilon_x = u(x, y)_{,x} = u'(x) - z\theta'(x) \text{ e} \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{u(x, y)_{,y} + w(x, y)_{,x}}{2} = \frac{-\theta(x) + w'(x)}{2}. \quad (3.72)$$

As tensões axiais e transversais estão relacionadas às respectivas deformações de acordo com

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \text{ e } \tau = G\gamma. \quad (3.73)$$

Na expressão 3.73, E é o módulo de deformação axial do material, G o módulo de deformação por cisalhamento e $\gamma = 2\varepsilon_{xz}$. Para uma análise não linear física é utilizado um método numérico que toma aproximações lineares sendo, neste caso, E o módulo de deformação axial tangente obtido da curva tensão-deformação do material. Para deformação transversal é considerada uma relação linear entre tensão e deformação de cisalhamento.

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (3.74)$$

onde σ_{ij} são as componentes de tensões de Kirchhoff, ε_{ij} são as componentes de deformação de Green-Lagrange, δ é o operador variacional e V é o volume do sólido indeformado. Para o caso de problemas de viga de Timoshenko as tensões a serem consideradas são as tensões axiais e as tensões de cisalhamento, desprezando-se as demais tensões, logo

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{31} \delta \varepsilon_{31}) dV = \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau \delta \gamma) dV. \quad (3.75)$$

Aplicando o operador variacional nas equações das deformações (3.71 e 3.72), chega-se às expressões:

$$\delta \varepsilon_x = \delta u' - z \delta \theta' \quad \text{e} \quad (3.76)$$

$$\delta \gamma = -\delta \theta + \delta w'. \quad (3.77)$$

Substituindo na expressão 3.75 as expressões 3.76 e 3.77 e observando que os deslocamentos u e θ destas expressões variam apenas ao longo do eixo do elemento, tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L \left[\int_A \sigma_x dA \delta u' - \int_A \sigma_x z dA \delta \theta' + \int_A \tau dA (\delta w' - \delta \theta) \right] dx. \quad (3.78)$$

Definindo as variáveis, $N = \int_A \sigma_x dA$, $M = \int_A \sigma_x z dA$ e $Q = \int_A \tau dA$, para o esforço axial, momento fletor e cortante, respectivamente, atuantes na seção transversal do elemento de viga, a expressão 3.78 pode ser escrita na forma mais concisa dada por

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [N \delta u' - M \delta \theta' + Q (\delta w' - \delta \theta)] dx. \quad (3.79)$$

Na aproximação de elementos finitos baseado em uma formulação em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Essas funções são representadas nas expressões 3.80 a 3.82 pelos vetores coluna Φ_u , Φ_w e Φ_θ , que tem como elementos polinômios interpoladores com grau que depende do número de pontos interpolados, ou seja, o número de elementos do respectivo vetor coluna. No item 3.5 deste capítulo esses vetores são definidos para os diferentes esquemas de interpolação admitidos.

$$u = [\Phi_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.80)$$

$$w = [\mathbf{0}_u^T \quad \Phi_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.81)$$

$$\theta = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \Phi_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.82)$$

Na expressões 3.80 a 3.82, $\mathbf{q} = [q_1^u \dots q_{nu}^u \ q_1^w \dots q_{nw}^w \ q_1^\theta \dots q_{n\theta}^\theta]^T$ onde nu , nw e $n\theta$ representam o número de graus de liberdade do elemento nas direções dos deslocamentos axiais, transversais e rotações. $\mathbf{0}_u$, $\mathbf{0}_w$ e $\mathbf{0}_\theta$ são vetores coluna nulos com número de elementos dados por nu , nw e $n\theta$, respectivamente. Sendo os deslocamentos funções dos deslocamentos nodais, os seus variacionais são dados por

$$\delta u = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (3.83)$$

$$\delta w = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{q}} \right) e \quad (3.84)$$

$$\delta \theta = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (3.85)$$

Substituindo as expressões 3.83 a 3.85 em 3.79 chega-se a expressão 3.86 para o trabalho virtual de um elemento de viga de Timoshenko.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L \left[N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial \theta'}{\partial \mathbf{q}} + Q \left(\frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \quad (3.86)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, onde \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. Da condição de $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$, tem-se

$$\delta \mathbf{q}^T \int_L \left[N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial \theta'}{\partial \mathbf{q}} + Q \left(\frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (3.87)$$

A expressão 3.87 deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela expressão

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left[N \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - M \frac{\partial \theta'}{\partial \mathbf{q}} + Q \left(\frac{\partial w'}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx. \quad (3.88)$$

Substituindo na expressão 3.88 as derivadas das equações dos deslocamentos (equação 3.69 e 3.70) em relação aos deslocamentos nodais, tem-se

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} N\Phi_u' \\ Q\Phi_w' \\ -(M\Phi_\theta' + Q\Phi_\theta) \end{array} \right\} dx. \quad (3.89)$$

Usando o fator 5/6 para correção aproximada da força cortante atuante na seção transversal da viga, tem-se

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} N\Phi_u' \\ \frac{5}{6}Q\Phi_w' \\ -(M\Phi_\theta' + \frac{5}{6}Q\Phi_\theta) \end{array} \right\} dx. \quad (3.90)$$

De forma análoga ao item 3.2.2 deste capítulo para o elemento de viga de EB, as derivadas das funções de forma e a integral da expressão 3.90 devem ser transformadas para um sistema de referência local do elemento. Outras observações, como a forma de avaliação das integrais e o método de avaliação do problema $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$ possivelmente não linear, também podem ser vistas no item 3.2.2 deste capítulo.

A matriz de rigidez tangente utilizada no processo de solução do problema não linear é obtida derivando o vetor de forças internas da expressão 3.90 em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{K}_T = \int_L \left[\begin{array}{c} \Phi_u' \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \frac{5}{6} \Phi_w' \left(\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_\theta' \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{5}{6} \Phi_\theta \left(\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right] dx. \quad (3.91)$$

Na expressão 3.91 a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} = \partial \left(\int_A \sigma_x dA \right) / \partial \mathbf{q} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA, \quad (3.92)$$

onde $\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}$ é dada pela inclinação da tangente a curva tensão-deformação e será denotada

por E_T . Já a derivada da deformação axial em relação aos deslocamentos nodais é dada por:

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u'}{\partial \mathbf{q}} - z \frac{\partial \theta'}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_u' \\ \mathbf{0}_w \\ -z \Phi_\theta' \end{Bmatrix}. \quad (3.93)$$

Substituindo a expressão 3.93 em 3.92 e lembrando que os vetores coluna que representam as funções de forma variam apenas ao longo do eixo longitudinal do elemento, tem-se

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_u' \int_A E_T dA \\ \mathbf{0}_w \\ -\Phi_\theta' \int_A E_T z dA \end{Bmatrix}. \quad (3.94)$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se determinar as derivadas dos outros esforços atuantes na seção em relação aos deslocamentos nodais (expressões 3.95 e 3.96), ou seja:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ \Phi_w' \int_A G_T dA \\ -\Phi_\theta' \int_A G_T dA \end{Bmatrix} \mathbf{e} \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_u' \int_A E_T y dA \\ \mathbf{0}_w \\ -\Phi_\theta' \int_A E_T z^2 dA \end{Bmatrix}. \quad (3.96)$$

As expressões dos esforços atuantes na seção transversal N , M e Q , bem como, das rigidezes, $\int_A G_T dA$, $\int_A E_T dA$, $\int_A E_T z dA$ e $\int_A E_T z^2 dA$, são obtidas da mesma forma que os

esforços atuantes e rigidezes para o elemento de viga de EB descrito no item 3.2.2 deste capítulo.

3.3.3 – Formulação do elemento de interface para viga de Timoshenko

O elemento de interface atua em conjunto com dois elementos de viga de Timoshenko, simulando, através do seu deslocamento relativo horizontal e vertical, um deslizamento e separação entre os elementos associados a ele. A maioria dos trabalhos encontrados na literatura (Salari e Spacone 2001, Ayoub e Filippou 2002, Ayoub 2001, Dall’Asta e Zona 2002, 2004a, 2004b e 2004c, Faella *et al.* 2002, Ranzi *et al.* 2004) simula o problema de vigas com conexão deformável desconsiderando a possibilidade de separação vertical, ou seja, interação parcial apenas na direção longitudinal. A desconsideração dessa separação vertical usando a formulação do elemento de interface apresentada neste trabalho pode ser obtida considerando uma rigidez da conexão muito grande na direção do deslocamento relativo vertical.

A figura 3.6 mostra os deslocamentos relativos horizontal e vertical no elemento de interface que estão associados aos movimentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento, os quais representam os deslocamentos nos eixos dos elementos de viga de Timoshenko a ele combinado.

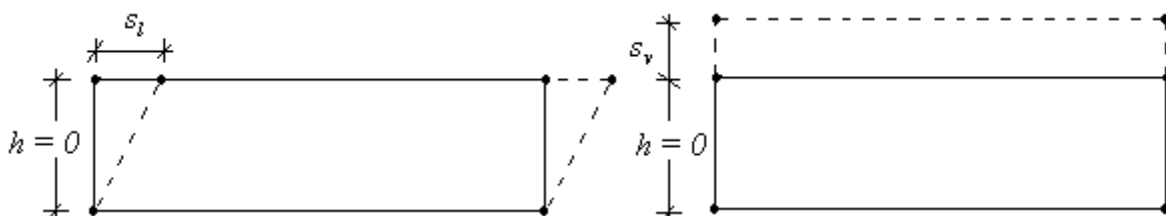


Figura 3.6 – Deslocamento relativo horizontal e vertical

Sendo $\alpha = 1,2$ o índice que representa os elementos de viga de Timoshenko acima e abaixo da interface de contato, as equações dos deslocamentos axiais e transversais desses elementos podem ser escritas como

$$u_{\alpha}(x, y) = u_{\alpha}^0(x) - z\theta_{\alpha}(x) \quad \text{e} \quad (3.97)$$

$$w_{\alpha}(x, y) = w_{\alpha}^0(x). \quad (3.98)$$

Nas equações 3.97 e 3.98, o sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado e será omitido nas equações seguintes para facilitar a notação. O deslocamento relativo horizontal (deslizamento) é dado pela diferença entre os deslocamentos axiais dos elementos acima e abaixo da interface, ou seja,

$$s_l(x) = u_2(x) - u_1(x) + (z_2 - c)\theta_2(x) - (z_1 - c)\theta_1(x). \quad (3.99)$$

Na expressão 3.99, z_1 , z_2 e c são como mostrados na figura 3.7. Já o deslocamento relativo vertical (separação vertical) é dado pela diferença entre os deslocamentos transversais dos elementos acima e abaixo da interface, ou seja,

$$s_v(x) = w_2(x) - w_1(x). \quad (3.100)$$

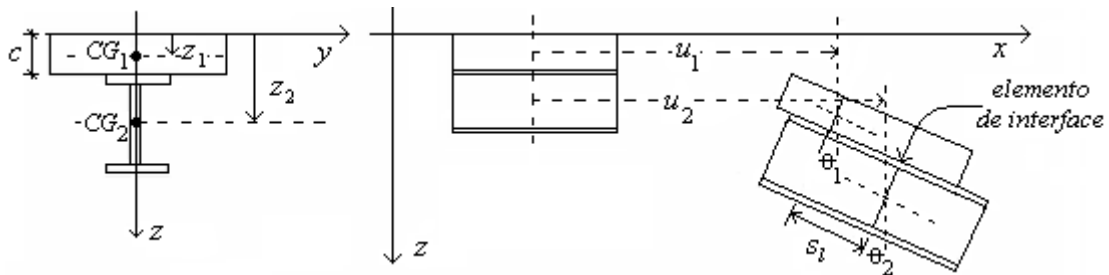


Figura 3.7 – Deslizamento na interface de contato entre os materiais

Considerando uma relação linear entre as forças por unidade de comprimento na direção horizontal (S_b) e vertical (N_b) em relação a seus respectivos deslocamentos relativos s_l e s_v e, sendo E_{S_b} e E_{N_b} , respectivamente, as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção do deslocamento relativo horizontal e vertical, então

$$S_b = E_{S_b} s_l \text{ e } N_b = E_{N_b} s_v. \quad (3.101)$$

No caso de problemas não lineares, as rigidezes que aparecem na expressão 3.101 serão dadas pela inclinação da tangente à curva $S_b = f(s_l)$ e $N_b = f(s_v)$.

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [S_b \delta s_l + N_b \delta s_v] dx. \quad (3.102)$$

Aplicando o operador variacional nas equações dos deslocamentos relativos horizontal e vertical (expressões 3.99 e 3.100) do elemento de interface, tem-se

$$\delta s_l = \delta u_2 - \delta u_1 + (z_2 - c)\delta\theta_2 - (z_1 - c)\delta\theta_1 \text{ e} \quad (3.103)$$

$$\delta s_v = \delta w_2 - \delta w_1. \quad (3.104)$$

Substituindo na expressão 3.102 as expressões anteriores, chega-se à expressão

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [S_b (\delta u_2 - \delta u_1 + (z_2 - c)\delta\theta_2 - (z_1 - c)\delta\theta_1) + N_b (\delta w_2 - \delta w_1)] dx. \quad (3.105)$$

Na aproximação de elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de forma, representada nas expressões 3.106 a 3.111 pelos vetores coluna Φ_u , Φ_w e Φ_θ , associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}), isto é

$$u_1 = [\Phi_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.106)$$

$$u_2 = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T \quad \Phi_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.107)$$

$$w_1 = [\mathbf{0}_u^T \quad \Phi_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.108)$$

$$w_2 = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \Phi_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.109)$$

$$\theta_1 = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \Phi_\theta^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.110)$$

$$\theta_2 = [\mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \mathbf{0}_\theta^T \quad \mathbf{0}_u^T \quad \mathbf{0}_w^T \quad \Phi_\theta^T] \mathbf{q} \quad (3.111)$$

Nas expressões 3.106 a 3.111, $\mathbf{q} = [q_i^{u1} \quad q_j^{w1} \quad q_k^{\theta1} \quad q_i^{u2} \quad q_j^{w2} \quad q_k^{\theta2}]^T$ onde $i = 1, \dots, nu$, $j = 1, \dots, nw$ e $k = 1, \dots, n\theta$ representam os graus de liberdade do elemento nas direções dos deslocamentos axiais, transversais e rotações. $\mathbf{0}_u$, $\mathbf{0}_w$ e $\mathbf{0}_\theta$ são vetores coluna

nulos com número de elementos dados por nu , nv e $n\theta$, respectivamente. Sendo os deslocamentos funções dos deslocamentos nodais então as suas variações são dadas por

$$\delta u_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (3.112)$$

$$\delta w_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{e} \quad (3.113)$$

$$\delta \theta_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (3.114)$$

Nas expressões 3.112 a 3.114 o índice α é igual a 1 ou 2. Substituindo estas expressões em 3.105 chega-se a expressão 3.115 para o trabalho virtual devido as forças internas de um elemento de interface associado a dois elementos de viga de Timoshenko.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L \left[S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} + (c - z_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{q}} + (z_2 - c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx \quad (3.115)$$

O trabalho virtual devido as forças externas é obtido por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, onde \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. Geralmente as forças externas são transmitidas para os elementos de interface através dos elementos de viga a ele associado. Da condição de $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$, tem-se

$$\delta \mathbf{q}^T \int_L \left[S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} + (c - z_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{q}} + (z_2 - c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (3.116)$$

A expressão anterior deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela expressão

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left[S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} + (c - z_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{q}} + (z_2 - c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] dx. \quad (3.117)$$

Substituindo na expressão 3.117 as derivadas das equações dos deslocamentos, expressões 3.106 a 3.111, em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{q} , chega-se à expressão

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \begin{Bmatrix} -S_b \Phi_u \\ -N_b \Phi_w \\ (c - z_1) S_b \Phi_\theta \\ S_b \Phi_u \\ N_b \Phi_w \\ (z_2 - c) S_b \Phi_\theta \end{Bmatrix} dx. \quad (3.118)$$

De forma análoga à utilizada no elemento de viga de EB implementado no item 3.2.2, a integral da expressão 3.118 pode ser transformada da variável global x para a variável local ξ usando a expressão 3.38.

Se a relação força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo da conexão deformável usada na determinação dos esforços atuantes na interface (ver item 3.4) não for linear, então o problema $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$ é não linear, e se faz necessária a utilização de um método numérico para resolver o problema. Mesmo sendo essa relação linear, a matriz de rigidez tangente do elemento de interface pode ser necessária, uma vez que o elemento de interface sempre trabalha associado a elementos de viga que podem representar materiais com relação tensão-deformação não linear.

A matriz de rigidez tangente utilizada no processo de solução do problema não linear é obtida derivando o vetor de forças internas da expressão 3.118 em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{K}_T = \int_l \begin{Bmatrix} -\Phi_u \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_w \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ (c - z_1) \Phi_\theta \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_u \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_w \left(\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ (z_2 - c) \Phi_\theta \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dx. \quad (3.119)$$

Na expressão 3.119 a derivada da força horizontal por unidade de comprimento (fluxo de cisalhamento) atuante na interface de contato entre os diferentes membros em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial(E_{S_b} s_l)}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.120)$$

onde $E_{S_b} = \frac{\partial S_b}{\partial s_l}$ é a rigidez da conexão deformável dada pela inclinação da tangente a curva que relaciona a força horizontal por unidade de comprimento e o deslizamento. Já a derivada do deslocamento relativo horizontal (deslizamento) em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} + (z_2 - c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{q}} - (z_1 - c) \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} -\Phi_u \\ \mathbf{0}_w \\ (z_1 - c)\Phi_\theta \\ \Phi_u \\ \mathbf{0}_w \\ (c - z_2)\Phi_\theta \end{array} \right\}. \quad (3.121)$$

Substituindo a expressão anterior em 3.120, tem-se

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \left\{ \begin{array}{c} -\Phi_u \\ \mathbf{0}_w \\ (z_1 - c)\Phi_\theta \\ \Phi_u \\ \mathbf{0}_w \\ (c - z_2)\Phi_\theta \end{array} \right\}. \quad (3.122)$$

De forma análoga pode-se obter a derivada do esforço vertical por unidade de comprimento atuante na interface de contato em relação aos deslocamentos nodais, ou seja:

$$\frac{\partial N_b}{\partial \mathbf{q}} = E_{N_b} \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_u \\ -\Phi_w \\ \mathbf{0}_\theta \\ \mathbf{0}_u \\ \Phi_w \\ \mathbf{0}_\theta \end{Bmatrix} \quad (3.123)$$

Na expressão 3.123, $E_{S_b} = \frac{\partial N_b}{\partial s_v}$ é a rigidez da conexão deformável na direção vertical, que no caso de problemas que desconsideram a possibilidade de separação vertical deve ser considerada como um valor muito grande (penalidade). Em caso contrário, essa rigidez é dada pela inclinação da tangente a curva que relaciona a força vertical por unidade de comprimento e deslocamento relativo vertical na conexão.

3.4 – ANÁLISE DOS ESFORÇOS E RIGIDEZES GENERALIZADAS EM SEÇÕES MISTAS

Os esforços resistentes em uma seção transversal qualquer de viga pode ser obtida de forma analítica ou por métodos aproximados. O método aproximado mais utilizado na literatura é o método das fibras, ou faixas, onde a seção analisada é discretizada em um número finito de faixas, e para cada faixa é determinado uma deformação, usando para isto a equação da deformada da seção. Conhecida a relação tensão-deformação do material, determina-se uma força axial atuante nestas faixas que serão utilizadas na integração dos esforços resistentes. Já o método analítico utiliza integração analítica para a obtenção dos esforços resistentes na seção. Sendo a seção representada por um polígono fechado, é usado o teorema de Green para transformar a integral de área em uma integral de contorno, e então de forma analítica obter os esforços resistentes a partir da equação da configuração deformada da seção.

O objetivo destes métodos de avaliação é determinar, para uma dada condição de deformação da seção, não apenas os seus esforços resistentes, mas também suas rigidezes generalizadas, ou seja, as derivadas destes esforços em relação às variáveis de deformação, necessárias nas formulações por elementos finitos.

Uma revisão bibliográfica de trabalhos sobre o assunto, bem como um detalhamento do processo utilizado neste trabalho, podem ser encontrados em Caldas

(2004), Muniz (2005) e Silva (2006). Neste item é apresentada uma idéia geral do método utilizado neste trabalho.

3.4.1 – Geometria da seção transversal

A metodologia utilizada para o cálculo dos esforços resistentes permite a cada seção individual dividir-se em um número qualquer de materiais distintos, barras de reforço e aberturas. Cada material é definido por uma poligonal fechada e as barras de reforço são definidas pontualmente. As coordenadas dos vértices das poligonais devem ser referenciadas em um sistema de coordenadas xy qualquer. A figura 3.8 ilustra um exemplo fictício de seção mista. Pode-se observar através da figura que a ordem de seqüência dos vértices na definição da poligonal do material é anti-horária. Essa ordem influencia no cálculo dos esforços, uma vez que pelo teorema de Green a integral em um polígono fechado percorrido em sentido anti-horário fornece um valor positivo, já no sentido horário, este valor será negativo.

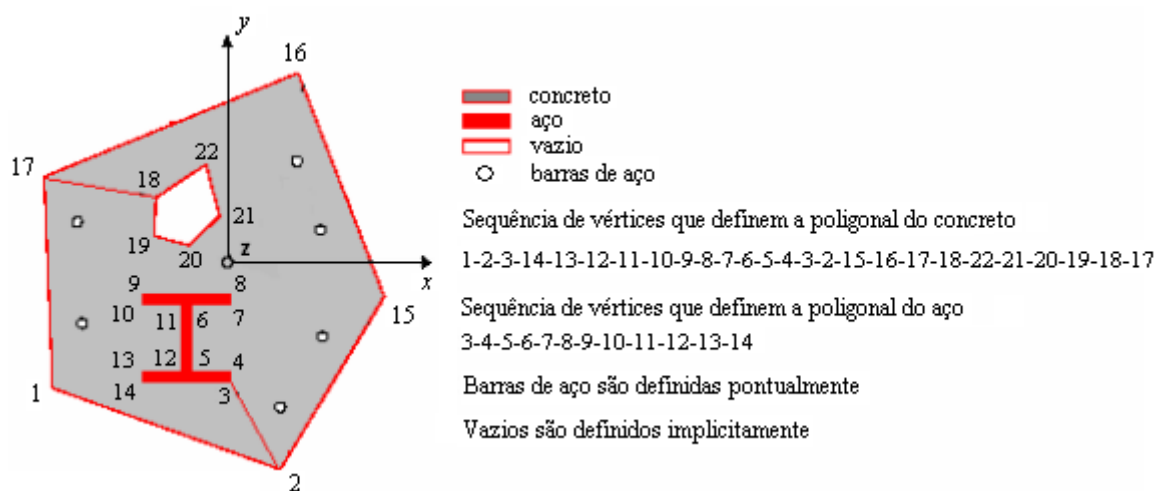


Figura 3.8 – Definição da seção mista

3.4.2 – Materiais

Os materiais são definidos através de suas relações tensão-deformação. A figura 3.9 apresenta um modelo teórico de uma curva tensão-deformação que pode ser utilizada no método implementado. A curva pode ser dividida em um número qualquer de faixas, representada na figura pelos F_i . Cada faixa terá definidos os coeficientes que representam a

curva polinomial a ser considerada, bem como suas deformações limites à esquerda e à direita, representadas na figura 3.9 pelos L_i .

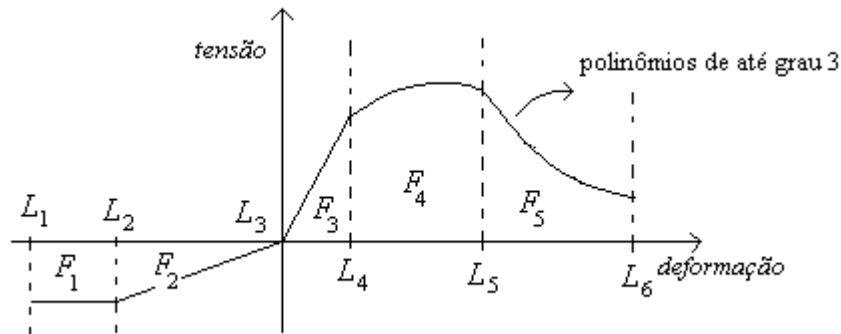


Figura 3.9 – Relação tensão deformação ilustrativa de um material

Para o caso da conexão deformável representada pelo elemento de interface implementado no item 3.3.3, a relação força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo horizontal ou vertical na interface pode ser fornecida de forma análoga à descrita acima.

Uma variação possível para a representação da curva força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo horizontal ou vertical na interface é a consideração de uma função qualquer contínua e diferenciável, uma vez que não há necessidade de integração desta relação ao longo de uma área, ela somente é avaliada em pontos de integração discretos ao longo do comprimento do elemento.

3.4.3 – Obtenção dos esforços atuantes na seção mista

Os esforços seccionais atuantes são obtidos por integração das tensões definidas para valores das variáveis de deformação e da área de armadura individual A_{si} . Para uma seção transversal generalizada considerada no modelo implementado, as equações dos esforços atuantes dadas no item 3.2.2 e 3.3.2 são reescritas da forma:

$$N = \iint_A \sigma_x dA = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_x dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_x dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{xi}}_{\text{armaduras}} \quad (3.124)$$

$$Q = \iint_A \tau dA = \underbrace{\iint_{A_c} \tau dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \tau dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \tau_i}_{\text{armaduras}} \quad e \quad (3.125)$$

$$M = \iint_A \sigma_x y dA = \underbrace{\iint_{A_c} \sigma_x y dA}_{\text{concreto}} + \underbrace{\iint_{A_p} \sigma_x y dA}_{\text{aço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \sigma_{xi} y_i}_{\text{armaduras}}. \quad (3.126)$$

A obtenção das rigidezes generalizadas que aparecem no item 3.2.2 e 3.3.2 são feitas de forma análoga aos esforços atuantes substituindo a curva tensão-deformação pela sua derivada. A obtenção da força por unidade de comprimento atuante na conexão deformável (S_b e N_b) e de sua derivada (E_{S_b} e E_{N_b}) é feita de forma direta usando a relação força por unidade de comprimento versus deslocamento relativo (horizontal ou vertical) na conexão deformável. Ou seja, uma vez determinado o deslocamento relativo na interface, a respectiva força por unidade de comprimento ou sua derivada é calculada diretamente.

3.5 – UTILIZAÇÃO DE DIFERENTES ESQUEMAS DE INTERPOLAÇÃO E TRAVAMENTO POR CISALHAMENTO

A formulação usada na implementação dos elementos de interface e viga de Timoshenko considera as funções de forma, representadas pelos vetores coluna Φ_u , Φ_w e Φ_θ , independentes em relação aos deslocamentos axiais, transversais e rotações, oferecendo assim a possibilidade de diversas combinações de polinômios interpoladores. A tabela 3.1 abaixo relaciona os diferentes elementos implementados neste capítulo, com os respectivos graus dos polinômios usados na interpolação dos graus de liberdade. A figura 3.10 ilustra estes elementos.

Tabela 3.1 – Esquemas de interpolação

Elemento	u	w	θ
ITL	linear	linear	linear
ITLQ	linear	quadrática	linear
ITQ	quadrática	quadrática	quadrática

Para ilustrar os vetores coluna das funções de forma usadas na implementação dos elementos do item 3.3.2 e 3.3.3 deste capítulo, a expressão a seguir fornece esses vetores para o elemento ITLQ ilustrado na figura 3.10, considerando o sistema de referencia local mostrado na figura 3.3.

$$\Phi_u = \Phi_\theta = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{Bmatrix} \text{ e } \Phi_w = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ 1-\xi^2 \\ \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{Bmatrix} \quad (3.127)$$

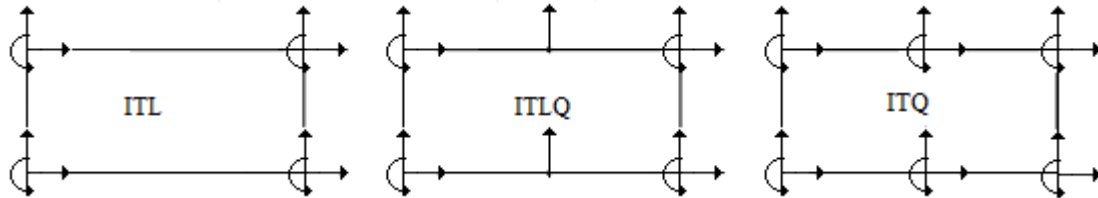


Figura 3.10 – Diferentes esquemas de interpolação

Problemas numéricos podem ocorrer em modelagem de sistemas estruturais quando dois ou mais campos de deslocamento são acoplados e a solução é definida em um espaço finito, como é caso de análises numéricas utilizando o método dos elementos finitos (Reddy, 2004). Esses problemas numéricos são conhecidos na literatura como *locking* (travamento) e segundo Ranzi e Zona (2007), nas análises de vigas de Timoshenko com dois membros com conexão deformável podem ser de três tipos: devido à excentricidade do eixo de referência em relação ao centróide da seção; devido à rigidez da seção em relação à deformação por cisalhamento (*shear locking*); e devido à rigidez da conexão na interface de contato entre os diferentes membros (*slip locking*).

Como verificado nos trabalhos de Reddy (1997), Yunhua (1998), Ranzi e Zona (2007), entre outros, esses problemas de travamento podem ser evitados com uma apropriada escolha para os polinômios interpoladores dos graus de liberdade do elemento de viga de Timoshenko. Uma possibilidade também é, na determinação da matriz de rigidez e do vetor de forças interna do elemento de viga de Timoshenko, o uso de uma integração reduzida na avaliação das equações dos deslocamentos que possuem incompatibilidade nos polinômios interpoladores.

A simulação numérica de vigas, placas e cascas considerando o efeito da deformação por cisalhamento através de elementos isoparamétricos causa, em casos particulares, um travamento por cisalhamento (*shear locking*) devido a não compatibilidade dos polinômios interpoladores na aproximação por elementos finitos. Tal travamento é definido por valores espúrios da deformação por cisalhamento quando a relação h/L (altura da seção versus vão da viga) é muito pequena. Nesses casos a deformação por cisalhamento deveria tornar-se desprezível em relação à rotação da seção plana, o que leva, para o caso limite, a expressão da deformação por cisalhamento se

anular, o que não acontece para esses elementos devido a não compatibilidade dos polinômios.

Uma forma de evitar esse problema em elementos isoparamétricos é impor a este um campo de deformação por cisalhamento obtido a partir de interpolação de pontos que não apresentem problemas de travamento, conhecida na literatura por deformação por cisalhamento assumida. Tais pontos podem ser obtidos comparando a deformação por cisalhamento desses elementos com a de um elemento com compatibilidade nos polinômios interpoladores.

A equação da deformação por cisalhamento ao longo do elemento isoparamétrico linear da figura 3.11(a) é

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_{i,x}^w q_i^w - \sum_{i=1}^2 N_i^\theta q_i^\theta, \quad (3.128)$$

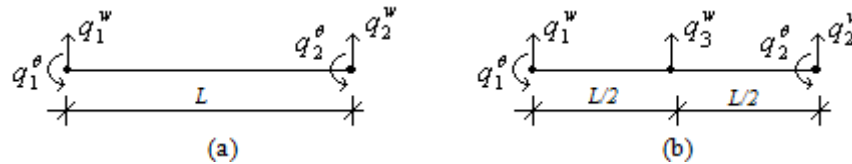


Figura 3.11 – elemento de viga linear (a) e linear-quadrático (b)

onde $\Phi_w = \Phi_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix}$ e $x(\xi) = \frac{L}{2}\xi + \frac{x_1+x_2}{2}$. Logo,

$$\gamma(\xi) = \frac{q_2^w - q_1^w}{2L} - \frac{1}{2}(1-\xi)q_1^\theta - \frac{1}{2}(1+\xi)q_2^\theta. \quad (3.129)$$

Para determinar os pontos sem travamento considere o elemento da figura 3.11(b) com interpolação quadrática para translação e linear para rotação. A equação da deformação por cisalhamento ao longo do elemento é dada por

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_{i,x}^w q_i^w - \sum_{i=1}^2 N_i^\theta q_i^\theta, \quad (3.130)$$

onde $\Phi_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) & 1-\xi^2 \end{bmatrix}$. Logo,

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{L} \left[\left(\xi - \frac{1}{2} \right) q_1^w - 2\xi q_3^w + \left(\xi + \frac{1}{2} \right) q_2^w \right] - \frac{1}{2}(1-\xi)q_1^\theta - \frac{1}{2}(1+\xi)q_2^\theta. \quad (3.131)$$

Igualando os dois campos de deformação, expressão 3.129 e 3.131, tem-se

$$(q_1^w + q_2^w - 2q_3^w)\xi = 0. \quad (3.132)$$

Se a variação do deslocamento transversal ao longo do elemento for constante ($q_1^w = q_2^w = q_3^w$) ou linear ($q_3^w = (q_1^w + q_2^w)/2$) então $q_1^w + q_2^w - 2q_3^w = 0$, e para qualquer ponto avaliado no elemento a expressão 3.132 é sempre verdadeira. Ou seja, as duas formulações geram resultados idênticos, portanto, se uma é compatível a outra também será. Caso o deslocamento vertical não seja constante e nem linear então $\xi = 0$ é a única solução da equação 3.132, sendo assim apenas o ponto médio do elemento não sofrerá problema de travamento, o que gera um campo de deformação por cisalhamento assumida constante ao longo do elemento, ou seja,

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_{i,x}^w(\xi=0)q_i^w - \sum_{i=1}^2 N_i^\theta(\xi=0)q_i^\theta = \frac{q_2^w - q_1^w}{2L} - \frac{q_1^\theta + q_2^\theta}{2}. \quad (3.133)$$

Escrevendo a expressão 3.133 na sua forma matricial, tem-se

$$\gamma(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u^T & \mathbf{B}_w^T & \mathbf{B}_\theta^T \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (3.134)$$

$$\text{onde } \mathbf{B}_w^T = \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\theta^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{q} = [q_1^u \quad q_2^u \quad q_1^w \quad q_2^w \quad q_1^\theta \quad q_2^\theta]^T.$$

Para o caso do elemento isoparamétrico quadrático da figura 3.12(a), a equação da deformação por cisalhamento é dada por

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_{i,x}^w q_i^w - \sum_{i=1}^3 N_i^\theta q_i^\theta, \quad (3.135)$$

$$\text{em que } \Phi_w = \Phi_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & 1-\xi^2 & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{bmatrix} \text{ e } x(\xi) = \frac{L}{2}\xi + \frac{x_1+x_2}{2}. \text{ Logo,}$$

$$\gamma(\xi) = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)q_1^w - 2\xi q_2^w + \left(\xi + \frac{1}{2}\right)q_3^w - \sum_{i=1}^3 N_i q_i^\theta. \quad (3.136)$$

Para determinar os pontos sem travamento considere o elemento da figura 3.12(b) com interpolação cúbica para translação e quadrática para rotação. A equação da deformação por cisalhamento ao longo do elemento é dada por

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_{i,x}^w q_i^w - \sum_{i=1}^3 N_i^\theta q_i^\theta, \quad (3.137)$$

onde $\Phi_w = \left[\xi(1-\xi)\left(\frac{1}{2} + \xi\right) \quad (1+2\xi)(1-\xi^2) \quad \frac{1}{3}\xi(1+\xi)\left(\frac{1}{2} + \xi\right) \quad \frac{8}{3}\xi(\xi^2 - 1) \right]$. Logo,

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) = & \left(\frac{1}{2} + \xi - 3\xi^2\right)q_1^w + (2 - 2\xi - 6\xi^2)q_2^w + \left(\frac{1}{6} + \xi + \xi^2\right)q_3^w - \\ & - \left(\frac{8}{3} - 8\xi^2\right)q_4^w - \sum_{i=1}^3 N_i q_i^\theta. \end{aligned} \quad (3.138)$$

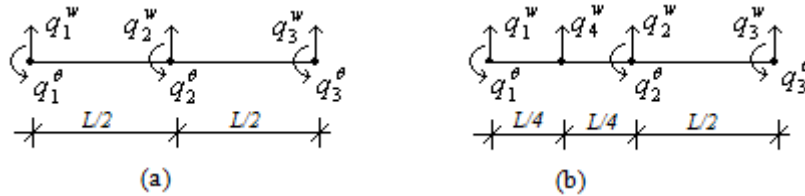


Figura 3.12 – elemento de viga quadrático (a) e quadrático-cúbico (b)

Igualando os dois campos de deformação, expressão 3.136 e 3.138, tem-se

$$(q_1^w + 2q_2^w - \frac{1}{3}q_3^w - \frac{8}{3}q_4^w)(1 - 3\xi^2) = 0. \quad (3.139)$$

Se a variação do deslocamento transversal ao longo do elemento for constante, linear ou quadrática verifica-se que $q_1^w + 2q_2^w - \frac{1}{3}q_3^w - \frac{8}{3}q_4^w = 0$, e a expressão 3.139 é atendida para qualquer ponto avaliado no elemento. Sendo assim as duas formulações geram resultados idênticos, logo se uma é compatível a outra também será. Caso o deslocamento vertical não seja constante, linear e nem quadrático, então $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ são as soluções da equação 3.139. Portanto, os pontos $\xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ não sofrem problema de travamento, o que gera um campo de deformação por cisalhamento assumida linear ao longo do elemento,

$$\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i^a \bar{\gamma}_i, \quad (3.140)$$

onde $\mathbf{N}^a = \left[\frac{1}{2a}(a-\xi) \quad \frac{1}{2a}(a+\xi) \right]$ são as funções de interpolação lineares em relação aos pontos sem travamento, e $\overline{\gamma}_i$ são as deformações nestes pontos, ou seja,

$$\overline{\gamma}_1 = \sum_{i=1}^3 N_{i,x}^w(\xi=-a)q_i^w - \sum_{i=1}^3 N_i^\theta(\xi=-a)q_i^\theta \quad \text{e} \quad (3.141)$$

$$\overline{\gamma}_2 = \sum_{i=1}^3 N_{i,x}^w(\xi=a)q_i^w - \sum_{i=1}^3 N_i^\theta(\xi=a)q_i^\theta. \quad (3.142)$$

Fazendo $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, e substituindo as expressões 3.141 e 3.142 em 3.140 chega-se a expressão 3.143 para a deformação por cisalhamento assumida no elemento isoparamétrico quadrático.

$$\gamma(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_u^T & \mathbf{B}_w^T & \mathbf{B}_\theta^T \end{bmatrix} \mathbf{q}. \quad (3.143)$$

Na equação anterior, $\mathbf{B}_w^T = \frac{1}{L} [2\xi - 1 \quad -4\xi \quad 2\xi + 1]$ e $\mathbf{B}_\theta^T = \frac{1}{6} [3\xi - 1 \quad -4 \quad -3\xi - 1]$ e

$$\mathbf{q} = [q_1^u \quad q_2^u \quad q_3^u \quad q_1^w \quad q_2^w \quad q_3^w \quad q_1^\theta \quad q_2^\theta \quad q_3^\theta]^T.$$

3.6 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os elementos desenvolvidos neste trabalho foram implementados computacionalmente usando como base o programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program* (Guimarães, 1992). Esse programa originou-se de trabalhos desenvolvidos no início da década de 90 na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) sob orientação do professor Luiz Fernando Martha. Vários pesquisadores brasileiros têm utilizado, com sucesso, esse programa em trabalhos desenvolvidos na área de análise numérica de estruturas, como Parente Jr. (2000), Sousa Jr. (2000), Caldas (2004), Muniz (2005) e Silva (2006).

Os códigos do programa FEMOOP utilizam a linguagem de programação C++ sendo estruturados dentro da lógica de uma programação orientada a objetos. Este modelo de programação permite a implementação de novos elementos através da criação de novas classes, sem a necessidade do conhecimento da estrutura global do programa, e podendo

compartilhar com os outros elementos já implementados todas as classes disponíveis nos códigos existentes, como, por exemplo, a parte de resolução do sistema não linear de equações.

A possibilidade de tratar modelos de elementos finitos com diferentes dimensões de uma forma genérica é citada por Martha e Parente Jr. (2002) como uma das características mais importante do programa FEMOOP. Isto é feito através das classes de modelo de análise e forma definidas no FEMOOP por *cAnModel* e *cShape*, respectivamente. Essas classes são responsáveis por representar a parte do problema referente à equação diferencial que governa o comportamento do elemento, bem como a geometria e critérios de interpolação das variáveis. Na arquitetura do programa FEMOOP existem classes que trabalham a nível local e global. Por exemplo, a classe *cCtrl* trabalha a nível global, sendo seus algoritmos responsáveis pelo controle da análise do problema, dizendo, por exemplo, se será feita uma análise não linear, usando o método de Newton Rapshon com controle de deslocamento (*cPathDCM*) ou com controle de carga (*cPathNR*), ou se será feita uma análise linear (*cCtrlLinStat*). Exemplos de arquivos neutros (*Neutral File*) de entrada e saída de dados do programa podem ser encontrados em www.tecgraf.puc-rio.br/neutralfile.

Os elementos desenvolvidos neste trabalho foram implementados no FEMOOP através da criação de duas novas classes. A primeira delas é usada para definir o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento, sendo vinculada a classe mãe de todos os elementos, definida no FEMOOP como *cElement*. Da condição de herança entre as classes esta nova classe implementada herda da mãe as suas funções, como, por exemplo, a função que obtém os deslocamentos nodais do elemento fazendo a ligação entre o índice local do grau de liberdade do elemento com o respectivo índice global (função *GetDisplacement* no FEMOOP). A segunda é usada para definir o tipo de elemento usado, a quantidade e quais dos seis graus de liberdade por nó pré-definidos pelo FEMOOP serão usados na análise.

3.7 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os três elementos de interface e seus respectivos elementos de vigas de Timoshenko implementados neste capítulo, mais dois elementos obtidos usando a técnica de deformação por cisalhamento assumida descrita no item 3.5 deste capítulo, e os dois elementos de interface e seus respectivos elementos de viga de EB implementados em Silva (2006), são usados nas análises numéricas dos exemplos avaliados neste item.

O primeiro exemplo compara os resultados numéricos obtidos pelos elementos implementados neste capítulo com resultados analíticos considerando a teoria de viga de EB (Girhammar e Gopu, 1993) e utilizando uma análise bidimensional considerando estado plano de tensões (Xu e Wu, 2007).

O segundo exemplo avalia os elementos implementados sob condições favoráveis a provocar efeito de travamento tanto em relação ao deslizamento quanto em relação ao cisalhamento.

O terceiro exemplo tem como objetivo verificar a potencialidade dos elementos implementados neste trabalho em simular tanto os deslocamentos relativos longitudinais (deslizamento) quanto os deslocamentos relativos verticais (separação vertical) na interface de contato.

3.7.1 – Exemplo 1

A viga mista simplesmente apoiada e uniformemente carregada da figura 3.13 é avaliada nesse exemplo de forma numérica e analítica utilizando as formulações desenvolvidas neste capítulo. Sua seção transversal tem forma de T, sendo composta por uma mesa de concreto ligada por meio de conectores mecânicos a uma alma de madeira. Como as respostas numéricas obtidas pelos elementos implementados são avaliadas usando soluções analíticas, uma análise linear foi considerada.

O módulo de deformação axial e o coeficiente de Poisson dos materiais concreto e madeira são, respectivamente, $E_c = 12000MPa$, $\nu_c = 0.2$, $E_w = 8000MPa$ e $\nu_w = 0.3$. A conexão deformável tem uma rigidez longitudinal dada por $E_{S_b} = 50MPa$, permitindo assim um deslizamento na interface de contato. Na análise analítica é desprezada a possibilidade de separação vertical na interface, sendo considerada dessa forma uma rigidez muito grande na direção vertical ($E_{S_b} = 10^9 MPa$) para a análise numérica.

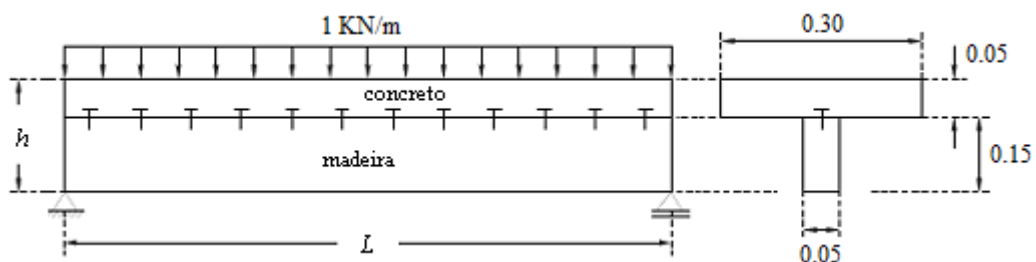


Figura 3.13 – Viga mista concreto-madeira bi-apoiada (dimensões em m)

Os resultados numéricos foram obtidos para diferentes valores da relação comprimento do vão versus altura da seção (L/h). Para o módulo de deformação por cisalhamento foi usado a relação $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, sendo necessária no caso dos elementos baseados na teoria de viga de Timoshenko. Na análise numérica considerando os elementos implementados neste trabalho e em Silva (2006) foi utilizada uma malha de discretização com quatro elementos de mesmo tamanho. As tabelas 3.2 a 3.5 apresentam os resultados numéricos e analíticos para o deslocamento transversal máximo da viga mista da figura 3.13.

Tabela 3.2 – Deslocamento vertical no meio do vão para soluções analíticas (mm)

L/h	20	10	5	4
2D-exata	7.6204	0.7315	0.0700	0.0318
EB-exata	7.5599	0.7172	0.0665	0.0296

Na Tabela 3.2, 2D-exata é a solução analítica obtida por Xu e Wu (2007) considerando uma análise bidimensional com um modelo de tensões planas e aproximações por série de Fourier para satisfazer a equação diferencial do problema e suas condições de contorno. Já EB-exata representa uma solução analítica obtida por Girhammar e Gopu (1993) usando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

A Tabela 3.3 apresenta os resultados numéricos para o deslocamento no meio do vão da viga mista obtidos pelos elementos IELC e IEQC desenvolvidos por Silva (2006). Esses elementos são baseados na teoria de viga de EB e utilizam polinômios cúbicos para interpolação dos deslocamentos transversais e rotações, e lineares (para o elemento IELC) ou quadráticos (para o elemento IEQC) para interpolação dos deslocamentos axiais. Observa-se da tabela que os dois elementos fornecem resultados bastante próximos entre si e em relação à solução analítica da tabela 3.2 considerando a teoria de viga de EB. Como será visto no exemplo seguinte o elemento IEQC torna-se interessante em relação ao elemento IELC quando há uma possibilidade de um travamento por deslizamento, ou seja, a rigidez longitudinal da conexão for muito grande.

Tabela 3.3 – Deslocamento vertical no meio do vão para teoria de EB (mm)

L/h	20	10	5	4
IELC	7.3952	0.7114	0.0665	0.0295
IEQC	7.5590	0.7169	0.0665	0.0296

A tabela 3.4 apresenta os resultados numéricos para o deslocamento no meio do vão da viga mista da figura 3.12 obtidos usando os elementos implementados neste capítulo.

Comparando os resultados numéricos da tabela 3.4 com a solução analítica da tabela 3.2 observa-se que o elemento ITL apresenta valores muito discrepantes. Já o elemento ITL* apresenta valores numéricos razoáveis. O elemento ITL* se diferencia do elemento ITL apenas na interpolação das deformações por cisalhamento, pois no elemento ITL* é usada a técnica de deformação por cisalhamento assumida. Pode-se concluir que o elemento ITL sofre travamento por cisalhamento.

A tabela 3.5 apresenta os erros relativos para os dois melhores elementos considerando a teoria de viga de EB e de Timoshenko. O erro relativo η da tabela 3.5 é obtido da comparação da solução numérica (w_{ef}) com a solução analítica (w_{exata}) de Xu e Wu (2007), ou seja,

Tabela 3.4 – Deslocamento vertical no meio do vão para teoria de Timoshenko (mm)

L/h	20	10	5	4
ITL	0.3078	0.0725	0.0157	0.0092
ITL*	7.2959	0.6982	0.0651	0.0291
ITLQ	7.2960	0.6986	0.0651	0.0291
ITQ	7.4564	0.7083	0.0666	0.0299
ITQ*	7.5804	0.7223	0.0678	0.0304

* indica que foi empregada a técnica de deformação por cortante imposta

$$\eta = \frac{w_{ef} - w_{exata}}{w_{exata}} 100\% . \quad (3.144)$$

Como esperado, a solução exata de EB converge para solução analítica de Xu e Wu para valores crescentes de L/h . Ou seja, o erro relativo varia de aproximadamente 7% quando $L/h = 4$ para 0.8% quando $L/h = 20$. Outra constatação é o aumento da diferença na qualidade da resposta usando as diferentes teorias com a diminuição da relação L/h , ou seja, a diferença entre o erro relativo das duas teorias varia de aproximadamente 0.3% quando $L/h = 20$ para 2.5% quando $L/h = 4$.

Tabela 3.5 – Erro η (%) para os melhores elementos da teoria de EB e Timoshenko

L/h	20	10	5	4
IEQC	-0.806	-1.996	-5.000	-6.918
ITQ*	-0.525	-1.258	-3.143	-4.403

3.7.2 – Exemplo 2

Problemas de vigas formadas por dois membros com conexão deformável submetida a uma análise de viga de Timoshenko estão sujeita a diferentes tipos de *locking* (travamento). Estes travamentos são devidos a incompatibilidade dos polinômios interpoladores dos deslocamentos que geram, em situações particulares, erros numéricos na avaliação da deformação axial (travamento devido à excentricidade), na deformação transversal (travamento por cisalhamento), e no deslocamento relativo longitudinal na interface entre os diferentes membros (travamento por deslizamento).

Para avaliar o comportamento dos diferentes elementos implementados neste trabalho em relação ao efeito de travamento por deslizamento e cisalhamento, a viga mista biapoiada, com carga concentrada no meio do vão e 20m de comprimento (Figura 3.14), foi avaliada numericamente com esses elementos para um valor muito grande do módulo de deformação por cisalhamento ($G = 10^9$ kPa), para os elementos baseados na teoria de viga de Timoshenko. Embora fisicamente impossível, uma vez que o módulo de deformação por cisalhamento está associado ao módulo de deformação axial (E), esse artifício pode ser usado para simular uma alta relação L/h da viga que resultaria em $\frac{dw}{dx} = \theta$ provocando um possível travamento por cisalhamento.

A resposta analítica para o problema da figura 3.14 considerando a teoria de viga de EB pode ser obtida usando as equações diferenciais definidas no item 3.2.1 deste trabalho ou da equação diferencial de Newmark (Newmark *et al*, 1951). Devido a alta rigidez da deformação por cisalhamento adotada, a solução analítica para a teoria de viga de Timoshenko converge para a obtida pela teoria de EB.

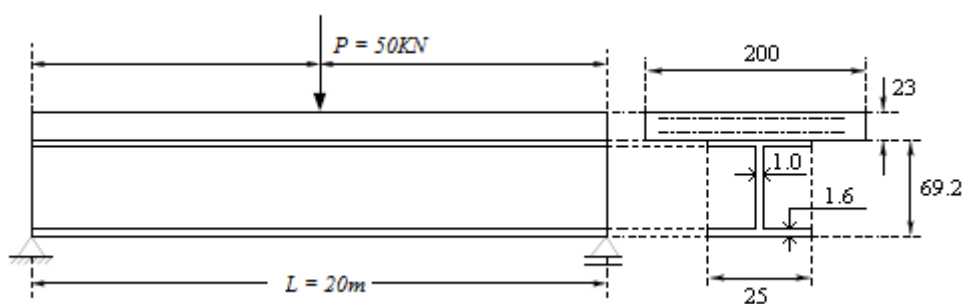


Figura 3.14 - Viga mista aço-concreto e seção transversal (cotas em cm)

A equação diferencial de Newmark é dada por:

$$\chi'' - \alpha^2 \chi = \frac{-q}{(EI)_{free}} - \alpha^2 \frac{M}{(EI)_{full}} \quad (3.145)$$

onde $\chi = -w''$ é a curvatura da viga mista em uma seção analisada, e o parâmetro αL define o nível da interação parcial longitudinal, sendo

$$\alpha^2 = \frac{K(EI)_{full}}{(EA)^*(EI)_{free}} \quad (3.146)$$

Devido à simetria do problema da viga mista da figura 3.14 a equação diferencial 3.145 pode ser aplicada à metade da viga, tomando $q = 0$ e condições de contorno devido a um apoio simples e um engaste com translação vertical livre.

Na expressão 3.146, K é a rigidez longitudinal da conexão deformável (na formulação numérica do item 3.3.3 K é representado por E_{S_b}) e $(EI)_{full}$ é a rigidez da seção mista considerando interação total na interface dada por

$$(EI)_{full} = (EI)_{free} + h^2(EA)^*, \quad (3.147)$$

onde h é a distância entre os centróides e $(EI)_{free}$ é a soma das rigidezes à flexão das seções inferior e superior

$$(EI)_{free} = E_1 I_1 + E_2 I_2, \text{ e} \quad (3.148)$$

$$(EA)^* = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \quad (3.149)$$

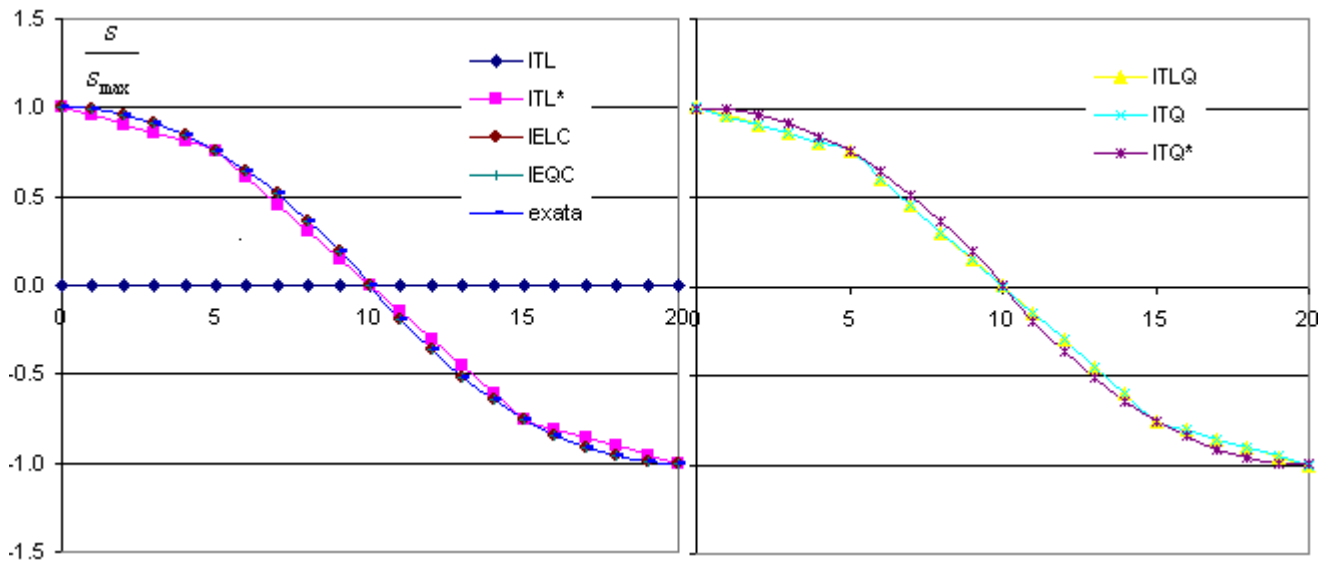
Nas expressões 3.148 e 3.149, E , I e A , são, respectivamente, os módulos de deformação axial, momento de inércia em reação ao centróide da seção e área das seções acima e abaixo da interface de contato.

O exemplo foi verificado para os parâmetros de rigidez longitudinal $\alpha L = 1$ e $\alpha L = 100$, e uma malha formada por quatro elementos iguais. A seção transversal da viga mista é composta por uma viga de concreto de seção retangular e um perfil de aço de seção I. Os módulos de deformação axial dos materiais aço e concreto são, respectivamente, $E_s = 210000MPa$ e $E_c = 32400MPa$.

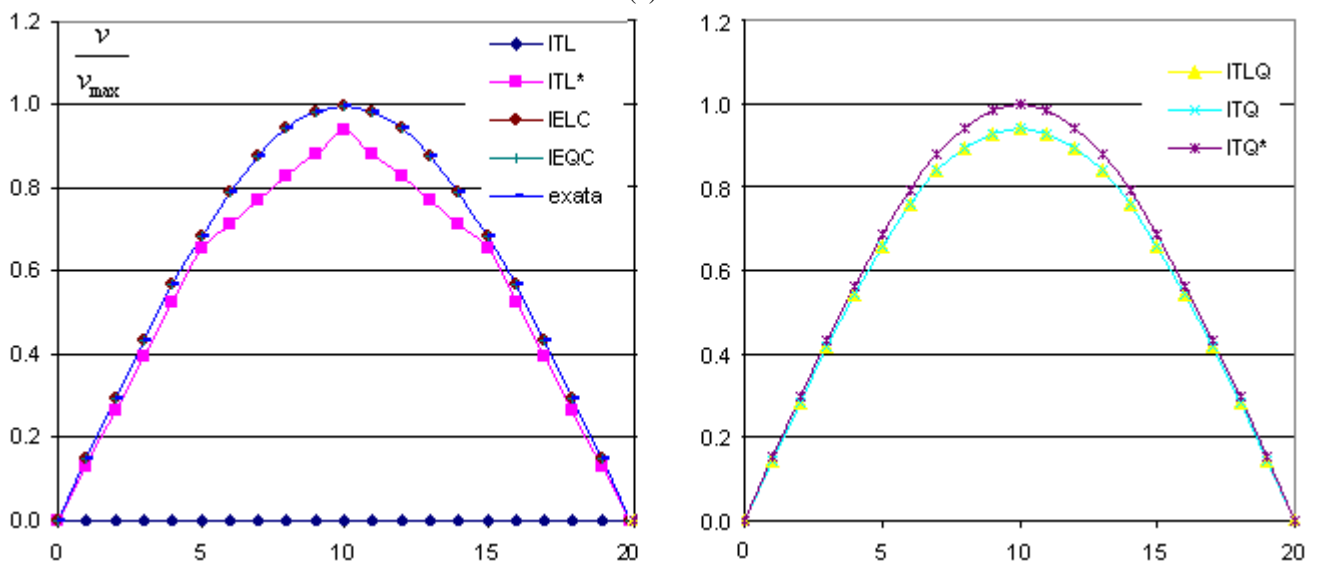
A rigidez da conexão pode ser obtida através do parâmetro αL dado e as propriedades físicas e geométricas das seções acima e abaixo da interface de contato definidas nas expressões 3.146 a 3.149. O objetivo da avaliação da viga mista para uma alta rigidez longitudinal da conexão ($\alpha L = 100$) é simular um problema de interação longitudinal onde o deslizamento na interface de contato entre os diferentes membros é muito pequeno, o que pode provocar em determinados elementos um erro na sua avaliação numérica (travamento por deslizamento).

Na análise analítica é desprezada a possibilidade de separação vertical na interface, sendo assim, é considerada na análise numérica uma rigidez muito grande na direção vertical ($E_{N_b} = 10^9 MPa$).

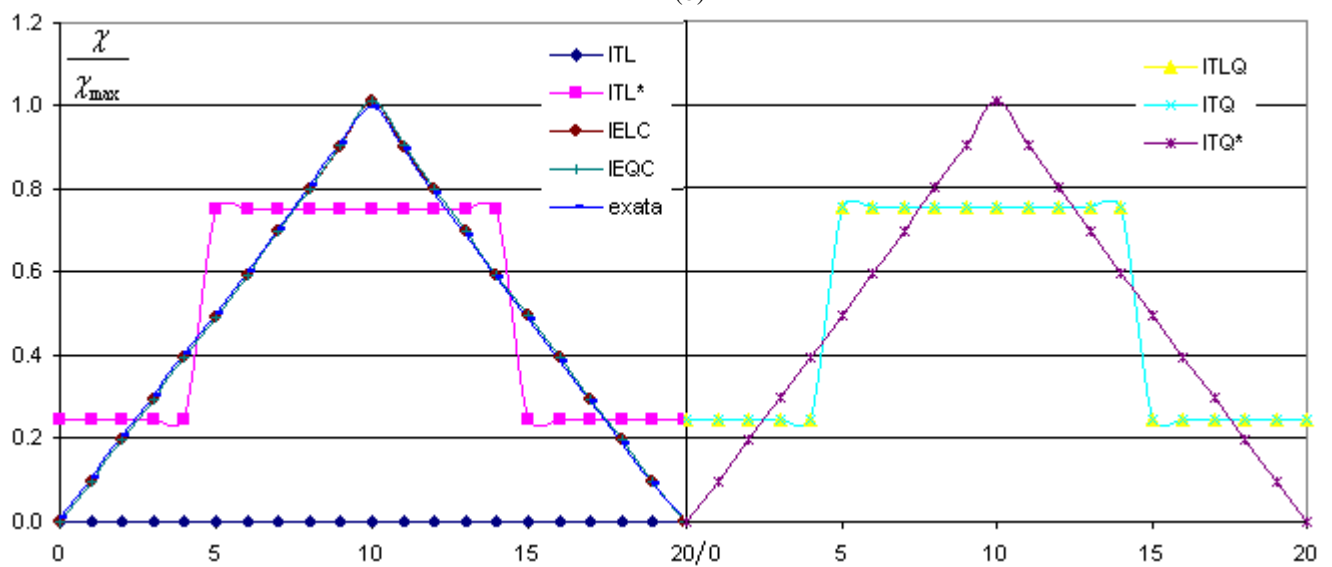
Os gráficos da figura 3.15 mostram os resultados numéricos para a variação do deslizamento, deslocamento vertical e curvatura, ao longo do eixo da viga bi-apoiada obtidos para os diferentes elementos implementados e para uma rigidez longitudinal da conexão baixa ($\alpha L = 1$). Os valores numéricos são normalizados em relação aos valores máximos obtidos pela solução analítica mostrada na tabela 3.6.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.15 – Variação do deslizamento (a), deslocamento vertical (b) e curvatura (c) ao longo do vão da viga mista ($\alpha L = 1$)

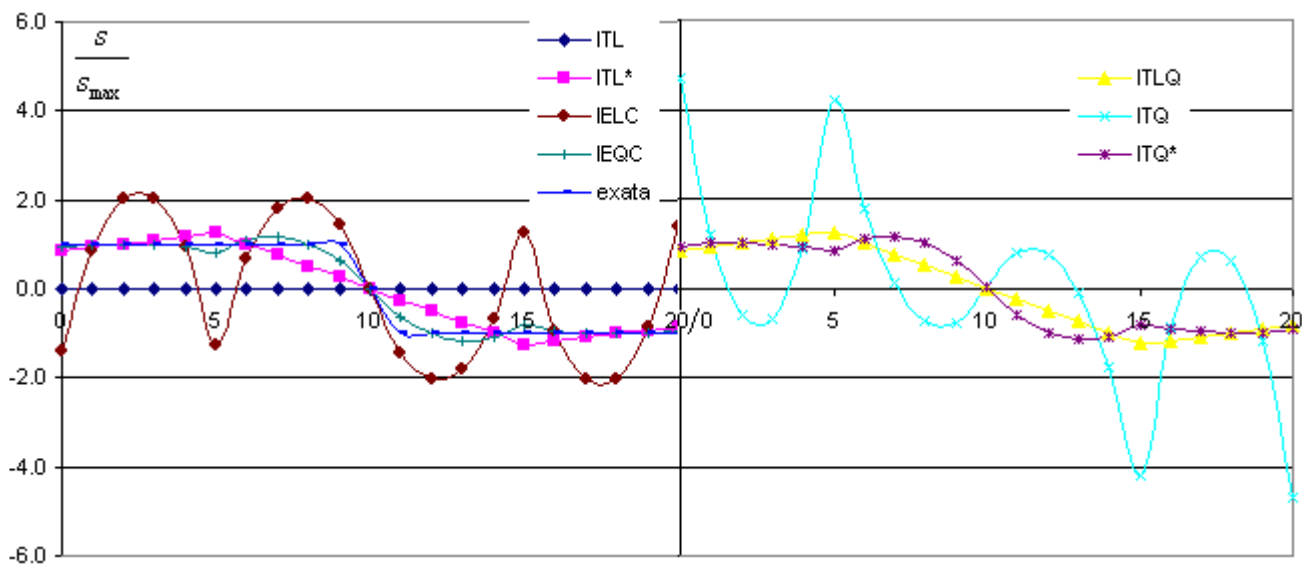
Os resultados da figura 3.15 mostram uma boa aproximação para os diferentes elementos implementados, exceto em relação ao elemento ITL. Sendo o elemento ITL praticamente igual ao elemento ITL* diferenciando apenas na interpolação das deformações por cisalhamento, onde no elemento ITL* é usada a técnica de deformação assumida descrita no item 3.5 deste capítulo, verifica-se devido aos resultados discrepantes para o elemento ITL e razoáveis para o elemento ITL* que o elemento ITL sofre o problema de travamento por cisalhamento. Pode-se verificar nos gráficos da figura 3.15 uma melhor aproximação para os elementos com polinômios interpoladores de maior grau, o que era esperado.

Observa-se na figura 3.15 que apesar do elemento ITQ apresentar respostas razoáveis, quando comparadas ao caso de rigidez elevada (figura 3.16), o elemento ITQ* apresenta respostas melhores. Como os dois elementos têm as mesmas funções interpoladoras, exceto para a deformação por cisalhamento que no caso do elemento ITQ* é usada a técnica de deformação por cisalhamento assumida, essa melhor resposta pode ser atribuída a um leve travamento por cisalhamento no elemento ITQ.

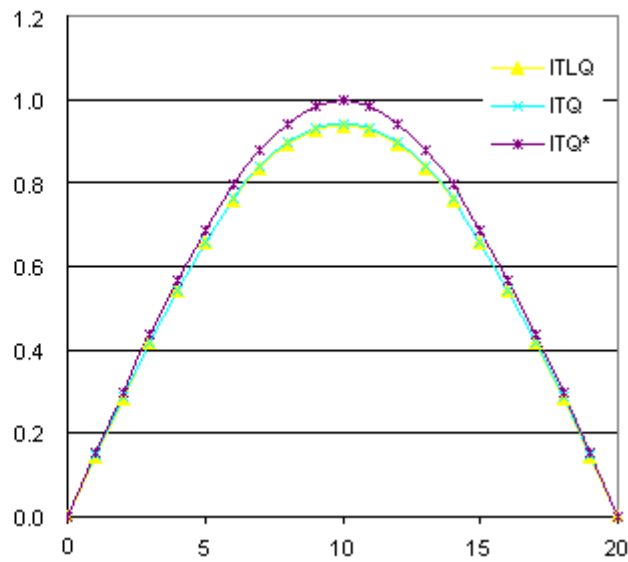
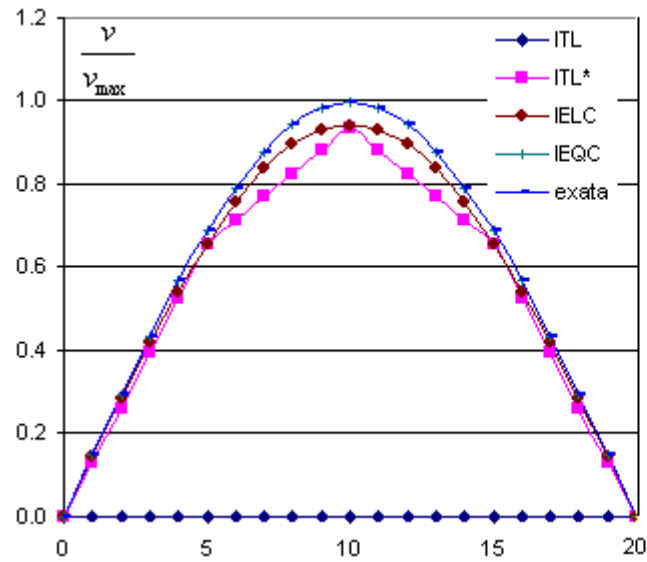
Tabela 3.6 – Valores máximos para solução analítica da viga mista da figura 3.14

	$\alpha L = 1$	$\alpha L = 100$
Deslizamento máximo (s_{\max}) (mm)	1.6617	0.0015
flecha máxima (w_{\max}) (mm)	25.00	9.707
Curvatura máxima (χ_{\max}) (mm^{-1})	0.7511	0.2798

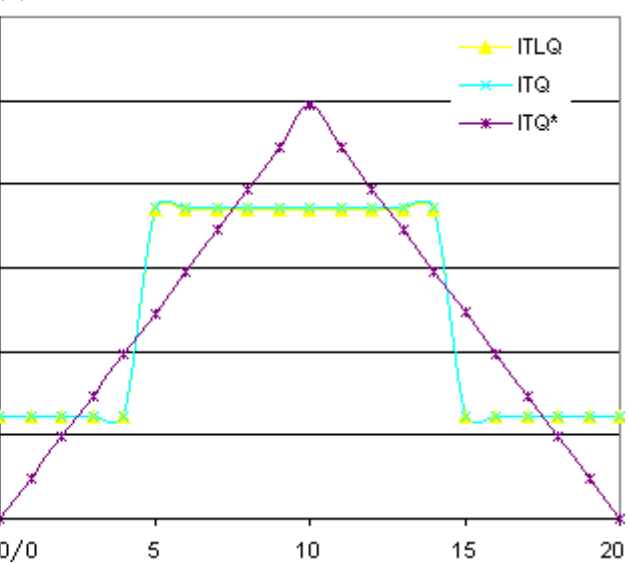
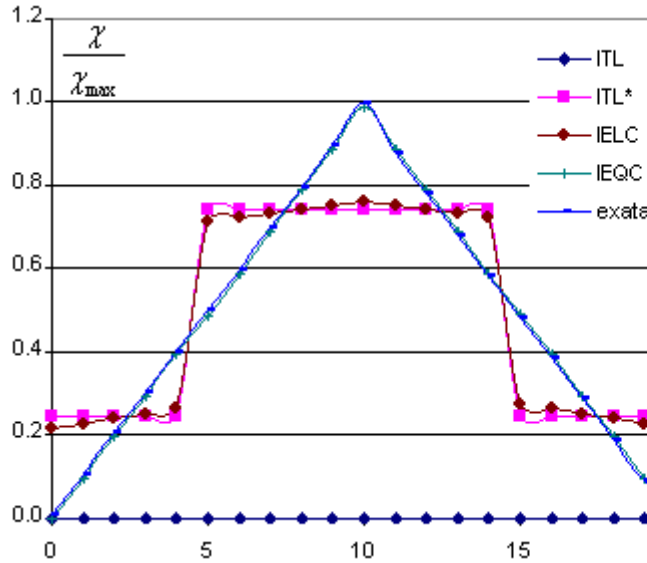
Os gráficos da figura 3.16 mostram os resultados numéricos para a variação ao longo do vão da viga mista do deslizamento, deslocamento vertical e curvatura, obtidos para os diferentes elementos implementados para uma rigidez longitudinal da conexão alta ($\alpha L = 100$). Assim como nos gráficos da figura 3.15, os valores numéricos são normalizados em relação aos valores máximos obtidos pela solução analítica mostrado na tabela 3.6.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.16 – Variação do deslizamento (a), deslocamento vertical (b) e curvatura (c) ao longo da viga mista ($\alpha L = 100$)

Devido aos polinômios interpoladores dos deslocamentos adotados para o elemento IELC (ver exemplo anterior) verifica-se uma incompatibilidade nos diferentes termos da equação do deslizamento (equação 3.1), o que não é verificado para o elemento IEQC. Essa incompatibilidade se deve a combinação de termos dados por polinômios de diferentes graus. Nesses casos problemas com alta rigidez da conexão geram erros numéricos já que os diferentes termos da equação do deslizamento não se anulam devido a esta incompatibilidade. Esse travamento por deslizamento é verificado na figura 3.16(a) para o elemento IELC, enquanto que o elemento IEQC apresenta resultados muito próximos dos esperados.

O elemento ITQ não possui incompatibilidade dos polinômios em relação ao deslizamento, no entanto a incompatibilidade dos polinômios em relação ao cisalhamento provoca pequenas diferenças em $\frac{dw}{dx}$ e θ , não suficientes para provocarem valores espúrios quando atuam sozinhas, como é verificado nos gráficos da figura 3.15, mas associado a uma alta rigidez da conexão geram resultado discrepantes daqueles esperados para o deslizamento na interface. Tal problema pode ser evitado usando a técnica de deformação assumida descrita no item 3.5 deste capítulo, como é observado através dos resultados obtido pelo elemento ITQ*.

A tabela 3.7 mostra os valores máximos para o deslizamento, deslocamento vertical e curvatura da viga mista da figura 3.14 obtidos através de uma análise numérica usando os diferentes elementos implementados neste trabalho.

Tabela 3.7 – Valores máximos para solução numérica da viga mista da figura 3.14

	$\alpha L = 1$			$\alpha L = 100$		
	s_{\max} (mm)	w_{\max} (mm)	χ_{\max} (m ⁻¹)	s_{\max} (mm)	w_{\max} (mm)	χ_{\max} (m ⁻¹)
ITL	2.904×10^{-6}	4.347×10^{-5}	-4.347×10^{-10}	5.715×10^{-9}	4.348×10^{-5}	-4.347×10^{-10}
ITL*	1.6695	23.492	-5.6457	0.001266	9.0993	-0.20699
ITLQ	1.6695	23.492	-5.6457	0.001266	9.0993	-0.20699
ITQ	1.6698	23.494	-5.6463	0.007037	9.1499	-0.20815
ITQ*	1.6617	25.001	-7.5576	0.001397	9.7063	-0.27675
IELC	1.6614	24.999	-7.5569	0.002103	9.1285	-0.21254
IEQC	1.6617	25.001	-7.5576	0.001397	9.7063	-0.27675

3.7.3 – Exemplo 3

A viga mista da figura 3.17 foi avaliada por Ranzi *et al.* (2006) com o objetivo de analisar seu comportamento para diferentes valores da rigidez normal na interface de contato entre os dois membros, ou seja, os casos em que a separação vertical não é desprezada. O mesmo será feito neste exemplo usando os elementos de interface implementados, verificando sua potencialidade em simular tanto os deslizamentos longitudinais quanto a separação vertical na interface de contato.

A viga está sujeita a uma carga concentrada, no meio do vão de 10m de comprimento, aplicada na seção abaixo da interface entre a laje de concreto e o perfil de aço. Este caso pode ser verificado na prática de estruturas mistas quando se tem uma viga apoiada na parte inferior de outra. A seção transversal é formada por uma laje de concreto de seção retangular (2300×200 (mm)) e um perfil de aço com dimensões da mesa superior, inferior e alma dadas por, respectivamente, 300×20 (mm), 1550×15 (mm) e 450×30 (mm). É adotado um módulo de deformação axial de 210000 MPa para o aço e 32400 MPa para o concreto.

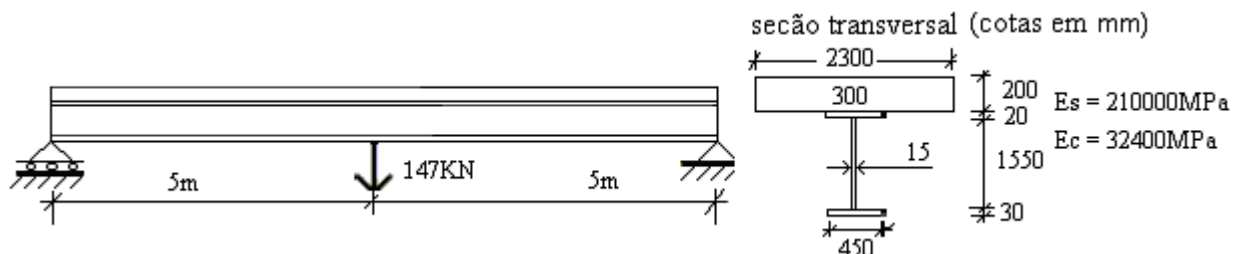


Figura 3.17 – Viga mista e seção transversal

A relação força horizontal por unidade de comprimento versus deslocamento relativo horizontal para a conexão deformável da viga mista é definida de acordo com o item 3.4.2 deste capítulo, sendo permitido uma função diferenciável qualquer definida em faixas de deslizamento, com continuidade na transição entre as faixas. Da mesma forma pode-se definir a relação força vertical por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical. Uma relação bi-linear, como mostra a figura 3.18, para a rigidez normal no vínculo de interface entre os dois membros da viga mista foi adotada no trabalho de Ranzi *et al.* (2006). Com o objetivo de validar os elementos de interface implementado em Silva (2006) e neste capítulo usando os resultados obtidos por Ranzi *et al.* (2006), essa

mesma relação bi-linear é adotada para simular o comportamento deformável na direção vertical.

Na figura 3.18, s_v indica o deslocamento relativo vertical do elemento de interface, sendo que s_v positivo indica uma separação entre os materiais e s_v negativo indica um contato (uma possível penetração) entre os materiais. N_b representa a força normal na interface por unidade de comprimento. A rigidez normal na conexão (E_{N_b}) é dividida na figura 3.18 em uma rigidez K_s quando há uma separação vertical entre os materiais, e uma rigidez K_b quando há uma possibilidade de penetração entre os materiais.

O problema de contato será considerado de forma simplificada, evitando a penetração entre os materiais através de uma rigidez normal K_b numericamente muito alta (penalidade). Já para a rigidez normal K_s foram feitas diversas análises, adotando valores proporcionais à rigidez longitudinal E_{S_b} , ou seja, $K_s = E_{S_b}$, $K_s = 5E_{S_b}$, $K_s = 10E_{S_b}$, $K_s = 100E_{S_b}$ e $K_s = 1000E_{S_b}$.

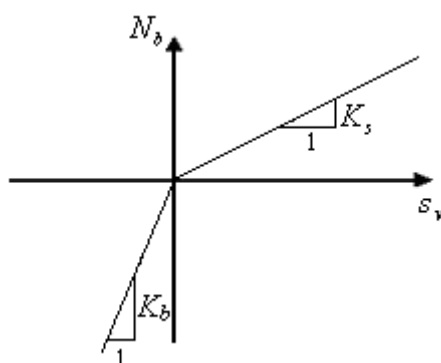


Figura 3.18 – Modelo constitutivo bi-linear para a conexão normal na interface

O exemplo da figura 3.17 foi analisado considerando para a rigidez longitudinal os parâmetros $\alpha L = 1$ e $\alpha L = 10$. O valor numérico da rigidez longitudinal E_{S_b} para esses dois parâmetros de rigidez podem ser obtidos das expressões 3.146 a 3.149 definidas no segundo exemplo deste capítulo, considerando as propriedades geométricas da seção transversal e as propriedades físicas dos materiais.

Os gráficos da figura 3.19 mostram os resultados obtidos para os deslocamentos verticais, deslizamento e curvatura para os dois casos de rigidez longitudinal.

Nesses gráficos estão apresentados resultados obtidos pelo autor, usando os elementos de interface baseado na teoria de viga de EB e de Timoshenko, e por Ranzi *et al.* (2006), que usa um elemento finito de viga de EB com 14 graus de liberdade, sendo

adotados polinômios cúbico (deslocamento transversal) e quadrático (deslocamento axial) para as funções de forma do elemento.

Neste exemplo foi usado o elemento IEQC (Silva, 2006) com interpolação quadrática para os deslocamentos axiais e cúbica para os deslocamentos transversais e rotações, o elemento ITQ, com interpolação quadrática para os deslocamentos axiais, transversais e rotações, e o elemento ITLQ, com interpolação linear para os deslocamentos axiais e rotações e quadrática para os deslocamentos transversais.

Na análise numérica usando os elementos implementados neste trabalho e em Silva (2006) foi utilizada uma malha de 32 elementos e o método de Newton-Raphson para solução do problema não linear. A não linearidade do problema se deve à relação bi-linear adotada para a rigidez vertical da conexão, como mostrada na figura 3.18. Já a solução numérica obtida por Ranzi *et al.* (2006) utiliza uma técnica iterativa que parte de uma malha de elementos finitos inicial e verifica, através de uma análise linear, os pontos onde há uma inversão dos deslocamentos relativos verticais. Esses pontos são inseridos na malha de elementos finitos atribuindo aos novos elementos uma rigidez vertical compatível com os deslocamentos relativos obtidos na iteração anterior. Esse processo é repetido até que a norma euclidiana dos ajustes entre os nós inseridos seja menor que uma tolerância estipulada.

Nos gráficos da figura 3.19 o eixo horizontal representa a relação entre a rigidez vertical (K_s) e a rigidez longitudinal (E_{s_p}). O eixo vertical representa uma diferença entre o deslocamento vertical no meio do vão do elemento de topo (seção de concreto) (w) com o mesmo valor obtido considerando uma interação total na direção vertical da conexão (w_n) (figura 3.19(a) e 3.19(b)). Para a figura 3.19(c) e 3.19(d), o eixo vertical representa a diferença entre a curvatura no meio do vão do elemento de topo (χ) com o mesmo valor obtido considerando uma interação total na direção vertical da conexão (χ_n). Já para a figura 3.19(e) e 3.19(f), o eixo vertical representa o deslizamento (s_l) na extremidade do vão adimensionalizado em relação ao deslocamento vertical do meio do vão (w_n) do elemento de topo, obtido considerando uma interação total na direção vertical da conexão.

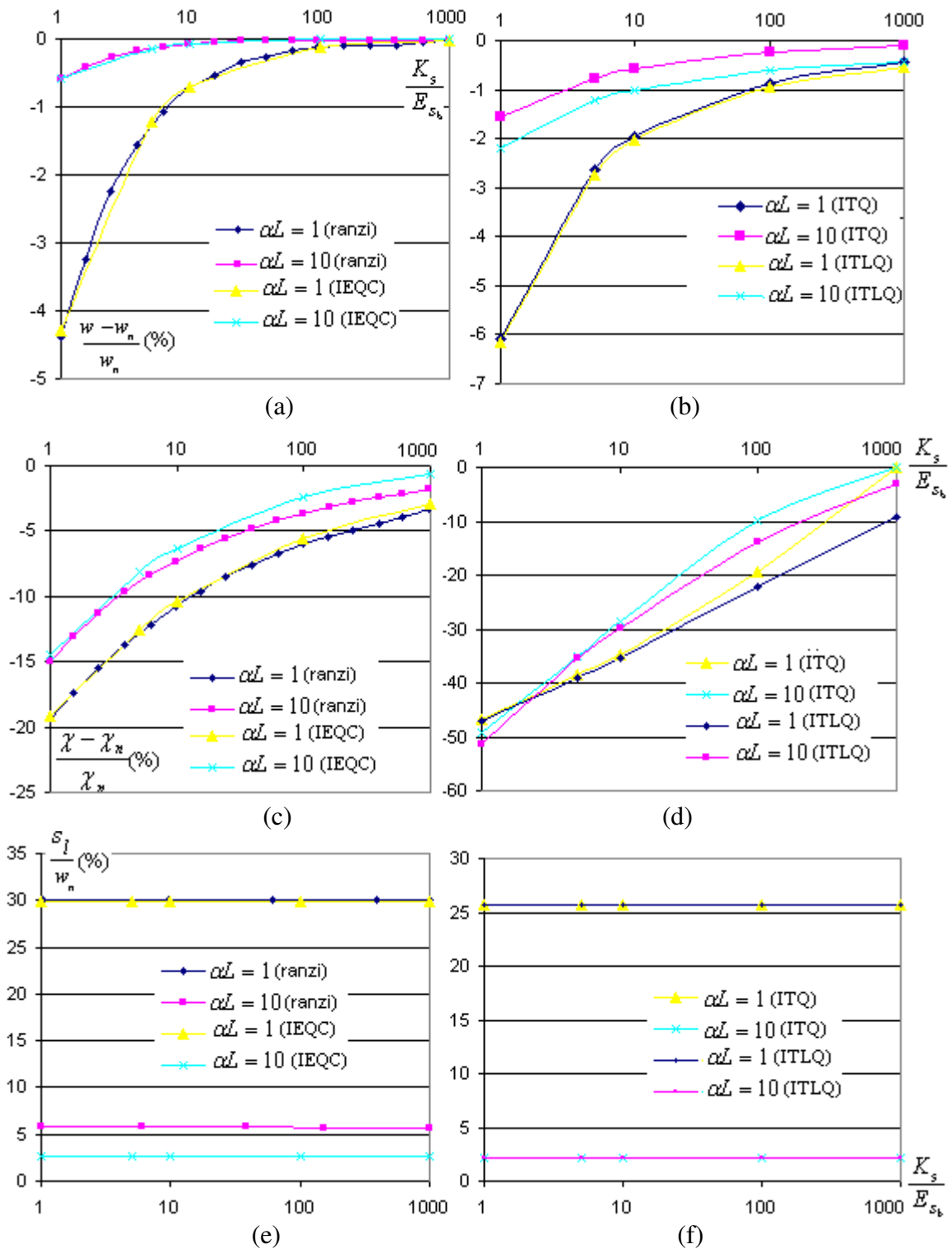


Figura 3.19 – Variação do deslocamento vertical (a), curvatura (b) e deslizamento (c) na viga mista em relação a rigidez vertical na conexão.

Observa-se dos gráficos da figura 3.19 que a diferença entre o deslocamento transversal considerando uma possibilidade de separação vertical na interface de contato e desconsiderando esta possibilidade, é da ordem de 3,5% para o caso de rigidez vertical igual à rigidez longitudinal. Esse valor é maior ainda para o caso de avaliação da curvatura,

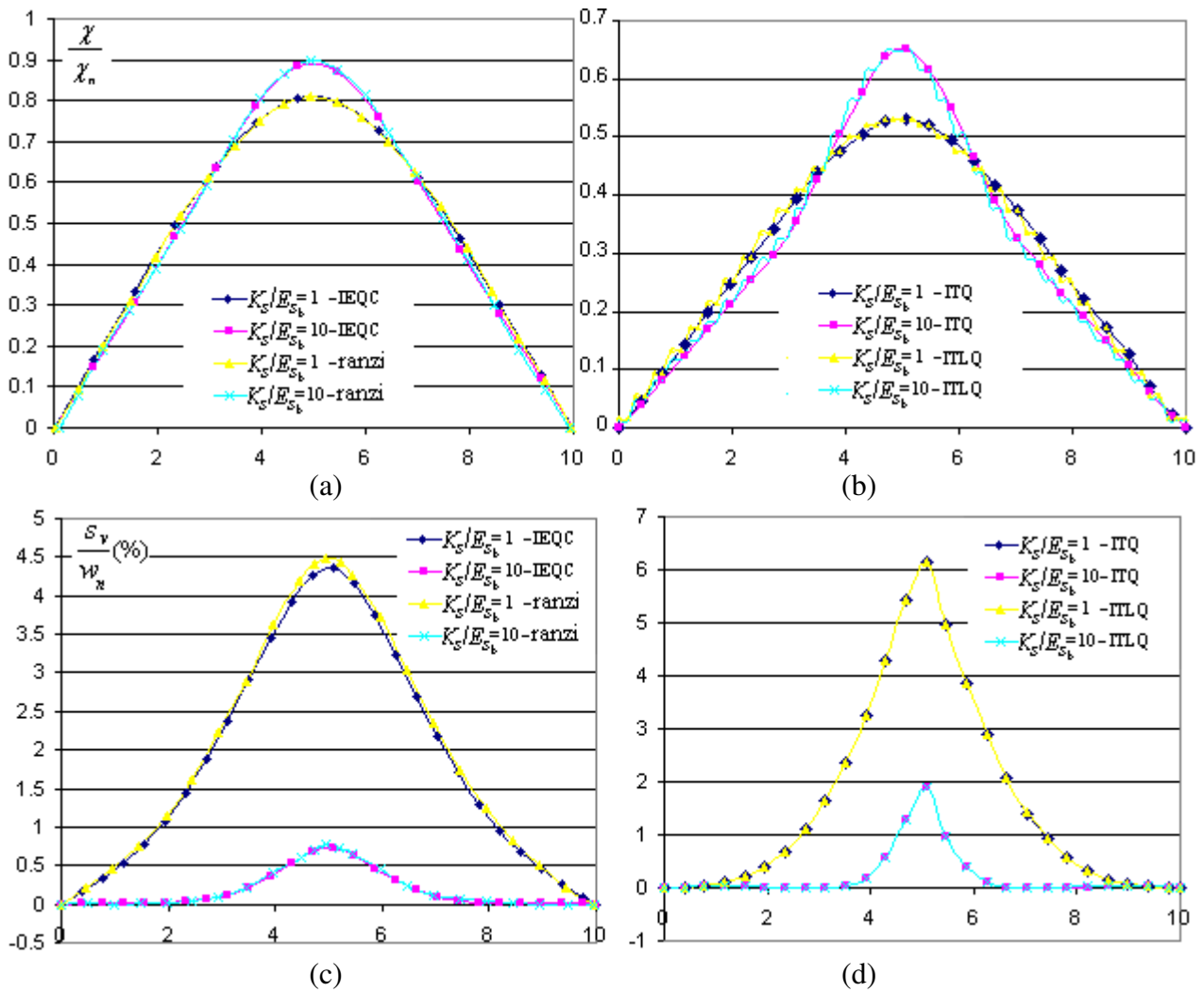


Figura 3.20 – Variação da curvatura (a e b) e separação vertical (c e d) ao longo da viga mista ($\alpha L = 1$)

chegando a um valor aproximado de 19%. Esse valor significativo para a curvatura, que está diretamente relacionado ao momento resistente da seção, motiva uma investigação do nível de rigidez vertical garantida pelos conectores mecânicos mais utilizados na prática da construção civil.

Do gráfico da figura 3.19(e) e 3.19(f) verifica-se que o deslocamento relativo horizontal (deslizamento) não sofre influência do nível de rigidez da conexão vertical, verificado no gráfico através de suas curvas constantes.

Pode ser observado dos gráficos da figura 3.19 que os resultados numéricos obtidos pelo elemento de interface implementado em Silva (2006) são praticamente coincidentes com os resultados numéricos obtidos pela formulação desenvolvida por Ranzi *et al.* (2006). Já os elementos implementados neste capítulo são baseados na teoria de viga de

Timoshenko e por isso não são comparados com os anteriores, que são baseados na teoria de viga de EB. No entanto, observa-se que os resultados entre os dois diferentes elementos de interface implementados neste trabalho são muito próximos entre si, e semelhante aos obtidos considerando a análise de viga de EB.

Os gráficos da figura 3.20 e 3.21 mostram as variações ao longo da viga mista da curvatura e da separação vertical para os dois casos de rigidez longitudinal da conexão deformável avaliada, $\alpha L = 1$ (figura 3.20) e $\alpha L = 10$ (figura 3.21), e dois diferentes níveis da rigidez vertical da conexão dada como uma proporção da rigidez longitudinal.

Nestes gráficos estão apresentados resultados obtidos pelo autor, usando os elementos de interface baseado na teoria de viga de EB e de Timoshenko, e por Ranzi *et al.* (2006). Os mesmos elementos descritos anteriormente são analisados nestes gráficos.

Nos gráficos da figura 3.20 e 3.21, o eixo horizontal representa uma variação ao longo do eixo da viga mista. No eixo vertical, χ representa a curvatura do elemento de topo, χ_n representa a curvatura do meio do vão do elemento de topo obtida considerando interação total na conexão vertical da interface de contato, s_v representa a separação vertical na interface de contato, e w_n o deslocamento vertical do meio do vão do elemento de topo obtido considerando interação total na conexão vertical da interface de contato.

Os gráficos da figura 3.20(a), 3.20(c), 3.21(a) e 3.21(c) mostram, mais uma vez, que os resultados numéricos obtidos pelo elemento de interface implementado em Silva (2006) são praticamente coincidentes com os resultados numéricos obtidos pela formulação desenvolvida por Ranzi *et al.* (2006). Já os gráficos da figura 3.20(b), 3.20(d), 3.21(b) e 3.21(d) são respectivamente equivalentes aos gráficos da figura 3.20(a), 3.20(c), 3.21(a) e 3.21(c), considerando na análise numérica a teoria de viga de Timoshenko. Observa-se que os resultados entre os dois diferentes elementos de interface implementados neste capítulo são muito próximos entre si, e semelhante aos obtidos considerando a análise de viga de EB.

Devido à carga concentrada no meio do vão do elemento abaixo da interface de contato (seção de aço), acontece uma separação vertical entre os membros, tendo seu valor máximo no meio do vão e diminuindo ao aproximar-se das extremidades, onde o problema passa a ser de contato. Esse comportamento é bem simulado pelos elementos implementados em Silva (2006), Ranzi *et al.* (2006) e os elementos implementados neste capítulo, como pode ser observado nos gráficos da figura 3.20(c), 3.20(d), 3.21(c) e 3.21(d). Observa-se também que a distribuição da separação vertical ao longo do vão da

viga mista é tão mais concentrada no meio do vão quanto maior for a rigidez vertical na conexão, o que é esperado. O ponto de transição entre separação vertical e contato coincide com o ponto de mudança de curvatura provocando pequenos momentos negativos próximos aos apoios da viga mista como pode ser observado no gráfico da figura 3.21(a).

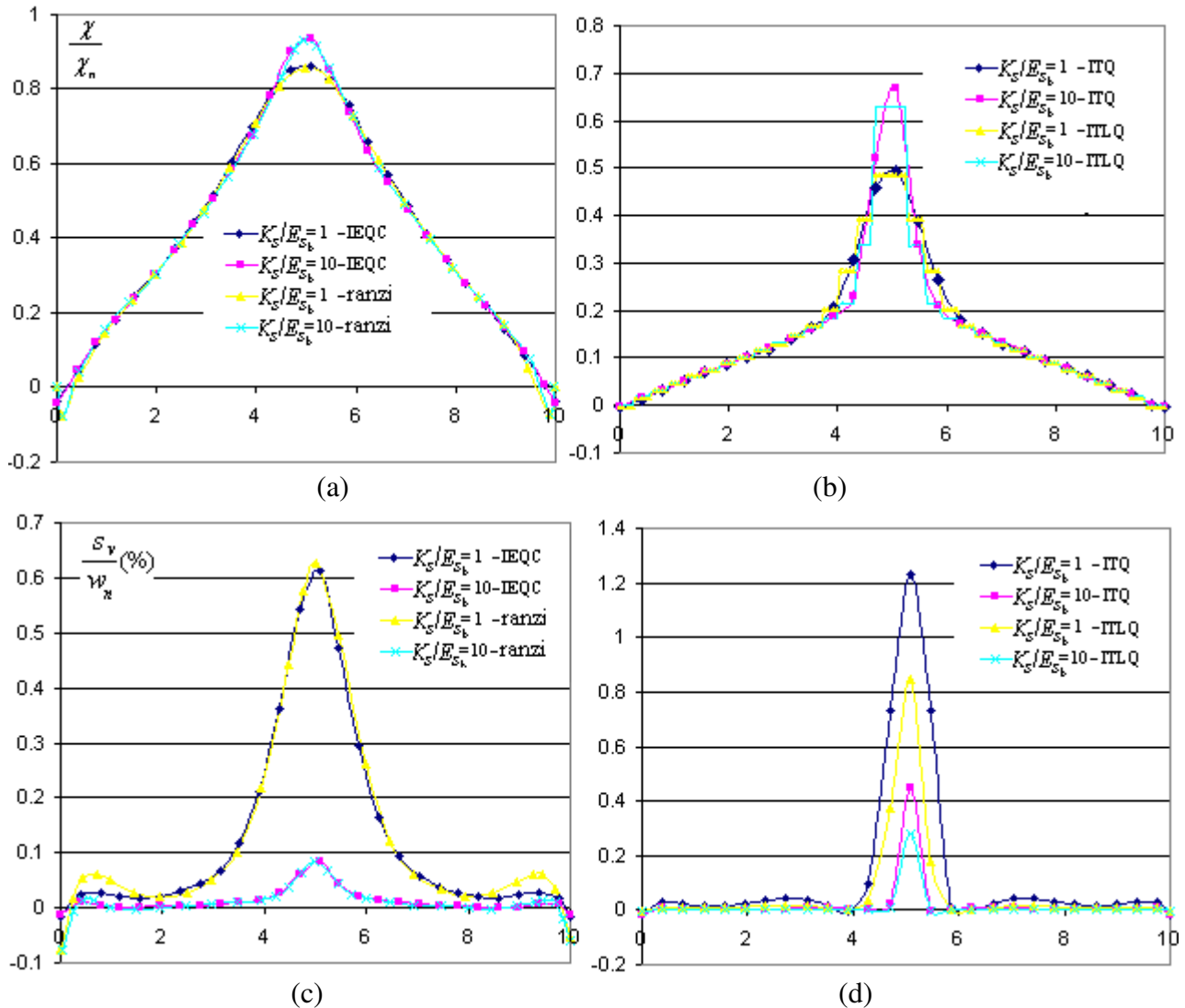


Figura 3.21 – Variação da curvatura (a e b) e separação vertical(c e d) ao longo da viga mista ($\alpha L = 10$)

3.8 – RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo foi proposta uma família de elementos de interface que, associados aos respectivos elementos de viga, simulam o comportamento de vigas formadas por dois membros com conexão deformável, considerando a deformação por cisalhamento e uma possível separação vertical na interface de contato entre os dois membros. Os elementos

implementados neste trabalho são testados e comparados com soluções analíticas considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli (EB) e, de forma mais precisa, por uma análise bi-dimensional considerando estado plano de tensões (Girhammar e Gopu, 1993, Xu e Wu, 2007).

A maioria dos trabalhos encontrados sobre vigas mistas com interação parcial utiliza a teoria de viga de EB na formulação dos elementos finitos. No entanto, para problemas com uma baixa relação vão da viga versus altura da seção, ou com esforços de cisalhamento predominantes, as considerações da teoria de viga de EB podem causar erros significativos. Nesses casos a teoria de viga de Timoshenko produz resultados mais próximos da realidade como foi verificado no primeiro exemplo deste capítulo.

Problemas de travamento por cisalhamento ou deslizamento são comuns em análise numérica de vigas formadas por dois membros com conexão deformável. Tais erros numéricos podem acontecer devido a uma rigidez elevada na conexão longitudinal, devido a uma deformação por cisalhamento muito pequena, ou uma combinação destes. Os diferentes elementos implementados neste capítulo foram avaliados em condições propícias ao surgimento desses problemas numéricos.

O problema da análise numérica usando a teoria de viga de Timoshenko está na definição das funções interpoladoras dos deslocamentos do elemento. Para casos onde a deformação por cisalhamento não é significativa, ou seja, a rotação da seção é muito próxima da derivada do deslocamento transversal, uma não compatibilidade dos polinômios interpoladores destes deslocamentos pode causar erros grandes na análise numérica, como foi verificado para o elemento isoparamétrico linear de Timoshenko (ITL). A técnica de deformação por cisalhamento assumida mostrou-se eficiente na eliminação de problemas de travamento por cisalhamento em elementos isoparamétricos.

Pode-se concluir que o elemento isoparamétrico quadrático com deformação por cisalhamento assumida (ITQ*) fornece as melhores análises numéricas considerando possíveis travamentos em relação ao cisalhamento ou deslizamento. O elemento isoparamétrico quadrático (ITQ) não apresenta problema de travamento por cisalhamento significativo em situações de baixa rigidez da conexão da interface. No entanto, resultados discrepantes daqueles esperados para o deslizamento na interface são observados quando esse efeito está associado a uma alta rigidez da conexão.

Os elementos de interface implementados foram utilizados na simulação numérica de uma viga mista simplesmente apoiada com carga concentrada aplicada no meio do vão e no elemento abaixo da interface de conexão, com o objetivo de verificar a capacidade

destes elementos em simular, além do deslocamento relativo horizontal, um deslocamento relativo vertical. Esse tipo de problema pode ser encontrado na prática da construção civil em vigas mistas de aço-concreto que suportam vigas secundárias ligadas à seção de aço. Diferentes combinações de rigidez foram consideradas para conexão deformável. Uma lei constitutiva baseada em uma curva bi-linear foi utilizada para representar a relação força vertical por unidade de comprimento versus deslocamento relativo vertical, sendo considerada uma rigidez muito grande quando o deslocamento relativo vertical for negativo (tentativa de penetração entre os materiais).

Os resultados mostram uma boa capacidade dos elementos de interface avaliados em representar a variação, ao longo da viga mista, da curvatura e da separação vertical na conexão. Valores máximos para o deslocamento transversal, deslizamento longitudinal na conexão e curvatura, foram avaliados para diferentes valores da rigidez vertical na conexão. Desta avaliação observou-se que o deslizamento longitudinal não sofre influência da rigidez vertical da conexão, já o deslocamento vertical e a curvatura no elemento de topo sofrem esta influência, sendo mais significativa neste último. Por esta razão, mais trabalhos experimentais e numéricos são necessários na avaliação dos efeitos da interação parcial transversal na distribuição dos esforços internos em sistemas estruturais mistos, principalmente em sistemas estruturais complexos com tipologias diversas.

Os elementos foram implementados considerando a não linearidade física. A extensão das formulações para uma análise não linear geométrica pode ser feita sem grandes alterações.

VIGAS MISTAS COM MÚLTIPLAS CAMADAS

Neste capítulo é apresentada uma extensão da equação diferencial de Newmark para simular problemas particulares de vigas mistas com um número qualquer de interfaces de deslizamento. Também é verificada a capacidade do elemento de interface em avaliar numericamente problemas de vigas mistas com múltiplas camadas. Nos exemplos serão comparadas soluções analíticas de problemas de vigas mistas considerando mais de um plano de deslizamento com soluções numéricas usando os elementos de interface implementados neste trabalho.

4.1 – INTRODUÇÃO

O problema de elementos mistos com múltiplas camadas, ou seja, mais de um plano de deslizamento longitudinal, é relevante em engenharia. Por exemplo, na prática da construção civil, elementos estruturais envolvendo mais de um plano de deslizamento longitudinal podem ser encontrados em vigas de madeira formadas por chapas pregadas ou coladas, vigas mistas formadas por uma laje de concreto, um perfil metálico do tipo I e uma chapa de aço ligada à mesa inferior do perfil I, e vigas sanduíches formadas por uma seção de concreto entre duas chapas de aço. No entanto, o problema mais comum encontrado no dia a dia de um engenheiro civil é o caso de uma laje de concreto ligada por meio de conectores a uma viga de aço, ou seja, duas camadas e um plano de deslizamento. Assim a maioria das pesquisas sobre o assunto refere-se ao problema de vigas com interação parcial longitudinal e um plano de deslizamento.

Uma revisão bibliográfica de trabalhos relevantes sobre vigas mistas com interação parcial considerando múltiplas camadas foi feita no item 2.3 do capítulo 2. Dentre esses trabalhos pode-se destacar o trabalho de Goodman e Popov (1968), onde foi usado o modelo de Newmark modificado para analisar problemas de vigas simplesmente apoiadas formada por três chapas de madeira conectadas (dois planos de deslizamento) por meio mecânico com seções transversais retangulares e iguais. Outro trabalho considerando solução analítica para vigas com múltiplas camadas foi desenvolvido por Ranzi (2008), que propõe um modelo linear genérico usando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Em sua formulação forte, o autor define um conjunto de equações diferenciais que governam o problema envolvendo condições de contorno, deslocamentos longitudinais e transversais e suas respectivas derivadas.

Em relação à análise numérica, Heinisuo (1988) propôs uma formulação de elemento finito para três e cinco membros conectados com algumas limitações na forma e propriedades da seção transversal. Baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli, Ranzi (2008) desenvolveu uma formulação de elementos finitos considerando diferentes esquemas de interpolação e um número qualquer de camadas para a seção. Problemas de travamento devido à curvatura foram investigados verificando que há uma necessidade de interpolação quadrática para os deslocamentos axiais, considerando uma interpolação cúbica para os deslocamentos transversais, para evitar o efeito de travamento devido à curvatura.

Este capítulo consiste no desenvolvimento de uma extensão da equação diferencial de Newmark (Newmark *et al.*, 1951), que simula o problema de vigas mistas com dois membros ligados por uma conexão deformável longitudinal, para simular o problema de vigas mistas particulares com um número qualquer de interfaces de deslizamento longitudinal (múltiplas camadas). A verificação da capacidade do elemento de interface implementado em Silva (2006) e no capítulo 3 deste trabalho em simular o problema de viga mista com múltiplas camadas é avaliada comparando as soluções numéricas, obtidas por estes elementos, com as respectivas soluções analíticas, obtidas usando a formulação desenvolvida.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. No item 4.2 é apresentada uma dedução para a extensão da equação diferencial de Newmark para análise de vigas mistas com n interface de deslizamentos longitudinais. Nos itens seguintes, é demonstrada a técnica de solução das equações dos deslizamentos para uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ planos de deslizamento. No item 4.6,

são apresentadas comparações entre as soluções exatas e numéricas para os exemplos analisados. E, por último, no item 4.7, é apresentado um resumo e conclusões deste capítulo.

4.2 – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE NEWMARK PARA n INTERFACES DE DESLIZAMENTO

Ranzi (2008), usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, desenvolveu uma formulação analítica para vigas mistas com n camadas chegando a equações diferenciais em termos dos deslocamentos axiais, transversais e dos deslizamentos. Essa formulação é resumidamente apresentada a seguir com simplificações em termos de carregamento externo e considerando n interfaces.

A figura 4.1 mostra um elemento de viga deformado com $n+1$ membros conectados e n interfaces de deslizamento. Na formulação do problema considera-se que seções planas e ortogonais à linha neutra antes da deformação permanecem planas e ortogonais após a deformação (teoria de viga de Euler-Bernoulli). É desconsiderada a possibilidade de separação vertical, o que resulta em deslocamentos transversais e suas derivadas iguais para todas as seções. De acordo com estas considerações, a equação para o deslizamento em uma interface de índice i qualquer é

$$s_i(x) = u_{i+1}^0 - u_i^0 + h_i w'. \quad (4.1)$$

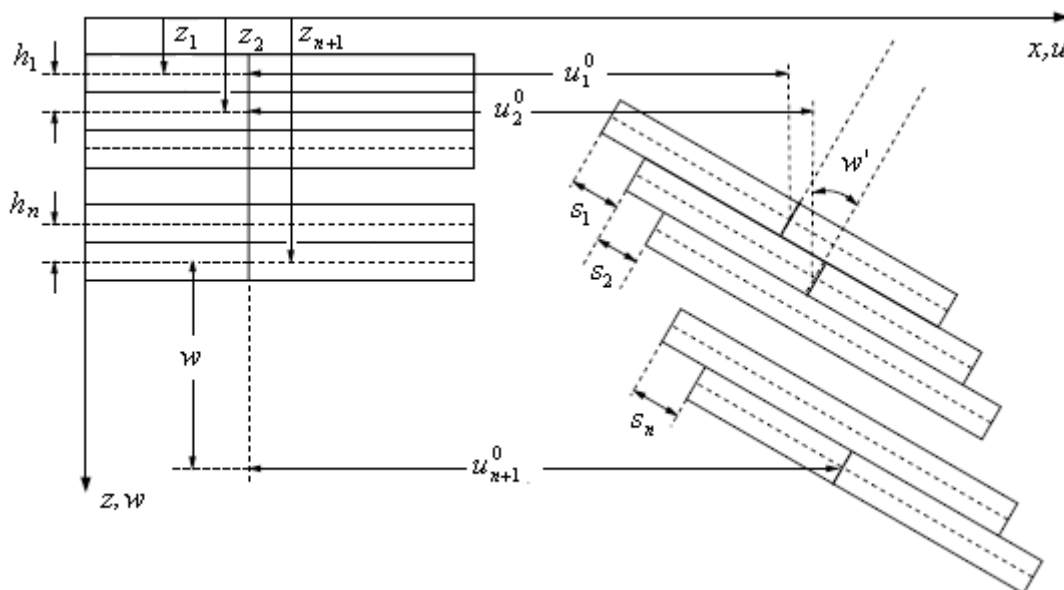


Figura 4.1 – Elemento de viga mista com múltiplas camadas deformado

Na Equação anterior, i varia de 1 até n , onde n é o número de interfaces de deslizamento, e $h_i = z_{i+1} - z_i$, onde z_i é a posição do eixo de referência da seção i em relação ao eixo x qualquer, como mostrado na figura 4.1. Já u_i^0 é o deslocamento axial do ponto de interseção entre a seção plana ortogonal i e o seu eixo de referência, e w' é a rotação da seção. O sobrescrito 0 indica um eixo de referência adotado para os diferentes membros da seção composta e será omitido nas equações seguintes para facilitar a notação.

Para a teoria de viga de EB as equações dos deslocamentos axiais e verticais para os diferentes membros ($i = 1, \dots, n+1$) são dadas por

$$u_i(x, y) = u_i(x) - (z - z_i)w'(x) \text{ e} \quad (4.2)$$

$$w(x, y) = w(x). \quad (4.3)$$

Derivando a equação 4.2 em relação a x obtém-se a expressão para a deformação axial nas diferentes camadas, ou seja,

$$\varepsilon_i(x, y) = u_i(x, y)_{,x} = u_i'(x) - (z - z_i)w''(x). \quad (4.4)$$

Aplicando-se um campo de deformação virtual compatível a um elemento de viga analisado tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais, a expressão

$$\sum_{i=1}^{n+1} \iiint_V \sigma_i \delta \varepsilon_i dV + \sum_{i=1}^n \int_0^L S_{bi} \delta s_i dx = \int_0^L q \delta w dx. \quad (4.5)$$

Na definição da equação 4.5 é admitido carregamento externo apenas na direção transversal ao eixo da viga e S_{bi} é a taxa de variação da força de cisalhamento na interface de índice i de contato entre os diferentes membros.

Definindo $EI_0 = \sum_{i=1}^{n+1} E_i I_i$ e integrando por partes a expressão 4.5, chega-se às n equações diferenciais em termos dos deslocamentos axiais, transversais e deslizamentos dadas abaixo.

$$EI_0 \frac{d^4 w}{dx^4} - \sum_{i=1}^n E_{S_b i} h_i \left(\frac{du_{i+1}}{dx} - \frac{du_i}{dx} + h_i \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q. \quad (4.6)$$

$$EA_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} + E_{S_b i} \underbrace{\left(u_{i+1} - u_i + h_i \frac{dw}{dx} \right)}_{s_i} - E_{S_b i-1} \underbrace{\left(u_i - u_{i-1} + h_{i-1} \frac{dw}{dx} \right)}_{s_{i-1}} = 0 \quad (4.7)$$

Nas expressões 4.6 e 4.7 $EA_i = E_i A_i$ e $E_{S_b i}$ é uma constante que caracteriza a rigidez da conexão longitudinal na interface de contato entre os membros i e $i+1$, com i variando de 1 até n .

As equações diferenciais dadas pelas expressões 4.6 e 4.7 são definidas em função dos diferentes deslocamentos u_i e v , o que dificulta a sua solução analítica. Baseado na formulação da equação diferencial para vigas formadas por dois membros (uma interface de deslizamento), foi desenvolvida neste trabalho uma formulação que condensa as equações diferenciais em função apenas dos deslizamentos.

A figura 4.2 mostra o diagrama de forças atuantes em um elemento de viga de comprimento infinitesimal com n interfaces de deslizamento. As expressões 4.8 e 4.10 abaixo são, respectivamente, as equações de equilíbrio de momento da primeira e última seção da figura 4.2, e a expressão 4.9 representa as equações de equilíbrio de momento para as demais seções.

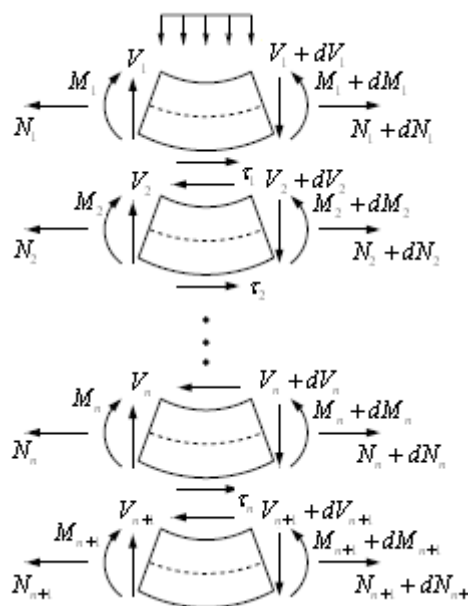


Figura 4.2 – Forças em um elemento infinitesimal de viga mista com múltiplas camadas

$$\frac{dM_1}{dx} = V_1 - \tau_1 h_1^b \quad (4.8)$$

$$\frac{dM_i}{dx} = V_i - \tau_{i-1} h_i^t - \tau_i h_i^b \quad (4.9)$$

$$\frac{dM_{n+1}}{dx} = V_{n+1} - \tau_n h_{n+1}^t \quad (4.10)$$

Somando membro a membro as equações 4.8 a 4.10, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{dM_i}{dx} = \sum_{i=1}^{n+1} V_i - \sum_{i=1}^n \tau_i (h_i^b + h_{i+1}^t). \quad (4.11)$$

Nas expressões 4.8 a 4.11, h_i^b e h_i^t são, respectivamente, as distâncias entre o eixo de referência da seção i e as fibras mais abaixo e mais acima da seção. Portanto, $h_i = h_i^b + h_{i+1}^t$, onde h_i é como definido na expressão 4.1, logo:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{dM_i}{dx} = \sum_{i=1}^{n+1} V_i - \sum_{i=1}^n \tau_i h_i. \quad (4.12)$$

Como $\sum_{i=1}^{n+1} V_i$ é igual ao cortante atuante na seção x analisada ($V(x)$) e $M_i = E_i I_i \chi$, onde $\chi = -w''$, portanto,

$$\frac{dM_i}{dx} = E_i I_i \frac{d\chi}{dx}, \text{ e} \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} E_i I_i \frac{d\chi}{dx} = V(x) - \sum_{i=1}^n \tau_i h_i.$$

Da derivada da expressão 4.1 em relação a x , chega-se a expressão

$$\frac{ds_i}{dx} = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i - h_i \chi. \quad (4.14)$$

Na expressão anterior, ε_i é a deformação axial no eixo de referência da seção i . Considerando uma relação linear entre tensão e deformação, tem-se:

$$\varepsilon_i = \frac{N_i}{E_i A_i}. \quad (4.15)$$

Admitindo uma relação linear entre a força cortante longitudinal por unidade de comprimento, representada por τ_i na figura 4.2, e o deslizamento (s_i) na interface de contato entre as seções i e $i+1$, ou seja, no plano de deslizamento i , e sendo $E_{S_b,i}$ a rigidez longitudinal da conexão na interface i , então

$$\tau_i = E_{S_b,i} s_i.$$

As expressões 4.16 e 4.18 a seguir representam as equações de equilíbrio de forças horizontais da primeira e última seção da figura 4.2, e a expressão 4.17 representa as demais equações de equilíbrio de forças horizontais.

$$dN_1 = -\tau_1 dx \quad \rightarrow \quad \frac{dN_1}{dx} = -E_{S_b,1} s_1 \quad (4.16)$$

$$dN_i = -(\tau_i - \tau_{i-1}) dx \quad \rightarrow \quad \frac{dN_i}{dx} = -E_{S_b,i} s_i + E_{S_b,i-1} s_{i-1} \quad (4.17)$$

$$dN_{n+1} = \tau_n dx \quad \rightarrow \quad \frac{dN_{n+1}}{dx} = E_{S_b,n} s_n \quad (4.18)$$

Substituindo τ_i por $E_{S_b,i} s_i$ em 4.13 e definindo $(EI)_0 = \sum_{i=1}^{n+1} E_i I_i$, chega-se à expressão

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{V(x) - \sum_{i=1}^n E_{S_b,i} s_i h_i}{(EI)_0}. \quad (4.19)$$

Derivando a expressão 4.14 em relação a x e usando a expressão 4.15, tem-se:

$$\frac{d^2 s_i}{dx^2} = -\frac{1}{(EA)_i} \frac{dN_i}{dx} + \frac{1}{(EA)_{i+1}} \frac{dN_{i+1}}{dx} - h_i \frac{d\chi}{dx} \quad (4.20)$$

Na expressão anterior, $(EA)_i = E_i A_i$. Substituindo as expressões 4.16 a 4.19 em 4.20, chega-se às seguintes equações diferenciais,

$$\frac{d^2 s_1}{dx^2} = \frac{E_{S_b1} s_1}{(EA)_1} - \frac{E_{S_b2} s_2 - E_{S_b1} s_1}{(EA)_2} + h_1 \frac{-V(x) + \sum_{i=1}^n E_{S_b i} s_i h_i}{(EI)_0}, \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2 s_i}{dx^2} = \frac{E_{S_b i} s_i - E_{S_b i-1} s_{i-1}}{(EA)_i} - \frac{E_{S_b i+1} s_{i+1} - E_{S_b i} s_i}{(EA)_{i+1}} + h_i \frac{-V(x) + \sum_{j=1}^n E_{S_b j} s_j h_j}{(EI)_0} \quad e \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2 s_n}{dx^2} = \frac{E_{S_b n} s_n - E_{S_b n-1} s_{n-1}}{(EA)_n} + \frac{E_{S_b n} s_n}{(EA)_{n+1}} + h_n \frac{-V(x) + \sum_{j=1}^n E_{S_b j} s_j h_j}{(EI)_0}. \quad (4.23)$$

Note que na expressão 4.22, i varia de 2 até $n-1$. Escrevendo as expressões 4.21 a 4.23 na sua forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{s}'' + \mathbf{D}\mathbf{s} = -\frac{V(x)}{(EI)_0} \mathbf{h}. \quad (4.24)$$

Em que, \mathbf{s}'' , \mathbf{s} e \mathbf{h} são, respectivamente, vetores de ordem n cujos termos são dados por $\frac{d^2 s_i}{dx^2}$, s_i e h_i , e $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$ é uma matriz quadrada de ordem n , sendo \mathbf{D}_1 uma matriz tri-diagonal dada por

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{E_{S_b1}}{(EA)_{1,2}} & \frac{E_{S_b2}}{(EA)_2} & & & & & \\ \frac{E_{S_b1}}{(EA)_2} & -\frac{E_{S_b2}}{(EA)_{2,3}} & \frac{E_{S_b3}}{(EA)_3} & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & \frac{E_{S_b i-1}}{(EA)_i} & -\frac{E_{S_b i}}{(EA)_{i,i+1}} & \frac{E_{S_b i+1}}{(EA)_{i+1}} & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

onde $\frac{1}{(EA)_{i,j}} = \frac{1}{(EA)_i} + \frac{1}{(EA)_j}$, e \mathbf{D}_2 uma matriz cheia com termos dados por

$$\mathbf{D}_{2ij} = -\frac{h_i h_j E_{s_b j}}{(EI)_0}.$$

A expressão 4.24 define um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em relação ao deslizamento que modelam o problema de vigas mistas com interação parcial longitudinal e um número qualquer de planos de deslizamentos, considerando a teoria de viga de EB. Demonstra-se agora que esse mesmo sistema de equações diferenciais representa o problema considerando a teoria de viga de Timoshenko.

A equação do deslizamento em uma interface qualquer de uma viga mista com múltiplas camadas considerando a teoria de viga de Timoshenko é dada por

$$s_i(x) = u_{i+1}(x) - u_i(x) + (y_{i+1} - h_i)\theta_{i+1}(x) - (y_i - h_i)\theta_i(x). \quad (4.26)$$

A deformação por cisalhamento na seção transversal retangular de área A em uma viga com módulo de deformação transversal G e sujeita a um esforço cortante V , é dada por:

$$\gamma = \frac{6}{5} \frac{V}{GA}. \quad (4.27)$$

Na equação anterior é considerada a aproximação de deformação por cisalhamento constante na seção. Considerando que o cortante atuante (V) na seção transversal mista é dividido entre as camadas de acordo com a sua rigidez em relação à deformação por cisalhamento, pode-se escrever,

$$V_i = \frac{G_i A_i}{(GA)_0} V, \quad (4.28)$$

em que G_i e A_i são, respectivamente, o módulo de deformação por cisalhamento e área da camada i e $(GA)_0 = \sum_{i=1}^{n+1} G_i A_i$. Assim a deformação por cisalhamento em uma camada qualquer de índice i é:

$$\gamma_i = \frac{6}{5} \frac{V_i}{G_i A_i} = \frac{6}{5} \frac{V}{(GA)_0}. \quad (4.29)$$

A equação anterior mostra que γ é a mesma para as diferentes camadas da seção mista. Da relação $\gamma_i = -\theta_i + w'$, verifica-se que, se γ e w' são as mesmas para as diferentes camadas, então θ também será, logo $\theta_i = \theta_{i+1} = \theta$. Como $h_i = y_{i+1} - y_i$, onde y_i é a posição do eixo de referência da seção i em relação ao eixo x qualquer (ver figura 4.1), então a equação 4.26 para o deslizamento torna-se

$$s_i(x) = u_{i+1}^0 - u_i^0 + h_i \theta \quad (4.30)$$

Considerando $\chi = -\theta'$ e substituindo w' por θ na formulação anterior chega-se à mesma expressão 4.24 para o sistema de equações diferenciais ordinária de segunda ordem em relação ao deslizamento considerando a teoria de viga de Timoshenko. Neste caso as teorias de viga de EB e de Timoshenko apresentam as mesmas equações para o deslizamento, porém as equações para deslocamento transversal serão diferentes.

Determinada a expressão para o deslizamento para as diferentes camadas obtida da solução do sistema de equações diferenciais dada pela expressão 4.24 e conhecida a expressão para o cortante ao longo da viga mista, o deslocamento v para a uma viga de EB pode ser obtido integrando duas vezes a expressão $\chi = -w''$, onde χ é obtida da expressão 4.19. As condições de contorno do problema devem ser usadas para encontrar as constantes de integração.

Para a teoria de viga de Timoshenko os deslocamentos podem ser obtidos através da expressão para a deformação por cisalhamento ao longo da viga mista dada por

$$\gamma = -\theta + w'. \quad (4.31)$$

Conhecida a expressão para o esforço cortante ao longo da viga mista ($V(x)$) obtém-se γ da expressão 4.29. Como θ pode ser obtido integrando uma vez a expressão $\chi = -\theta'$, onde χ é determinada de forma análoga ao caso de teoria de viga de EB, a expressão para o deslocamento transversal da viga mista considerando a teoria de viga de Timoshenko pode ser determinada integrando a equação 4.31. As condições de contorno do problema devem ser usadas para encontrar as constantes de integração.

A principal vantagem dessa formulação em comparação com a formulação apresentada por Ranzi (2008), descrita de forma simplificada no início deste item, é a obtenção de um sistema de equações diferenciais dependente apenas dos deslizamentos nas interfaces entre os diferentes membros (expressão 4.24). Na formulação mais geral apresentada por Ranzi (2008), o sistema de equações diferenciais é dependente dos diferentes deslocamentos u_i e w (expressão 4.6 e 4.7). Uma desvantagem da formulação apresentada neste trabalho é a necessidade de determinação da expressão para o deslizamento mesmo que se queira apenas a expressão para o deslocamento transversal, ou curvatura ao longo da viga de múltiplas camadas.

4.3 – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA UM PLANO DE DESLIZAMENTO ($n = 1$)

A solução analítica em termos da variação do deslizamento ao longo de uma viga mista bi-apoiada uniformemente carregada com duas camadas ligadas por uma conexão deformável pode ser obtida usando a formulação definida no item anterior considerando $n = 1$, ou seja, viga mista com apenas uma interface de deslizamento.

Tomando $n = 1$ na expressão 4.24, tem-se:

$$s'' - \left(\frac{1}{(EA)_1} + \frac{1}{(EA)_2} + \frac{h^2}{(EI)_0} \right) E_{S_b} s = - \frac{V(x)}{(EI)_0} h. \quad (4.32)$$

A expressão do cortante para uma viga bi-apoiada de vão L e uniformemente carregada com carga q é dada por $V(x) = q(L/2 - x)$, substituindo na expressão 4.32 e definindo $(EA)^* = \frac{(EA)_1(EA)_2}{(EA)_1 + (EA)_2}$, chega-se à expressão:

$$s'' - \left(\frac{1}{EA^*} + \frac{h^2}{(EI)_0} \right) E_{S_b} s = - \frac{qh}{(EI)_0} \left(\frac{L}{2} - x \right). \quad (4.33)$$

Definindo $(EI)^* = (EI)_0 + h^2(EA)^*$, $\alpha^2 = \frac{E_{S_b}(EI)^*}{(EA)^*(EI)_0}$ e substituindo na expressão 4.33,

chega-se a equação diferencial ordinária de segunda ordem para o deslizamento ao longo da viga mista dada por

$$s''' - \alpha^2 s = -\frac{qh}{(EI)_0} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (4.34)$$

A solução da equação diferencial dada pela expressão 4.34 é:

$$s(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + \frac{qh}{\alpha^2 (EI)_0} \left(x - \frac{L}{2} \right). \quad (4.35)$$

A expressão 4.35 descreve a equação do deslizamento ao longo da interface de contato entre as duas seções da viga mista. As constantes C_1 e C_2 podem ser obtidas, para o caso particular da viga simplesmente apoiada, através das condições de contorno de derivada do deslizamento nula nas extremidades. Essa mesma expressão foi obtida por Sousa Jr. e Silva (2007) através da equação diferencial de Newmark (Newmark *et al.*, 1951) em sua forma tradicional.

4.4 – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DOIS PLANOS DE DESLIZAMENTO ($n = 2$)

A solução analítica em termos da variação do deslizamento ao longo de uma viga mista bi-apoiada uniformemente carregada com três membros ligados por duas conexões longitudinalmente deformáveis pode ser obtida usando a formulação definida no item 4.2 deste capítulo considerando $n = 2$, ou seja, viga mista com duas interfaces de deslizamento.

Tomando $n = 2$ na expressão 4.24, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1'' + D_{11}s_1 + D_{12}s_2 = -\frac{h_1}{(EI)_0} V(x) \\ s_2'' + D_{21}s_1 + D_{22}s_2 = -\frac{h_2}{(EI)_0} V(x) \end{array} \right\} \quad (4.36)$$

A equação diferencial de quarta ordem dada pela expressão 4.37 é obtida isolando s_2 na primeira equação do sistema da expressão 4.36 e substituindo s_2 e s_2'' na segunda equação do sistema.

$$as_1^{(iv)} + bs_1'' + cs_1 = dV(x) + eV''(x) \quad (4.37)$$

Na expressão 4.37, $a = -\frac{1}{D_{12}}$, $b = -\left(\frac{D_{11}}{D_{12}} + \frac{D_{22}}{D_{12}}\right)$, $c = D_{21} - \frac{D_{22}D_{11}}{D_{12}}$,

$$d = \frac{D_{21}h_1}{D_{12}(EI)_0} - \frac{h_2}{(EI)_0} \text{ e } e = \frac{h_1}{D_{12}(EI)_0}.$$

Determinada s_1 através da equação diferencial 4.37, s_2 pode ser determinada através de uma das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem do sistema de equações diferenciais dado pela expressão 4.36.

Para encontrar a solução da equação diferencial homogênea de quarta ordem referente a equação diferencial da expressão 4.37 faz-se $s_1^h = e^{\lambda x}$, portanto $s_1^{h''} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ e $s_1^{h^{(iv)}} = \lambda^4 e^{\lambda x}$, substituindo na homogênea da equação 4.37, tem-se

$$(a\lambda^4 + b\lambda^2 + c\lambda)e^{\lambda x} = 0. \quad (4.38)$$

A expressão 4.38 só tem solução se $a\lambda^4 + b\lambda^2 + c\lambda = 0$, fazendo $\omega = \lambda^2$ esta expressão terá solução quando $\omega = \omega_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $\omega = \omega_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, portanto, se $\lambda = \pm\sqrt{\omega_i}$. Dependendo dos valores de a , b e c , a solução da homogênea da equação 4.37 pode assumir combinações das funções $e^{\lambda x}$, $x^n e^{\lambda x}$, $\cos(\lambda x)$ e $\sin(\lambda x)$. Como a intenção deste trabalho é obter a solução exata de um dado problema para poder posteriormente comparar com a solução numérica obtida através do elemento de interface, pode-se escolher as variáveis do problema de forma a se obter $\omega_i > 0$ e, portanto

$$s_1^h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x}. \quad (4.39)$$

4.4.1 – Viga bi-apoiada uniformemente carregada

Para o problema de viga bi-apoiada de vão L e uniformemente carregada com carga q a expressão para o cortante é linear dada pela equação $V(x) = q(L/2 - x)$, portanto $V''(x) = 0$ e a expressão para s_1 é dada por

$$as_1^{(iv)} + bs_1'' + cs_1 = dq(L/2 - x). \quad (4.40)$$

Uma solução particular da equação diferencial 4.40 é da forma $s_1^p = Ax + B$.

Portanto, $s_1^{p'''} = 0$ e $s_1^{p^{(iv)}} = 0$, substituindo na equação 4.36, tem-se $A = -\frac{dq}{c}$ e $B = \frac{dqL}{2c}$.

Logo, a solução da equação diferencial 4.38 é dada por:

$$s_1 = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i x} + Ax + B. \quad (4.41)$$

Derivando s_1 duas vezes e substituindo na primeira equação do sistema de equações diferenciais dada pela expressão 4.36 determina-se a expressão para s_2 dada por

$$s_2 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i C_i e^{\lambda_i x} + Cx + D, \quad (4.42)$$

$$\text{em que, } \alpha_i = -\frac{\lambda_i^2 + D_{11}}{D_{12}}, \quad C = \frac{\frac{qh_1}{(EI)_0} - D_{11}A}{D_{12}} \quad \text{e} \quad D = -\frac{D_{11}B + \frac{qh_1 L}{2(EI)_0}}{D_{12}}.$$

As constantes C_i podem ser determinadas através das condições de contorno de curvatura nula e forças normais ausentes nas extremidades da viga bi-apoiada, que resultam em derivada do deslizamento nula ($s_i'(x) = 0$) em $x = 0$ e $x = L$. A imposição destas duas condições de contorno para as duas equações do deslizamento define um sistema de quatro equações e quatro incógnitas dado pela expressão 4.43.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 & \alpha_3 \lambda_3 & \alpha_4 \lambda_4 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 L} & \lambda_2 e^{\lambda_2 L} & \lambda_3 e^{\lambda_3 L} & \lambda_4 e^{\lambda_4 L} \\ \alpha_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 L} & \alpha_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 L} & \alpha_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 L} & \alpha_4 \lambda_4 e^{\lambda_4 L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ -C \\ -A \\ -C \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Resolvendo o sistema 4.43 determinam-se as constantes C_i das equações para os deslizamentos dadas pelas expressões 4.41 e 4.42. Substituindo essas expressões na equação da derivada da curvatura ao longo da viga mista dada pela expressão 4.19 para $n = 2$, tem-se

$$\frac{d\chi}{dx} = \sum_{i=1}^4 \beta_i C_i e^{\lambda_i x} + Ex + F, \quad (4.44)$$

$$\text{onde } \beta_i = \frac{E_{S_{b,1}}h_1 + E_{S_{b,2}}h_2\alpha_i}{(EI)_0}, E = \frac{E_{S_{b,1}}h_1A + E_{S_{b,2}}h_2C + q}{(EI)_0} \text{ e } F = \frac{2E_{S_{b,1}}h_1B + 2E_{S_{b,2}}h_2D - qL}{2(EI)_0}.$$

Os deslocamentos considerando análise de viga de EB podem ser obtidos substituindo $\chi = -w''$ na equação da curvatura ao longo da viga mista, obtida da integração da equação 4.44, e integrando a equação resultante duas vezes. As constantes de integração são obtidas usando as condições de contorno de deslocamento e curvatura nulos nas extremidades da viga bi-apoiada. A expressão a seguir mostra o deslocamento da viga mista bi-apoiada uniformemente carregada com dois planos de deslizamentos considerando a teoria de viga de EB, ou seja,

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i e^{\lambda_i x}}{\lambda_i^3} + \frac{Ex^4}{24} + \frac{Fx^3}{6} + \frac{C_5 x^2}{2} + C_6 x + C_7. \quad (4.45)$$

$$\text{Na equação 4.45, } C_5 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i}{\lambda_i}, C_6 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i e^{\frac{\lambda_i L}{2}}}{\lambda_i^2} - \frac{EL^3}{48} - \frac{FL^2}{8} - \frac{C_5 L}{2} \text{ e}$$

$$C_7 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i}{\lambda_i^3}.$$

A equação dos deslocamentos considerando análise de viga de Timoshenko pode ser obtida integrando duas vezes a equação determinada pela substituição de

$$\chi = \frac{6}{5} \frac{V'(x)}{(GA)_0} - w''(x) \quad (4.46)$$

na equação da curvatura ao longo da viga mista, obtida da integração da equação 4.44. A equação 4.46 é obtida usando as relações definidas nas equações 4.29 e 4.31 e lembrando que na formulação do problema considerando teoria de viga de Timoshenko tem-se $\chi = -\theta'$. As constantes de integração são obtidas usando as condições de contorno citadas anteriormente. A expressão a seguir fornece o deslocamento transversal da viga mista bi-apoiada uniformemente carregada com dois planos de deslizamentos considerando a teoria de viga de Timoshenko, ou seja,

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i e^{\lambda_i x}}{\lambda_i^3} + \frac{Ex^4}{24} + \frac{Fx^3}{6} + \left(C_5 + \frac{6q}{5GA} \right) \frac{x^2}{2} + \left(C_6 - \frac{3qL}{5GA} \right) x + C_7. \quad (4.47)$$

4.4.2 – Viga bi-apoiada com carga concentrada no meio do vão

Para o problema de viga bi-apoiada de vão L carregada com uma carga P concentrada no meio do vão, a expressão para o cortante é dada pela equação $V(x) = P/2$, portanto $V''(x) = 0$ e a expressão para s_1 é dada por

$$as_1^{(iv)} + bs_1'' + cs_1 = dP/2. \quad (4.48)$$

Para evitar a descontinuidade do cortante ao longo da viga utiliza-se da simetria do problema e apenas metade da viga é analisada. Uma solução particular da equação diferencial 4.48 é da forma $s_1^p = A$. Portanto, $s_1^{p''} = 0$ e $s_1^{p^{(iv)}} = 0$, substituindo na equação 4.48, tem-se $A = \frac{dP}{2c}$. Logo, a solução da equação diferencial 4.48 é dada por

$$s_1 = \sum_{i=1}^4 C_i e^{\lambda_i x} + A. \quad (4.49)$$

Derivando s_1 duas vezes e substituindo na primeira equação do sistema de equações diferenciais dada pela expressão 4.36 determina-se a expressão para s_2 dada por

$$s_2 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i C_i e^{\lambda_i x} + B. \quad (4.50)$$

$$\text{Onde, } \alpha_i = -\frac{\lambda_i^2 + D_{11}}{D_{12}}, \quad B = -\frac{D_{11}A}{D_{12}} - \frac{dP}{2D_{12}(EI)_0}.$$

As constantes C_i podem ser determinadas através das condições de contorno de curvatura nula e forças normais ausentes no apoio simples, que resulta em derivada do deslizamento nula ($s_i'(0) = 0$), e na condição de deslizamento nulo no apoio de engaste com translação livre ($s_i(L/2) = 0$). A imposição destas duas condições de contorno para as duas equações do deslizamento define um sistema de quatro equações e quatro incógnitas dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 & \alpha_3 \lambda_3 & \alpha_4 \lambda_4 \\ e^{\lambda_1 L/2} & e^{\lambda_2 L/2} & e^{\lambda_3 L/2} & e^{\lambda_4 L/2} \\ \alpha_1 e^{\lambda_1 L/2} & \alpha_2 e^{\lambda_2 L/2} & \alpha_3 e^{\lambda_3 L/2} & \alpha_4 e^{\lambda_4 L/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -A \\ -B \end{Bmatrix}. \quad (4.51)$$

Resolvendo o sistema 4.51 determinam-se as constantes C_i das equações para os deslizamentos. Substituindo essas expressões na equação da derivada da curvatura ao longo da viga mista dada pela expressão 4.19 para $n = 2$, tem-se:

$$\frac{d\chi}{dx} = \sum_{i=1}^4 \beta_i C_i e^{\lambda_i x} + D, \quad (4.52)$$

$$\text{em que } \beta_i = \frac{E_{S_b1} h_1 + E_{S_b2} h_2 \alpha_i}{(EI)_0} \text{ e } D = \frac{E_{S_b1} h_1 A + E_{S_b2} h_2 B - P/2}{(EI)_0}.$$

Os deslocamentos considerando análise de viga de EB podem ser obtidos substituindo $\chi = -w''$ na equação da curvatura ao longo da viga, obtida da integração da equação 4.52, e integrando a equação resultante duas vezes. As constantes de integração são obtidas usando as condições de deslocamento e curvatura nulos no apoio simples e da derivada do deslocamento transversal nula no apoio de engaste com translação vertical livre. A expressão a seguir fornece o deslocamento da viga mista bi-apoiada com carga concentrada no meio do vão com dois planos de deslizamentos considerando a teoria de viga de EB, ou seja,

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i e^{\lambda_i x}}{\lambda_i^3} + \frac{Dx^3}{6} + \frac{C_5 x^2}{2} + C_6 x + C_7. \quad (4.53)$$

$$\text{Na equação 4.53, } C_5 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i}{\lambda_i}, \quad C_6 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i e^{\lambda_i L/2}}{\lambda_i^2} - \frac{DL^2}{8} - \frac{C_1 L}{2} \text{ e } C_7 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i}{\lambda_i^3}.$$

A equação dos deslocamentos considerando análise de viga de Timoshenko pode ser obtida integrando a equação

$$w'(x) = \frac{6}{5(GA)_0} V(x) - \theta(x). \quad (4.54)$$

As constantes de integração são obtidas usando as condições de contorno citadas anteriormente. A expressão a seguir fornece o deslocamento transversal da viga mista bi-apoiada com carga concentrada no meio do vão com dois planos de deslizamentos considerando a teoria de viga de Timoshenko, ou seja,

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i C_i e^{\lambda_i x}}{\lambda_i^3} + \frac{Dx^3}{6} + C_5 \frac{x^2}{2} + \left(C_6 - \frac{3P}{5(GA)_0} \right) x + C_7. \quad (4.55)$$

4.5 – SOLUÇÃO PARA TRÊS OU MAIS PLANOS DE DESLIZAMENTO ($n = 3$)

A solução analítica do sistema de equações diferenciais dada pela expressão 4.24 torna-se bastante complexa quando se tem um número de planos de deslizamento maior ou igual a três. De uma maneira geral nestes casos o sistema de equações diferenciais pode ser resolvido através de um procedimento numérico. No entanto, se a matriz \mathbf{D} da expressão 4.24 puder ser diagonalizada, ou seja, existe um espaço vetorial onde a representação da matriz \mathbf{D} seja diagonal, o sistema de n equações diferenciais e n incógnitas, dadas pelas derivadas dos deslizamentos, pode ser desacoplado em n equações diferenciais, cada uma dependente apenas de uma incógnita do deslizamento, definidas neste novo espaço vetorial.

Substituindo na expressão 4.24 o caso particular de $n = 3$, tem-se

$$\begin{bmatrix} s_1'' \\ s_2'' \\ s_3'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = -\frac{V(x)}{(EI)_0} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Para o caso de rigidez longitudinal da conexão igual para os três planos de deslizamento ($E_{s_{b,1}} = E_{s_{b,2}} = E_{s_{b,3}} = E_{s_b}$) a matriz \mathbf{D} da expressão 4.56 torna-se simétrica e, portanto, pode-se determinar uma matriz $\bar{\mathbf{D}}$ formada por autovetores unitários LI (linearmente independentes) de \mathbf{D} , para a qual demonstra-se que $\bar{\mathbf{D}}^T$ é a inversa de $\bar{\mathbf{D}}$ e que $\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}^*$, onde \mathbf{D}^* é uma matriz diagonal com seus termos dados pelos autovalores λ da matriz \mathbf{D} . Não há necessidade de que \mathbf{D} seja simétrica para que seja diagonalizável, no entanto, a simetria garante que seus autovalores sejam reais.

Determinados os autovalores e autovetores de \mathbf{D} a mudança de variável dada por $\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{s}$, logo $\bar{\mathbf{s}}'' = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{s}''$, transforma a equação 4.56 na forma

$$\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{s}}'' + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{s}} = -\frac{V(x)}{(EI)_0}\mathbf{h}. \quad (4.57)$$

Pré multiplicando ambos os lados da igualdade da equação 4.57 por $\bar{\mathbf{D}}^T$, tem-se

$$\bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{s}}'' + \bar{\mathbf{D}}^T\bar{\mathbf{D}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{s}} = -\frac{V(x)}{(EI)_0}\bar{\mathbf{D}}^T\mathbf{h}, \text{ ou seja,}$$

$$\bar{\mathbf{s}}'' + \mathbf{D}^*\bar{\mathbf{s}} = -\frac{V(x)}{(EI)_0}\bar{\mathbf{D}}^T\mathbf{h}. \quad (4.58)$$

Na expressão 4.58 a matriz \mathbf{D}^* é diagonal com seus termos não nulos dados pelos autovalores de \mathbf{D} , logo a expressão 4.58 pode ser dividida em três equações cada uma dependente de apenas uma das três expressões para o deslizamento ao longo da viga mista, como é dada pela expressão 4.59, onde $h_i^* = \bar{D}_{ji}h_j$.

$$\bar{s}_i'' + \lambda_i\bar{s}_i = -\frac{V(x)}{(EI)_0}h_i^* \quad (4.59)$$

4.5.1 – Viga bi-apoiada uniformemente carregada

Para o problema de viga bi-apoiada de vão L e uniformemente carregada com carga q a expressão para o esforço cortante é linear e dada pela equação $V(x) = q(L/2 - x)$. Substituindo na equação 4.59 e resolvendo a equação diferencial ordinária de segunda ordem, tem-se

$$\bar{s}_i = C_{0i}e^{\alpha x} + C_{1i}e^{-\alpha x} - \frac{qh_i^*}{\lambda_i(EI)_0}x + \frac{qh_i^*L}{2\lambda_i(EI)_0}, \quad (4.60)$$

onde $\alpha_i = \sqrt{-\lambda_i}$. As constantes da equação 4.60 podem ser obtidas da condição de derivada do deslizamento nula nas extremidades da viga, logo

$$C_{0i} = \frac{qh_i^*}{\lambda_i \alpha_i (EI)_0} \left(\frac{1 - e^{\alpha_i L}}{1 - e^{2\alpha_i L}} \right) \text{ e } C_{1i} = \frac{qh_i^*}{\lambda_i \alpha_i (EI)_0} \left(\frac{e^{2\alpha_i L} - e^{\alpha_i L}}{1 - e^{2\alpha_i L}} \right). \quad (4.61)$$

Já a expressão para o deslizamento nas três interfaces de contato da viga mista, solução do sistema de equações diferenciais da expressão 4.56, podem ser obtidas desfazendo a mudança de variável através da expressão 4.62.

$$s_i = \bar{D}_{ij} \bar{s}_j \quad (4.62)$$

4.5.2 – Viga bi-apoiada com carga concentrada no meio do vão

Para o problema de viga bi-apoiada de vão L com carga concentrada P no meio do vão a expressão para o cortante é dada por

$$V(x) = \begin{cases} \frac{P}{2} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{P}{2} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}. \quad (4.63)$$

Substituindo a expressão 4.63 em 4.59 e resolvendo a equação diferencial ordinária de segunda ordem considerando a simetria do problema em relação ao meio do vão, tem-se

$$\bar{s}_i(x) = C_{0i} e^{\alpha x} + C_{1i} e^{-\alpha x} + \frac{Ph_i^*}{2\lambda_i (EI)_0}, \quad (4.64)$$

onde $\alpha_i = \sqrt{-\lambda_i}$ e $0 < x < \frac{L}{2}$. As constantes da equação 4.64 podem ser obtidas da condição de derivada do deslizamento nula na extremidade da viga e de deslizamento nulo no meio do vão, logo

$$C_{0i} = C_{1i} = -\frac{Ph_i^*}{\lambda_i (EI)_0} \left(\frac{1}{e^{\frac{\alpha_i L}{2}} + e^{-\frac{\alpha_i L}{2}}} \right). \quad (4.65)$$

Da condição de simetria do problema, tem-se $\bar{s}_i(x) = -\bar{s}_i(L-x)$ para $\frac{L}{2} < x < L$. Já a expressão para o deslizamento nas três interfaces de contato da viga mista, solução do

sistema de equações diferenciais da expressão 4.56, podem ser obtidas desfazendo a mudança de variável através da expressão 4.62.

4.6 – ANÁLISE NUMÉRICA

O problema de viga formada por um número qualquer de membros ligados entre si por uma conexão deformável pode ser simulado numericamente por elementos de vigas que avaliam o comportamento das seções dos diferentes membros da viga mista e por elementos de mola, ou elementos de interface de espessura nula ou finita, que simulam o comportamento da conexão deformável.

Elementos com molas conectadas em seus nós tem sido freqüentemente empregado em problemas de engenharia estrutural, como pode ser visto em Gattesco (1999), Ranzi *et al.* (2006) e Gara *et al.* (2006). O elemento de interface desenvolvido por Goodman *et al.* (1968), conhecido como GTB (Goodman, Taylor e Brekke), foi o primeiro elemento de interface capaz de simular deslocamento relativo entre dois elementos finitos adjacentes através de interpolações independentes em seus lados opostos. Esse elemento e outros nele baseados são usados em conjunto com elementos bidimensionais ou tridimensionais.

Os elementos de interface desenvolvido em Silva (2006) e no item 3.4 do capítulo 3 deste trabalho, e que são utilizados neste capítulo para simular o comportamento das várias conexões deformáveis, foram baseados no elemento GTB de espessura nula com a particularidade de serem associados a elementos unidimensionais. Seus deslocamentos relativos entre as faces superior e inferior do elemento são relacionadas de forma consistente com os deslocamentos dos elementos de viga a ele combinados.

A figura 4.3 ilustra a forma que os elementos de interface e os elementos de vigas são associados para simular o problema de viga mista com múltiplas camadas. Para se ter um elemento de interface que simule a conexão deformável genérica de índice i , basta trocar os índices 1 e 2, que representam as seções acima e abaixo da interface de contato do elemento de interface desenvolvido no item 3.4 do capítulo 3 deste trabalho, pelos índices genéricos i e $i+1$ que irão representar as seções acima e abaixo da interface genérica i . Portanto, a mesma formulação usada para o elemento de interface que simula a conexão deformável de vigas mistas com duas camadas pode ser utilizada para problemas de vigas mistas com múltiplas camadas.

Devido a maior parte dos problemas práticos de engenharia envolvendo elementos estruturais formados por diferentes membros com conexão deformável possuem apenas

uma interface de deslizamento, existem poucos trabalhos na literatura sobre o assunto. Uma formulação analítica e também numérica para o problema de vigas formadas por um número qualquer de membros ligados entre si com conexão deformável é implementada no trabalho de Ranzi (2008). Na formulação numérica, o autor considera um elemento de viga de EB com um número de graus de liberdade que varia de acordo com o número de conexões do problema. Este elemento de viga simula tanto o comportamento dos diferentes membros quanto a conexão deformável.

A formulação numérica descrita em Ranzi (2008) tem como vantagem, em relação a implementada neste trabalho, a necessidade de um menor número de graus de liberdade para avaliar numericamente o problema. No entanto, é necessária a implementação de elementos de viga específicos para cada viga de acordo com a quantidade de conexões deformáveis do problema, o que não é necessário com a formulação desenvolvida neste trabalho. Outra vantagem da formulação descrita neste trabalho é a possibilidade de avaliar a separação vertical nas interfaces de contatos entre os diferentes membros da viga.

4.7 – EXEMPLOS

Neste item são definidas soluções exatas para alguns problemas de vigas mistas com múltiplas camadas, usando o sistema de equações diferenciais de segunda ordem obtido no item 4.2 deste capítulo, e comparando-as com as respectivas soluções numéricas obtidas através de uma análise de elementos finitos.

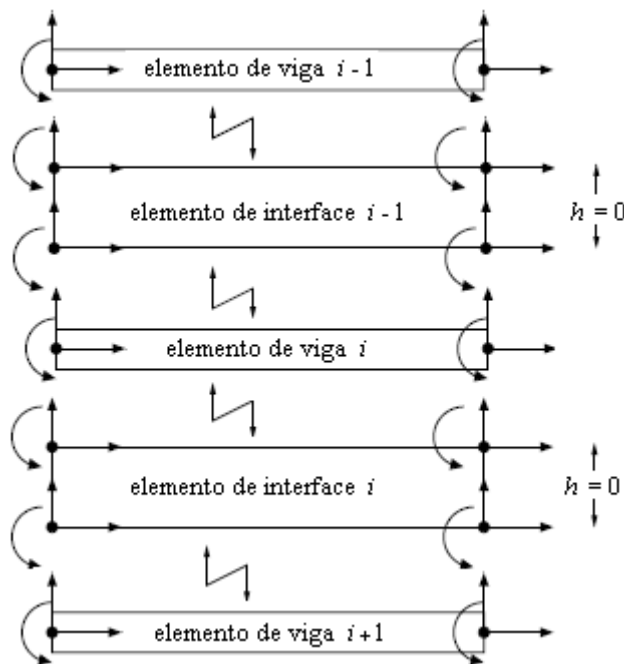


Figura 4.3 – Esquema de conexão entre os elementos de interface e de viga

Na análise numérica são usados para simular a viga mista com múltiplas camadas os elementos de interface apresentados no item 3.4 do capítulo 3 deste trabalho e em Silva (2006), em conjunto com os respectivos elementos de viga de Timoshenko e de Euler-Bernoulli, também apresentados no item 3.2 do capítulo 3 deste trabalho e em Silva (2006).

4.7.1 – Viga bi-apoiada com dois planos de deslizamento

A viga mista simplesmente apoiada com carga $q = 10\text{kN/m}$ uniformemente distribuída ao longo de seu vão, mostrada na figura 4.4, tem seção transversal composta por uma seção retangular de concreto ligada na base e topo por duas chapas de aço.

Os módulos de deformação longitudinal dos materiais aço e concreto são $E_s = 200000\text{MPa}$ e $E_c = 34500\text{MPa}$, respectivamente. É considerado o coeficiente de Poisson de 0.3 para o aço e 0.2 para o concreto, necessários na obtenção do módulo de deformação transversal para análise do problema considerando a teoria de viga de Timoshenko. Para a rigidez longitudinal da conexão deformável das chapas de base e topo são admitidos os valores de $E_{s_b1} = 5000\text{KPa}$ e $E_{s_b2} = 40000\text{KPa}$, respectivamente.

As soluções exatas, obtidas através do item 4.4 deste capítulo, para as equações do deslizamento para os dois planos de contato entre concreto e aço e do deslocamento transversal são dadas pelas expressões:

$$s_1 = 7.717 \times 10^{-5} e^{0.6120x} - 1.466 \times 10^{-2} e^{-0.6120x} - 9.162 \times 10^{-4} e^{0.1928x} + 1.832 \times 10^{-3} e^{-0.1928x} - 7.329 \times 10^{-3} x + 1.466 \times 10^{-2}, \quad (4.66)$$

$$s_2 = 1.691 \times 10^{-4} e^{0.6120x} - 1.956 \times 10^{-3} e^{-0.6120x} - 6.300 \times 10^{-4} e^{0.1928x} + 1.362 \times 10^{-3} e^{-0.1928x} - 9.162 \times 10^{-4} x + 1.832 \times 10^{-3} e \quad (4.67)$$

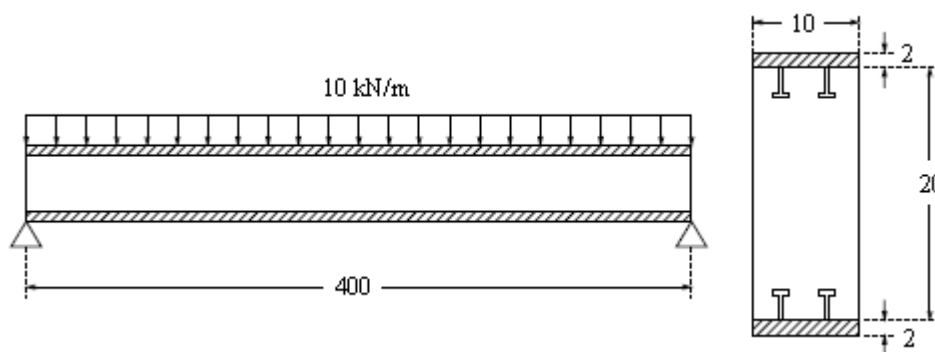


Figura 4.4 – Viga mista bi-apoiada (cotas em cm)

$$w(x) = 0.0015e^{0.6120x} + 0.0171e^{-0.6120x} + 0.1979e^{0.6120x} + 0.4280e^{-0.6120x} + 3.47 \times 10^{-5} x^4 - 2.776 \times 10^{-4} x^3 - 1.511 \times 10^{-2} x^2 + 6.265 \times 10^{-2} x - 6.444 \times 10^{-1}. \quad (4.68)$$

Nas expressões anteriores, as variáveis cinemáticas estão expressas em metros (m). O subscrito 1 indica a interface entre a seção de concreto e a chapa de aço da base, já o subscrito 2 indica a interface entre a seção de concreto e a chapa de aço do topo.

Os gráficos das figuras 4.5 e 4.6 abaixo comparam a solução exata do problema da figura 4.4 com a solução numérica usando uma malha de 4 elementos de interface para cada plano de deslizamento, num total de 8, e 4 elementos de viga para cada seção, num total de 12. Na análise numérica foi utilizado o elemento de interface IQC e seu respectivo elemento de viga de EB. Esses elementos são baseados na teoria de viga de EB e utilizam interpolação quadrática para os deslocamentos axiais e cúbica para os deslocamentos transversais e rotações. Observa-se dos gráficos da figura 4.5 e 4.6 que as soluções numéricas são praticamente coincidentes com as soluções analíticas.

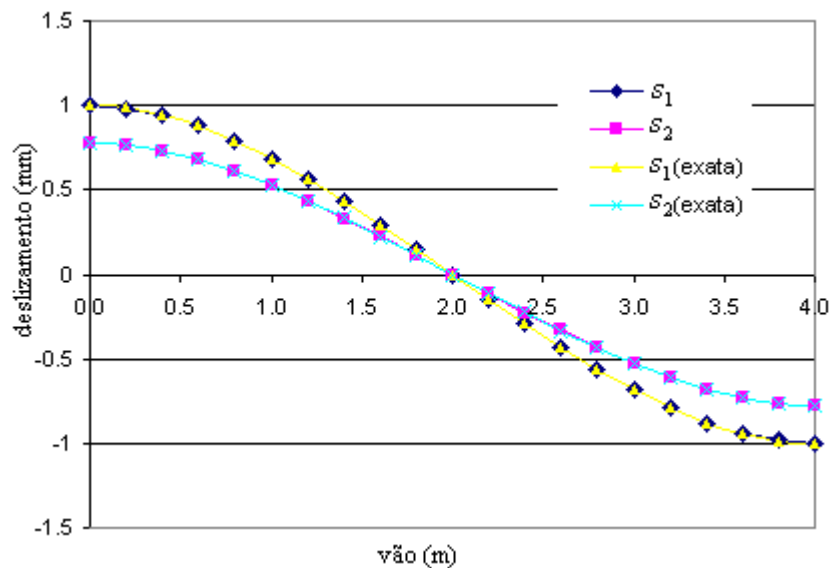


Figura 4.5 – Deslizamento nos planos de topo (2) e base (1) ao longo da viga mista

Os valores exatos para os deslocamentos s_1 e s_2 nas extremidades da viga e o deslocamento vertical máximo w_{\max} considerando a teoria de viga de EB são mostrados na tabela 4.1, onde são comparados com seus respectivos valores numéricos para três diferentes malhas, sendo os números 4, 8 e 20 indicando o número de elementos de interface usados na discretização de cada interface de deslizamento.

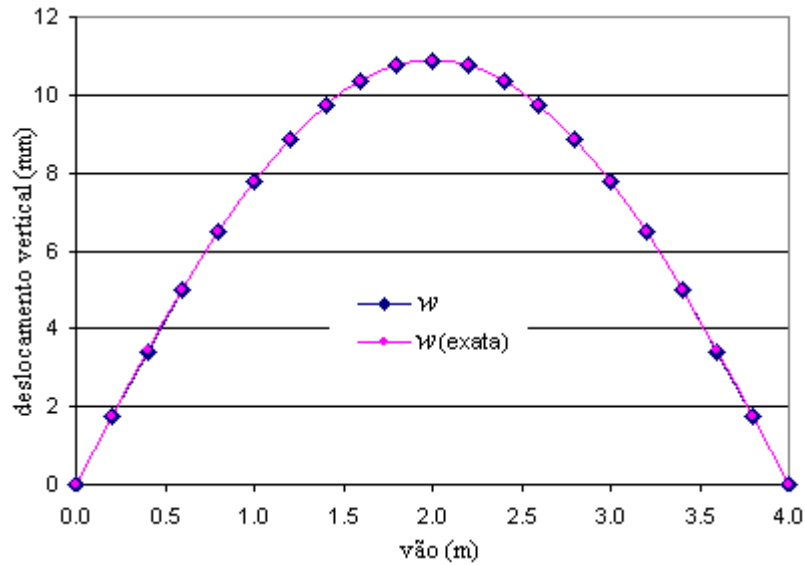


Figura 4.6 – Deslocamento transversal ao longo da viga mista

Na tabela 4.1 o elemento de interface ILC é baseado na análise de viga de EB considerando interpolação linear para deslocamentos axiais e cúbica para deslocamentos transversais e rotações. Observa-se desta tabela que os valores numéricos para o deslizamento e deslocamento vertical máximos convergem para os respectivos valores analíticos com o refinamento da discretização da viga mista.

Tabela 4.1 – Deslizamento e deslocamento vertical considerando análise de viga de EB

malha	ILC(mm)			IQC(mm)			Exata(mm)
	4	8	20	4	8	20	
s_1	1.00078	1.00178	1.00201	1.00195	1.002	1.00206	1.00212
s_2	0.77493	0.7774	0.77851	0.77825	0.77828	0.77859	0.77895
w_{\max}	10.8558	10.8731	10.8783	10.8771	10.8784	10.8792	10.8796

A tabela 4.2 é análoga a tabela 4.1 utilizando na análise numérica a teoria de viga de Timoshenko, sendo usado o elemento de interface ITQ com seu respectivo elemento de viga de Timoshenko.

Tabela 4.2 – Deslizamento e deslocamento vertical considerando análise de viga de Timoshenko

malha	ITQ(mm)			Exata(mm)
	4	8	20	
s_1	1.01050	1.00439	1.00285	1.00212
s_2	0.79159	0.78086	0.77888	0.77895
w_{\max}	10.68341	10.92509	10.95521	10.95645

4.7.2 – Viga bi-apoiada com três planos de deslizamento

A viga mista simplesmente apoiada com carga $q = 10\text{kN/m}$ uniformemente distribuída ao longo de seu vão, mostrada na figura 4.7, tem seção transversal composta por quatro seções retangulares de um mesmo material de módulo de elasticidade $E = 50000\text{MPa}$. As seções estão ligadas entre si através de uma conexão com módulo de rigidez igual a $E_{s_b,1} = E_{s_b,2} = E_{s_b,3} = 5000\text{kPa}$, onde os índices numéricos 1, 2 e 3 representam os planos de deslizamento da viga mista crescendo de baixo para cima.

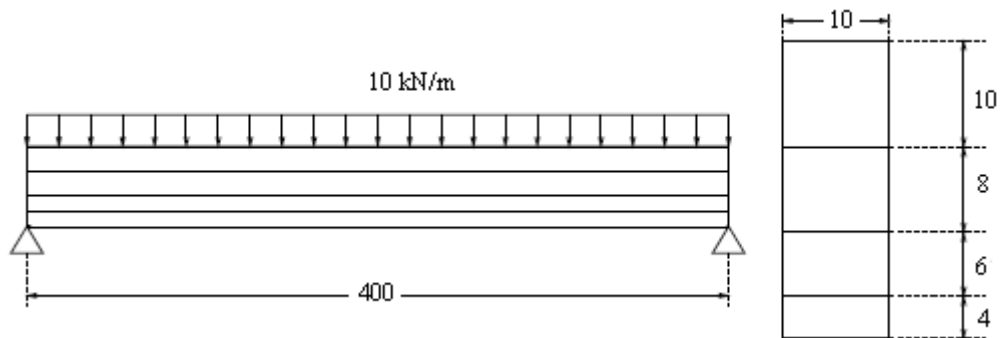


Figura 4.7 – Viga mista bi-apoiada (cotas em cm)

O gráfico da figura 4.8 abaixo compara a solução exata do problema da figura 4.7, obtida pelas expressões dadas no item 4.5 deste capítulo, com a solução numérica usando uma malha de 4 elementos de interface para cada plano de deslizamento, num total de 12, e 4 elementos de viga para cada seção, num total de 16.

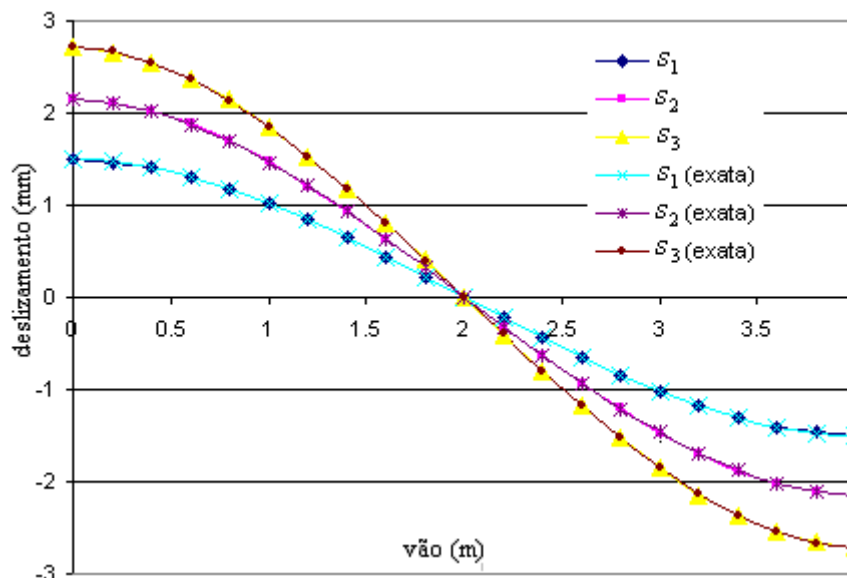


Figura 4.8 – Deslizamento nos planos 1, 2 e 3 ao longo da viga mista

Para o caso do problema particular de viga mista simplesmente apoiada e uniformemente carregada da figura 4.7 os autovalores e a matriz $\bar{\mathbf{D}}$, definidos no item 4.5 deste capítulo para a determinação da solução exata para os deslizamentos ao longo da viga mista da figura 4.7, são dados por:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2,9172765341556e-002, \\ \lambda_2 &= -5,3506001154035e-002, \\ \lambda_3 &= -1,14449209694885e-001\end{aligned}\quad (4.69)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -0.57211521246130 & 0.67938443007799 & 0.45947903041857 \\ -0.48225995415477 & -0.73179899822817 & 0.48155535827562 \\ 0.66340750695858 & 0.053916809622406 & 0.74631324356576 \end{bmatrix}\quad (4.70)$$

As soluções numéricas mostradas no gráfico da figura 4.8 foram obtidas usando o elemento de interface IQC e seu respectivo elemento de viga de EB. Mais detalhes deste elemento podem ser encontrados no exemplo anterior. O gráfico da figura 4.8 mostra que os resultados numéricos são praticamente coincidentes com os resultados analíticos.

A tabela 4.3 mostra os valores máximos para os deslizamentos nas três interfaces de contato entre as seções retangulares da viga mista da figura 4.7 e o deslocamento vertical máximo nesta viga. Na tabela são apresentados valores numéricos obtidos usando o elemento IQC e os respectivos valores exatos, obtidos através da solução analítica para três interfaces de deslizamentos descritas no item 4.5 deste capítulo. Os números 4, 8 e 20 que aparecem na tabela 4.3 fazem referência ao número de elementos de interface utilizados na discretização de cada interface de deslizamento da viga mista da figura 4.7. Observa-se desta tabela uma convergência da análise numérica para a solução analítica com o aumento da discretização, apesar dos resultados obtidos já serem muito bons para quatro elementos de interface.

Tabela 4.3 – Deslizamento e deslocamento vertical máximos para o elemento IQC

malha	4	8	20	exata
s_1	1.49318	1.49295	1.49300	1.49301
s_2	2.14353	2.14324	2.14332	2.14333
s_3	2.70925	2.70898	2.70895	2.70896
w_{\max}	38.28213	38.27964	38.27956	38.27935

A tabela 4.4 é análoga à tabela 4.3 sendo os valores numéricos apresentados nesta tabela obtidos usando o elemento de interface ITQ implementado no item 3.4 do capítulo 3 deste trabalho, considerando na formulação a teoria de viga de Timoshenko. Semelhante ao obtido para análise considerando a teoria de viga de EB, observa-se da tabela 4.4 uma convergência da análise numérica para a solução analítica com uma maior discretização.

Tabela 4.4 – Deslizamento e deslocamento vertical máximos para o elemento ITQ

malha	4	8	20	exata
s_1	1.53667	1.50061	1.49545	1.49301
s_2	2.19790	2.14870	2.14478	2.14333
s_3	2.77424	2.71173	2.70868	2.70896
v_{\max}	37.3637	38.0456	38.30932	38.32049

4.7.3 – Travamento por deslizamento em vigas em múltiplas camadas com interação parcial longitudinal

Desde os primeiros trabalhos sobre análise numérica de vigas mistas com interação parcial longitudinal foi verificada a presença de resultados numéricos espúrios na avaliação do deslizamento para casos particulares de interpolação dos deslocamentos do elemento e rigidez da conexão deformável.

Os trabalhos publicados sobre o assunto sugerem, baseados em análises numéricas e analíticas, que a interpolação dos deslocamentos axiais seja feita por polinômios no mínimo quadráticos para evitar estes erros numéricos. Os trabalhos desenvolvidos por Sousa Jr. e Silva (2007) e Silva e Sousa Jr. (2008) mostram que o elemento de interface também sofre o problema de travamento quando não há um cuidado referente à escolha do tipo de polinômios usados na interpolação dos deslocamentos.

Ranzi (2008) estudou o efeito de travamento por deslizamento em vigas mistas simplesmente apoiadas com três camadas. Em seu estudo o autor utilizou dois níveis de rigidez para cada uma das duas conexões deformáveis, resultando em quatro tipos diferentes de análise. Os resultados deste trabalho mostram que o travamento por deslizamento em pelo menos umas das conexões causa erros numéricos significativos na avaliação da curvatura ao longo da viga mista. Desta forma é esperado que o elemento ILC (Silva, 2006) apresente problema na representação da curvatura ao longo da viga mista

quando pelo menos uma das conexões do problema de viga mista com múltiplas camadas apresentar rigidez elevada.

Este exemplo pretende verificar os elementos de interface implementados em Silva (2006) em relação ao travamento por deslizamento para casos de vigas mistas com múltiplas camadas. Para isto é analisado numericamente uma viga mista simplesmente apoiada e uniformemente carregada com seção transversal definida por uma laje de concreto retangular (2000.×180 mm) um perfil de aço de seção I, com mesas iguais de 250×16mm e alma de 660×10mm, e uma placa de aço de seção retangular (250×16mm) soldada na mesa inferior.

O módulo de elasticidade adotado para o aço é de 210000 MPa, já para o concreto foi empregado as propriedades elásticas dadas pelo código CEB-FIP (1993) para um concreto com resistência característica (f_{ck}) de 32 MPa avaliada aos 28 dias de cura. De acordo com este código o módulo de elasticidade do concreto para uma análise linear é $E_c = 0.85E_{ci}$, sendo

$$E_{ci} = E_{co} [(f_{ck} + \Delta f) / f_{cmo}]^{1/3},$$

em que $E_{co} = 2,15 \times 10^4 \text{ MPa}$, $f_{cmo} = 10 \text{ MPa}$ e $\Delta f = 8 \text{ MPa}$.

A rigidez da conexão em vigas mista com interação parcial é geralmente representada na literatura pelo parâmetro αL , que no caso de uma viga mista com três camadas é dado pela expressão 4.71. Neste exemplo é adotado o parâmetro de rigidez $\alpha_1 L$, entre o concreto e o perfil de aço, igual a 1, e $\alpha_2 L$, entre a chapa de aço e a mesa inferior do perfil de aço, igual a 50. Esta mesma configuração de rigidez foi usada no trabalho de Ranzi (2008).

$$\alpha_i L = \sqrt{E_{S_{bi}} \left(\frac{1}{E_i A_i} + \frac{1}{E_{i+1} A_{i+1}} + \frac{h_i^2}{E_i I_i + E_i I_{i+1}} \right)} L. \quad (4.71)$$

O gráfico da figura 4.9 mostra a variação do deslizamento na interface entre a chapa de aço e a mesa inferior do perfil de aço, ou seja, $\alpha L = 50$. Observa-se do gráfico que o elemento de interface ILC apresenta travamento por deslizamento verificado pelo comportamento oscilatório da curva do deslizamento para este elemento, o que não é

verificado para o elemento de interface IQC. Na análise numérica foi utilizada uma malha com 4 elementos de interface para cada plano de deslizamento, num total de 8, e 4 elementos de viga para cada camada da seção, num total de 12. Uma resposta próxima da exata foi obtida usando o elemento IQC para uma malha de elementos finitos muito refinada. Neste caso mesmo o elemento ILC apresentaria uma solução próxima da exata já que o problema de travamento só é observado em malhas pouco refinadas.

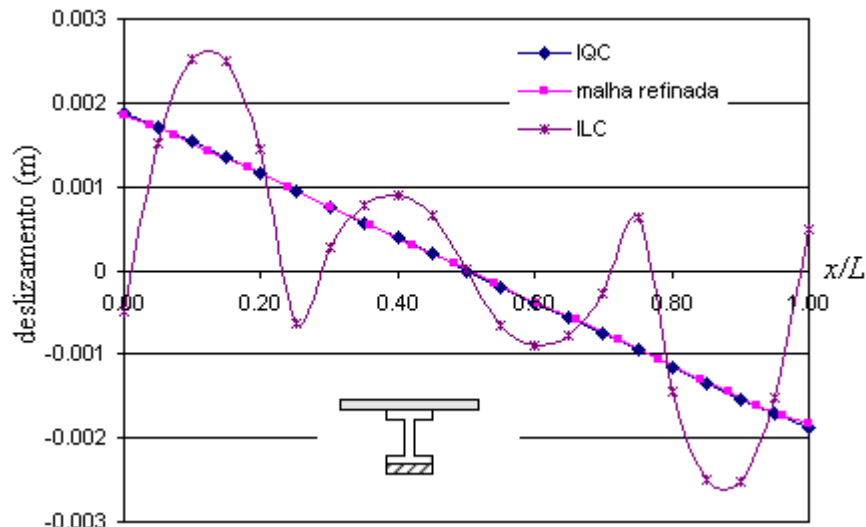


Figura 4.9 – Variação do deslizamento ao longo da viga mista

O gráfico da figura 4.10 mostra a variação da curvatura ao longo da viga mista. O eixo vertical deste gráfico representa a curvatura (χ) da viga mista adimensionalizada pelo valor máximo da curvatura obtida para a malha refinada (χ_{ref}). O eixo horizontal representa a relação entre a coordenada ao longo do eixo da viga (x) e o comprimento do vão (L). Ambos elementos ILC e IQC tem interpolação cúbica para os deslocamentos transversais o que resulta em uma aproximação linear para a curvatura ao longo da viga mista, como pode ser observado no gráfico. No entanto, observa-se que a resposta numérica para o elemento de interface IQC é bem melhor que a resposta do elemento de interface ILC, ou seja, o travamento por deslizamento do elemento ILC verificado no gráfico da figura 4.9 influencia na resposta da sua curvatura.

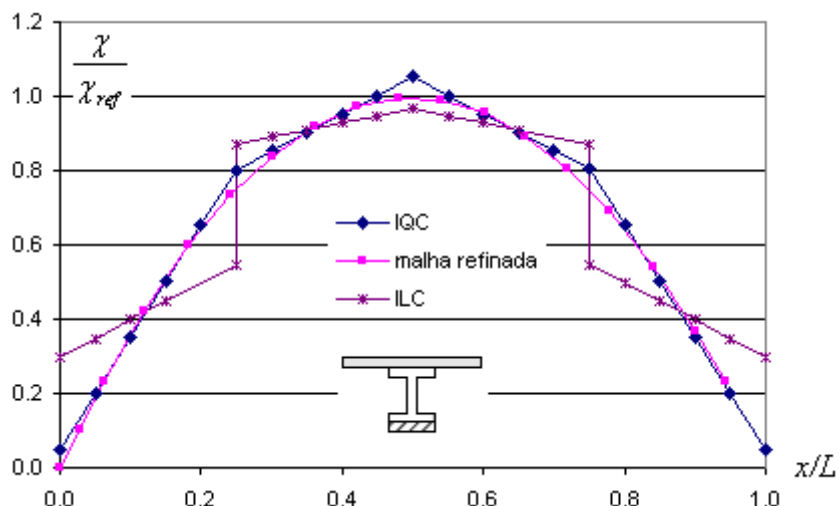


Figura 4.10 – Variação da curvatura ao longo da viga mista

4.7.4 – Influência da rigidez da ligação da placa de reforço na carga última

Os exemplos anteriores buscavam a validação dos elementos de interface na simulação do problema de viga mista com múltiplas camadas, comparando os resultados numéricos com soluções analíticas. Já que as expressões analíticas para vigas com múltiplas camadas fazem referência a problemas lineares as análises numéricas até este momento foram deste tipo.

Com objetivo de mostrar a capacidade dos elementos implementados de simular problemas de vigas com múltiplas camadas considerando análise não linear física, será avaliada a carga última para a viga mista contínua da figura 4.11.

A seção transversal da viga mista da figura 4.11 é composta por uma laje de concreto ligada por conectores a um perfil de aço de seção I com uma chapa de aço de reforço soldada em sua mesa inferior. As dimensões do problema são dadas na figura 4.11. As propriedades físicas para o aço utilizado no perfil e nas barras de reforço são dadas na

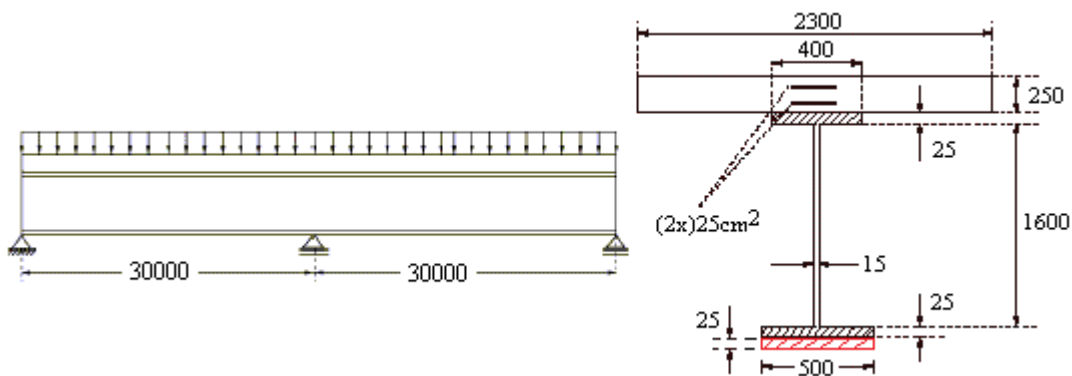


Figura 4.11 – Viga mista contínua (cotas em mm)

tabela 4.5 sendo adotado o valor de 200000MPa para o seu módulo de elasticidade longitudinal. Para o concreto a relação constitutiva foi retirada do modelo do código CEB-FIP (1993) com tensão de pico dada por $f_c = 33\text{MPa}$. O modelo para a rigidez ao deslizamento da conexão deformável entre a laje de concreto e o perfil de aço é dado pela expressão 4.72 (Ollgaard *et al*, 1971).

$$F = F_{\max} (1 - e^{-\beta s})^\alpha \quad (4.72)$$

Na expressão 4.72, F_{\max} é a força por unidade de comprimento máxima resistida pelos conectores sendo adotado o valor de 1240kN/m, s é o deslizamento na interface e α e β são parâmetros de ajuste da curva, sendo considerado na análise os valores de $\alpha = 0.558$ e $\beta = 1\text{mm}^{-1}$. É considerado um deslizamento último (s_u) para a conexão deformável de 6 mm.

Tabela 4.5 – Propriedades do aço

Aço	f_y (MPa)	f_u (MPa)	ϵ_{sh}	ϵ_{su}
perfil	275	360	0.04	0.11
reforço	430	473	0.02	0.10

A figura 4.12 mostra as curvas para as relações constitutivas dos materiais concreto (a), aço (b) e para a conexão (c). Para a utilização do método de determinação dos esforços internos atuantes na seção transversal, descrito no capítulo 3, essas curvas foram divididas em faixas de deformação e aproximadas nestas faixas por polinômios de até terceiro grau. Essa aproximação foi utilizada para o concreto e aço. No caso da conexão deformável, o método utilizado permite a avaliação da força de cisalhamento na conexão por unidade de comprimento e de sua derivada usando a expressão 4.72, que é diretamente derivável.

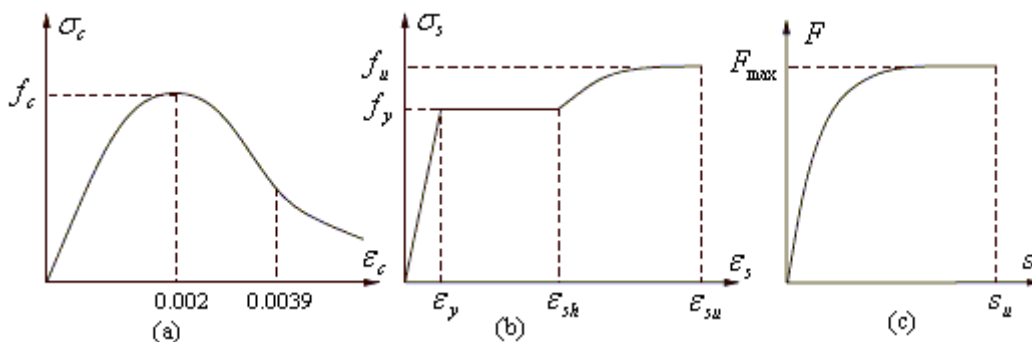


Figura 4.12 – Leis constitutivas para o concreto (a), aço (b) e conexão (c)

Na análise numérica da viga mista contínua da figura 4.11 foi utilizada uma malha de 16 elementos de interface para cada plano de deslizamento, num total de 32, e 16 elementos de viga para cada camada, num total de 48. O elemento 10DOF foi implementado por Dall'Asta e Zona (2002) e é aplicável a viga mista com apenas um plano de deslizamento, sendo assim, na sua análise foi considerado o perfil de aço e a chapa de reforço como peça única. Os resultados numéricos referentes a IQC-1, IQC-2, IQC-3, IQC-4 e IQC-5 foram obtidos usando o elemento de interface IQC associado a seu respectivo elemento de viga para diferentes níveis de rigidez na conexão entre a chapa de reforço e o perfil de aço. Tanto o elemento 10DOF de Dall'Asta e Zona (2002) quanto o elemento IQC tem interpolação cúbica para os deslocamentos transversais e rotações e interpolação quadrática para os deslocamentos axiais.

Com o objetivo de verificar a influência do grau de rigidez da conexão entre a chapa de reforço e o perfil de aço na avaliação da carga última da viga mista da figura 4.11, foram considerados diferentes valores para a rigidez nesta conexão, dados por $E_{s_{b1}} = 100000000kPa$, $E_{s_{b2}} = 200000kPa$, $E_{s_{b3}} = 60000kPa$, $E_{s_{b4}} = 10000kPa$ e $E_{s_{b5}} = 100kPa$.

Do gráfico da figura 4.13 observa-se que o resultado para o elemento 10DOF é praticamente coincidente com o resultado referente ao elemento IQC-1, o que era esperado já que neste caso a rigidez da conexão entre o perfil e a chapa de reforço é muito grande fazendo com que os dois funcionem como se fosse uma seção única, como foi considerado pelo elemento 10DOF. Do gráfico percebe-se que até certo grau de interação entre o perfil de aço e a chapa de reforço não há uma diminuição considerável na sua carga última. No

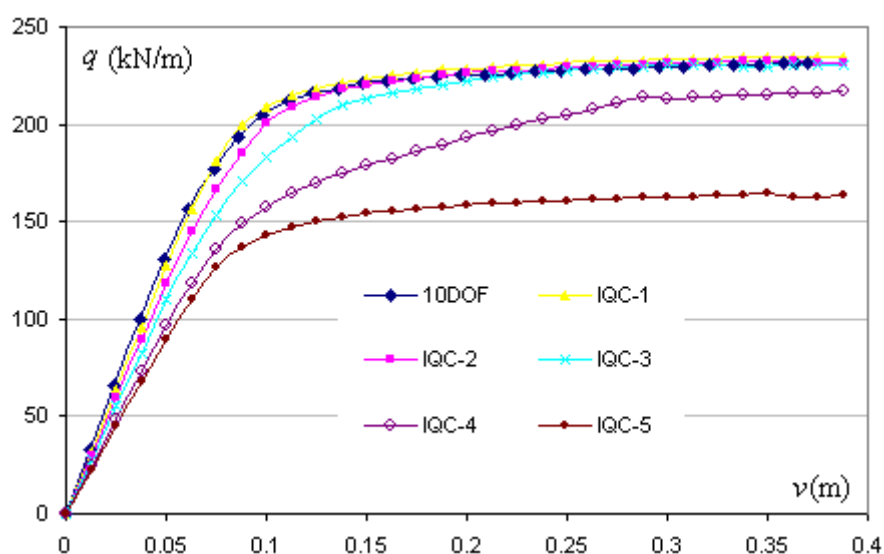


Figura 4.13 – Curva carga-deslocamento da viga mista contínua

entanto, a rigidez da seção diminui provocando um aumento da deformação para um mesmo nível de carregamento. Portanto, para valores práticos de rigidez da conexão deformável a influência desta na análise de vigas mistas com múltiplas camadas se dá predominantemente a nível linear, ou seja, no estado limite de utilização. A influência da rigidez da conexão entre o perfil de aço e a chapa de reforço no estado limite último para o exemplo avaliado só acontece quando este é bastante reduzido, como mostra as respostas numéricas obtidas para os elementos de interface IQC-4 e IQC-5.

4.8 – RESUMO E CONCLUSÃO

Neste capítulo foi apresentada uma análise numérica e analítica de vigas mistas com múltiplas camadas considerando conexão deformável na direção longitudinal entre as camadas. Situações envolvendo elementos estruturais mistos com mais de um plano de deslizamento são relevantes em problemas de engenharia, apesar de não serem muito freqüentes. Devido a isso, a maioria das pesquisas está voltada para o caso mais comum de elementos estruturais com apenas um plano de deslizamento, tendo poucos trabalhos considerando o caso geral de múltiplas camadas.

Com respeito à solução analítica, é desenvolvida neste capítulo uma expressão para as equações diferenciais que governam o problema considerando os deslizamentos entre as várias camadas como as únicas incógnitas. O sistema de equações diferenciais obtido desta forma é mais simples que o mesmo baseado nos deslocamentos transversais e axiais, e fornece a solução exata de problemas estaticamente determinados de forma mais fácil. São apresentadas neste capítulo soluções numéricas para casos de vigas mistas simplesmente apoiada e uniformemente carregada considerando um, dois e três planos de deslizamentos. Na formulação analítica foram consideradas as teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, verificando que, para o deslizamento entre as diferentes camadas, as duas teorias levam ao mesmo resultado em vigas isostáticas.

Elementos de interface combinados com seus respectivos elementos de vigas foram empregados na simulação numérica de problemas de vigas mistas com múltiplas camadas e conexão deformável na direção longitudinal entre elas. É mostrado através de resultados numéricos que esta estratégia é eficaz, robusta e uma opção real para análise de vigas mistas com múltiplas camadas.

Como era esperado e já bem definido em análise numéricas de vigas mistas com interação parcial longitudinal com apenas um plano de deslizamento, o problema numérico

de travamento por deslizamento é verificado na simulação numérica de vigas mistas com múltiplas camadas para casos particulares de interpolação dos deslocamentos do elemento e rigidez elevada da conexão. Foi observado com exemplos numéricos que a representação da curvatura ao longo da viga mista é alterada quando pelo menos uma das conexões entre as diferentes camadas da viga apresenta uma rigidez elevada, ou seja, quando esta sofre travamento por deslizamento.

PLACAS DE CONCRETO ENRIJECIDAS COM VIGAS DE AÇO COM CONEXÃO DEFORMÁVEL

Neste capítulo o problema de laje de concreto ligada a vigas de aço longitudinais, transversais, ou outras direções quaisquer, com conexão deformável é avaliado numericamente. Para isso são implementados elementos finitos capazes de simular o comportamento de placas de concreto ligadas a vigas de aço através de uma conexão deformável na direção do eixo da viga. Como uma aplicação desses elementos será verificada a influência da interação parcial na determinação da largura efetiva de vigas mistas de aço-concreto.

5.1 – INTRODUÇÃO

O caso mais comum de elemento estrutural misto na construção civil é representado por placas de concreto ligadas a vigas de aço por meio de conectores mecânicos. Esse tipo de solução é frequente em pisos de edifícios de múltiplos andares em estrutura de aço, em pontes mistas, entre outras obras civis. A simulação deste problema através de uma análise de viga exige a determinação de uma largura efetiva para a laje de concreto, o que pode gerar erros significativos. Fatores como este, bem como, o efeito da variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto em vigas mistas isoladas na determinação de seus esforços (conhecido na literatura como efeito de *shear lag*), motivam a simulação do problema através de elementos de placas e vigas.

A presença do concreto em projetos de edifícios de múltiplos andares em estrutura de aço é garantida no preenchimento das lajes de piso. Devido ao considerável ganho de resistência quando há ligação mecânica entre a laje de concreto e a viga de aço na qual ela se apóia, esta técnica vem se tornando comum neste tipo de construção civil. A associação que surge nestes casos práticos de placa de concreto ligada a um perfil de aço com conexão deformável será neste trabalho denominada placa enrijecida com conexão deformável.

Para a avaliação numérica deste problema serão descritos neste capítulo um elemento capaz de simular problemas não lineares em placas de concreto, um elemento de barra considerando os mesmos graus de liberdade do elemento de placa, e um elemento de interface que faz a ligação entre estes dois elementos e simula o comportamento da conexão deformável na direção longitudinal.

Na formulação do elemento de placa é considerado o efeito de membrana (não linearidade geométrica), devido a sua influência significativa na análise da resistência última de placas de concreto, como mostrado por Huang *et al.* (2003b). O elemento implementado foi baseado no elemento de placa de nove nós com não linearidade geométrica (Bathe, 1996)

A não linearidade física em análise numérica de placa de concreto é geralmente baseada em três modelos. Uma descrição destes modelos foi feita no item 2.5 do capítulo 2 onde também é feita uma revisão bibliográfica de trabalhos mais relevantes sobre o assunto. Por exemplo, o trabalho desenvolvido por Scanlon e Murray (1982) que utilizam o modelo de rigidez efetiva para avaliar a não linearidade física em placas de concreto. Os autores estendem o conceito de rigidez à flexão de vigas com a consideração de um momento de inércia efetivo para o caso da teoria de placas. O modelo apresentado pelos autores apresenta a desvantagem de que a fissuração do concreto não pode ser considerada de forma progressiva ao longo da seção transversal da placa de concreto (Jiang e Mirza, 1997).

Já o trabalho de Jiang e Mirza (1997) utiliza a aproximação do modelo de elementos finitos discretos para análise não linear física do concreto armado. Neste modelo o concreto e as barras de aço de reforço são modelados separadamente por dois tipos diferentes de elementos, necessitando dessa forma de um grande número de graus de liberdade, o que pode se tornar bastante caro em termo de tempo de análise computacional (Phuvoravan e Sotelino, 2005). O trabalho de Huang *et al.* (1999) considera um modelo de fissuração distribuída que é avaliado tomando uma discretização da seção transversal do elemento de placa em várias camadas para representação do concreto e armaduras de aço.

Geralmente as vigas mistas de pisos de edifícios são simplificações do problema de placas de concreto ligadas a uma viga de aço com conexão deformável na direção longitudinal, podendo levar a uma superestimação ou subestimação do elemento estrutural avaliado. Mesmo em caso de vigas isoladas a deformação por cisalhamento na laje de concreto promove uma variação da tensão axial ao longo de sua largura efeito chamado na literatura de *shear lag*, que pode causar erros significativos na análise do problema considerando a placa de concreto como um elemento de viga. Para tentar evitar isto é utilizado em normas o conceito de largura efetiva, que consiste em determinar uma largura de contribuição da laje de concreto que permite que a análise como viga forneça resultados próximos dos esperados, ou pelo menos a favor da segurança.

Como uma aplicação dos elementos implementados neste trabalho é verificada a influência da interação parcial na determinação da largura efetiva de vigas mistas. Vários trabalhos publicados sobre a avaliação da largura efetiva em vigas mistas mostram que esta é dependente de vários parâmetros, como, por exemplo, o tipo e o nível de carregamento atuantes. Uma revisão bibliográfica de trabalhos sobre o assunto foi feita no item 2.6 do capítulo 2. Dentre estes trabalhos destaca-se o de Ansourian (1975), que foi o primeiro a chegar ao valor de um quarto do vão da viga para a largura efetiva, usada em várias normas (Eurocode 4, 2001, AISC-LRFD, 2005, NBR 8800, 2008). O autor verificou que para este valor da largura efetiva as tensões na laje de concreto se aproximam dos valores reais, já para a viga de aço isto acontece quando a largura efetiva é tomada igual à largura da laje de concreto.

Amadio e Fragiacomio (2002) conduziram uma série de estudos paramétricos em vigas mistas biapoiadas e em balanço usando o programa ABAQUS®. Os autores analisaram o problema considerando análise elástica e também não linear, e diferentes níveis de deformabilidade da conexão. Os resultados para comportamento elástico mostram que a deformabilidade da conexão é um parâmetro muito importante na determinação da largura efetiva para análise de tensões.

O objetivo deste capítulo consiste na implementação de elementos finitos capazes de simular o comportamento de placas de concreto ligadas a vigas de aço através de uma conexão deformável na direção do eixo da viga. Como uma aplicação destes elementos será verificada a influência da interação parcial na determinação da largura efetiva de vigas mistas de aço-concreto.

O capítulo encontra-se organizado da seguinte forma. Nos itens 5.2, 5.3 e 5.4 são apresentadas as formulações para os elementos de placa, viga e o elemento de interface que

faz a ligação entre os dois anteriores. No item 5.5 são apresentados os exemplos numéricos. Estes exemplos estão divididos na parte de validação dos elementos implementados e na aplicação da verificação da influência da rigidez da conexão deformável na determinação da largura efetiva. Por último, no item 5.6 é apresentado um resumo e conclusão do capítulo.

5.2 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PLACA

O elemento de placa implementado neste trabalho é o elemento com nove nós descrito por Bathe (1996). A não linearidade física é verificada dividindo a seção em várias camadas e considerando que em cada camada as propriedades do material possam ser diferentes. As principais considerações para este tipo de análise são descritas a seguir (Huang *et al.*, 2003a).

- (a) As diferentes camadas do elemento de placa são consideradas de concreto ou aço de reforço, não sendo permitido qualquer deslizamento entre elas;
- (b) As propriedades mecânicas do material de cada camada podem ser inicialmente diferentes e as suas relações tensão-deformação são independentes para cada camada;
- (c) As barras de armadura em qualquer direção são transformadas em uma camada equivalente de aço com rigidez somente na direção da barra. É assumido um vínculo perfeito entre as camadas de aço que representam as barras de reforço e as camadas de concreto;
- (d) As camadas de concreto são consideradas em um estado plano de tensão, e o concreto é considerado ortotrópico após fissuração ou esmagamento.

Diferente do elemento de placa tradicional, o elemento de placa implementado neste trabalho considera, além do deslocamento vertical na direção de z e rotações em torno dos eixos x e y , translações nas direções dos eixos x e y como mostra a figura 5.1. As translações seriam necessárias mesmo para uma análise linear, uma vez que ao conectá-lo a um elemento de viga a posição da linha neutra não é mais conhecida.

Na definição das equações dos deslocamentos para o elemento de placa da figura 5.1 são consideradas as hipóteses cinemáticas da teoria de placa de Reissner-Mindlin, que diz que seções inicialmente planas e ortogonais a configuração indeformada permanecem planas após deformações, porém não mais ortogonais. Portanto,

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\theta(x, y), \quad (5.1)$$

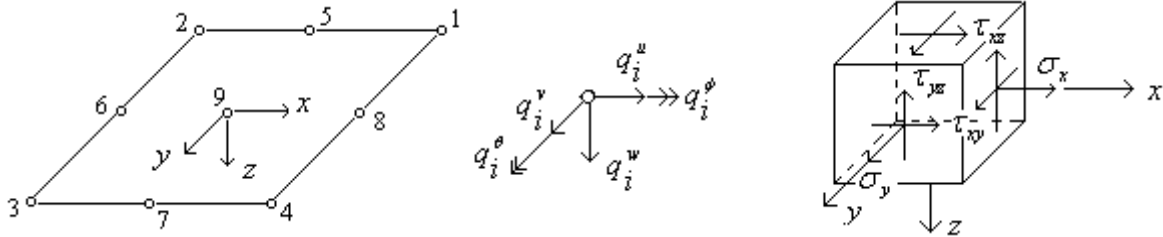


Figura 5.1 – Graus de liberdade do elemento de placa e tensões em um elemento infinitesimal

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z\phi(x, y) \quad e \quad (5.2)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y). \quad (5.3)$$

Nas equações 5.1 a 5.3 o sobrescrito 0 indica deslocamento em um plano de referência adotado. Este índice será omitido nas equações a seguir para facilitar a notação. Considerando $u_1 = u(x, y, z)$, $u_2 = v(x, y, z)$ e $u_3 = w(x, y, z)$ na expressão da deformação de Green-Lagrange ($\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$), tem-se

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2}(u_{,x} + u_{,x} + u_{,x}u_{,x} + v_{,x}v_{,x} + w_{,x}w_{,x}), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{2}(v_{,y} + v_{,y} + u_{,y}u_{,y} + v_{,y}v_{,y} + w_{,y}w_{,y}), \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}), \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x} + u_{,x}u_{,z} + v_{,x}v_{,z} + w_{,x}w_{,z}) \quad e \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y} + u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z} + w_{,y}w_{,z}). \end{aligned}$$

Das hipóteses cinemáticas dadas pelas expressões 5.1 a 5.3, e as hipótese de Von Karman, que implica que as derivadas de u e v em relação a x , y e z são pequenas, podendo assim desprezar os termos quadráticos referentes a estas derivadas que aparecem nas expressões da deformação de Green-Lagrange acima, e desprezando a variação de w com z obtém-se as equações das deformações dadas por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_{nl}, \quad \text{onde } \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_l = \begin{Bmatrix} u_{,x} + z\theta_{,x} \\ v_{,y} - z\phi_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} + z(\theta_{,y} - \phi_{,x}) \\ w_{,x} + \theta \\ w_{,y} - \phi \end{Bmatrix} \quad e \quad \mathbf{e}_{nl} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ w_{,x}w_{,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.4)$$

Sendo E o módulo de deformação axial e ν o coeficiente de Poisson a relação tensão-deformação é dada por

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{e}, \quad (5.5)$$

$$\text{em que } \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & \mu & 0 \\ & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad \text{e}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

A expressão 5.5 é baseada em uma relação linear entre tensão e deformação, no caso de uma análise não linear esta relação será avaliada de forma incremental. Aplicando um campo de deformação virtual compatível ao elemento de placa deformável da figura 5.1 tem-se, pelo princípio dos trabalhos virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \delta \mathbf{e}^T \mathbf{s} dV. \quad (5.6)$$

Na expressão 5.6, δ é o operador variacional e V é o volume do elemento de placa indeformada (formulação lagrangiana total).

A matriz \mathbf{B} que define as relações deslocamento-deformação é obtida a seguir. A parcela do vetor deformação linear da equação 5.4 pode ser escrita como

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{B}_l \mathbf{u}, \quad (5.7)$$

onde $\mathbf{u} = [\Phi^T \mathbf{q}_u \quad \Phi^T \mathbf{q}_v \quad \Phi^T \mathbf{q}_w \quad \Phi^T \mathbf{q}_{\theta_x} \quad \Phi^T \mathbf{q}_{\theta_y}]^T$, \mathbf{q}_u , \mathbf{q}_v , \mathbf{q}_w , \mathbf{q}_{θ_x} e \mathbf{q}_{θ_y} são vetores colunas dos deslocamentos nodais do elemento de placa da figura 5.1 nas direções dos graus de liberdade u , v , w , θ_x e θ_y , e Φ é o vetor coluna com as funções de forma que interpolam os deslocamentos nodais, sendo, para o elemento de placa da figura 5.1, dadas por polinômios quadráticos.

$$\text{Definindo } \Psi = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_{\theta_x} \\ \mathbf{q}_{\theta_y} \end{bmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$$\mathbf{u} = \Psi^T \mathbf{q}. \quad (5.8)$$

Com a definição de \mathbf{u} e as equações que relacionam as deformações aos deslocamentos, obtém-se a expressão

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & z\mathbf{B}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_s \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\text{em que } \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & -\partial/\partial y & 0 \\ 0 & -\partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 1 \\ \partial/\partial y & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

No caso de um variacional da parcela da deformação linear, tem-se:

$$\delta \mathbf{e}_l = \mathbf{B}_l \delta \mathbf{u}. \quad (5.10)$$

A parcela do vetor deformação não-linear da equação 5.4 pode ser escrita como:

$$\mathbf{e}_{nl} = \mathbf{B}_{nl} \mathbf{u}. \quad (5.11)$$

$$\text{Definindo } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{nl} = \mathbf{A}\mathbf{G}, \text{ e como}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ w_{,x}w_{,y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} w_{,x} \\ w_{,y} \end{array} \right\}, \quad (5.12)$$

$$\text{então } \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{G}] \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{e}_{nl} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{0} \quad \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G}] \mathbf{u} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{u}, \text{ ou seja,}$$

$$\mathbf{B}_{nl} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (5.13)$$

No caso de um variacional da parcela da deformação não-linear, tem-se:

$$\delta \mathbf{e}_{nl} = \begin{Bmatrix} w_{,x} \delta w_{,x} \\ w_{,y} \delta w_{,y} \\ \delta w_{,x} w_{,y} + w_{,x} \delta w_{,y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \text{ Como}$$

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \delta w_{,x} \\ w_{,y} \delta w_{,y} \\ \delta w_{,x} w_{,y} + w_{,x} \delta w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix}, \text{ logo} \quad (5.14)$$

$$\delta \mathbf{e}_{nl} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{0} \quad \mathbf{A} \mathbf{G}] \delta \mathbf{u} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}. \quad (5.15)$$

Portanto, definindo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}$ e $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}_l + 2\mathbf{B}_{nl}$, tem-se $\mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{u}$ e $\delta \mathbf{e} = \mathbf{B}^* \delta \mathbf{u}$.

Substituindo \mathbf{u} pela expressão 5.8, chega-se a:

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{B}^* \Psi^T \delta \mathbf{q}. \quad (5.16)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{ext}$, onde, \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. O elemento pode estar submetido a diferentes tipos de carregamento, estes por sua vez são distribuídos para os nós do elemento por meio de integração ao longo da área do elemento, como pode ser visto em Bathe (1996). Substituindo a expressão 5.16 na expressão 5.6 do trabalho virtual interno, e da condição de $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$, tem-se:

$$\delta \mathbf{q}^T \left(\iiint_V \Psi \mathbf{B}^{*T} \mathbf{s} dV - \mathbf{f}_{ext} \right) = 0. \quad (5.17)$$

A expressão anterior, deve ser satisfeita para qualquer variação dos deslocamentos nodais compatível, ou seja, $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$. Substituindo \mathbf{B}^* , definida anteriormente, no vetor de forças internas \mathbf{f}_{int} que aparece na expressão 5.16, tem-se:

$$\mathbf{f}_{int} = \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{0} \\ z\mathbf{B}_b^T + \mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_s^T \end{bmatrix} \mathbf{s} dV = \iiint_{A,h} \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{0} \\ z\mathbf{B}_b^T + \mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_s^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz dA. \quad (5.18)$$

Na expressão anterior, a integral ao longo do volume indeformado do elemento de placa foi dividida na integral ao longo de sua espessura e área. Sabendo que os termos das matrizes que aparecem na expressão 5.18 são constantes ao longo da espessura do elemento de placa, e definindo

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \int_h^h \sigma_x dz \\ \int_h^h \sigma_y dz \\ \int_h^h \tau_{xy} dz \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} \int_h^h z \sigma_x dz \\ \int_h^h z \sigma_y dz \\ \int_h^h z \tau_{xy} dz \end{Bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q} = k \begin{Bmatrix} \int_h^h \tau_{xz} dz \\ \int_h^h \tau_{yz} dz \end{Bmatrix}, \quad (5.19)$$

obtem-se

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \Psi \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_m^T \mathbf{N} \\ \mathbf{B}_b^T \mathbf{M} + \mathbf{B}_u^T \mathbf{N} + \mathbf{B}_s^T \mathbf{Q} \end{Bmatrix} dA. \quad (5.20)$$

Na expressão 5.19, k é um fator de correção devido a aproximação de que seções planas permanecem planas após deformações, ou seja, tensão de cisalhamento constante na seção. O valor de k depende da forma da seção transversal sendo comumente utilizado o valor de 5/6 para placas.

Para a solução do problema não linear $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0}$ será determinada uma matriz de rigidez que relaciona a variação dos deslocamentos nodais com uma variação da força interna, ou seja, a matriz de rigidez tangente do elemento de placa (\mathbf{K}), portanto,

$$d\mathbf{f}_{int} = \mathbf{K}d\mathbf{q}. \quad (5.21)$$

Na definição da expressão 5.21 é considerado que o vetor de forças externas não varia com os deslocamentos nodais. Da expressão 5.17, tem-se

$$d\mathbf{f}_{int} = \iiint_V \Psi d\mathbf{B}^{*T} s dV + \iiint_V \Psi \mathbf{B}^{*T} ds dV. \quad (5.22)$$

Da equação 5.5, tem-se $ds = \mathbf{D}de$, como $de = \mathbf{B}^* du$ e $du = \Psi^T d\mathbf{q}$, logo

$$\iiint_V \Psi \mathbf{B}^{*T} ds dV = \left(\iiint_V \Psi \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* \Psi^T dV \right) d\mathbf{q}. \quad (5.23)$$

Da expressão de \mathbf{B}^* , definida anteriormente, obtém-se

$$d\mathbf{B}^{*T} \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ d\mathbf{B}_u^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ d\mathbf{B}_u^T \mathbf{s}^* \end{bmatrix} \right\}, \text{ em que } \mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}.$$

A expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ d\mathbf{B}_u^T \mathbf{s}^* \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \end{bmatrix} d\mathbf{u}, \quad (5.24)$$

como é mostrado em Zienkiewicz e Taylor (1991). Na expressão 5.23, \mathbf{G} é como definido anteriormente e \mathbf{H} é uma matriz simétrica com elementos dados pelas tensões presentes no vetor \mathbf{s}^* , ou seja,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Portanto, $\iiint_V \Psi d\mathbf{B}^{*T} s dV = \left(\iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \end{bmatrix} \Psi^T dV \right) d\mathbf{q}$ e

$$d\mathbf{f}_{\text{int}} = \left(\iiint_V \Psi \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* \Psi^T dV + \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \end{bmatrix} \Psi^T dV \right) d\mathbf{q} \quad (5.26)$$

Comparando as expressões 5.21 e 5.26, tem-se:

$$\mathbf{K} = \iiint_V \Psi \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{B}^* \Psi^T dV + \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \end{bmatrix} \Psi^T dV. \quad (5.27)$$

Usando as relações de \mathbf{B}^* e \mathbf{D} definidas anteriormente na expressão 5.27 para a matriz de rigidez tangente do elemento, chega-se à expressão:

$$\mathbf{K} = \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{0} \\ z\mathbf{B}_b^T + \mathbf{B}_u^T & \mathbf{B}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & z\mathbf{B}_b + \mathbf{B}_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \Psi^T dV + \iiint_V \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \end{bmatrix} \Psi^T dV. \quad (5.28)$$

A expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_{mb} + \mathbf{K}_u \\ \mathbf{K}_{mb}^T + \mathbf{K}_u^T & \mathbf{K}_{bs} + \mathbf{K}_{bu} + \mathbf{K}_\sigma \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

em que $\mathbf{K}_m = \iint_A \Psi \mathbf{B}_m^T \int_h \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_m \Psi^T dA$, $\mathbf{K}_{mb} = \iint_A \Psi \mathbf{B}_m^T \int_h z \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_b \Psi^T dA$,

$$\mathbf{K}_{bs} = \iint_A \Psi \left(\mathbf{B}_b^T \int_h z^2 \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \int_h \mathbf{D}_s dz \mathbf{B}_s \right) \Psi^T dA, \mathbf{K}_{mu} = \iint_A \Psi \mathbf{B}_m^T \int_h \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_u \Psi^T dA,$$

$$\mathbf{K}_{bu} = \iint_A \Psi \left(\mathbf{B}_b^T \int_h z \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_u^T \int_h \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_u + \mathbf{B}_u^T \int_h z \mathbf{D}_p dz \mathbf{B}_b \right) \Psi^T dA \text{ e}$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \iint_A \Psi \mathbf{G}^T \int_h \mathbf{H} dz \mathbf{G} \Psi^T dA.$$

As integrais ao longo da espessura da placa que aparecem nas expressões de \mathbf{N} , \mathbf{M} , \mathbf{Q} , \mathbf{K}_m , \mathbf{K}_{mb} , \mathbf{K}_{bs} , \mathbf{K}_{mu} , \mathbf{K}_{bu} e \mathbf{K}_σ devem ser divididas em somas de integrais ao longo da espessura de cada camada, uma vez que as propriedades dos materiais podem ser diferentes em cada camada.

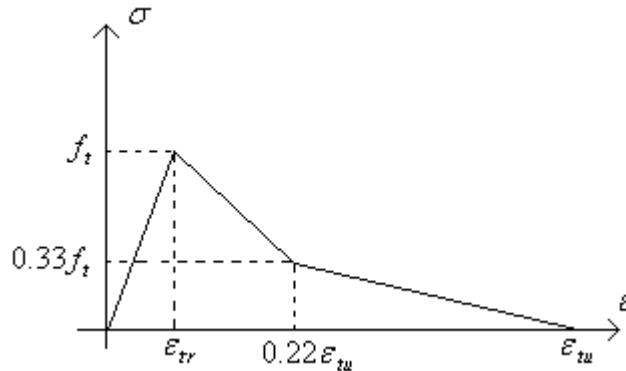


Figura 5.2 – Curva tensão-deformação do concreto na tração

O problema não linear físico e geométrico é resolvido usando um método incremental e iterativo, sendo utilizado o método de Newton-Raphson com controle de carga (ou deslocamento) para o processo iterativo. Na análise é usada a aproximação do lagrangiano total, no qual as tensões e as deformações são referenciadas em todo passo e iteração à configuração geométrica original.

Para a avaliação do problema não linear físico é adotada para o concreto na tração a curva tensão-deformação da figura 5.2 sugerida por Rots *et al.* (1984) e usada também por Huang *et al.* (2003b) na avaliação de seus exemplos, que servem neste trabalho como validação para o elemento de placa implementado. Neste trabalho foi adotado $\epsilon_{tu} = 10\epsilon_{tr}$ e para a resistência a tração do concreto foi usada a relação $f_t = 0.3321\sqrt{f_c}$ fornecida pela *American Society of Civil Engineers - ASCE* (1982), onde f_c é a resistência a compressão do concreto em MPa.

Já para o concreto na compressão é adotada a curva tensão-deformação especificada no Eurocode 4 (2001) mostrada na figura 5.3 e com expressão analítica dada pela equação 5.30. A figura 5.4 mostra a curva tensão-deformação para o aço de reforço como especificada no Eurocode 4 (2001).

$$\sigma_c(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3\varepsilon f_c}{\varepsilon_{cr} [2 + (\varepsilon/\varepsilon_{cr})^3]} & \text{se } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{cr} \\ f_c \frac{\varepsilon - \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cr} - \varepsilon_{cu}} & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{cr} \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

No processo incremental usado para definir a curva carga-deslocamento do problema analisado a não linearidade física é considerada a cada passo atribuindo a cada camada do elemento uma rigidez obtida a partir da curva tensão-deformação do material e das deformações principais no ponto de Gauss da integração numérica do elemento.

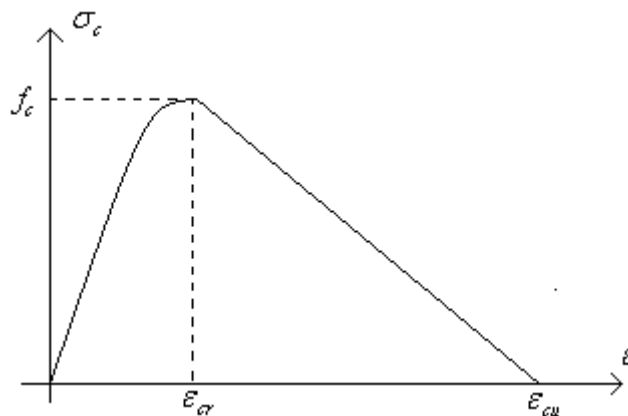


Figura 5.3 – Curva tensão-deformação do concreto na compressão

Em cada ponto de Gauss e para cada camada do elemento de placa as deformações nas direções dos eixos ortogonais x e y são obtidas. Considerando as camadas em estado plano de tensões são determinadas as direções principais indicadas neste capítulo pelos subscritos 1 e 2, onde a direção 1 indica a direção de maior deformação principal.

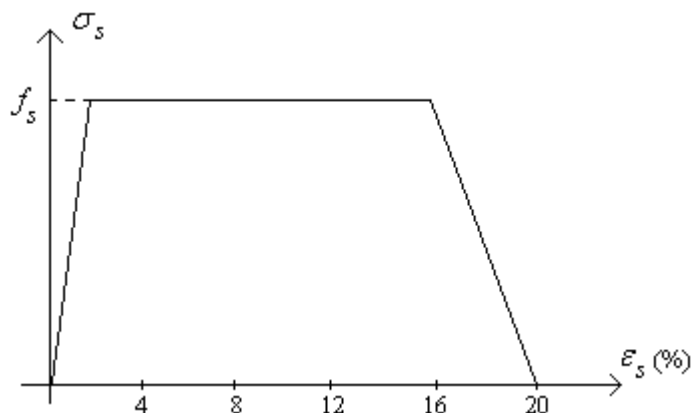


Figura 5.4 – Curva tensão-deformação do aço na compressão/tração

Para a verificação de falha do concreto é adotado neste trabalho um critério baseado na máxima deformação específica descrito no parágrafo seguinte. Um critério de falha mais elaborado pode ser encontrado em Kupfer e Gerstle (1973) que estudaram o comportamento do concreto sobre tensão biaxial e propuseram uma superfície de falha que é adotada pelo código CEB-FIP (1993). No trabalho de Huang *et al.* (2003a) os autores utilizam uma superfície de falha para o concreto proposta por Barzegar e Jamshidi (1987) a qual foi baseada no trabalho de Kupfer e Gerstle (1973). A utilização de um critério mais simples é justificada devido à baixa resistência do concreto à tração fazendo com que ele falhe na região de tração das superfícies de falha, a qual é bastante próxima para os diferentes critérios de falha.

De forma simplificada a região de falha do concreto foi assumida como sendo a região fora do retângulo definido pelos vértices opostos $(\varepsilon_{cr}, \varepsilon_{cr})$ e $(\varepsilon_{tr}, \varepsilon_{tr})$, onde ε_{cr} e ε_{tr} são definidos nas figuras 5.2 e 5.3. Se as deformações principais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ se encontrarem fora da região de falha então o concreto é considerado isotrópico e linear, e o módulo de deformação axial do concreto é obtido da curva da figura 5.3 fazendo $E_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c}(\varepsilon_c = 0)$. Caso contrário, o concreto é considerado ortotrópico com a relação tensão-deformação desacoplada nas direções 1 e 2 (direções principais). Ou seja, a matriz constitutiva do material torna-se

$$\mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{p12} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{D}_{s12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2}(G_1 + G_2) & 0 & 0 \\ Sim. & & & G_1 & 0 \\ & & & & G_2 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

onde $E_1 = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c}(\varepsilon_c = \varepsilon_1)$, $E_2 = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c}(\varepsilon_c = \varepsilon_2)$, $G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)}$ e $G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu)}$. A matriz de

rigidez na direção dos eixos ortogonais x e y pode ser obtida a partir de \mathbf{D}_{12} , como descrito a seguir. As tensões e deformações principais podem ser relacionadas com as tensões e deformações em relação aos eixos x e y quaisquer da forma

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{s}_{xy} \text{ e } \mathbf{e}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{e}_{xy}, \text{ onde} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{R}_\sigma(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \sin(2\phi) \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\sin(2\phi) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\phi) & \frac{1}{2} \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{R}_\varepsilon(\phi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{1}{2} \sin(2\phi) \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{1}{2} \sin(2\phi) \\ -\sin(2\phi) & \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \text{ e} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{R}_s(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Nas expressões 5.33 a 5.35 o ângulo ϕ é o ângulo de rotação dos eixos principais em relação ao eixo x e y . Substituindo as expressões anteriores na relação tensão deformação nas direções principais, $\mathbf{s}_{12} = \mathbf{D}_{12} \mathbf{e}_{12}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{s}_{xy} = \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{e}_{xy} \text{ e } \mathbf{s}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{e}_{xy}.$$

Verifica-se que $\mathbf{R}_\sigma^{-1} = \mathbf{R}_\sigma^T$ e $\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{R}_s^T$, portanto

$$\mathbf{s}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^T \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \mathbf{e}_{xy}, \text{ ou seja,} \quad (5.36)$$

$$\mathbf{D}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s^T \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_s \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

O problema não linear geométrico é resolvido através do método iterativo de Newton-Raphson com controle de carga (ou deslocamento) sendo a não linearidade física considerada através do procedimento incremental. Nestes casos o tamanho do passo

influencia consideravelmente na solução do problema. A técnica descrita no parágrafo seguinte diminui significativamente esta influência na solução numérica do problema.

A figura 5.5 abaixo ilustra o procedimento incremental adotado para definir a rigidez em cada ponto de Gauss analisado para cada camada do elemento de placa em cada passo de carga (ou deslocamento). A figura mostra que a aproximação de $f(u + du)$ é bem melhor usando a tangente média do início do passo e o final dele do que usando a tangente inicial. Este procedimento diminui o acúmulo de erro que acontece passo a passo no método incremental (figura 5.6), tendo como desvantagem a necessidade de avaliar o mesmo passo duas vezes, uma para a matriz de rigidez tangente inicial e outra para a matriz de rigidez tangente média.

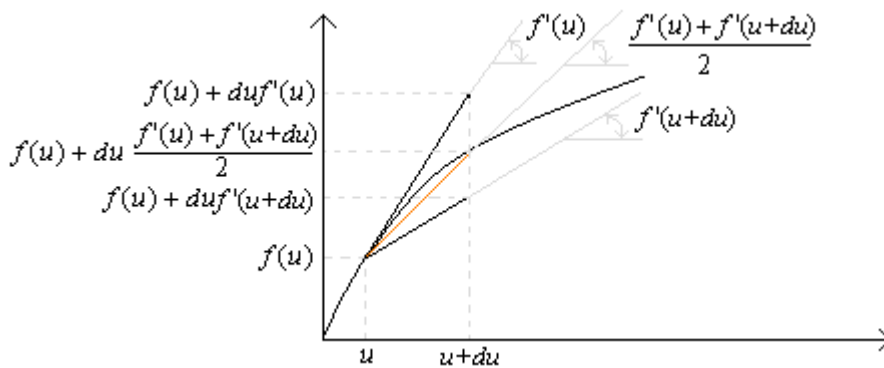


Figura 5.5 – Ilustração de um passo do processo incremental

A figura 5.6 mostra o procedimento da tangente média descrito no parágrafo anterior para a função quadrática $f(x) = -x^2 + 4x$. O método incremental da aproximação da tangente é definido através da forma de recorrência dada por $y_{k+1} = y_k + f'(x_k)dx$ com $x_{k+1} = x_k + dx$. Já o método incremental da tangente média é definido através da forma de recorrência dada por $y_{k+1} = y_k + 0.5[f'(x_k) + f'(x_{k+1})]dx$ com $x_{k+1} = x_k + dx$. Para ambos os métodos o trecho da curva exata de $[0,2]$ foi dividido em 20 passos incrementais com $dx = 0.1$.

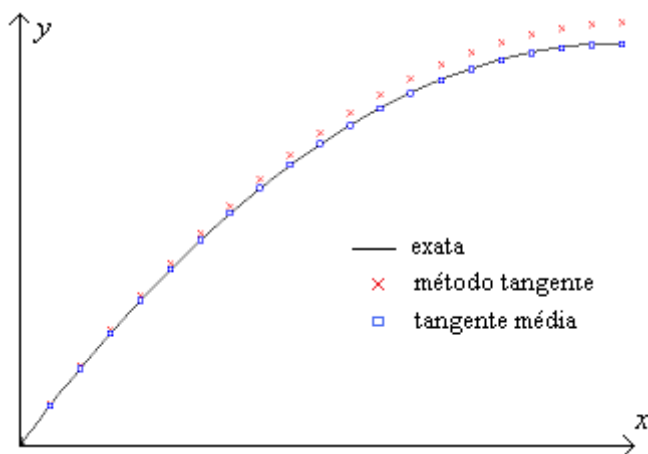


Figura 5.6 – Ilustração do avanço do método incremental

5.3 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE VIGA

O elemento de viga implementado neste capítulo tem graus de liberdade compatíveis com aqueles definidos para o elemento de placa do item anterior, como é mostrado na figura 5.7 abaixo.

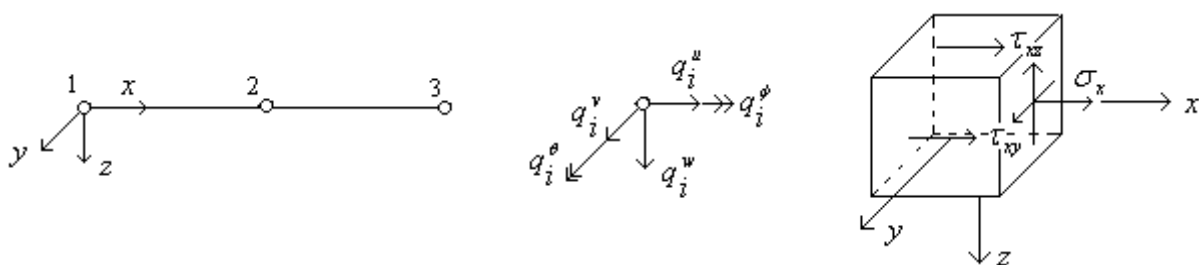


Figura 5.7 – Graus de liberdade do elemento de viga e tensões em um elemento infinitesimal

As equações de deslocamento para o elemento de viga da figura 5.7 são dadas pelas expressões 5.38 a 5.40 abaixo. Na definição destas equações são consideradas as hipóteses cinemáticas da teoria de viga de Timoshenko e a aproximação de que um esforço de torção não provoca deslocamentos fora do plano de torção, ou seja, que não haja empenamento da seção transversal, a qual é válida para eixos de seção transversal circular ou eixos tubulares de paredes delgadas. Portanto, para seções transversais quaisquer esta análise é sugerida para problemas onde os esforços de torção são pequenos em comparação com os esforços de flexão e cisalhamento, o que geralmente acontece em pisos de edifícios de múltiplos andares.

$$u(x, y, z) = u^0(x) + z\theta(x) \quad (5.38)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x) - z\phi(x) \quad (5.39)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x) + y\phi(x) \quad (5.40)$$

Nas equações acima o sobrescrito 0 indica deslocamento em um eixo de referência adotado. Este índice será omitido nas equações a seguir para facilitar a notação. Das equações de deslocamento e da expressão de deformação de Green-Lagrange, obtém-se as equações das deformações dadas por

$$\varepsilon_x = u_{,x} + z\theta_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2, \quad (5.41)$$

$$\varepsilon_{xz} = \theta + w_{,x} + y\phi_{,x} \text{ e} \quad (5.42)$$

$$\varepsilon_{xy} = v_{,x} - z\phi_{,x}. \quad (5.43)$$

Sendo E o módulo de deformação axial e G o módulo de deformação por cisalhamento, as relações tensão deformação para o caso linear elástico são dadas por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (5.44)$$

$$\tau_{xy} = G\varepsilon_{xy} \text{ e} \quad (5.45)$$

$$\tau_{xz} = G\varepsilon_{xz}. \quad (5.46)$$

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento deformável tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (5.47)$$

onde σ_{ij} são as componentes de tensões de Kirchhoff, ε_{ij} são as componentes de deformação de Green-Lagrange, δ é o operador variacional e V é o volume do sólido indeformado. Para o caso de problemas de viga da figura 5.7, tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV. \quad (5.48)$$

A variação das deformações que aparece nas expressões 5.41 a 5.43 são dados por

$$\delta \varepsilon_x = \delta u_{,x} + z \delta \theta_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}, \quad (5.49)$$

$$\delta \varepsilon_{xz} = \delta \theta + \delta w_{,x} + y \delta \phi_{,x} \text{ e} \quad (5.50)$$

$$\delta \varepsilon_{xy} = \delta v_{,x} - z \delta \phi_{,x}. \quad (5.51)$$

Substituindo na expressão 5.48 do trabalho virtual devido as forças interna do elemento de viga da figura 5.7 as expressões 5.49 a 5.51, e observando que os deslocamentos u , v , w , ϕ e θ destas expressões variam apenas ao longo do eixo do elemento, tem-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_L \left[\int_A \sigma_x dA (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) + \int_A \tau_{xy} dA \delta v_{,x} + \int_A \tau_{xz} dA (w_{,x} + \delta \theta) + \right. \\ \left. + \int_A \sigma_x z dA \delta \theta_{,x} + \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \delta \phi_{,x} \right] dx. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Definindo as variáveis, $N_x = \int_A \sigma_x dA$, $N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA$, $N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$, $M_x = \int_A \sigma_x z dA$ e $T_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$, para os esforços atuantes na seção transversal do elemento de viga, a expressão 5.52 pode ser escrita da forma mais conveniente dada por

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L [N_x (\delta u_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) + N_{xy} \delta v_{,x} + N_{xz} (\delta w_{,x} + \delta \theta) + M_x \delta \theta_{,x} + T_x \delta \phi_{,x}] dx. \quad (5.53)$$

Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos representado nas expressões 5.54 a 5.58 pelo vetor coluna Φ .

$$u = [\Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T] \mathbf{q} \quad (5.54)$$

$$v = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5.55)$$

$$w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5.56)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5.57)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \Phi^T \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5.58)$$

Nas expressões 5.54 a 5.58, $\mathbf{q} = [q_i^u \quad q_i^v \quad q_i^w \quad q_i^\phi \quad q_i^\theta]^T$ com i variando de 1 até 9 representando os graus de liberdade do elemento nas direções dos deslocamentos de translações e rotações, e $\mathbf{0}_u$ é um vetor coluna nulo com nove elementos. Outras configurações de interpolação podem ser adotadas para o elemento sem maiores dificuldades.

Sendo as expressões para os deslocamentos funções dos deslocamentos nodais então as suas variações são dadas por

$$\delta u = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (5.59)$$

$$\delta v = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (5.60)$$

$$\delta w = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (5.61)$$

$$\delta \phi = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial \mathbf{q}} \right) \text{ e} \quad (5.62)$$

$$\delta \theta = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (5.63)$$

Substituindo as expressões 5.59 a 5.63 em 5.53 chega-se a expressão 5.64 para o trabalho virtual das forças internas para o elemento de viga da figura 5.6.

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}^T \int_L [N_x \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_x \frac{\partial \theta_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_x \frac{\partial \phi_{,x}}{\partial \mathbf{q}}] dx. \quad (5.64)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, onde \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externas nodais. Da condição de $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$, tem-se

$$\delta \mathbf{q}^T \int_L [N_x \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_x \frac{\partial \theta_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_x \frac{\partial \phi_{,x}}{\partial \mathbf{q}}] dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (5.65)$$

A expressão 5.65 deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela expressão

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L [N_x \left(\frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right) + N_{xy} \frac{\partial v_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + N_{xz} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{q}} \right) + M_x \frac{\partial \theta_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + T_x \frac{\partial \phi_{,x}}{\partial \mathbf{q}}] dx. \quad (5.66)$$

Substituindo na expressão 5.66 as derivadas das equações dos deslocamentos, expressões 5.54 a 5.58, em relação aos deslocamentos nodais, e considerando o fator de redução para corrigir as tensões de cisalhamento, tem-se

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} N_x \Phi_{,x} \\ N_{xy} \Phi_{,x} \\ \frac{5}{6} N_{xz} \Phi_{,x} + N_x \Phi_{,x} w_{,x} \\ T_x \Phi_{,x} \\ M_x \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xz} \Phi \end{array} \right\} dx. \quad (5.67)$$

Devido a não-linearidade geométrica assumida no problema e uma possível não linearidade física, verificada através da relação tensão-deformação não linear dos materiais

envolvidos, o problema $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$ é não linear. Portanto, faz-se necessário a determinação da matriz de rigidez tangente, obtida derivando o vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{K} = \int_L \left[\begin{array}{c} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} w_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + N_x \Phi_{,x} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{array} \right] dx. \quad (5.68)$$

Na expressão 5.68 a derivada do esforço axial atuante na seção em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \left(\int_A \sigma_x dA \right)}{\partial \mathbf{q}} = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \mathbf{q}} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} dA, \quad (5.69)$$

onde $\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x}$ é dada pela inclinação da tangente a curva tensão-deformação e será denotada

por E_T . Já a derivada da deformação axial em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial u_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + z \frac{\partial \theta_{,x}}{\partial \mathbf{q}} + w_{,x} \frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} = \left\{ \begin{array}{c} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \\ \mathbf{0} \\ z \Phi_{,x} \end{array} \right\}. \quad (5.70)$$

Substituindo a expressão 5.70 em 5.69 e lembrando que os vetores coluna que representam as funções de forma variam apenas ao longo do eixo longitudinal do elemento, tem-se

$$\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_A E_T dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \end{Bmatrix}. \quad (5.71)$$

De forma análoga à descrita para o esforço axial, pode-se determinar as derivadas dos outros esforços atuantes na seção em relação aos deslocamentos nodais, logo

$$\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ w_{,x} \Phi_{,x} \int_A E_T z dA \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A E_T z^2 dA \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} \int_A G z dA \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi_{,x} \int_A G z dA \\ \Phi_{,x} \int_A G y dA \\ \Phi_{,x} \int_A G (y^2 + z^2) dA \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_{xz}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \\ \Phi_{,x} \int_A G y dA \\ \Phi_{,x} \int_A G dA \end{Bmatrix}. \quad (5.73)$$

As expressões dos esforços atuantes na seção transversal, N_x , N_{xy} , N_{xz} , M_x e T_x , bem como, das rigidezes $\int_A E dA$, $\int_A E z dA$, $\int_A E z^2 dA$, $\int_A G dA$, $\int_A G z dA$, $\int_A G z^2 dA$, $\int_A G y dA$ e $\int_A G y^2 dA$, são obtidas de forma analítica transformando a integral de área em uma integral de linha ao longo do contorno da seção transversal que tem forma geral dada por um

polígono fechado qualquer. O método utilizado neste trabalho para o cálculo destes esforços e rigidezes é descrito de forma simplificada no item 3.3 do capítulo 3 deste trabalho. Uma descrição detalhada deste método pode ser encontrada em Caldas (2004) e Silva (2006).

A rigidez à torção de elementos de barra no caso geral é muito dependente da seção transversal e do material. A formulação apresentada considera a rigidez à torção proporcional ao momento polar da seção, o que só vale para seções circulares. Adaptações devem ser feitas, por exemplo, quando a barra representa vigas de seção I. Em seções de concreto deveria haver redução de rigidez devido à fissuração. Como a formulação tem como objetivo a simulação de estruturas onde a torção não é preponderante, estas alterações não foram consideradas.

Em problemas de vigas a tensão normal é máxima nas bordas superior e inferior da seção transversal, onde a tensão de cisalhamento é nula, ou seja, na região de tensão normal máxima tem-se um estado uniaxial de tensões e a análise não linear física é feita diretamente da relação tensão-deformação do material obtida para um estado axial de tensões. Já para a tensão de cisalhamento é considerada neste trabalho uma relação linear entre a tensão e deformação, ou seja, análise linear.

5.4 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE INTERFACE

O elemento de interface implementado neste capítulo simula o comportamento da conexão deformável de placas enrijecidas com vigas e faz a ligação entre os elementos de placa e viga definidos nos itens 5.2 e 5.3. Portanto, como mostrado na figura 5.8 seus graus de liberdade são compatíveis com estes elementos.

A equação do deslocamento relativo longitudinal (direção x) do elemento de interface da figura 5.8 é

$$s_l(x) = u_2(x, y, z = c - z_2) - u_1(x, y, z = c - z_1), \quad (5.75)$$

onde $u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha^0(x) + z\theta_\alpha(x)$ é a equação do deslocamento na direção x para os elementos acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de contato. Portanto,

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - (z_2 - c)\theta_2(x) - (c - z_1)\theta_1(x). \quad (5.76)$$

Já para a equação do deslocamento relativo transversal (direção y), tem-se

$$s_t(x) = v_2(x, y, z = c - z_2) - v_1(x, y, z = c - z_1), \quad (5.77)$$

em que $v_\alpha(x, y, z) = v_\alpha^0(x) - z\phi_\alpha(x)$ é a equação do deslocamento na direção y para os elementos acima e abaixo da interface de contato. Portanto,

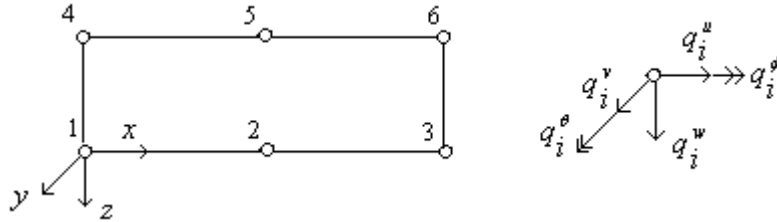


Figura 5.8 – Graus de liberdade do elemento de interface

$$s_t(x) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + (z_2 - c)\phi_2(x) + (c - z_1)\phi_1(x). \quad (5.78)$$

Por último, a equação do deslocamento relativo vertical (direção z), é

$$s_v(x) = w_2(x, y, z) - w_1(x, y, z), \quad (5.79)$$

em que $w_\alpha(x, y, z) = w_\alpha^0(x) + y\phi_\alpha(x)$ é a equação do deslocamento na direção z para os elementos acima e abaixo da interface de contato. Portanto,

$$s_v(x) = w_2^0(x) - w_1^0(x) + y(\phi_2(x) - \phi_1(x)). \quad (5.80)$$

As figuras 5.9 a 5.11 ilustram os deslocamentos relativos nas direções de x , y e z dados pelas expressões 5.75 a 5.80, onde c , z_1 e z_2 são como mostrados na figura 5.9, e o sobrescrito 0 indica deslocamento em um plano ou um eixo de referência adotado. Este índice será omitido nas equações a seguir para facilitar a notação.

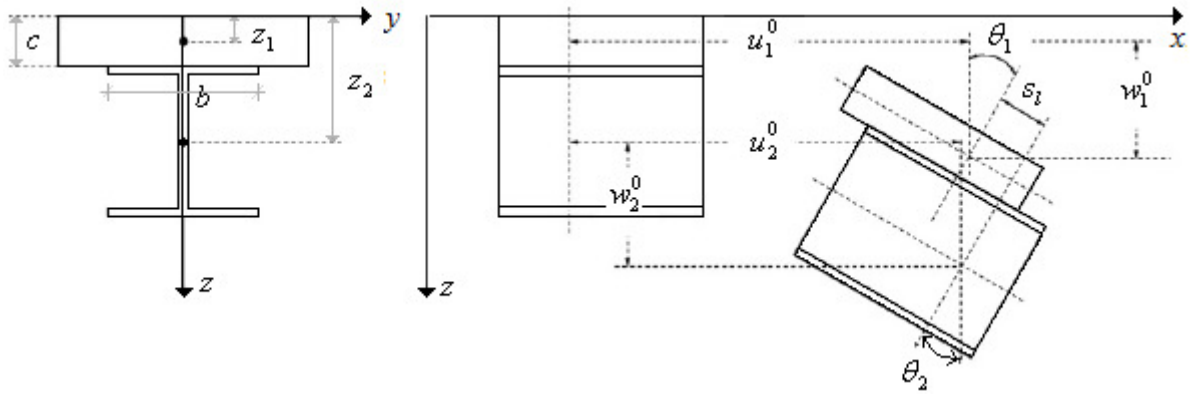


Figura 5.9 – Deslizamento longitudinal (s_l)

Considerando uma relação linear entre as forças por unidade de comprimento na direção de u (S_b), v (V_b) e w (N_b), em relação a seus respectivos deslocamentos relativos e , sendo E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} , respectivamente, as rigidezes de deformação do elemento de interface na direção dos deslocamentos u , v e w , então

$$S_b = E_{S_b} s_l, V_b = E_{V_b} s_t \text{ e } N_b = E_{N_b} s_v. \quad (5.81)$$

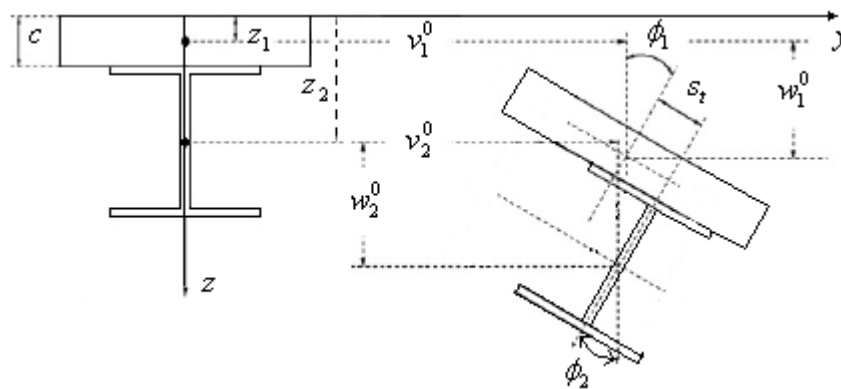


Figura 5.10 – Deslizamento transversal (s_t)

No caso de problemas não lineares as rigidezes que aparecem na expressão 5.81 serão dadas pela inclinação da tangente à curva que define a lei constitutiva da conexão deformável, e o problema é resolvido usando um método numérico que utiliza aproximações lineares.

Aplicando um campo de deformação virtual compatível a um elemento de interface da figura 5.8 deformável tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} (S_b \delta s_l + N_b \delta s_v + V_b \delta s_t) d\Omega. \quad (5.82)$$

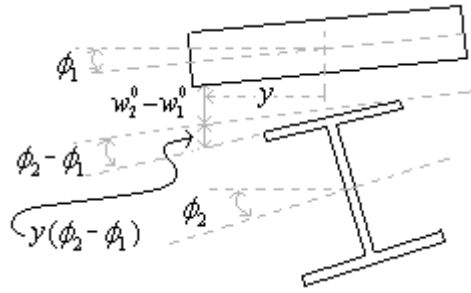


Figura 5.11 – Separação vertical (s_v)

Como s_l e s_t variam somente ao longo do eixo do elemento de interface, tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \int_L (S_b \delta s_l + V_b \delta s_t) dx + \int_L \left(\int_{b_f} N_b \delta s_v dy \right) dx. \quad (5.83)$$

Na expressão 5.83, b_f é a largura na direção y da seção de contato entre os materiais, como mostrado na figura 5.9. A variação dos deslocamentos relativos do elemento de interface é dada por

$$\delta s_l = \delta u_2 - \delta u_1 - (z_2 - c) \delta \theta_2 - (c - z_1) \delta \theta_1, \quad (5.84)$$

$$\delta s_t = \delta v_2 - \delta v_1 + (z_2 - c) \delta \phi_2 + (c - z_1) \delta \phi_1 \quad (5.85)$$

$$\delta s_v = \delta w_2 - \delta w_1 + y(\delta \phi_2 - \delta \phi_1). \quad (5.86)$$

Substituindo na expressão 5.83 as expressões 5.84 a 5.86, tem-se

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_L & (S_b (\delta u_2 - \delta u_1) + V_b (\delta v_2 - \delta v_1) + N_b^1 (\delta w_2 - \delta w_1) + [(c - z_1) V_b - N_b^2] \delta \phi_1 + \\ & + (z_1 - c) S_b \delta \theta_1 + [(z_2 - c) V_b + N_b^2] \delta \phi_2 + (c - z_2) S_b \delta \theta_2) dx, \end{aligned} \quad (5.87)$$

em que $N_b^1 = \int_b N_b dy$ e $N_b^2 = \int_b N_b y dy$.

Na aproximação de elementos finitos baseado em deslocamentos, as equações dos deslocamentos são aproximadas por funções de formas associadas aos deslocamentos nodais (\mathbf{q}). Para o elemento em questão foram adotadas funções de forma dadas por polinômios quadráticos representadas nas expressões 5.88 a 5.92 pelo vetor coluna Φ .

$$u_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{u_\alpha} \quad (5.88)$$

$$v_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{v_\alpha} \quad (5.89)$$

$$w_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{w_\alpha} \quad (5.90)$$

$$\phi_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{\phi_\alpha} \quad (5.91)$$

$$\theta_\alpha = \Phi^T \mathbf{q}_{\theta_\alpha} \quad (5.92)$$

Na expressões 5.88 a 5.92, o índice α faz referência as seções acima e abaixo da interface e, de acordo com a figura 5.8, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{u_1} &= [q_1^u \quad q_2^u \quad q_3^u]^T, \quad \mathbf{q}_{u_2} = [q_4^u \quad q_5^u \quad q_6^u]^T, \quad \mathbf{q}_{v_1} = [q_1^v \quad q_2^v \quad q_3^v]^T, \quad \mathbf{q}_{v_2} = [q_4^v \quad q_5^v \quad q_6^v]^T, \\ \mathbf{q}_{w_1} &= [q_1^w \quad q_2^w \quad q_3^w]^T, \quad \mathbf{q}_{w_2} = [q_4^w \quad q_5^w \quad q_6^w]^T, \quad \mathbf{q}_{\phi_1} = [q_1^\phi \quad q_2^\phi \quad q_3^\phi]^T, \quad \mathbf{q}_{\phi_2} = [q_4^\phi \quad q_5^\phi \quad q_6^\phi]^T, \\ \mathbf{q}_{\theta_1} &= [q_1^\theta \quad q_2^\theta \quad q_3^\theta]^T \text{ e } \mathbf{q}_{\theta_2} = [q_4^\theta \quad q_5^\theta \quad q_6^\theta]^T. \end{aligned}$$

O vetor dos deslocamentos nodais é dado por

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{u_1}^T \quad \mathbf{q}_{v_1}^T \quad \mathbf{q}_{w_1}^T \quad \mathbf{q}_{\phi_1}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_1}^T \quad \mathbf{q}_{u_2}^T \quad \mathbf{q}_{v_2}^T \quad \mathbf{q}_{w_2}^T \quad \mathbf{q}_{\phi_2}^T \quad \mathbf{q}_{\theta_2}^T]^T.$$

Sendo os deslocamentos funções dos deslocamentos nodais então suas variações são dadas por

$$\delta u_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (5.93)$$

$$\delta v_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (5.94)$$

$$\delta w_\alpha = \delta \mathbf{q}^T \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (5.95)$$

$$\delta\phi_\alpha = \delta\mathbf{q}^T \left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\mathbf{q}} \right) \mathbf{e} \quad (5.96)$$

$$\delta\theta_\alpha = \delta\mathbf{q}^T \left(\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\mathbf{q}} \right). \quad (5.97)$$

Substituindo as expressões 5.93 a 5.97 em 5.87 chega-se a expressão 5.98 para o trabalho virtual de um elemento de interface associado a um elemento de placa e outro de viga.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \delta\mathbf{q}^T \int_L (S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + V_b \left(\frac{\partial v_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + N_b^1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + [(c - z_1)V_b - N_b^2] \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} + \\ + (z_1 - c)S_b \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{q}} + [(z_2 - c)V_b + N_b^2] \frac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{q}} + (c - z_2)S_b \frac{\partial\theta_2}{\partial\mathbf{q}}) dx. \end{aligned} \quad (5.98)$$

O trabalho virtual externo é obtido por $\delta W_{\text{ext}} = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}$, onde \mathbf{f}_{ext} é o vetor de forças externa nodais. Geralmente as forças externas são transmitidas para os elementos de interface através dos elementos de placa e viga a ele associado. Da condição de $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q}^T \int_L (S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + V_b \left(\frac{\partial v_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + N_b^1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + [(c - z_1)V_b - N_b^2] \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} + \\ + (z_1 - c)S_b \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{q}} + [(z_2 - c)V_b + N_b^2] \frac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{q}} + (c - z_2)S_b \frac{\partial\theta_2}{\partial\mathbf{q}}) dx = \delta\mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

A expressão 5.99 deve ser válida para qualquer campo de deformação virtual compatível, portanto, ela pode ser escrita na forma $\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = 0$, onde \mathbf{f}_{int} é o vetor de forças internas dado pela expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L (S_b \left(\frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + V_b \left(\frac{\partial v_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial v_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + N_b^1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial w_1}{\partial\mathbf{q}} \right) + [(c - z_1)V_b - N_b^2] \frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{q}} + \\ + (z_1 - c)S_b \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{q}} + [(z_2 - c)V_b + N_b^2] \frac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{q}} + (c - z_2)S_b \frac{\partial\theta_2}{\partial\mathbf{q}}) dx. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Substituindo na expressão 5.100 as derivadas das equações dos deslocamentos, expressões 5.88 a 5.92, em relação aos deslocamentos nodais \mathbf{q} , tem-se

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_L \left\{ \begin{array}{c} -S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ [(c - z_1)V_b - N_b^2] \Phi \\ (z_1 - c)S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ V_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ [(z_2 - c)V_b + N_b^2] \Phi \\ (c - z_2)S_b \Phi \end{array} \right\} dx. \quad (5.101)$$

Como o elemento de interface implementado trabalha em conjunto com os elementos não lineares de placa e viga implementados nos itens 5.2 e 5.3, então é necessário a determinação da matriz de rigidez tangente, derivando o vetor força interna em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{bmatrix} -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[(c - z_1) \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (z_1 - c) \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[(z_2 - c) \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (c - z_2) \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dx \quad (5.102)$$

Na expressão 5.102 a derivada do esforço de cisalhamento por unidade de comprimento atuante na interface de contato entre os materiais em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial (E_{S_b} s_l)}{\partial \mathbf{q}} = E_{S_b} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.103)$$

onde $E_{S_b} = \frac{\partial S_b}{\partial s_l}$ é a rigidez da conexão deformável na direção longitudinal. Já a derivada do deslocamento relativo na direção de u (deslizamento longitudinal) em relação aos deslocamentos nodais é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_l}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{q}} - (z_2 - c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{q}} - (c - z_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{q}} = \\ &= \left[-\Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad (z_1 - c) \Phi^T \quad \Phi^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T \quad (c - z_2) \Phi^T \right]^T. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Substituindo a expressão 5.104 em 5.103, tem-se

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} -\Phi E_{S_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (z_1 - c)\Phi E_{S_b} \\ \Phi E_{S_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (c - z_2)\Phi E_{S_b} \end{Bmatrix}. \quad (5.105)$$

De forma análoga pode-se obter a derivada dos demais esforços atuantes em relação aos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ (c - z_1)\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \\ (z_2 - c)\Phi E_{V_b} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi \int_b E_{N_b} dy \\ -\Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi \int_b E_{N_b} dy \\ \Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \text{ e } \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ -\Phi \int_b E_{N_b} y^2 dy \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Phi \int_b E_{N_b} y dy \\ \Phi \int_b E_{N_b} y^2 dy \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (5.106)$$

Nas expressões acima, E_{S_b} , E_{V_b} e E_{N_b} são as inclinações das tangentes às curvas força por unidade de comprimento versus deslizamento nas direções de x , y e z , respectivamente.

5.5 – EXEMPLOS

Os elementos de placa, viga e interface implementados neste capítulo serão validados comparando os seus resultados com resultados numéricos e experimentais obtidos por outros autores. Além destes exemplos de validação é apresentado neste item um exemplo de aplicação destes elementos, no qual será avaliada a influência da rigidez da conexão deformável na determinação da largura efetiva em vigas mistas.

5.5.1 – Lajes de Concreto simplesmente apoiadas

Para validar a capacidade do elemento de placa implementado de simular o comportamento de placas de concreto sob análise não linear física e geométrica, dois exemplos de placas simplesmente apoiadas em suas bordas com relação largura versus comprimento igual a 1.0 e 1.5 foram analisadas. Estes mesmos exemplos foram submetidos a uma série de testes publicados por Ghoneim e MacGregor (1994a, 1994b), onde os autores combinaram cargas aplicadas no plano e lateralmente, ou seja, carregamento uniformemente distribuído aplicado perpendicularmente à placa. Análises numéricas sobre estes exemplos foram feitas nos trabalhos de Huang *et al.* (2003b), utilizando o programa VULCAN (Bailey, 1995, Bailey *et al.*, 1996, Najjar e Burgess, 1996, Huang *et al.*, 1999), e Caldas (2009).

As armaduras superiores e inferiores das barras de reforço são compostas de 260 mm²/m de área nas direções ortogonais x e y . A posição destas barras ao longo da espessura da placa, bem como as outras dimensões dos dois exemplos são mostradas na figura 5.12. As curvas tensão-deformação para o concreto e o aço de reforço são mostradas nas figuras 5.2 e 5.3 definidas no item 5.2 deste capítulo.

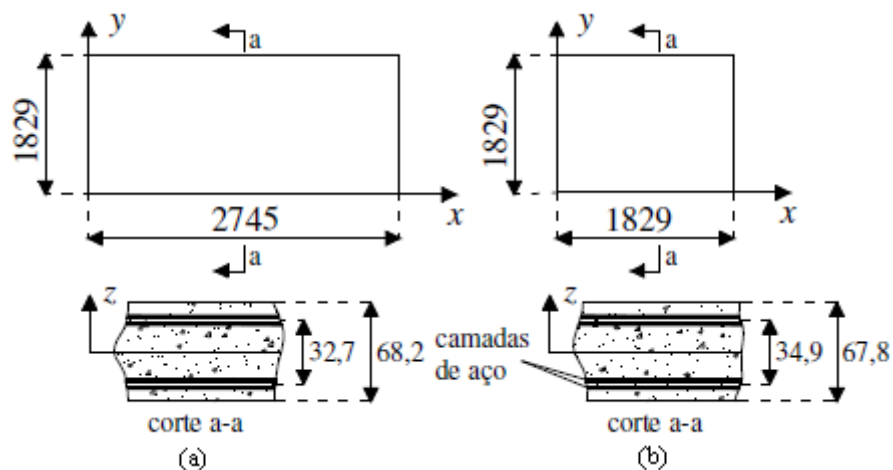


Figura 5.12 – Detalhes das lajes analisadas (Huang, 2003b)(cotas em mm)

A resistência ao escoamento do aço e o seu módulo de deformação axial foram considerados iguais a 450MPa e 205000 MPa, respectivamente. A resistência à compressão do concreto foi tomada igual a 18,7 MPa e 25,2 MPa para os exemplos (a) e (b), respectivamente. Foi considerado um coeficiente de Poisson de 0,2 para o concreto. Os elementos que discretizam a laje foram subdivididos em 20 camadas.

Os resultados numéricos obtidos pelos diferentes autores e os experimentais são mostrados nas figuras 5.13 e 5.14 abaixo. Como pode ser observado nas figuras o elemento implementado neste trabalho fornece resultados satisfatórios para análise linear e não linear quando comparados com resultados experimentais e numéricos da literatura.

Os resultados referentes a placa quadrada (figura 5.12-b) são mostrados na figura 5.13, já os resultados mostrados na figura 5.14 referem-se à placa retangular (figura 5.12-a). Na legenda das figuras a expressão linear (abreviada por l) e não-linear (abreviada por nl) refere-se à consideração da não-linearidade geométrica, Caldas e Huang referem-se aos resultados numéricos obtidos por estes autores (Huang, 2003b e Caldas, 2008), e Teste refere-se aos resultados experimentais (Ghoneim e MacGregor, 1994a, 1994b). O efeito de membrana pode ser observado nas figuras através das diferenças nas curvas referentes à análise linear e não-linear. Ao comparar estas curvas com a curva experimental obtida é evidenciada a necessidade da consideração do efeito de membrana na avaliação da carga última de placas de concreto reforçadas sujeitas a carregamento lateral.

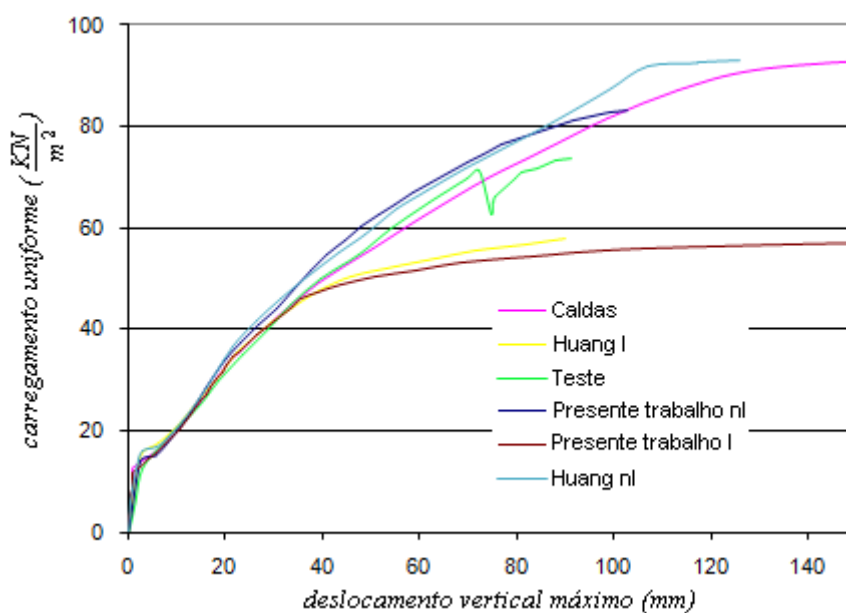


Figura 5.13 – Placa quadrada simplesmente apoiada

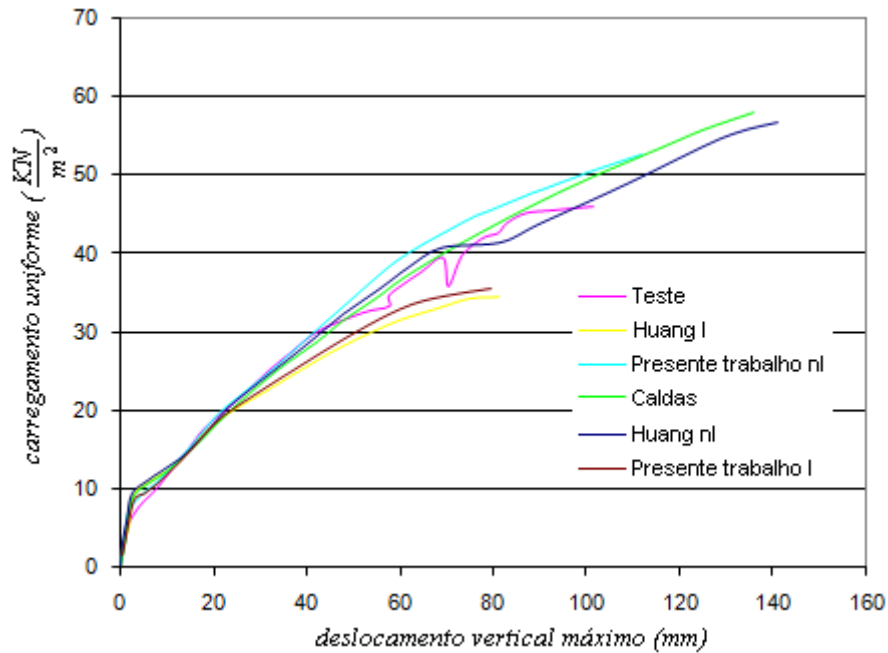


Figura 5.14 – Placa retangular simplesmente apoiada

5.5.2 – Laje mista aço-concreto

Para validar a ação conjunta dos elementos de placa, viga e interface implementados neste trabalho foi analisado um exemplo com configuração bastante comum na prática da construção civil. Este exemplo consiste de uma laje de concreto ligada por meio de conectores a três vigas de aço longitudinais e duas transversais com apoios nas interseções destas vigas, como mostra a figura 5.15. Este mesmo exemplo foi analisado experimentalmente e numericamente por Nie *et al.* (2008) e seus resultados são usados neste trabalho como dados comparativos.

A estrutura da figura 5.15 foi levada à ruptura através de três macacos hidráulicos em série apoiados sobre as três vigas longitudinais com um incremento de carga de 2 kN. Durante o teste os autores (Nie *et al.*, 2008) monitoraram deslocamento, deformação e deslizamento. No entanto, devido à alta rigidez da conexão e o fato desta não provocar efeitos significativos no estado limite último da estrutura, o deslizamento não foi avaliado.

A curva tensão deformação adotada para o perfil de aço e as barras de reforço é representada na figura 5.16. Para o perfil de aço foram adotados $f_y = 295$ MPa e $f_u = 448$ MPa. Para as barras de reforço foram adotados $f_y = 380$ MPa e $f_u = 478$ MPa. E para ambos foram adotados $E_s = 206000$ MPa e $E_t = 2000$ MPa. Para o concreto foi considerada

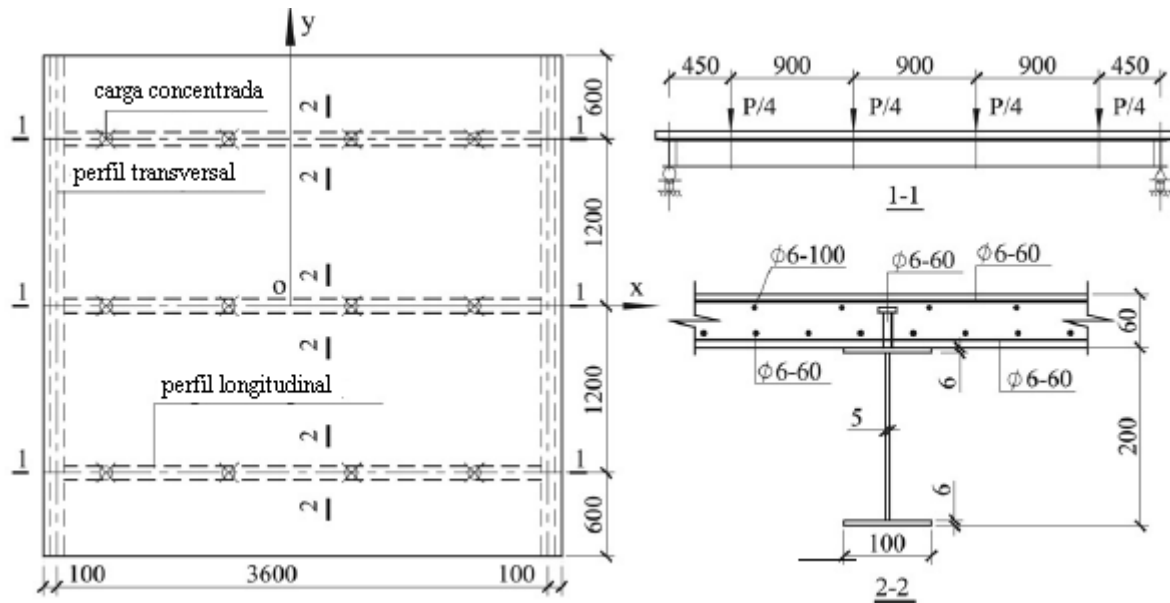


Figura 5.15 – Laje mista aço-concreto (unidades em mm) Nie *et al.* (2008)

a curva tensão deformação definida no item 6.2 deste capítulo adotando $\varepsilon_{cr} = 0.002$, resistência a compressão de 30.3 MPa e coeficiente de Poisson de 0.17.

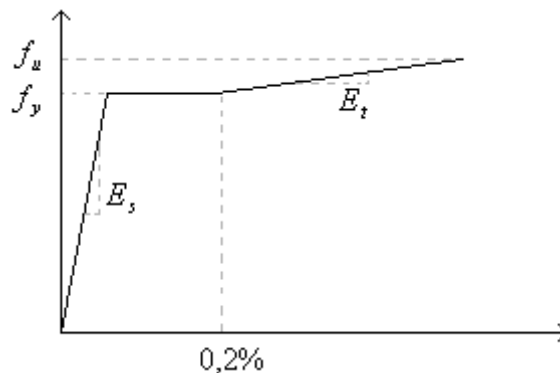


Figura 5.16 – Curva tensão-deformação para o aço

Para a rigidez da conexão ao longo do eixo da viga foi considerada a curva $S_b = S_{bu} (1 - e^{-C_1 s_l})^{C_2}$ (Aribert, 1992), onde S_b é a força cortante por unidade de comprimento e s_l é o deslizamento longitudinal. S_{bu} é a resistência última do conector por unidade de comprimento, que pode ser obtida por teste ou através de expressões definidas em normas, que associa essa resistência última à resistência de corte do conector e à resistência de esmagamento do concreto que envolve o conector. C_1 e C_2 são parâmetros que definem a forma da curva. Para este exemplo Aribert (1992) recomenda $C_1 = 0.7 \text{ mm}^{-1}$ e $C_2 = 0.56$.

Nas direções transversal e vertical ao eixo da viga são consideradas curvas lineares com rigidez muito grande, sendo, portanto, desconsiderada a possibilidade de separação vertical na interface e de deslizamento na direção transversal ao eixo da viga. Outros dados como dimensões, quantidade de barras de reforço e de conectores podem ser vistos na figura 5.15.

A Figura 5.17 mostra o resultado numérico (Nie) e experimental (Teste) obtidos em Nie *et al.* (2008), e o resultado numérico obtido no presente trabalho. Na análise numérica de Nie *et al.* (2008) foi usado o programa ANSYS com a placa de concreto discretizada por elementos cúbicos, o perfil de aço por elementos de casca e a conexão foi simulada por elementos de mola. Pode-se concluir através do gráfico da figura 5.17 que os elementos implementados neste capítulo produzem resultados satisfatórios para o problema de placas de concreto enrijecidas por vigas longitudinais e transversais de aço com conexão deformável. A diferença entre os tipos de elementos usados para discretizar o problema da figura 5.15 é o principal motivo para a pequena diferença entre os resultados numéricos deste trabalho e de Nie *et al.* (2008).

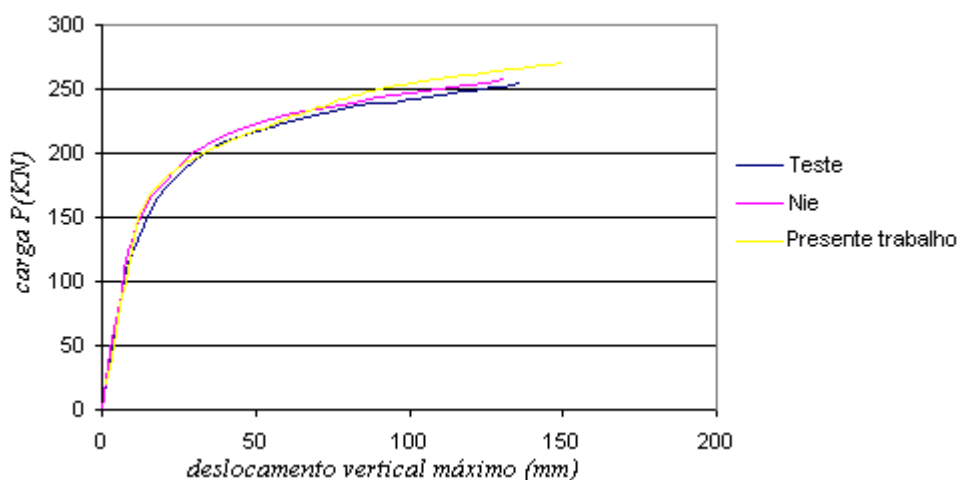


Figura 5.17 – Curva carga-deslocamento no meio do vão

5.5.3 – Vigas mistas aço-concreto

Neste exemplo vigas mistas aço-concreto com conexão deformável serão tratadas como placas de concreto enrijecidas longitudinalmente por vigas de aço. Uma avaliação da influência do grau de rigidez da conexão na determinação da largura efetiva será analisada.

5.5.3.1 – Análise linear

A viga mista da figura 5.18 foi analisada usando os elementos implementados neste trabalho para diferentes níveis de rigidez da conexão da interface, tendo o objetivo de verificar a influência desta na determinação da largura efetiva, em uma análise linear. Foram utilizados três níveis de rigidez ao longo do eixo da viga, $E_{s_b} = 0.01MPa$ (RB), $E_{s_b} = 80MPa$ (RM) e $E_{s_b} = 60000MPa$ (RA). Nas direções transversal e vertical ao eixo da viga é considerada rigidez muito grande, sendo, portanto, desconsiderada a possibilidade de separação vertical na interface e de deslizamento na direção transversal ao eixo da viga.

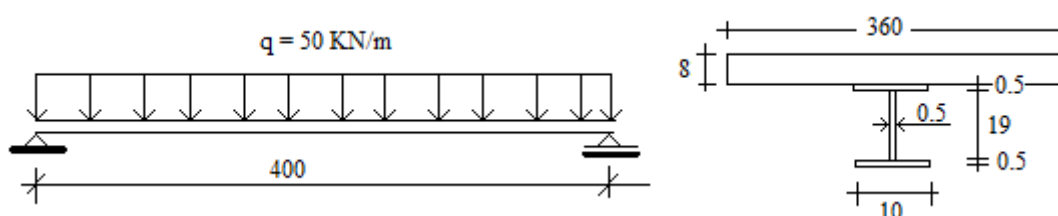


Figura 5.18 – Viga mista e seção transversal (cotas em cm)

No exemplo, a viga mista tem seção transversal composta por uma mesa de concreto ligada por conectores a um perfil de aço de seção I. Na análise numérica é adotado para o concreto um módulo de deformação axial $E_c = 32400MPa$ e coeficiente de Poisson $\nu_c = 0.2$, já para o aço é considerado $E_s = 200000MPa$ e $\nu_s = 0.30$. Para o módulo de deformação por cisalhamento foi usada a relação $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Na formulação do problema numérico a mesa de concreto foi discretizada em elementos de placa, o perfil de aço em elementos de viga, e o elemento de interface faz a ligação entre estes dois elementos e simula o comportamento da conexão deformável.

A figura 5.19(a) mostra os gráficos da variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto. Nestes gráficos a tensão normal foi obtida no meio do vão da viga e na fibra mais acima da laje de concreto. Já na figura 5.19(b) as tensões foram normalizadas em relação à tensão de pico na linha central do perfil de aço. Da equação 2.1 para a largura efetiva (item 2.5 do capítulo 2) observa-se que quanto menor for a variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto (efeito descrito na literatura como

shear lag) maior será a largura efetiva. Portanto, pelo gráfico da figura 5.19(b) pode-se concluir que a largura efetiva diminui com o aumento da rigidez na conexão.

A tabela 5.1 mostra a largura efetiva da viga mista biapoiada da figura 5.18 sujeita a um carregamento uniformemente distribuído e com três níveis de rigidez da conexão, rigidez alta (RA), rigidez média (RM) e rigidez baixa (RB). A largura efetiva é determinada segundo a equação 2.1 (item 2.5 do capítulo 2) adotando uma variação da tensão normal no meio do vão da viga e na fibra mais comprimida da laje de concreto.

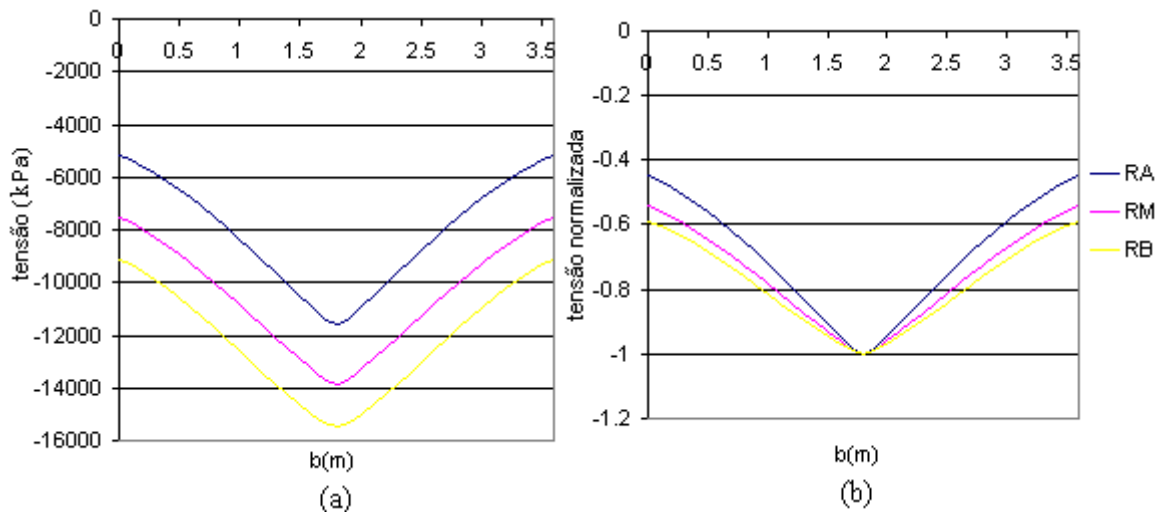


Figura 5.19 – Variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto

Como pode ser observado da tabela 5.1 a largura efetiva sofre influência da rigidez da conexão da interface, sendo esta menor quanto maior for a rigidez na conexão. Como a análise é linear, o carregamento uniformemente distribuído pode ser definido para cada nível de rigidez de forma que a tensão máxima seja igual para as três análises, o que não mudaria o resultado da tabela 5.1, já que, $\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy$ e $\sigma_x(y=0)$ alterariam na mesma proporção.

Tabela 5.1 – largura efetiva

rigidez	$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy$ (kN/m)	$\sigma_x(y=0)$ (kPa)	$b_{ef} = \frac{1}{\sigma_x(y=0)} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy$ (m)
RA	-29223.2	-11559.7	2.53
RM	-37947.2	-13838.2	2.74
RB	-44067.5	-15460.4	2.85

A largura efetiva tem como objetivo simplificar a análise estrutural de placas conectadas a vigas, permitindo substituir o elemento de placa por um elemento de viga. Com a simplificação pretende-se obter a tensão e flecha máxima no elemento estrutural simplificado, maiores ou iguais às aquelas calculadas rigorosamente, de forma que o procedimento da largura efetiva esteja sempre a favor da segurança.

Como a tensão normal na laje de concreto varia ao longo de sua largura na análise de placa, não seria satisfatória a comparação da tensão máxima obtida na análise de placa com a tensão máxima obtida na análise de viga, que é constante ao longo da largura da seção. Então será adotada para o critério de tensão máxima, como na equação 2.1 da largura efetiva, uma força máxima por unidade de largura na seção de concreto na fibra mais comprimida maior ou igual à mesma força obtida pela análise de placa, ou seja,

$$\sigma_{\max}^v b \geq \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy, \quad (5.107)$$

onde σ_{\max}^v é a tensão normal máxima na seção de concreto na análise simplificada. σ_x e b são a tensão normal e a largura da seção de concreto na análise de placa mais viga. Sendo assim, para avaliar a largura efetiva que satisfaz estas condições para o exemplo analisado com rigidez média (RM) foram obtidas as curvas da figura 5.20. Tais curvas foram definidas simulando o problema da viga mista da figura 5.18 por dois elementos de viga e um elemento de interface ligando estes dois elementos, ou seja, o comportamento estrutural da mesa de concreto passa a ser simulado por um elemento de viga. Para obter as curvas da figura 5.20 a viga mista foi resolvida para vários valores da largura b_v da mesa de concreto, como mostrado na tabela 5.2.

Com as curvas da figura 5.20 e os valores da tensão e da flecha máxima obtidas a partir da análise de placa, pode-se determinar qual a largura efetiva da viga mista que atende aos critérios de tensão máxima e flecha máxima, descritos anteriormente. A tabela 5.3 mostra os valores da largura da laje de concreto da viga mista que satisfazem estes critérios. Estes valores foram obtidos da tabela 5.2 através de interpolação linear.

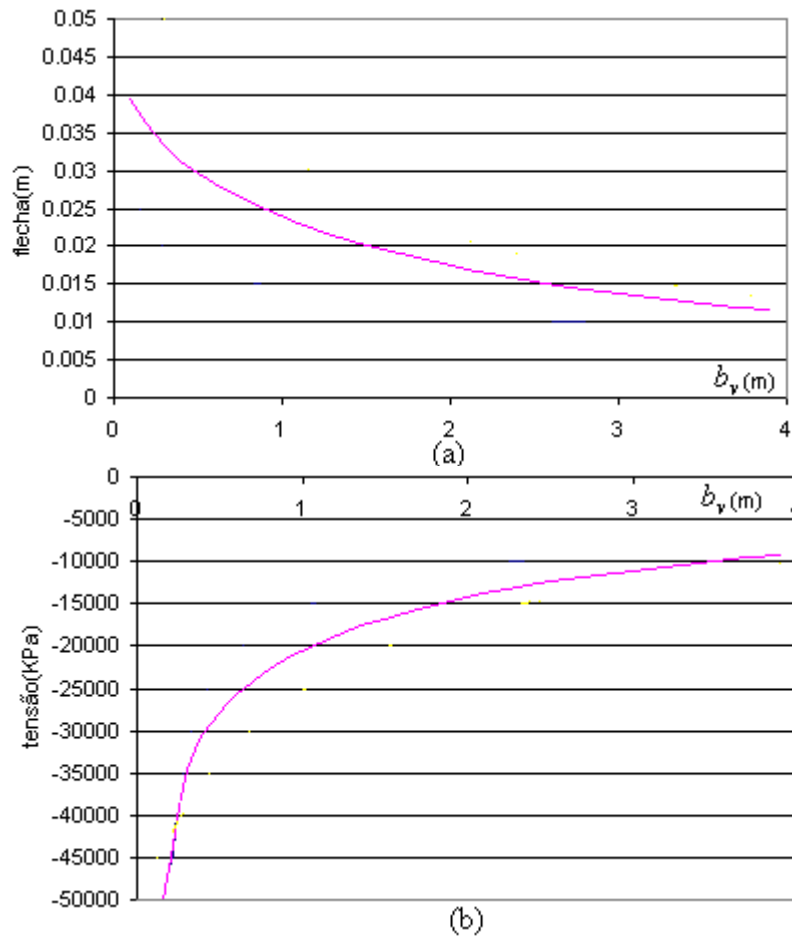


Figura 5.20 – Tensão e flecha da viga mista para diferentes valores de b_v

Tabela 5.2 – Flecha e tensão na análise simplificada

b_v (m)	Flecha máxima (m)	σ_{\max}^v (kPa)
0.1	0.071745	-57433.3
0.3	0.038746	-34605.7
0.5	0.03274	-27946.8
0.7	0.029296	-24213.9
0.9	0.026935	-21632.6
1.1	0.025285	-19666.3
1.3	0.023889	-18086.1
1.5	0.022628	-16772.8
1.7	0.021479	-15656.2
1.9	0.020427	-14690.6
2.1	0.019457	-13844.8
2.3	0.018562	-13096.2
2.5	0.017731	-12428
2.7	0.016959	-11827.2
2.9	0.016239	-11283.6
3.1	0.015568	-10789.2
3.3	0.01494	-10337.4
3.5	0.014351	-9922.64
3.7	0.013799	-9540.54
3.9	0.013281	-9187.27

Da tabela 5.3 pode-se verificar que a definição do valor da largura efetiva depende de qual critério que se deseja satisfazer. Para o problema específico analisado, o critério de tensão máxima é menos rigoroso que o critério de flecha máxima, ou seja, com uma largura efetiva da laje de concreto de 2,35 m a flecha máxima avaliada na análise simplificada é igual à flecha na análise de placa mais viga, e a força máxima na laje de concreto na fibra mais comprimida avaliada na análise simplificada é maior que a esperada na análise de placa mais viga, portanto, a favor da segurança. A tabela mostra também que a equação 2.1 (item 2.5 do capítulo 2) para a largura efetiva fornece valores conservadores para o problema analisado em relação ao critério de tensão máxima.

Tabela 5.3 – Largura efetiva através da comparação entre análise de placa mais viga e análise de viga mais viga.

Critério	Análise de placa mais viga	b_v (m)
Tensão máxima	$\frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy = -10540.9$ (kPa)	3.21
Flecha máxima (m)	0.016	2.35
Ambos		2.35

5.5.3.2 – análise não linear

Uma viga mista simplesmente apoiada de vão 3,8 m com seção transversal dada pela figura 5.21 foi levada ao colapso por meio de duas cargas concentradas igualmente espaçadas de 0,5m do meio do vão. Todos os procedimentos experimentais podem ser vistos em Amadio *et al.* (2004). A conexão entre a laje de concreto e o perfil de aço modelo italiano HEB 180 foi feita por meio de 56 conectores do tipo pino com cabeça dispostos em pares e igualmente espaçados a partir de 10 cm das extremidades da viga mista. Esta configuração da conexão confere à viga mista uma condição de interação total.

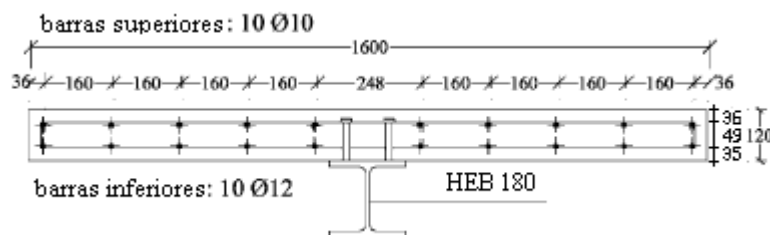


Figura 5.21 – Seção transversal da viga mista (cotas em mm) (Amadio *et al.*, 2004)

As propriedades mecânica dos materiais foram obtidas por meio de ensaios (Amadio *et al.*, 2004). A figura 5.22 mostra as curvas médias da tensão-deformação das barras de reforço e do perfil de aço. A figura 5.23 mostra o resultado do ensaio força cortante versus deslizamento para um conector segundo o procedimento descrito no Eurocode 4 (2001). Na mesma figura é mostrada uma aproximação bi-linear para a curva experimental utilizada na análise numérica deste trabalho. A resistência a tração e compressão, e o módulo de deformação longitudinal do concreto são, respectivamente, $f_t = 3.32$ MPa, $f_c = 34.5$ MPa e $E_c = 36744$ MPa.

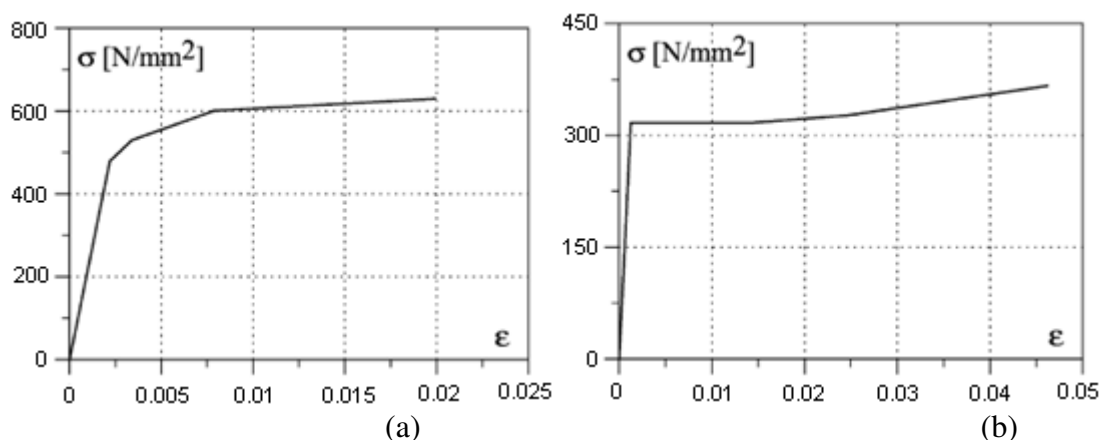


Figura 5.22 – Curva tensão-deformação do aço para as barras de reforço (a) e perfil (b)

A figura 5.24 compara o resultado numérico obtido neste trabalho com o resultado experimental obtido por Amadio *et al.* (2004). Na análise numérica foi usado o elemento de placa para simular o comportamento da mesa de concreto, o elemento de viga para o perfil de aço e o elemento de interface para a conexão deformável. Devido à simetria do problema apenas metade da viga foi discretizada em elementos finitos, sendo utilizada uma malha de 6 elementos de placa e 3 elementos de viga e interface. Como pode ser observado na figura 5.24 a formulação implementada neste trabalho fornece um bom resultado para o problema.

O efeito de *shear lag*, variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto, foi avaliado para a viga mista analisada em diferentes níveis de carregamento, como é mostrado na figura 5.25. Como citado por Amadio *et al.* (2004), Castro *et al.* (2007), e Nie *et al.* (2008), entre outros trabalhos, a largura efetiva se aproxima da largura da laje de concreto quando a viga mista se aproxima do colapso, isto pode ser visto na figura 5.25 com a diminuição do efeito *shear lag* à medida que a relação P/P_{max} aumenta.

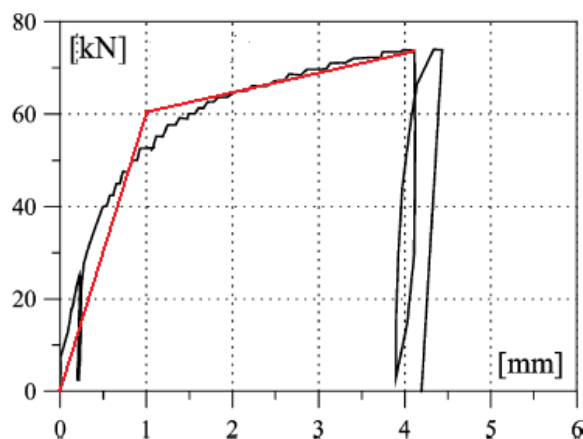


Figura 5.23 – Força cortante versus deslizamento para um conector

O número de conectores utilizados na conexão da laje de concreto ao perfil de aço da viga mista analisada confere praticamente uma interação total na seção mista. Com o objetivo de avaliar a influência do grau de rigidez da conexão na avaliação da largura efetiva foi analisada numericamente a mesma viga admitindo uma configuração da conexão que lhe confere uma interação parcial. Para isto a rigidez da conexão foi dividida pela metade, ou seja, em vez de 56 conectores distribuídos em pares são considerados 28 conectores distribuídos em apenas uma linha. O resultado da variação do efeito de *shear lag* para esta nova configuração da conexão é mostrado na figura 5.26. As tensões normais nos gráficos das figuras 5.25 a 5.27 foram obtidas na fibra mais comprimida da seção de concreto da viga mista, e foram normalizadas em relação à tensão normal no meio da largura da laje de concreto.

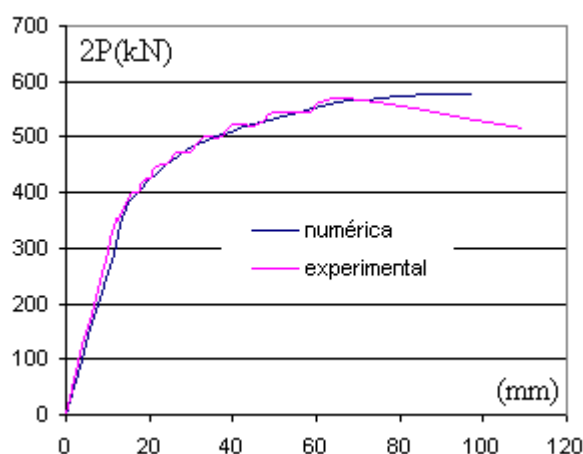


Figura 5.24 – Curva carga-deslocamento no meio do vão

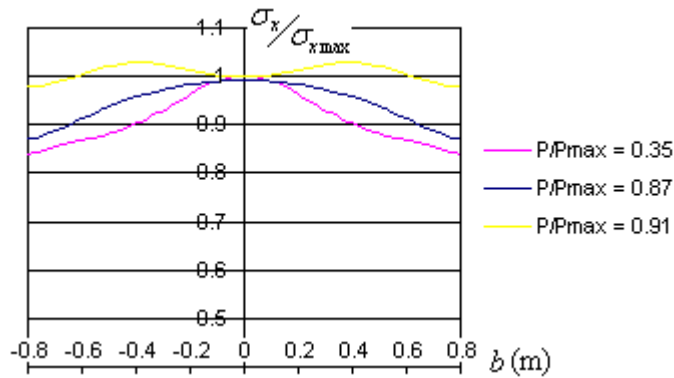


Figura 5.25 – Tensão normal na laje de concreto (interação total)

A figura 5.27(a) compara, para o nível de carregamento $P/P_{max} = 0.35$, os resultados obtidos considerando interação total (56 conectores) e interação parcial (26 conectores). O mesmo acontece na figura 5.27(b) para o nível de carregamento $P/P_{max} = 0.87$. Observa-se nestas figuras que a redução da rigidez diminui o efeito *shear lag* na laje de concreto, ou seja, a largura efetiva é maior. A tabela 5.4 mostra essa largura efetiva obtida usando a equação 2.1 definida no item 2.5 do capítulo 2 deste trabalho. Devido provavelmente a uma relação vão versus largura da laje de concreto grande observa-se uma pequena variação da tensão normal ao longo da largura da laje de concreto, o que resulta em uma largura efetiva próxima da largura da laje de concreto, como pode ser visto na tabela 5.4. Observa-se também nesta tabela que a largura efetiva aumenta com o aumento da relação P/P_{max} e com a diminuição da rigidez da conexão.

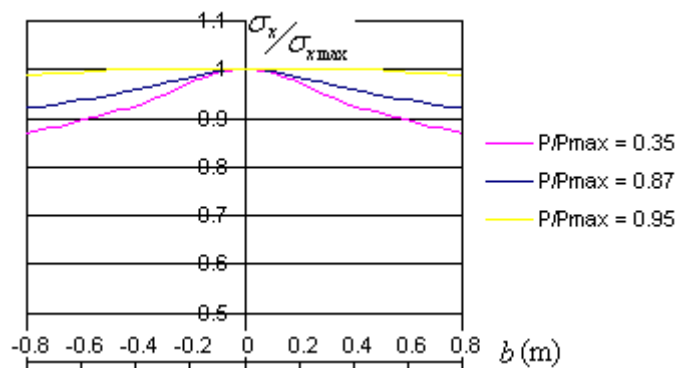


Figura 5.26 - Tensão normal na laje de concreto (interação parcial)

Tabela 5.4 – largura efetiva

Interação	Nível de carregamento	$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy$ (kN/m)	$\sigma_x (y = 0)$ (kPa)	b_e (m)
Total	$P/P_{max} = 0.35$	-17902.2	-12249.5	1.46
	$P/P_{max} = 0.87$	-52989.9	-34786.8	1.52
Parcial	$P/P_{max} = 0.35$	-15766.1	-10563.3	1.49
	$P/P_{max} = 0.87$	-54479.8	-35468.5	1.54

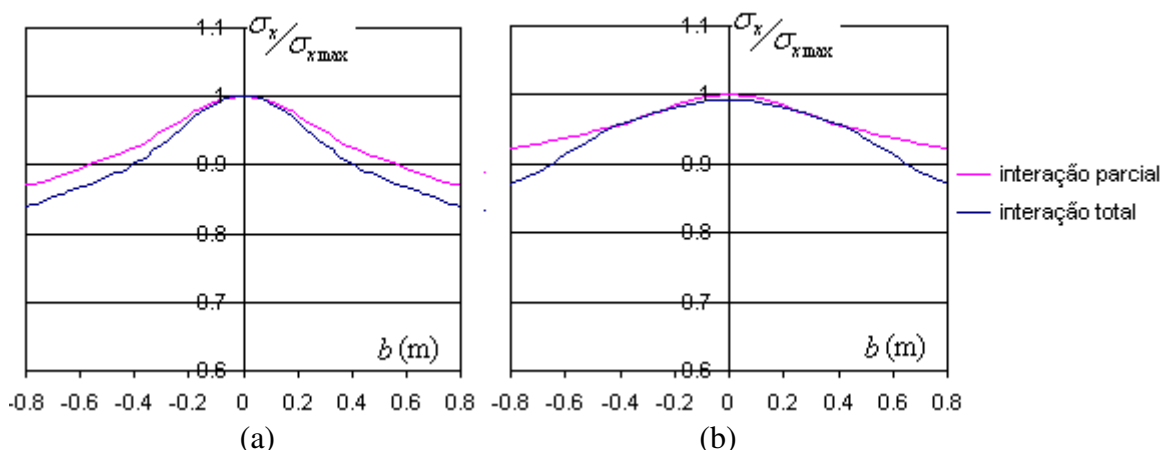


Figura 5.27 – Comparação do efeito *shear lag* na interação total e parcial para o nível de carregamento $P/P_{max} = 0.35$ (a) e $P/P_{max} = 0.87$ (b)

5.6 – RESUMO E CONCLUSÃO

Neste capítulo é apresentada uma formulação para simulação de problemas de placas de concreto enrijecidas por meio de vigas de aço considerando uma conexão deformável. Este tipo de problema é bastante comum na prática de construções de edifícios de andares múltiplos em aço. Em geral, estas estruturas são analisadas de forma mais simples como viga mista com interação parcial, o que pode causar uma superestimação ou subestimação dos esforços ou deslocamentos do elemento estrutural avaliado.

Na simulação numérica a laje de concreto é representada por um elemento de placa considerando uma análise não linear geométrica e física. Alguns trabalhos referentes à análise de placas de concreto mostram, mesmo para carregamentos normais ao plano da placa, que a não linearidade geométrica é importante na determinação da carga última.

A não linearidade física é tratada dividindo o elemento de placa de concreto em camadas, consideradas em um estado plano de tensões. A rigidez de cada camada é avaliada de acordo com uma análise das deformações principais em cada ponto de integração numérica na camada avaliada. No processo incremental é avaliado a cada instante se as tensões principais em um ponto de integração numérica na camada avaliada está dentro ou fora de uma superfície de falha. Considera-se o concreto linear isotrópico caso não tenha atingido a superfície de falha, ou ortotrópico com relações tensão-deformação desacopladas nas direções principais, caso contrário.

As vigas de aço que apóiam e enrijecem a laje de concreto em problemas de engenharia, como, por exemplo, em pisos de edifícios em aço, são simuladas neste capítulo por elementos unidimensionais de viga considerando os mesmos graus de liberdade do

elemento de placa. A utilização de elementos unidimensionais se torna interessante em relação a elementos bi ou tridimensionais no caso de uma avaliação numérica da estrutura como um todo, ou seja, de problemas grandes onde o tempo de análise computacional é relevante. Por exemplo, a análise numérica de um edifício de andares múltiplos em aço considerando todos os pilares, vigas e lajes de forma integrada.

A conexão deformável entre a laje de concreto e as vigas de aço obtidas na prática da construção civil com a utilização de processos mecânicos na união destes dois materiais, é simulada neste capítulo por elementos de interface de espessura nula e graus de liberdade equivalentes aos elementos a ele combinado.

Como uma aplicação da formulação introduzida neste capítulo, é verificada a influência da interação parcial na determinação da largura efetiva em vigas mistas. Trabalhos publicados sobre o assunto mostram que a largura efetiva em vigas mistas depende de vários parâmetros, como, por exemplo, o tipo de carregamento, o comprimento do vão, o nível do carregamento, entre outros. Os resultados obtidos neste capítulo mostram que o grau de rigidez da conexão também influi na determinação da largura efetiva, sendo esta cada vez maior quanto menor for o grau de rigidez da conexão deformável. No entanto, esta influência será mais significativa quanto menor for a relação vão da viga versus largura da laje de concreto, ou seja, problemas onde o efeito de *shear lag* é significativo.

Os resultados verificados nos exemplos numéricos avaliados mostram que os elementos de placa, viga e interface desenvolvidos neste capítulo fornecem uma ferramenta simples e robusta na simulação de lajes de concreto enrijecidas por vigas de aço com conexão deformável.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo é apresentada uma síntese do trabalho, conclusões gerais e sugestões para trabalhos futuros.

6.1 – SÍNTESE DO TRABALHO

Este trabalho se inicia apresentando uma descrição dos objetivos e fatores motivadores que levaram o autor a pesquisar sobre o tema: análise numérica de elementos estruturais com conexão deformável, também chamada de interação parcial.

No capítulo seguinte são apresentadas definições, conceitos e trabalhos relevantes sobre análises numéricas, experimentais e analíticas de elementos estruturais com conexão deformável. Dentre os elementos estruturais mais comuns em engenharia civil envolvendo combinações de membros com conexão deformável, a viga mista é a que tem maior destaque na literatura, podendo-se encontrar vários trabalhos publicados sobre o assunto. Já o problema de lajes de concreto ligadas com conexão deformável a vigas de aço ainda é pouco tratado no meio científico. Apresentou-se assim uma revisão de trabalhos voltados para análise não linear de placas de concreto e largura efetiva em vigas mistas, resultado da simplificação do problema de placa conectada a viga.

No capítulo 3 são apresentadas as formulações dos elementos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko e os elementos de interface referentes aos dois tipos de análise de viga. O problema numérico de viga mista com conexão deformável é simulado neste capítulo por elementos unidimensionais de viga, que representam as seções acima e abaixo da interface de contato entre os membros, e elementos unidimensionais de interface, que

representa a conexão deformável entre os diferentes membros e faz a ligação entre estes. Na implementação destes elementos são utilizadas as teorias de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

Ainda no capítulo 3 é descrito o método utilizado para determinação dos esforços atuantes na seção transversal da viga mista e a forma com que o problema foi implementado computacionalmente. A validação e robustez dos elementos implementados neste capítulo são verificadas por meio de exemplos numéricos comparando seus resultados com resultados numéricos e experimentais obtidos na literatura. A capacidade do elemento de interface implementado em simular tanto a interação parcial longitudinal quanto a transversal é mostrada neste capítulo através de um exemplo numérico que avalia a influência do grau de rigidez da conexão transversal na determinação dos esforços atuantes na viga mista.

O problema de viga mista tratado no capítulo 3 refere-se ao caso de vigas formadas por dois membros (ou camadas) ligados por uma conexão deformável, que é o caso mais comum na construção civil. No entanto, em algumas situações a viga mista pode ser formada por três ou mais membros (ou camadas) ligados por conexões deformáveis. Este problema geralmente é descrito na literatura como vigas mistas com múltiplas camadas.

No capítulo 4 é apresentada uma extensão da equação diferencial de Newmark, de forma com que ela possa simular problemas de vigas mistas estaticamente determinadas com um número qualquer de interfaces de deslizamento. A capacidade dos elementos de viga e interface implementados no capítulo 3 em simular numericamente problemas de vigas mistas com múltiplas camadas é avaliada no capítulo 4 através de exemplos, onde são comparadas soluções analíticas de problemas de vigas mistas considerando mais de um plano de deslizamento com as respectivas soluções numéricas.

Em muitos problemas práticos na construção civil, a viga mista é uma simplificação do problema de placa de concreto ligada a uma viga de aço. Mesmo em caso de vigas isoladas a deformação por cisalhamento na laje de concreto promove uma variação da tensão axial ao longo da largura da laje de concreto (*shear lag*), que é tão mais significativa quanto maior for a largura da laje de concreto.

No capítulo 5, o problema de laje de concreto ligada a vigas de aços longitudinais, transversais, ou outras direções quaisquer, com conexão deformável na direção do eixo da viga, é avaliado numericamente. Para isso são desenvolvidos neste capítulo elementos de placa, que simulam o comportamento da laje de concreto, elementos de viga com graus de liberdade compatíveis com o elemento de placa, que simulam o comportamento da viga de

aço, e elementos de interface com graus de liberdade compatíveis com os elementos de placa e viga, que simulam a conexão deformável entre a placa e viga.

A validação dos elementos implementados no capítulo 5 é feita por meio de exemplos numéricos, comparando seus resultados com resultados numéricos e experimentais obtidos na literatura. Como uma aplicação destes elementos é verificada a influência da interação parcial na determinação da largura efetiva de vigas mistas de aço-concreto.

6.2 – CONCLUSÕES

Este trabalho propõe a implementação de elementos finitos para análise numérica linear e não-linear de elementos estruturais formados por membros ligados por meio de conexões deformáveis. Dentre os diferentes tipos de elementos estruturais com conexão deformável encontrados na prática da construção civil foram tratados neste trabalho principalmente as vigas mistas e as placas enrijecidas com vigas. A parte referente às vigas mistas dá continuidade ao trabalho de mestrado do autor, incluindo considerações adicionais como a análise de viga de Timoshenko, interação parcial transversal e múltiplas camadas. O problema de placas enrijecidas com vigas surgiu da necessidade de representação de forma contínua de pisos de edifícios em aço e da consideração do efeito *shear lag* que acontece na laje de concreto neste tipo de estrutura.

Os modelos numéricos desenvolvidos neste trabalho mostraram-se adequados para modelagem dos problemas propostos descritos no parágrafo anterior, sendo as validações e robustez destes elementos verificadas com base na comparação dos resultados obtidos com resultados analíticos, numéricos e experimentais encontrados na literatura. Dessa forma, o objetivo deste trabalho foi alcançado e outros trabalhos poderão ser realizados com as ferramentas desenvolvidas. Sendo assim, considera-se que este trabalho representa uma contribuição relevante para as pesquisas na área de análise numérica de elementos estruturais com interação parcial.

6.3 – TRABALHOS FUTUROS

Na formulação do elemento de viga com graus de liberdade compatíveis com os do elemento de placa implementado, foi considerado, de forma aproximada, que um esforço de torção não provoca deslocamentos fora do plano de torção, ou seja, foi desconsiderado o

empenamento da seção transversal que acontece na maioria dos eixos, exceto os de seção transversal circular e os eixos tubulares de paredes delgadas. Sendo assim, sugere-se como trabalho futuro a consideração desses deslocamentos fora do plano na definição das hipóteses cinemáticas do elemento de viga e a verificação da influência desses na análise de pisos de edifícios de múltiplos andares, onde os esforços de torção são relativamente pequenos em comparação com os esforços de flexão.

Outra sugestão de trabalho é a implementação de um elemento de interface bidimensional que simularia uma conexão deformável entre dois elementos de placa e faria a ligação entre estes elementos. Com isso, problemas de chapas coladas com um número qualquer de camadas poderia ser simulada numericamente através do elemento de placa e o elemento de interface bidimensional.

Em pisos de edifícios em aço, quando se tem grandes vãos, as lajes de concreto são apoiadas em vigas principais e secundárias, o que aumenta a rigidez do elemento misto formado, diminuindo as tensões e deslocamentos máximos e os modos naturais de vibração do elemento misto. Sugere-se como trabalho futuro uma análise dinâmica do problema de placa enrijecida com vigas, verificando a influência do grau de rigidez da conexão entre a placa e a viga na determinação dos modos naturais de vibração destes elementos estruturais.

Em relação à análise numérica de vigas mistas com conexão deformável, um modelo alternativo ao modelo de elementos finitos baseados em deslocamentos utilizado na implementação deste trabalho é o modelo baseado no método das forças, que foi utilizado por diversos autores nos últimos anos (Salari e Spacone, 2001, Dall'Asta e Zona, 2004).

Outra sugestão para complementar a análise numérica de vigas mistas com conexão deformável é a consideração dos efeitos de ligações semi-rígidas, que são frequentes nos casos práticos. Essa ligação semi-rígida pode ser considerada através de um elemento finito de comprimento nulo que simplesmente transmite os esforços axiais e transversais entre os elementos de viga unidos por ele, e no caso dos esforços de flexão funcione como uma mola que absorve certa quantidade de energia proporcional à diferença de rotação entre os elementos de viga a ele adjacentes.

A plataforma implementada pode ser estendida para a análise numérica de pisos mistos sob ação do fogo, permitindo a avaliação mais precisa do comportamento de membrana verificado em pavimentos submetidos a incêndio.

O programa FEMOOP, *Finite Element Method Object Oriented Program*, (Guimarães, 1992) utilizado na implementação computacional dos elementos desenvolvidos neste trabalho tem como entrada de dados um arquivo de texto com as informações necessárias para avaliação numérica desejada, o que sugere o desenvolvimento de uma interface gráfica de pré e pós-processamento, que facilite a construção deste arquivo de entrada pelo analista e possa acelerar o processo de análise.

REFÊRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI-318. (2004) Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. American Concrete Institute, Detroit.
- Adekola A. O. (1968a) Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam. *Int J Solids Struct* 1968;4:1125–35.
- Adekola A. O. (1968b) Effective width of composite beams of steel and concrete. *The Structural Engineer* 1968;46(9):285–9.
- Ahn II-S., Chiewanichakorn M., Chen S. S., Aref A. J. (2004) Effective flange width provisions for composite steel bridges. *Engineering Structures* 26 (2004) 1843–1851.
- AISC-LRFD (2005) Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings. American Institute of Steel Construction, Chicago.
- Allen D. N. G., Severn R. T. (1961) Composite action between beams and slabs under transverse load. *The Structural Engineer* 1961;39(Part I):149–54.
- Amadio C., Fedrigo C. (2004) Experimental evaluation of Effective width in steel–concrete composite beams. *Journal of Constructional Steel Research* 2004;60(2):199–220.
- Amadio C., Fedrigo C., Fragiaco M., Macorini L. (2004). Experimental evaluation of effective width in steel–concrete composite beams. *Journal of Constructional Steel Research* 60 (2004) 199–220.
- Amadio C., Fragiaco M. (2002) Effective width evaluation for steel–concrete composite beams. *Journal of Constructional Steel Research* 2002;58(3): 373–88.
- American Society of Civil Engineers - ASCE (1982). Finite element analysis of reinforced concrete. New York.

- Ansourian P. (1975) An application of the method of finite elements to the analysis of composite floor systems. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 1975;59:699–726.
- Ansourian P. (1981) Experiments on continuous composite beams. *Proc Inst Civ Eng, Part 2* 1981;71(2):25–51
- Ansourian P., Aust M. I. E. (1983) The effective width of continuous composite beams. *Civil Engineering Transitions* 1983;25(1):63–9.
- Aribert J. M. (1992) Slip and uplift measurements along the steel and concrete interface of various types of composite beams. In: *Proceedings of the international workshop on needs in testing metals: Testing of metals for structures*. London: E. & FN Spon; 1992. p. 395–407.
- Ayoub A. (2001) A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams, *Finite Elem. Anal. Des.* 37 (2001) 929–959.
- Ayoub A., Filippou F. C. (2002) Mixed formulation of nonlinear steel–concrete composite beam element, *J. Struct. Eng.* 126 (3) (2002) 371–381.
- Bailey C. G. (1995) Simulation of the structural behavior of steelframed buildings in fire. PhD thesis, Univ. of Sheffield, Sheffield, U.K.
- Bailey C. G., Burgess, I. W., Plank, R. J. (1996) Computer simulation of a full-scale structural fire test. *Struct. Eng.*, 74(6), 93–100.
- Barzegar-Jamshidi, (1987). Non-linear finite element analysis of reinforced concrete under short term monotonic loading. PhD thesis, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign.
- Bathe K. J. (1996) *Finite element procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Caldas, R. B. (2004) *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP, 2004.
- Caldas R. B. (2009) *Análise Numérica de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado (em português). Departamento de Engenharia Civil. UFMG. Belo Horizonte.

- Castro J. M., Elghazouli A. Y., Izzuddin B. A. (2007) Assessment of effective slab widths in composite beams. *Journal of Constructional Steel Research* 63 (2007) 1317–132.
- Carol I., López C. M., Roa O. (2001). Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 193 – 215.
- CEB – FIP Model Code 1990. (1993) Comité Euro-International du Béton, Thomas Telford, 1993.
- Chapman J. C., Balakrishnan S. (1964) Experiments on composite beams. *Struct Eng* 1964;42(11):369–83.
- Chen W. J., Cheung Y. K. (2000) Refined quadrilateral element based on Mindlin/Reissner plate theory, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47 (2000) 605–627.
- Chiewanichakorn M., Aref A. J., Chen S. S., Ahn I. S. (2004) Effective flange width definition for steel–concrete composite bridge girder. *Journal of Structural Engineering* 2004;130(12):2016–31.
- Chui Y. H., Barclay D. W. (1998) Analysis of three-layer beams with non-identical layers and semi-rigid connections. *Can J Civil Eng* 1998;25(2):271-6.
- Coutinho A. L. G. A., Martins M. A. D., Sydenstricker R. M., Alves J. L. D., Landau L. (2003) Simple zero thickness kinematically consistent interface elements. *Computers and Geotechnics*, v. 30(5), p. 347 - 374.
- Crisfield, M. A. (1991) *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons Ltd. 1^a ed. Vol. 1
- Dall'Asta A., Zona A. (2002) Non-linear analysis of composite beams by a displacement approach, *Comput. Struct.* 80 (2002) 2217–2228.
- Dall'Asta A., Zona A. (2004a) Slip locking in finite elements for composite beams with deformable shear connection, *Finite Elem. Anal. Des.* 40 (2004) 1907–1930.

- Dall'Asta A., Zona A. (2004b) Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection, *Finite Elem. Anal. Des.* 40 (2004) 425–448.
- Dall'Asta A., Zona A. (2004c) Comparison and validation of displacement and mixed elements for the non-linear analysis of composite beams, *Comput. Struct.* 82 (2004) 2117–2130.
- De Nardim S. (1999) Estudo Teórico-Experimental de Pilares Mistos Compostos por Tubos de Aço Preenchidos com Concreto de Alta Resistência. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Elkelish S., Robinson H. (1986) Effective widths of composite beams with ribbed metal deck. *Canadian Journal of Civil Engineering* 1986;13(5):75–82.
- Eurocode 4. (2001) Design of Composite Steel and Concrete Structures: Part 1.1: General rules and rules for buildings. DRAFT prEN 1994-1-1:2001, European Committee for Standardization, April, 2001.
- Faella C., Martinelli E., Nigro E. (2002) Steel and Concrete composite beam with flexible shear connection: “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computer & structures*, v. 80, p. 1001 - 1009.
- Fahmy E. H., Robinson H. (1986) Analyses and tests to determine the effective widths of composite beams in unbraced multistory frames. *Canadian. Journal of Civil Engineering* 1986;13(1):66–75.
- Gara, F., Ranzi, G., Leoni, G. (2006) Time analysis of composite beams with partial interaction using available modeling techniques: A comparative study. *Journal of Constructional Steel Research*, 62:917-930, 2006.
- Gattesco, N. (1999). Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 52, p. 195 – 218.
- Ghoneim M. G., MacGregor J. G. (1994a). Tests of reinforced concrete plates under combined in-plane and lateral loads. *ACI Struct. J.*, 91(1), 19–30.

- Ghoneim M. G., MacGregor J. G. (1994b). Behavior of reinforced concrete plates under combined in-plane and lateral loads. *ACI Struct. J.*, 91(2), 188–197.
- Girhammar U. A., Gopu V. K. A. (1993) Composite beam-columns with interlayer slip exact analysis, *J. Struct. Eng.* 119 (4) (1993) 1265–1282.
- Goodman J. R., Popov E. P. (1968) Layered beam systems with interlayer slip. *J Struct Div, Proc Am Soc Civil Eng* 1968; 94(11):2535-47.
- Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T. L. (1968). A model for the mechanics of jointed rock. *J. Soil Mech. Fdns. Div., ASCE*, v. 99, p. 637 - 659.
- Griffs L. G. (1994). The 1994 T. R. High Lecture: Composite Frame Construction. National Steel Construction Conference, AISC, v. 1, p. 1.1 - 1.72, New York.
- Guimarães, L. G. S. (1992). *Disciplina Orientada a Objetos para Análise e Visualização Bidimensional de Modelos de Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil.
- Heins C. P., Fan H. M. (1976) Effective composite beam width at ultimate load. *Journal of Structural Division, ASCE* 1976;102(11):2163–79.
- Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (1999). Non-linear analysis of reinforced concrete slabs subjected to fire. *ACI Struct. J.*, 96(1),127–135.
- Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (1999) Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Fire. *ACI Structural Journal*, 96(1), 127-135.
- Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (2003a) Modelling Membrane Action of Concrete Slabs in Composite Buildings in Fire. Part I: Theoretical Development. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 2003, 129 (8), pp 1093-1102.
- Huang Z., Burgess I. W., Plank R. J. (2003b) Modelling Membrane Action of Concrete Slabs in Composite Buildings in Fire. Part II: Validations. *Journal of Structural Engineering, ASCE*. 2003, 129 (8), pp 1103-1112.
- Heinisuo M. (1988) An exact finite element technique for layered beams. *Computers & Structures* 1988; 30(3): 615-622.

- Jiang J., Mirza F. A. (1997) Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discrete finite element approach, *Comput. Struct.* 65 (4) (1997) 585–592.
- Jofriet J. C., McNeice G. M. (1971) Finite-element analysis of reinforced concrete slabs, *J. Struct. Div. ASCE* 97 (ST3) (1971) 785–806.
- Kaliakin V. N., Li J. (1995). Insight into deficiencies associated with commonly used zero-thickness interface elements. *Computers and Geotechnics*, v. 17, p. 225 - 252.
- Krawczyk P., Frey F., Zieliky A. P. (2007) Large deflections of laminated beams with interlayer slips - Part 1: Model development. *Eng Comput* 2007;24(1):17-32.
- Krawczyk P., Reborá B. (2007) Large deflections of laminated beams with interlayer slips Part 2: Finite element development. *Eng Comput* 2007;24(1):33-51.
- Kupfer, H. B. e Gerstle, K. H. (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses *J. Eng. Mech.*, 99, 853–866.
- Loh H. Y., Uy B., Bradford M. A. (2004) The effects of partial shear connection in the hogging moment regions of composite beams - Part I -Experimental study. *J Construct Steel Res* 2004;60:897-919.
- Loo Y. C., Guan H. (1997) Cracking and punching shear failure analysis of RC flat plates, *J. Struct. Eng.*, ASCE 123 (10) (1997) 1321–1330.
- Najjar S. R., Burgess I. W. (1996). A nonlinear analysis for threedimensional steel frames in fire conditions. *Eng. Struct.*, 18(1), 77–89.
- Martha L. F., Parente Jr. E. (2002). An Object-Oriented Framework for Finite Element Programing. *Proceedings of Fifth World Congress on Computacional Mechanics, WCCM V, Vienna, Austria.*
- Muniz C. F. D. G. (2005) Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos, *Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2005.*
- NBR 8800. (1986) Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.

- NBR 8800. (2008) Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro.
- Newmark N. M., Siess C. P., Viest, I. M. (1951) Test and analysis of composite beam with incomplete interaction. Proc Soc Exp Stress Anal, v. 9, p. 75-92.
- Nie J, Cai C.S., Wu H., Fan J.S. (2006) Experimental and theoretical study of steel-concrete composite beams with openings in concrete flange. Engineering Structures, 28 (2006) 992–1000
- Nie J., Fan J., Cai C. S. (2004) Stiffness and Deflection of Steel-Concrete Composite Beams under Negative Bending. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 130(11), p. 1842 - 1851.
- Nie J, Fan J., Cai C.S. (2008) Experimental study of partially shear-connected composite beams with profiled sheeting. Engineering Structures, 30 (2008) 1–12
- Nie J., Tian C. Y., Cai C. S. (2008) Effective width of steel-concrete composite beam at ultimate strength state. Engineering Structures 30 (2008) 1396–1407.
- Oehlers D. J., Bradford, M. A. (1995) Composite Steel and Concrete Structural Members: Fundamental Behaviour. Pergamon Press, Oxford.
- Oliveira, C. E. M. (2009) Análise não-linear geométrica de vigas-colunas com interação parcial. Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP, 2009.
- Ollgaard, J. G., Slutter, R. G., Fisher, J. W. (1971) Shear Strength of stud connectors in lightweight and normal weight concrete. AISC Engineering Journal, 1971:55-64.
- Oven V. A., Burgess I. W., PlanK R. J., Wali A. A. (1997) An analytical model for the analysis of composite beam with parcial interaction. Computer & structures, v. 62, p. 493 -504.
- Phuvoravan K., Sotelino E. D. (2005) Nonlinear finite element for reinforced concrete slabs, J. Struct. Eng., ASCE 13 (4) (2005) 643–649.

- Parente Jr. E. (2000) *Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares*. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.
- Pitangueira R. L. S. (1998) *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*. Tese de Doutorado (em português). Departamento de Engenharia Civil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Polak M. A. (1996) Effective stiffness model for reinforced concrete slabs, *J. Struct. Eng.*, ASCE 122 (9) (1996) 1025–1030.
- Queiroz G., Pimenta R. J., Da Mata L. A. C. (2001) *Elementos das Estruturas Mistas Aço-Concreto*. Belo Horizonte.
- Ranzi G. (2006) Short- and long- term analyses of composite beams with partial interaction stiffened by a longitudinal plate. *Steel Comp Struct* 2006;6(3):237-55.
- Ranzi G. (2008) Locking problems in the partial interaction analysis of multi-layered composite beams. *Eng Struct* 2008;30(10):2900-11.
- Ranzi G., Bradford M. A., Uy B. (2004) A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 61 (2004) 657–672.
- Ranzi G., Gara F., Ansourian P. (2006) General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction. *Computers and Structures* 84 (2006) 2373–2384.
- Ranzi G., Zona A. (2007) A steel–concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component, *Eng. Struct.* 29 (2007) 3026–3041.
- Reddy J. N.(1997) On locking-free shear deformable beam finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1997;149:113–32.
- Reddy J. N. (2004). *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford (UK): Oxford University Press; 2004.

- Robinson H., Naraine K. S. (1988) Slip and uplift effects in composite beams. In: Proceedings of the engineering foundation conference on composite construction (ASCE). 1988. p. 487–97.
- Rots J. G. et al. (1984) The need for fracture mechanics options in finite element models for concrete structures. Proc., Int. Conf. On Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, F. Damjanic et al., eds., Pineridge Press, Part 1, 19–32.
- Salari M. R., Spacone E., Shing P. B., Frangopol D. M. (1998) Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors, *J. Struct. Eng.* 124 (10) (1998) 1148–1158.
- Salari M. R., Spacone E. (2001) Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip, *Eng. Struct.* 23 (2001) 815–826.
- Scanlon A., Murray D. W. (1982) Practical calculations of two-way slab deflections, *Concr. Int. Mag.* (1982) 43–50.
- Schellekens J. C. J., De Borst R. (1993) On the numerical integration of interface elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36 (1993) 43–66.
- Schnabl S., Planinc I., Saje M., Cas B., Turk G. (2006) An analytical model of layered continuous beams with partial interaction. *Struct Eng Mech* 2006;22(3):263-78.
- Schnabl S., Saje M., Turk G., Planinc I. (2007) Locking-free two-layer Timoshenko beam element with interlayer slip, *Finite Elements in Analysis and Design* 43 (2007) 705–714.
- Silva A. R. (2006) *Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, DECIV, Escola de Minas, UFOP, 2006.
- Silva A. R., Sousa Jr. J. B. M. (2008) A family of interface elements for the analysis of composite beams with interlayer slip. *Finite Elements in Analysis and Design* 45 (2009) 305 – 314.
- Soh A. K., Cen S., Long Y. Q., Long Z. F. (2001) A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates, *Eur. J. Mech. A—Solids* 20 (2001) 299–326.

- Sousa Jr. J. B. M. (2000) Auto-Adaptação e Otimização de Forma em Cascas. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro.
- Sousa Jr. J. B. M., Caldas R. B. (2005) Numerical analysis of composite steel concrete columns of arbitrary cross-section, *J. Struct. Eng.* 131 (11) (2005) 1721–1730.
- Sousa Jr. J. B. M., Cláudio E. M. O., Silva A. R. (2010) Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Journal of Constructional Steel Research* 66 (2010) 772 – 779.
- Sousa Jr. J. B. M., Silva A. R. (2007) Nonlinear analysis of partially connected composite beams using interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 (2007) 954 – 964.
- Sousa Jr. J. B. M., Silva A. R. (2010) Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Engineering Structures*, 32 (2010) 1671 – 1680.
- Wang Y. C. (1999) Deflection of steel–concrete composite beams with partial interaction, *J. Struct. Eng.* 124 (10) (1999) 1159–1165.
- Xu R., Wu Y. F. (2007) Two-dimensional analytical solutions of simply supported composite beams with interlayer slips, *Int. J. Solids Struct.* 44 (2007) 165–175.
- Yunhua L. (1998) Explanation and elimination of shear locking and membrane locking with field consistency approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998;162:249–69.
- Zhang Y. X., Bradford M. A. (2007) Nonlinear analysis of moderately thick reinforced concrete slabs at elevated temperatures using a rectangular layered plate element with Timoshenko beam functions. *Engineering Structures* 29 (2007) 2751–2761.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. (1991) *The finite element method. Solid and fluid mechanics, dynamics and nonlinearity*, 4th Ed., Vol. 2, McGraw-Hill, London.