UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - ICEB
Departamento de Educação Matemática – DEEMA
Mestrado Acadêmico em Educação Matemática

CARLOS ROBERTO TORRENTE

A TRANSIÇÃO ENTRE OS PENSAMENTOS MATEMÁTICOS ELEMENTAR E AVANÇADO EM QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

OURO PRETO – MG
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - ICEB
Departamento de Educação Matemática – DEEMA
Mestrado Acadêmico em Educação Matemática

CARLOS ROBERTO TORRENTE

A TRANSIÇÃO ENTRE OS PENSAMENTOS MATEMÁTICOS ELEMENTAR E AVANÇADO EM QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

OURO PRETO – MG
2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

T692t Torrente, Carlos Roberto.
A transição entre os pensamentos matemáticos elementar e avançado em questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. [manuscrito] / Carlos Roberto Torrente. - 22022.
86 f.: il.: tab..

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino - Pensamento matemático. 2. Aprendizagem - Matemática. 3. Estudantes - Avaliação. I. Reis, Frederico da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51:37.012

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM EDUCACAO MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Carlos Roberto Torrente

A TRANSIÇÃO ENTRE OS PENSAMENTOS MATEMÁTICOS ELEMENTAR E AVANÇADO EM QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Aprovada em 16 de dezembro de 2022.

Membros da Banca Examinadora

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer (membro externo) - Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Dr. Davidson Paulo Azevedo Oliveira (membro interno) - CEFET-MG/Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Orientador da Dissertação, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 22/12/2022

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35402-163
Telefone: (31)3559-1293 - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

A Deus, Pai e Criador, que sempre me protegeu durante as viagens e, mesmo nos momentos mais complicados, sempre tive a certeza de que Ele estava comigo.

Ao meu pai, Cesalpino, pois, mesmo num momento delicado de sua saúde, tenho a certeza de que sigo seus ensinamentos no caminho do bem.

À minha mãe, Dona Filinha, que dentre outros ensinamentos, sempre me mostrou que a educação é o caminho para fugir da fome e da miséria.

Aos meus filhos e genro, Camila, Igor e Willian, que sempre me incentivaram a me desenvolver profissionalmente.

Aos meus netos, Nina e Dante, que mesmo sem saber o motivo, sempre estavam felizes quando eu ia pernoitar em sua casa.

Ao professor e orientador Dr. Frederico Reis, meu amigo Fred, que, além do apoio no desenvolvimento da pesquisa por meio de suas orientações, sempre me incentivou a fazer o mestrado nesses longos anos de amizade.

Ao Prof. Dr. Valmecir Bayer, por ter aceito o convite para fazer parte das bancas de qualificação e de defesa pública da dissertação, e ainda pelas contribuições e sugestões para a pesquisa a partir de toda a sua experiência docente.

Ao Prof. Dr. Davidson Oliveira, por ter aceito o convite para fazer parte das bancas de qualificação e de defesa pública da dissertação, e ainda por contribuir demais com para a nossa pesquisa por meio das sugestões feitas ao longo da sua disciplina.

A todos os professores do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UFOP, incentivadores e que contribuíram diretamente para nossa formação de pesquisador.

A todos os meus colegas e companheiros da turma do mestrado, pois cada um trouxe sua contribuição.

Em particular, a todos os colegas que compartilharam comigo os trabalhos em grupo, pois aprendi muito durante as nossas caminhadas em madrugadas fazendo pesquisas.

Ao meu amigo e colega de mestrado, Cláudio Pacheco, pela amizade e apoio durante toda a caminhada.

Ao Prof. Dr. Claudio Landim (Coordenador Geral da OBMEP), à Sra. Erika Sholl (Coordenadora Nacional da OBMEP) e à Sra. Ana Paula Costa (Secretária de Apoio Geral às Coordenadorias Regionais da OBMEP), por todo o apoio necessário à nossa pesquisa.

Muito obrigado por tudo a todos e a todas!

RESUMO

A presente dissertação tem como principal objetivo discutir a mobilização de processos mentais característicos da transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado, no contexto da resolução de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) – Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021. Esta dissertação está estruturada no formato *multipaper* e é constituída por três artigos. O Artigo 1 – Um passeio pelas Olimpíadas de Matemática: das origens aos atuais cenários no mundo e no brasil traz um pouco da história das Olimpíadas de Matemática, por meio de uma pesquisa teórico-bibliográfica, desde suas origens até os atuais cenários mundial e brasileiro, destacando, de forma especial, a OBMEP e seu papel na inclusão, além de algumas de suas contribuições para o ensino e a aprendizagem de Matemática, por meio de seus objetivos e ações. Já no Artigo 2 – Um mapeamento sobre a transição entre os Pensamentos Matemáticos Elementar e Avançado em pesquisas de Educação Matemática, discorremos teoricamente sobre a transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado, à luz de uma pesquisa do tipo mapeamento enquanto processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo, realizada no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Por sua vez, no Artigo 3 – A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP, a partir de uma pesquisa documental, apresentamos uma análise de resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021 da OBMEP, destacando os principais processos do pensamento matemático que caracterizam o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por alunos medalhistas de ouro da Região MG-03, localizada no interior do estado de Minas Gerais. As conclusões apontam que: nossa experiência na Coordenação Regional da OBMEP e na organização de Olimpíadas Regionais de Matemática nos permitiu tecer algumas considerações sobre o papel das olimpíadas científicas como instrumentos de incentivo ao ensino e à aprendizagem de Matemática; verificamos uma escassez de pesquisas referentes à transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado e, praticamente, a inexistência de pesquisas focadas na investigação de tal transição na perspectiva da formação de professores de Matemática; identificamos uma potencialização do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado a partir da resolução de questões da OBMEP, especialmente, pela possibilidade de mobilização dos processos de modelação, sintetização e generalização em atividades matemáticas não rotineiras no cotidiano escolar.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Elementar. Pensamento Matemático Avançado. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Educação Matemática.

ABSTRACT

The present thesis has as main objective to discuss the mobilization of mental processes characteristic of the transition from Elementary Mathematical Thinking to Advanced Mathematical Advanced Mathematical Thinking, in the context of solving questions of the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad (OBMEP) – Level 3 (High School) of the 2021 edition. This thesis is structured in multipaper format and consists of three articles. Article 1 – A walk through the Mathematics Olympiad: from its origins to the current scenarios in the world and in Brazil provides an overview of the history of the Mathematics Olympiad, through a theoretical research, from its origins to the current scenarios in the world and in Brazil, highlighting, in a special way, the OBMEP and its role in inclusion, besides some of its contributions to the teaching and learning of Mathematics, through its objectives and actions. In Article 2 – A mapping of the transition between Elementary and Advanced Mathematical Thinking in Mathematics Education research, we discuss theoretically about the transition from Elementary Mathematical Thinking to Advanced Mathematical Thinking, in the light of a mapping research as a systematic process of surveying and describing and description of information about the research, covering a certain space (place) and (place) and period of time, carried out in the CAPES Theses and Dissertations Catalog. In turn, in Article 3 – The mobilization of Advanced Mathematical Thinking in solving OBMEP questions, based on a documentary research, we present an analysis of the resolutions of questions from the 2nd phase test of Level 3 (High School) of the 2021 edition of the OBMEP, highlighting the main processes of mathematical thinking that characterize the development of Advanced Mathematical Thinking mobilized by gold medal winning students from Region MG-03, located in the interior of the state of Minas Gerais. The conclusions point that: our experience in the Regional Coordination of OBMEP and in the organization of Regional Mathematics Olympiads allowed us to make some considerations the role of scientific olympics as instruments of incentive to the teaching and learning of Mathematics; we verified a scarcity of research regarding the transition from Elementary Mathematical Thinking to Advanced Mathematical Thinking, and the inexistence of research focused on the investigation of this transition from the perspective of Mathematics teacher education; we identified a potentialization of the development of Advanced Mathematical Thinking from the resolution of OBMEP questions, especially by the possibility of mobilizing modeling processes, generalization in non-routine mathematical activities in everyday school life.

Keywords: Elementary Mathematical Thinking. Advanced Mathematical Thinking. Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad. Mathematics Education.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

> Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma, continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais...
>
> Rubem Alves

Um breve histórico discente e docente

Comecei pelo caminho da docência em 1983, logo após concluir o Ensino Médio como Técnico em Mecânica. Devido à grande dificuldade de contratar professores em municípios pequenos, fui convidado para lecionar o conteúdo de Ensino Religioso na Escola Estadual Deputado Hilo de Andrade, em Periquito – MG, distrito que, naquela época, pertencia ao município de Açucena – MG. Nunca tinha lecionado e nem estava nos meus planos ser um professor, mas foi a partir daquele momento que percebi uma oportunidade que estava se apresentando. No ano seguinte, comecei a lecionar Ciências e Educação para a Saúde na mesma escola e percebi que, para dar sequência à minha carreira docente, eu teria que fazer um curso de graduação. Comecei, então, em 1984, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Teófilo Otoni – MG (FAFITO), o curso de Licenciatura Curta em Ciências, para atuar como professor de Ciências e Educação para a Saúde e, ainda, de Matemática nas 5ª e 6ª séries de então.

Essa experiência exigiu de minha parte muita persistência e muita dedicação. A instituição de ensino em que comecei o curso de graduação estava localizada a 150 km da minha residência, além das dificuldades financeiras. Diante das dificuldades apresentadas, fiz vestibular na Universidade Vale do Rio Doce (UNIVALE) de Governador Valadares – MG, sendo aprovado no curso de Licenciatura Curta em Ciências, que tinha 5 semestres de duração. Entretanto, por causa do horário em que assumi aulas, eu não pude frequentar o 5º e último período, tendo que transferir-me para Faculdade de Filosofia Ciência e Letras de Caratinga – MG (FUNEC), onde estudei mais um ano para concluir o curso de Licenciatura Curta em Ciências. Enfim, em 1989, após traçar um percurso em que passei por 3 Instituições de Ensino Superior, localizadas em 3 cidades diferentes, concluí o curso de Licenciatura Curta em Ciências.

Durante o curso de Licenciatura Curta em Ciências, tive contato com um grande número de disciplinas relacionados com a Matemática Superior como Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva, Álgebra Linear, dentre outras e concluí que, embora tivesse dificuldades em compreender alguns assuntos, eu deveria ser professor de Matemática. Por isso, em 2001, retornei à FUNEC para cursar Licenciatura Plena em Matemática, concluindo o curso em 2002.

Já em 2005, comecei o curso de Especialização em Matemática e Estatística na Universidade Federal de Lavras (UFLA), concluído em 2006, mas o meu sonho era cursar o mestrado, o que não foi possível pela carga horária de 40 horas aulas/semanais que eu cumpria, à época, como professor em dois cargos efetivos na Rede Estadual de Educação de Minas Gerais.

Nos últimos anos, eu trabalhei em duas escolas da rede estadual, ambas em Governador Valadares – MG. No final de 2016 foi publicada a minha primeira aposentadoria como professor em uma delas e, no final de 2020, foi publicada a minha segunda aposentadoria na outra.

Nesse momento da minha vida, na condição de recém aposentado, acredito que ainda é possível realizar o antigo sonho de cursar o mestrado, visando não só meu desenvolvimento profissional, mas também vislumbrando uma eventual possibilidade de atuar como docente no Ensino Superior.

Nesse contexto, a escolha pelo Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) foi natural, a partir da minha participação em diversos eventos organizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Minas Gerais (SBEM – MG), realizados na UFOP.

A motivação para a investigação

Em 2004, atuando como professor de Matemática do Ensino Fundamental na rede pública estadual, inscrevi alguns alunos da minha turma de 6ª série, atual 7º ano, para participarem da Olimpíada Mineira de Matemática (OMM), promovida pelo Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

Na época, essa turma tinha aproximadamente 35 alunos, dos quais apenas 8 demonstraram interesse e foram inscritos na OMM, sendo que dois deles foram premiados com medalhas de bronze e prata. Os alunos medalhistas e eu, na condição de professor, fomos convidados para participar, no mês de dezembro de 2004, da cerimônia de premiação, realizada num auditório da UFMG, em Belo Horizonte – MG, mas devido à alta carga horária de trabalho, a minha participação na cerimônia de premiação, infelizmente, ficou inviabilizada.

Ainda assim, em fevereiro de 2005, recebi um convite do Prof. Dr. Seme Gebara Neto (UFMG), um dos Coordenadores da OMM, para ser Coordenador Regional de um projeto nacional criado para estimular o estudo da Matemática e identificar "novos talentos", que seria lançado no final daquele mês: a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A OBMEP é coordenada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), localizado no Rio de Janeiro – RJ, conta com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e é promovida com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI). Ela é direcionada aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio das escolas públicas municipais, estaduais e federais, sendo realizada em três níveis: Nível 1 (alunos dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental), Nível 2 (alunos dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e Nível 3 (alunos dos 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio).

As provas dos três níveis são constituídas de duas fases. Na 1ª fase, todos os alunos participam e fazem uma prova contendo 20 questões objetivas. Já para a 2ª fase, são selecionados os 5% (cinco por cento) de alunos com melhores pontuações do total de alunos inscritos em cada escola, para responderem a 6 questões subjetivas. Para os alunos medalhistas (ouro, prata ou bronze), são oferecidas bolsas dos programas do Conselho Nacional do Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), além de prêmios aos professores, escolas e secretarias de educação.

Retomando, mesmo com a alta carga horária de aulas que havia assumido, aceitei o convite, tendo participado da primeira reunião em Brasília, juntamente com outros Coordenadores Regionais convidados. Assumi, então, a Coordenação da Região MG03, uma das 8 regiões em que foi "dividido" o estado de Minas Gerais. Essa região, conhecida como Região dos Vales, era formada pelas Superintendências Regionais de Ensino (SRE) de Almenara, Araçuaí, Caratinga, Coronel Fabriciano, Governador Valadares, Guanhães, Manhuaçu, Nova Era e Teófilo Otoni. Posteriormente, a SRE de Guanhães foi incorporada a outra região. Atualmente, a Região MG03 é formada por 172 municípios, 8 Superintendências Regionais de Ensino, 1.080 escolas e 370.000 alunos dos Ensinos Fundamental (anos finais) e Médio das escolas públicas e privadas, uma vez que, desde 2017, a OBMEP também tem a participação de escolas privadas.

A experiência como Coordenador Regional tem me trazido diversos desafios em sua execução, porém, tem revelado grandes possibilidades de interação que têm se constituído em ricas oportunidades de desenvolvimento profissional.

Por outro lado, como professor de Matemática, também tenho observado que uma mesma questão de provas da OBMEP, às quais tenho acesso, são resolvidas de formas diferentes por alunos de mesmo nível de escolaridade; às vezes, de forma bem simples e objetiva e, outras vezes, de forma bem mais elaborada, incluindo aspectos ligados ao rigor matemático. Cabe, então, questionar: Teriam esses alunos pensamentos matemáticos diferentes? Isso poderia caracterizar uma transição de um pensamento matemático mais elementar para um mais avançado?

A partir desses questionamentos e de minhas experiências como professor de Matemática e Coordenador Regional da OBMEP, surgiu a problemática de pesquisa que, a partir de agora, passo a delinear.

Delineamento da Pesquisa

1. Questão de Investigação

As questões da OBMEP, geralmente, abordam conteúdos elementares de Matemática Básica. Entretanto, principalmente, no caso de algumas questões do Nível 3 (Ensino Médio), algumas resoluções demandam processos avançados do pensamento matemático, como a representação e a abstração. Isso poderia caracterizar, a princípio, certa transição de um pensamento matemático inicialmente elementar para um pensamento matemático mais avançado.

A partir dessa problematização, podemos estabelecer a seguinte questão passível de investigação:

Que processos característicos da transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado podem ser identificados na resolução de questões da OBMEP – Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021?

Por envolver o foco teórico do Pensamento Matemático Avançado e por contextualizar a discussão dos processos mentais mobilizados no desenvolvimento do pensamento matemático e, por conseguinte, seus reflexos na aprendizagem matemática, a presente investigação será desenvolvida na Linha de Pesquisa 2 – Processos de Ensino e de Aprendizagem de Matemática do Mestrado em Educação Matemática da UFOP.

2. Objetivo Geral

- Discutir a mobilização de processos mentais característicos da transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA), no contexto da resolução de questões da OBMEP – Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021.

3. Objetivos Específicos

- Investigar a história e atualidades das Olimpíadas Científicas de Matemática no Brasil e no mundo, com destaque para a OBMEP;

- Mapear as principais teses e dissertações desenvolvidas na área de Educação Matemática no Brasil, relacionadas à transição do PME para o PMA;

- Analisar resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021 da OBMEP apresentadas por alunos medalhistas de ouro, identificando os principais processos de representação e de abstração mobilizados para o desenvolvimento do PMA.

4. Metodologia de Pesquisa

- Pesquisa Teórico-bibliográfica em teses, dissertações, artigos científicos, livros e sites sobre a história e atualidades das Olimpíadas Científicas no Brasil e no mundo, com destaque para a OBMEP, sua organização, seus objetivos, suas ações, sua estruturação e seus dados mais recentes;

- Pesquisa Mapeamento de teses e dissertações desenvolvidas na área de Educação Matemática no Brasil, relacionadas à transição do PME para o PMA, destacando seus aspectos teórico-bibliográficos e metodológicos, bem como aquelas cujo embasamento teórico contém estudos do grupo *Advanced Mathematical Thinking*;

- Pesquisa Documental a partir da análise de resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da OBMEP apresentadas por alunos medalhistas de ouro da Região MG-03, localizada no interior do estado de Minas Gerais, identificando os principais processos de representação e de abstração mobilizados para o desenvolvimento do PMA.

Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada no formato *multipaper*. Assim, após a presente **Apresentação da Pesquisa**, ela é constituída por três artigos.

O **Artigo 1 – Um passeio pelas Olimpíadas de Matemática: das origens aos atuais cenários no mundo e no Brasil** traz um pouco da história das Olimpíadas de Matemática, por meio de uma pesquisa teórico-bibliográfica, desde suas origens até os atuais cenários mundial e brasileiro, destacando, de forma especial, a OBMEP e seu papel na inclusão, além de algumas de suas contribuições para o ensino e a aprendizagem de Matemática, por meio de seus objetivos e ações.

Já no **Artigo 2 – Um mapeamento sobre a transição entre os Pensamentos Matemáticos Elementar e Avançado em pesquisas de Educação Matemática**, discorremos teoricamente sobre a transição do PME para o PMA, à luz de uma pesquisa do tipo mapeamento enquanto "processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo", realizada no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES.

Por sua vez, no **Artigo 3 – A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP**, a partir de uma pesquisa documental, apresentamos uma análise de resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021 da OBMEP destacando os principais processos do pensamento matemático que caracterizam o desenvolvimento do PMA mobilizados por alunos medalhistas de ouro da Região MG-03, localizada no interior do estado de Minas Gerais.

Por fim, encerramos com a **Conclusão da Pesquisa**, na qual intentamos trazer um conjunto de respostas consistentes à questão de investigação norteadora da pesquisa.

UM PASSEIO PELAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA: DAS ORIGENS AOS ATUAIS CENÁRIOS NO MUNDO E NO BRASIL

Carlos Roberto Torrente
carlos.torrente@aluno.ufop.edu.br

Resumo: O presente artigo apresenta uma pesquisa teórico-bibliográfica que objetiva fazer um breve passeio pelas Olimpíadas de Matemática. Iniciamos pelas suas origens, desde o século XVI, período do renascimento no qual alguns matemáticos protagonizaram disputas públicas que originaram as competições matemáticas, perpassamos pelo século XX, quando as Olimpíadas de Matemática ganharam proporções internacionais e desembocamos nos dias atuais, apresentando as principais olimpíadas realizadas no cenário internacional, destacando as principais competições realizadas no Brasil, dando uma ênfase maior à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que, atualmente, constitui-se numa das maiores Olimpíadas de Matemática do mundo. Como conclusões, valemo-nos de nossa experiência na Coordenação Regional da OBMEP e na realização de Olimpíadas Regionais de Matemática para tecer algumas considerações sobre o papel das olimpíadas como instrumentos de incentivo ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. Olimpíadas de Matemática. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Educação Matemática.

Introdução

As Olimpíadas de Matemática têm ganhado um papel cada vez mais relevante em diversos países, especialmente no Brasil, que tem frequentemente enviado “delegações” para participar de competições olímpicas internacionais, nos níveis médio e superior de ensino, e muito também devido à idealização e realização da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que, atualmente, conta com aproximadamente 18 milhões de alunos participantes.

De modo geral, podemos afirmar que as Olimpíadas de Matemática possuem como grandes objetivos comuns: identificar jovens talentos, incentivando seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas; estimular e promover o estudo da Matemática; contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica; incentivar o aperfeiçoamento dos professores de Matemática, contribuindo para a sua valorização profissional; contribuir para a integração das escolas com as universidades, institutos de pesquisa e sociedades científicas; promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Nossa experiência na Coordenação Regional da OBMEP na região dos Vales no leste de Minas Gerais leva-nos a crer que, apesar dos resultados promissores em relação ao impacto da OBMEP retratado pelo número cada vez maior de escolas, alunos e professores envolvidos, parece haver, ainda, um longo caminho a ser percorrido de modo a se alcançar o objetivo de contribuir significativamente para uma melhoria dos indicadores de qualidade do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira.

Diante desse contexto, neste artigo, a partir de uma pesquisa teórico-bibliográfica que abarcou consultas a *site*s de olimpíadas científicas e de associações de Matemática de diversos países, objetivamos apresentar, inicialmente, um pouco da história das Olimpíadas de Matemática, bem como das principais competições internacionais que motivaram e serviram de modelo para a realização de diversas competições no continente americano e, especialmente, no Brasil.

Particularmente, detalharemos a OBMEP, destacando sua grande abrangência atual, como forma de fomentar a discussão sobre a importância das Olimpíadas de Matemática em seus pressupostos de motivação aos estudos de Matemática, para alunos nos mais variados níveis de ensino.

Uma possível origem das Olimpíadas de Matemática

A solução algébrica das equações cúbica e quártica foi, provavelmente, o feito matemático mais extraordinário do século XVI. Em 1494, Frei Luca Pacioli (1445-1517), renomado professor de Matemática, tendo ensinado em diversas universidades da Itália, escreveu o livro "Summa de Aritmética e Geometria", que teve grande divulgação e prestígio. Como era de costume, a incógnita, que hoje chamamos de x, era denominada nesse livro de "a coisa", enquanto x^2 era "censo", x^3 era "cubo", x^4 era "censo censo", e assim por diante. A Álgebra era, na época, chamada "a arte da coisa" ou "arte maior". Depois de ensinar, sob a forma de versos, o método para se resolver a equação do 2º grau, Pacioli afirmava que não poderia haver uma regra geral para a solução de problemas do tipo "cubo e coisa igual a número", ou seja, $x^3 + px = q$ (LIMA, 1991, p. 11).

Por volta de 1515, Scipione Del Ferro (1465-1526), professor de Matemática da Universidade de Bolonha, personagem sobre cuja vida muito pouco se conhece, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$. O curioso é que Del Ferro nunca publicou sua solução, mas revelou o seu segredo a 2 discípulos, Annibale Della Nave (mais tarde, seu genro e sucessor como professor de Matemática na Universidade de Bolonha) e Antonio Maria Fiore. A esse último, apresentou a regra, mas não a prova (LIMA, 1991, p. 11).

Como era tradição naquela época, Del Ferro manteve sua solução em segredo. Naquela época (século XVI), os matemáticos ganhavam a vida desafiando uns aos outros em disputas públicas de resolução de problemas, nas quais ao vencedor era reservado um prêmio em dinheiro, certa "glória" e, eventualmente, a ajuda econômica de um patrono rico. As chances de alguém vencer um tal desafio aumentavam, se ele soubesse como resolver problemas que os outros não sabiam. Assim, o segredo era o "estilo da época".

De fato, Del Ferro quase levou o segredo para a sepultura: em seu leito de morte, ele revelou o seu segredo aos discípulos, Annibale Della Nave e Antonio Maria Fiore. Fiore não era um bom matemático, mas tinha agora uma formidável arma em mãos. Em 1535, Fiore teve a infeliz ideia de desafiar Niccolo Fontana (1500-1557), professor em Veneza e que já tinha derrotado outros desafiantes. Fontana era mais conhecido como Tartaglia, "o gago", porque quando tinha 12 anos, um soldado invasor francês golpeou sua mandíbula com a espada, deixando-o para o resto da vida com uma deficiência na fala. Cada um dos concorrentes propôs 30 questões para que o outro resolvesse num intervalo de tempo fixado. Fiore achou que Tartaglia estivesse blefando e, assim, viu nele a vítima perfeita para um desafio público. Tartaglia resolveu todos os problemas, ganhou a disputa e recusou os 30 banquetes estipulados como prêmio ao vencedor. Fiore não resolveu nenhum dos desafios propostos (LIMA, 1991, p. 11).

Devido à repercussão do fato, Girolamo Cardano (1501-1576) pediu a Tartaglia que lhe revelasse o seu método de resolução de cúbicas. Depois de várias tentativas, Tartaglia foi convencido e, de certa forma, presenteou Cardano com um poema que descreve o seu método de resolução de cúbicas, com a condição de que o mesmo não fosse revelado a mais ninguém. Cardano não só revelou o método, como o publicou em um trabalho de sua autoria, em 1545. Esse incidente jamais foi superado pelas partes e insultos eram lançados de ambos os lados (BOYER, 2008; EVES, 2004; GARBI, 2006).

Já em 1894, no final do século XIX, reverberando a tradição da disputa pública do século XVI, os matemáticos húngaros passaram a organizar competições matemáticas chamadas "Eotvos". Devido à maneira em que foram estruturadas, é possível afirmar que essas competições são as precursoras do que, hoje, conhecemos como "Olimpíadas de Matemática".

Em 1934, foi organizada aquela que pode ser considerada como a 1ª Olimpíada de Matemática "moderna", na cidade de Leningrado, na então União Soviética. A 1ª Olimpíada Internacional de Matemática – *International Mathematics Olympiad* (IMO) foi realizada, em 1959, na cidade de Bucareste, na Romênia. Já em 2017, com a participação de 111 países, a

58ª Olimpíada Internacional de Matemática foi realizada no Brasil, na cidade do Rio de Janeiro, na sede do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Particularmente, no Brasil, a Academia Paulista de Ciências (APC) criou a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM), em 1977. Em 1979, surgiu a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e que realizará a sua 43ª edição, em 2022. A 1ª edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi realizada em 2005, com a participação de mais de 10 milhões de alunos, colocando o Brasil como recordista mundial em número de participantes em competições de Matemática, superando a última competição Canguru sem Fronteiras, realizado na França, que contou com a participação de mais de 6 milhões de competidores, oriundos de vários países.

Passaremos, agora, para uma descrição mais detalhada das principais Olimpíadas de Matemática, obtida a partir de uma pesquisa em *sites* específicos que trazem a história e atualidades de tais eventos, começando pelas olimpíadas internacionais e, posteriormente, destacando aquelas realizadas no Brasil.

A Olimpíada Internacional de Matemática

A 1ª edição da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), segundo o *site*[1] de informações sobre olimpíadas científicas, foi realizada em 1959, na Romênia, com a participação de apenas 7 países, todos do então “bloco socialista”, composto por países que faziam parte da chamada “Cortina de Ferro”: Bulgária, Hungria, Polônia e Romênia, além das hoje extintas, Alemanha Oriental, Tchecoslováquia e União Soviética (URSS). Obviamente, a questão da escolha dos países participantes retrata questões geopolíticas relacionadas ao contexto daquela época que, entretanto, fogem ao escopo de interesse do presente artigo.

O primeiro país “não alinhado” a participar de uma edição da IMO foi a Mongólia, no ano de 1964 e, posteriormente, a Finlândia. A primeira nação das Américas a participar do evento foi Cuba, no ano de 1971. Posteriormente, ocorreu a participação do Vietnã, em 1974. Logo após, participou o primeiro país africano, a Argélia. A partir da década de 1970, ocorreu um aumento expressivo no número de países membros e, dessa forma, o evento começou a ganhar maiores proporções, segundo Silva (2016). Com o passar dos anos, o número de países foi aumentando consideravelmente, chegando a mais de 100 países que participaram da

[1] https://noic.com.br/olimpiadas/matematica/imo/

competição, em 2021. Existem alguns fatos importantes que podem ser destacados na história recente da IMO.

Para participar da IMO, os competidores devem ter menos que 21 anos de idade, não podendo ter nível de escolaridade acima do Ensino Médio. Não há limite para o número de participações de um mesmo aluno, desde que sejam respeitadas as condições anteriores. A IMO é uma competição individual, o que significa que, formalmente, não há delegações nacionais.

A premiação é composta por medalhas de ouro, prata e bronze, além de certificados de menção honrosa. A distribuição dos prêmios é realizada de tal forma que as medalhas sejam entregues à metade dos estudantes participantes. As medalhas de ouro, prata e bronze são distribuídas na proporção 1:2:3, respeitado o limite de que não mais que 1/12 dos estudantes sejam premiados com a medalha de ouro, não mais que 1/4 com a medalha de prata e não mais que 1/2 com algum tipo de medalha. Os certificados de menção honrosa são entregues ao estudante que, não tendo recebido qualquer tipo de medalha, tenha resolvido corretamente algum dos 6 problemas propostos na competição. Esses certificados têm como objetivo principal incentivar os competidores a procurar desenvolver soluções completas às questões propostas.

A Olimpíada Canguru sem Fronteiras

De acordo com o *site*[2] de tal evento, o professor de Matemática Peter O'Halloran de Sydney, na Austrália, no início dos anos 1980, elaborou uma prova digital que passou a ser resolvida por milhares de alunos, simultaneamente. Já em 1991, os professores franceses André Deledicq e Jean Pierre Boudine decidiram iniciar essa mesma competição na França e deram-lhe o nome de "Kangourou", em homenagem ao colega australiano. O evento realizado na França foi sucesso, tendo a participação de 120 mil alunos, atraindo a atenção dos países vizinhos e, nas palavras de um de seus fundadores, André Deledicq, é um "jogo-concurso" e não uma competição entre estudantes.

Em 1994, foi realizada uma reunião em Paris, onde foi proposta a vários países europeus a organização de uma competição mais abrangente denominado Canguru Europeu. A ideia foi recebida com entusiasmo e, no Conselho Europeu em Estrasburgo, os representantes de 10 países (Espanha, França, Grã-Bretanha, Hungria, Itália, Moldávia, Polônia, Rússia, Eslovênia e Austrália) criaram a Associação Canguru Sem Fronteiras (AKSF, em francês).

[2] https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/quem-somos/o-canguru.html

É dessa forma que nasce a *Kangourou sans Frontières* (Canguru sem Fronteiras) que, atualmente, é realizada em mais de 86 países e conta com mais de 6 milhões de participantes, alunos do Ensino Fundamental e Médio, incluindo o Brasil.

A Canguru sem Fronteiras é uma associação internacional que congrega personalidades do mundo da Matemática, sendo que, anualmente, um grupo de professores se reúne para discutir o ensino da Matemática e preparar as provas que serão aplicadas nos países participantes. Sua finalidade é promover a divulgação da Matemática por todos os meios ao seu alcance e, em particular, envolver e motivar milhares de alunos em todo o mundo. Seus objetivos são assim descritos:

- Ampliar e incentivar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos;
- Contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis da Educação Básica;
- Favorecer o estudo de maneira interessante e contextualizada, aproximando os alunos do universo da Matemática;
- Estimular a capacidade dos alunos de obter prazer e satisfação intelectual na resolução de problemas de Matemática pura ou aplicada.

A Canguru de Matemática é uma competição muito diferente da IMO e, sob alguns aspectos, podem ser considerados eventos que se opõem. Mais do que uma competição descompromissada, é uma espécie de jogo. Ao contrário da IMO, estudantes de todas as idades, dos 7 aos 18 anos, podem participar do evento, em 6 diferentes categorias etárias, resolvendo 24 ou 30 testes de múltipla escolha relativamente fáceis em 90 minutos (ou mais, dependendo do país participante). Mas talvez a diferença mais óbvia seja a de que a Canguru não se destina somente para os “melhores estudantes de Matemática”. Ao contrário, a competição visa atrair tantos estudantes quanto for possível, com a finalidade de mostrar-lhes que a Matemática pode ser interessante, útil e mesmo divertida.

Como são muitos os países de todo o mundo que participam, há uma certa liberdade na organização da competição, com a restrição de que os problemas matemáticos propostos sejam os mesmos. Mais precisamente, cada país pode organizar o evento da maneira que melhor lhe convenha, desde que sejam obedecidas algumas regras estabelecidas pela AKSF. Os resultados dos estudantes de diferentes países não são comparados, pois isso seria contrário ao espírito da Canguru, considerado como uma competição individual e não uma forma de comparação internacional.

No Brasil, ela é conhecida como a Canguru de Matemática e é realizada desde 2009, por iniciativa do Professor Élio Mega (SP). Desde então, a competição apresenta um crescimento acelerado a cada ano. Na edição de 2021, quase 900 mil alunos brasileiros foram inscritos para realizar as provas da Canguru de Matemática mas, com as restrições causadas pela pandemia de Covid-19, aproximadamente 400 mil alunos participaram efetivamente. Os dados da edição de 2022 ainda não estavam disponíveis quando da publicação do presente artigo.

A Olimpíada Europeia de Matemática para Garotas

A *European Girls' Mathematical Olympiad* (EGMO) ou, em português, Olimpíada Europeia de Matemática para Garotas, segundo o *site*[3] de informações sobre olimpíadas científicas, é uma competição internacional de Matemática semelhante em estilo à IMO e acontece desde 2012. Os países participantes enviam equipes compostas por 4 alunas em idade escolar. Apesar da competição acontecer na Europa, diversos outros países não europeus, como o Brasil, também participam.

A EGMO foi realizada nos seguintes países: Inglaterra (2012), Luxemburgo (2013), Turquia (2014), Bielorrússia (2015), Romênia (2016), Suíça (2017), Itália (2018) e Ucrânia (2019). A EGMO foi planejada para ser realizada na Holanda, em 2020 e na Geórgia, em 2021, mas aconteceu como um evento puramente virtual, devido à pandemia de Covid-19. A EGMO 2022 foi realizada na Hungria.

Em outono de 2009, o Murray Edwards College, em Cambridge, Inglaterra, abordou o United Kingdom Mathematics Trust (UKMT) com uma oferta para apoiar um evento visando o enriquecimento matemático para meninas. Uma voluntária do UKMT, Vicky Neale, ingressou na faculdade como Diretora de Estudos em Matemática no início daquele ano, e a faculdade procurou apoiar suas atividades. Ao mesmo tempo, o UKMT estava planejando enviar uma equipe de meninas para a Olimpíada de Matemática Feminina da China, em agosto de 2010.

Durante as férias de natal de 2009, Geoff Smith teve a ideia de criar uma Olimpíada Europeia de Matemática para Meninas, possivelmente usando o Murray Edwards College como local inaugural. O objetivo era proporcionar a muitas meninas uma experiência análoga à Olimpíada de Matemática Feminina da China, mas sem as jornadas árduas e os

[3] https://noic.com.br/olimpiadas/matematica/olimpiada-europeia-de-matematica-para-garotas/

inevitáveis problemas associados à captação de recursos recorrentes para essas grandes expedições.

Em 29 de dezembro de 2009, Smith circulou suas ideias no Comitê da Olimpíada Britânica de Matemática e, após alguma reflexão, o comitê decidiu apoiar a proposta. Depois disso, foi uma questão de obter apoio tanto do Murray Edwards College quanto do Council of the United Kingdom Mathematics Trust, e ambas as organizações se mostraram generosas e prestativas. Ambas as partes descobriram, mais tarde, que poderiam atrair apoio financeiro de outras fontes.

Na IMO 2010, no Cazaquistão, foi realizada uma reunião preliminar, para determinar se havia interesse internacional em realizar a EGMO. Sem surpresa, alguns países nos quais não existe tradição de "educação separada para meninas", estavam receosos de se envolver, mas havia claramente interesse suficiente para prosseguir com o evento inaugural.

A participação do Reino Unido na Olimpíada de Matemática Feminina da China em 2010, com a equipe liderada por Ceri Fiddes e Alison Zhu, foi um grande sucesso e ambas retornaram cheias de entusiasmo por criar um evento europeu. Ceri Fiddes se tornaria a primeira Diretora de Competição da EGMO e Alison Zhu lideraria a equipe do Reino Unido na 1ª EGMO. O primeiro anúncio público e lançamento oficial da EGMO foi feito em 8 de março de 2011, o 100º aniversário do Dia Internacional da Mulher.

O principal objetivo da EGMO é incentivar, cada vez mais, meninas de todo mundo a estudarem Matemática avançada e trazer mais representatividade dentro do mundo olímpico visto que, na IMO, por exemplo, menos de 10% dos participantes são mulheres.

A Olimpíada Pan-Americana de Matemática para Garotas

A EGMO serviu de modelo e incentivo a outras competições para mulheres. Um grande exemplo é a *Pan American Girls' Mathematical Olympiad* (PAGMO) ou, em português, Olimpíada Pan-Americana de Matemática para Garotas, segundo o *site*[4] de informações sobre olimpíadas científicas, que é uma competição internacional inspirada na EGMO e também tem o objetivo de aumentar a representatividade feminina em Olimpíadas de Matemática, com potencial para se ter um impacto positivo na comunidade olímpica de Matemática, por meio das seguintes ações:

[4] https://www.tm2.org.br/pagmo-2021-confira-como-participar-do-processo-seletivo/

- Criando oportunidades para que as mulheres testem seu potencial matemático e, ao mesmo tempo, representam seu país;

- Ajudando a destacar as conquistas femininas em competições regionais de Matemática;

- Fornecendo um espaço onde os participantes podem se relacionar mais facilmente e fortalecer sua confiança em seu trabalho matemático;

- Aumentando a motivação para um melhor desempenho nos treinos e competições nacionais.

Além disso, o evento oportuniza às mulheres de diferentes culturas, outras formas de compartilhar e apreciar Matemática, possibilitando interações onde elas possam compartilhar ideias sobre sua própria cultura, modo de vida, desafios e peculiaridades.

Com sua 1ª edição realizada em outubro de 2021, o evento não teve país anfitrião e foi realizado de forma virtual. As equipes, com até 4 meninas de países do continente americano tiveram 2 dias de prova, com 3 problemas de Matemática em cada dia.

Outras Olimpíadas Internacionais de Matemática

A partir de uma pesquisa em *sites* de olimpíadas científicas[5] e que, por sua vez, permitem o acesso aos *sites* de associações de Matemática de diversos países, construímos o quadro a seguir, que destaca algumas outras Olimpíadas de Matemática que acontecem no cenário mundial e apresenta algumas informações gerais a elas relacionadas:

Quadro 1: Informações gerais sobre Olimpíadas Internacionais de Matemática

Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIM)	Foi criada em 1985, com o objetivo de descobrir e incentivar os novos talentos matemáticos dos países iberoamericanos, além de oferecer a oportunidade de troca de experiências e promover relações de amizade entre alunos e professores. Podem participar do torneio os seguintes países: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Equador, Guatemala, Honduras, México, Nicarágua, Panamá, Paraguai, Peru, Porto Rico, República Dominicana, Uruguai, Venezuela, Espanha, Portugal, Angola, Cabo Verde, Moçambique, Santo Tomé e Príncipe.
Olimpíada de	A Cone Sul é uma competição internacional da qual participam os países da porção meridional da América do Sul, representados por equipes de 4 estudantes que não tenham feito 16 anos de idade, em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à sua realização.

[5] https://noic.com.br/olimpiadas/matematica/

Matemática Cone Sul (OMCS)	O torneio busca proporcionar uma oportunidade para os jovens participantes demonstrarem suas habilidades em Matemática, além de possibilitar a troca de conhecimentos e reforçar os contatos interculturais entre estudantes do ensino básico de diversos países latino-americanos.
Olimpíada de Maio (OM)	A Olimpíada de Maio é uma competição realizada para jovens alunos, disputada em 2 níveis: Nível 1, para alunos com, no máximo, 13 anos e Nível 2, para alunos com, no máximo, 15 anos, ambas as idades completadas até 31 de dezembro do ano da prova. A competição também é implementada por outros países da América Latina, Espanha e Portugal. As provas dos alunos com maior destaque são enviadas para a Comissão Organizadora na Argentina.
Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária (OIMU)	A Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária é uma competição internacional na área de Matemática voltado para os alunos de graduação da América Latina, Portugal e Espanha. No Brasil, a participação na competição é normalmente indicada a todos que participaram da OBM Nível Universitário.
International Mathematics Competition for University Students (IMC)	A Competição Internacional de Matemática para estudantes universitários é uma competição anual de Matemática destinada aos alunos de graduação em Matemática e áreas afins com, no máximo, 23 anos de idade, na época da competição. Trata-se de uma competição voltada, principalmente, para competidores individuais, embora a maioria das universidades participantes selecione e envie uma equipe de estudantes como seus representantes.
Romanian Master of Mathematics (RMM)	É uma competição que ocorre na Romênia, entretanto, é destinada apenas para os países mais bem colocados na IMO. Portanto, é uma olimpíada que convoca apenas os países do mundo com melhores resultados em competições internacionais de Matemática e, por isso, é chamada de Master.
Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática (CIIM)	É uma competição criada com o objetivo de incentivar o estudo da Matemática e a busca por uma excelência acadêmica na comunidade universitária iberoamericana. No Brasil, os alunos que participam dessa competição são selecionados pela OBM.
Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO)	É uma competição realizada anualmente, desde 1989, e tem como objetivos principais descobrir, encorajar e desafiar talentos matemáticos, além de criar uma oportunidade de troca de experiências e cooperação mútua entre os participantes. Participam da competição os países da região do pacífico asiático e os Estados Unidos.
Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP)	A competição teve início em 2011, em Coimbra, Portugal, com a designação de Olimpíadas de Matemática da Lusofonia. No ano seguinte, a designação da competição foi alterada para a atual, em virtude do apoio expresso da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (CPLP). É dirigida a alunos não universitários e dela participam todos os países de língua portuguesa.
Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether	É um torneio anual de Matemática voltado a estudantes universitários e visa difundir a importância da resolução de problemas na Matemática e áreas afins, detectar jovens talentosos e ajudá-los a desenvolver suas carreiras na Matemática, além de criar uma comunidade incumbida de resolver problemas matemáticos. A competição é organizada pela Universidad Nacional Autónoma de

	México.
Iranian Geometry Olympiad (NOIC)	A Olimpíada Iraniana de Geometria iniciou-se em 2014 e tem como objetivo dar mais atenção à Geometria e abordar várias ideias geométricas. É uma competição acadêmica anual para estudantes do ensino médio que estendeu sua atividade para o nível internacional em 2015, sendo o evento realizado simultaneamente em diferentes países ao redor do mundo, em todos os anos, desde então. O Brasil participa da competição desde 2016 e já possui medalhas de ouro. A seleção dos participantes que representam o nosso país é feita pela Comissão da Olimpíada Brasileira de Matemática de acordo com os resultados recentes de outras competições nacionais e internacionais.
Cyberspace Mathematical Competition (CMC)	É uma competição internacional de Matemática realizada pela parceria entre a American Mathematics Competitions (AMC) e Art of Problem Solving (AoPS) e tem como objetivos criar oportunidades para que jovens estudantes possam ter um maior envolvimento com problemas de Matemática de alto nível. A seleção dos integrantes da equipe brasileira na 1a edição, em 2020, foi realizada com base nos resultados obtidos pelos estudantes no processo seletivo que definiu a equipe brasileira da IMO.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Olimpíada Brasileira de Matemática

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é realizada desde 1979, segundo seu *site*[6], e é voltada para alunos de escolas e universidades de todo o país, das redes pública ou privada, do Ensino Fundamental até o final do Ensino Superior. A competição, em geral, reúne mais de 1.000 estudantes, anualmente, e tem como objetivo estimular o estudo da Matemática e descobrir jovens talentos. Os medalhistas que se destacam na OBM são selecionados para integrar a equipe brasileira de competições internacionais de Matemática, como a IMO e a EGMO.

A OBM é uma competição organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), fazendo parte de um projeto que visa utilizar competições matemáticas como base de projetos que têm como objetivos melhorar a qualidade do ensino de Matemática no país, descobrir talentos precoces para a Matemática, além de selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática.

Num projeto que recebeu o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), foi criada a Comissão de Olimpíadas da SBM, com a organização de

[6] https://www.obm.org.br/

uma secretaria, sediada no IMPA, que centraliza os trabalhos de coordenação e divulgação das atividades olímpicas. São objetivos da OBM:

- Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino da Matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas;
- Descobrir jovens com talentos matemáticos excepcionais e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa;
- Selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando o seu devido treinamento;
- Apoiar as competições regionais de Matemática em todo o Brasil;
- Organizar as diversas competições internacionais de Matemática, quando realizadas no Brasil.

Algumas das ações estabelecidas e relacionadas ao projeto de criação da OBM que receberam apoio do CNPq foram:
- Ampliação da Comissão de Olimpíadas da SBM, com o estabelecimento de uma secretaria, localizada no IMPA, para centralizar os trabalhos de divulgação e coordenação das atividades olímpicas e para apoiar os coordenadores regionais;
- Criação da revista Eureka, contendo informações e material de preparação para as olimpíadas;
- Estabelecimento de um canal de comunicação constante com os estudantes e as escolas, por meio da revista Eureka, de um *site* na internet e de um cartaz a ser enviado a todas as escolas cadastradas.

A SBM organizou a 1ª OBM, em 1979. Ao longo dos anos, o evento passou por diversas mudanças em seu formato, mas manteve a ideia central que é estimular o estudo da Matemática pelos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a formação dos professores, influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos. Alguns destaques na evolução da OBM podem ser verificados no quadro a seguir:

Quadro 2: Evolução da OBM

Ano	**Destaque**
1979	Realização da 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática

1991	2 níveis (Júnior, para alunos completando, no máximo, 15 anos em 1991; Senior, para alunos cursando o Ensino Médio – EM)
1992	2 fases (1ª fase: Prova com 25 questões de múltipla escolha e 2ª fase: 2 dias de provas, com 3 problemas em cada dia) e o nível Júnior passa a ser para alunos cursando até a 8ª série do Ensino Fundamental – EF
1993	A 2ª fase do nível Júnior volta a ser realizada em um dia, com 5 problemas
1995	O nível Júnior volta a ser para estudantes de até 15 anos
1998	3 níveis (Nível 1: 5ª e 6ª séries do EF; Nível 2: 7ª e 8ª séries do EF; Nível 3: Ensino Médio) e 3 fases (1ª fase: 20 ou 25 questões de múltipla escolha; 2ª fase: Prova aberta de 6 questões; 3ª fase: Níveis 1 e 2 com 5 questões e Nível 3 com 6 questões)
1999	As provas do Nível 2 passam a ser realizadas em 2 dias na fase final.
2001	É criado o Nível Universitário com 2 fases
2017	A OBM se integra à OBMEP, realizando apenas a fase única para os Níveis 1, 2 e 3, mantendo o Nível Universitário realizado em 2 fases

Fonte: *Site* da OBM.

No *site* da OBM, pode-se encontrar as revistas Eureka com artigos de Matemática olímpica, publicada pela OBM com apoio da SBM, as provas de diversas Olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais e os artigos utilizados nas Semanas Olímpicas, treinamentos oferecidos para os premiados.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

De acordo com seu *site*[7], a 1ª OBMEP foi lançada oficialmente no dia 19 de maio de 2005, em Brasília, pelo então Presidente da República, Luiz Inácio Lula da Silva, e pelos Ministros da Ciência e Tecnologia, Eduardo Campos, e da Educação, Tarso Genro. Essa 1ª competição mobilizou escolas públicas de todo o país, pois 10,5 milhões de jovens inscreveram-se. Observa-se, a partir dos números de inscritos, que esse evento é um dos maiores do gênero no mundo, superando em número de inscrições a Olimpíada de Matemática realizada nos Estados Unidos que reunia, à época, cerca de 6 milhões de alunos a cada ano. Era uma competição de iniciativa inédita pois, até 2016, era direcionada especificamente às escolas públicas de todo o país. Após esse ano, as escolas privadas passaram a ser convidadas a

[7] http://www.obmep.org.br

participar deste evento, provocando assim, mudanças na OBM, como destacamos anteriormente.

A OBMEP é organizada pelo atual Ministério de Ciências, Tecnologia e Inovação (MCTI), em parceria com o Ministério de Educação e Cultura (MEC) e com o apoio do IMPA e da SBM, responsáveis pela Direção Acadêmica da OBMEP, e tem como objetivos:

- Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.

A OBMEP é especificamente dirigida aos alunos das escolas públicas municipais, estaduais, federais e privadas, sendo realizado em 3 níveis: Nível 1 (alunos do 6º e 7º anos do EF), Nível 2 (alunos do 8º e 9º anos do EF) e Nível 3 (alunos do EM). As provas dos Níveis 1, 2 e 3 são constituídas de 2 fases. Disputam a 1ª fase todos os alunos inscritos pelas escolas públicas e privadas e classificam-se para a 2ª fase, aproximadamente, 5% dos alunos inscritos pela escola em cada nível. Cabe a cada escola selecionar os alunos com melhor desempenho nas provas da 1ª fase que participarão da 2ª fase. Os alunos com os melhores desempenhos na 2ª fase recebem medalhas de ouro, prata, bronze e certificados de menção honrosa, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 3: Distribuição de Medalhas da OBMEP

Tipo de Escolas	**Medalhas de Ouro**	**Medalhas de Prata**	**Medalhas de Bronze**
Escolas Públicas	500	1500	4500
Escolas Privadas	75	225	675

Fonte: Site da OBMEP.

Os alunos medalhistas recebem Bolsas de Iniciação Científica Júnior do CNPq. Desde 2017, 300 alunos de cada nível, com os melhores desempenhos na 2ª fase da competição são convidados para realizarem a fase única da OBM. Todas essas premiações seguem critérios vinculados à premiação e aos pontos obtidos pelos alunos.

É interessante destacar que mais de 400 vagas são oferecidas por Instituições de Ensino Superior (IES) aos alunos medalhistas em competições científicas. A modalidade permite que medalhistas em competições científicas ou de conhecimento ingressem em cursos de graduação das instituições, sem a necessidade de prestar o vestibular tradicional. Podem participar do processo seletivo, estudantes de escolas públicas e privadas que foram medalhistas em competições científicas ou de conhecimento durante o Ensino Médio.

O quadro a seguir mostra as vagas olímpicas em algumas IES brasileiras oferecidas no ano de 2022:

Quadro 4: Vagas Olímpicas em IES no ano de 2022

UNICAMP	122 vagas
UNIFEI (MG)	29 vagas
IFSULDEMINAS	38 vagas
UNESP	218 vagas

Fonte: Site da OBMEP.

Além das vagas olímpicas, a Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro (FGV Rio), por meio do seu Centro para o Desenvolvimento da Matemática e Ciências (CDMC), oferece bolsas a alunos de escolas públicas, medalhistas da OBMEP, para cursar graduação em Matemática Aplicada, Ciência de Dados e Inteligência Artificial, Economia, Administração, Direito ou Ciências Sociais.

Destaca-se que o CDMC da FGV Rio foi criado em 2017, com o propósito de identificar nas escolas públicas do país, jovens talentos com capacidade especial para a aprendizagem de Matemática, de maneira a oferecer a eles a possibilidade de realizar estudos nos cursos de graduação e pós-graduação da FGV Rio. Numa primeira aproximação, o projeto Seleção de Talentos convidou, nos últimos anos, alunos de escolas não seletivas, com excelente desempenho na OBMEP e, em menor número, indicados por escolas com excelente desempenho. Os estudantes são convidados a prestar o vestibular da FGV Rio em algum curso de graduação que a instituição oferece.

Outro importante destaque relacionados à OBMEP é a realização da OBMEP Mirim, primeira competição científica de Matemática brasileira voltada para alunos do 2º ao 5º ano do EF. O que motivou o IMPA a criar a OBMEP Mirim foi o sucesso de sua antecessora, a OBMEP Nível A, que era dedicada a alunos do 4º e 5º anos do EF.

A OBMEP Mirim busca novos talentos da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e sua 1ª edição será realizada em 2022, tendo os alunos a chance de testar seus conhecimentos matemáticos em 2 fases, ambas aplicadas pelas escolas e compostas por provas classificatórias com 15 questões objetivas em cada fase, abordando aplicações do raciocínio lógico e da criatividade, como já é característico das questões da OBMEP.

Por fim, também merece grande destaque o programa OBMEP na escola, que é voltado para os professores de Matemática das escolas públicas municipais e estaduais, objetivando contribuir para a formação de professores de Matemática, estimulando estudos mais aprofundados e a adoção de novas práticas didáticas em suas salas de aula. Professores de todo o Brasil são orientados no desenvolvimento de conteúdos programáticos, seguindo a prática didática de resolução de problemas, no trabalho com grupos de alunos selecionados em suas escolas ou em escolas vizinhas. Dividido em 2 etapas, o programa seleciona os professores de Matemática por meio da Prova de Habilitação. Para isso, o professor deve possuir pelo menos 2 anos de experiência na Educação Básica e possuir o título de Licenciado em Matemática. Após o processo seletivo, os professores aprovados participam do programa com duração de 12 meses e tem como principais objetivos estimular:

- A adoção em sala de aula de novas práticas pedagógicas;
- A utilização de material didático produzido pelo IMPA para a OBMEP;
- A criação de atividades extraclasse, como provas e bancos de questões, vinculadas às provas da OBMEP.

Durante o período de realização do programa, os professores recebem uma formação para aplicar a Matemática mais avançada e, assim, preparar alunos para a OBMEP e a OBM. O programa é realizado pelo IMPA, com apoio do MCTI e do MEC, e conta ainda com o patrocínio de bolsas do Itaú Social.

Após os detalhamentos feitos para a OBM e a OBMEP, consideradas as maiores Olimpíadas de Matemática no cenário nacional, passaremos a destacar algumas iniciativas estaduais que, historicamente, tiveram ou ainda tem uma importância regional no cenário das competições olímpicas de Matemática.

A Olimpíada Paulista de Matemática

De acordo com o *site*[8] de tal evento, durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, foi criado, em 1961, o Grupo de Estudo do Ensino de Matemática (GEEM) com o objetivo de coordenar e divulgar o movimento. Dentre as atividades do GEEM, destacou-se a criação da Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo (OMESP) que tinha o objetivo de incentivar a competição individual e em equipe, e instaurar as ideias do MMM nas escolas secundárias. Em sua 1ª edição, já contou com a participação de 100 mil estudantes que eram colocados frente a testes mistos, ou seja, com questões de múltipla escolha e também questões dissertativas.

Em 1969, houve a 2ª edição da OMESP, agora contando com o quádruplo do número de participantes da 1ª edição. Essa foi a última edição, pois o MMM foi extinto, fazendo com que o estado de São Paulo ficasse por 8 anos sem uma Olimpíada de Matemática.

Somente em 1977, foi organizada a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM), pela Academia Paulista de Ciência, considerada a precursora das Olimpíadas de Matemática no Brasil, tendo como idealizador o Professor Shigueo Watanabe (USP) e apoiada inicialmente pela Microsoft Brasil.

Com a finalidade de ampliar a divulgação do evento, criou-se uma associação denominada Associação Paulista de Olimpíada de Matemática (APOM) que se propõe a organizar a OPM, publicar material de apoio a estudantes e professores, proporcionar formações, formular provas e banco de questões, e acompanhar os interessados em participar de outras olimpíadas regionais, nacionais e internacionais. Essa associação também propõe um roteiro de estudos para as provas que é diferenciado em níveis e fases. Esse tipo de informação e divulgação não é comum em Olimpíadas de Matemática.

A Olimpíada Mineira de Matemática

A Olimpíada Mineira de Matemática (OMM), de acordo com seu *site*[9], é um projeto de extensão da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) que tem como objetivo principal a divulgação da Matemática como ciência, visando ainda contribuir para a melhoria de seu ensino e aprendizagem na Educação Básica, e também provocar, em professores e alunos,

[8] http://www.opm.mat.br/

[9] https://www.mat.ufmg.br/extensao/olimpiada-mineira/

curiosidade para resolver problemas.

Os problemas, mais parecidos com desafios do que com tarefas, que não se encontram nos livros didáticos em geral, exigem raciocínio lógico, persistência, análise de casos particulares, criatividade e crítica da própria solução encontrada. Entre outras, essas habilidades, necessárias para problemas de diversas naturezas (não apenas os de Matemática ou os escolares), estão também associadas à pesquisa científica, principalmente, nas áreas de ciências exatas e tecnológicas.

As atividades, além das provas nas próprias escolas participantes, podem envolver encontros de formação de professores e atividades pontuais com alunos de uma ou mais escolas, sempre baseadas na resolução de problemas.

A OMM também objetiva o fortalecimento do contato entre as escolas de Educação Básica e o Departamento de Matemática da UFMG, prioritariamente as escolas públicas, visando identificar e orientar jovens com especial talento para a pesquisa científica, especialmente em Matemática.

Atualmente, a OMM adotou como 1ª fase, a prova da OBMEP como forma de apoiar e divulgar essa competição. Assim, todas as escolas e estudantes inscritos na OBMEP estarão automaticamente inscritos na OMM. A 2ª fase continua a cargo da organização da OMM.

Outras Olimpíadas Regionais de Matemática

A partir de uma pesquisa em *sites* de olimpíadas científicas regionais, construímos o quadro a seguir, que traz os respectivos sites e destaca algumas informações sucintas tais como nome, sigla e abrangência sobre outras Olimpíadas Regionais de Matemática que acontecem no Brasil:

Quadro 5: Informações sobre Olimpíadas Regionais de Matemática

Nome (*site*)	**Sigla**	**Abrangência**
Olimpíada Paraense de Matemática (http://olimpiadaparaense.blogspot.com/)	OPM	Pará
Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (https://olimpiada.mat.ufrn.br/)	OMRN	Rio Grande do Norte
Olimpíada Pessoense de Matemática (http://abel.mat.ufpb.br/~olimpiadas/index.html)	OPM	Região Metropolitana de João Pessoa – PB

Olimpíada Campinense de Matemática (http://mat.ufcg.edu.br/)	OCM	Campina Grande – PB e cidades vizinhas
Olimpíada Capixaba de Matemática (https://cce.ufes.br/~olimpmat)	OCM	Espírito Santo
Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (http://www.omerj.com.br/)	OMERJ	Rio de Janeiro
Olimpíada de Matemática do Grande ABC (http://portal.metodista.br/omabc)	OMABC	Grande ABC – SP
Olimpíada de Matemática de Rio Preto (https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/olimpiada/)	OMRP	São José do Rio Preto – SP e cidades vizinhas
Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina (http://www.orm.mtm.ufsc.br/)	ORM	Santa Catarina
Olimpíada Regional de Matemática da Grande Porto Alegre (http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/olimpa4.htm)	ORM Grande PoA	Região Metropolitana de Porto Alegre – RS
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (http://www.moodle.mat.ufg.br/omeg/)	OMEG	Goiás

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerações Finais

As Olimpíadas de Matemática consistem na realização de provas escritas (objetivas ou discursivas), que testam conhecimentos que vão "além" da sala de aula. Por isso, é fato que os estudantes que participam dessas competições abrem espaço para agregar uma gama bem maior de conteúdos e vivências, que vão além do estudo para o ingresso nos cursos de graduação das IES. No caso específico da OBMEP, por exemplo, os estudantes premiados também começam a enxergar sua participação como uma forma de ingressar na universidade por meio das vagas olímpicas disponibilizadas que, a cada ano, têm aumentado com a adesão de novas instituições e o oferecimento de novas vagas em seus diversos cursos.

De modo geral, nas Olimpíadas de Matemática, o foco não são fórmulas e produtos, mas sim o saber pensar / raciocinar, demonstrando um desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Na verdade, todos deveriam estar aptos a resolver alguns dos problemas sugeridos. Inclusive, há certo senso comum de que por meio da Matemática, é possível "desenvolver o raciocínio". Nossa experiência docente e na coordenação de Olimpíadas de Matemática, entretanto, mostra que essa não é uma realidade, pois a linguagem matemática e a interpretação de problemas produzem efeitos de sentidos diferentes nos alunos.

Atualmente, as Olimpíadas de Matemática são, reconhecidamente, um poderoso instrumento não só para a descoberta de talentos, mas também para a difusão dessa área fundamental do conhecimento. De fato, quando organizadas em várias etapas ou fases para o mesmo grupo de crianças ou jovens, pode-se ir desde testes amigáveis e atraentes até a etapa mais seletiva da descoberta de talentos, muitos deles tornando-se, mais tarde, excelentes cientistas ou profissionais em geral.

Parece-nos questionável, entretanto, se as Olimpíadas de Matemática têm cumprido um papel a que todas elas se propõem, que é contribuir para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Cabe questionar, por exemplo, em que medida e de que formas isso realmente está acontecendo ou, ainda, poderia acontecer mais efetivamente. Obviamente, nessa discussão, é importante destacar a participação e apoio de diversos órgãos públicos e outras organizações de nossa sociedade que poderiam configurar às Olimpíadas de Matemática um caráter de maior inclusão rumo à cidadania e autonomia que se espera como fruto do processo educacional.

A partir de nossa experiência na Coordenação Regional da OBMEP, entendemos que o caráter inclusivo associado à OBMEP fica explícito na análise de sua estrutura de funcionamento, por meio de suas Coordenações Regionais preocupadas em viabilizar a participação de alunos das mais diferentes regiões do país.

Além disso, a sistemática de premiação segue o que, tradicionalmente, é utilizado nas competições olímpicas (medalhas e menções honrosas), mas proporcionou um avanço considerável na condução das atividades que dão sequência à premiação dos alunos: a premiação de escolas que se destacaram em diferentes contextos regionais, a premiação de professores que coordenaram as atividades nessas escolas e, principalmente, a possibilidade de que alunos premiados possam aprofundar seus conhecimentos em uma série de atividades.

Dessa forma, é necessário ressaltar que houve um movimento considerável dentro de muitas escolas no sentido de divulgar e, até mesmo, preparar seus alunos para a OBMEP. Esse movimento levou alguns professores a procurarem oportunidades de aprofundar e qualificar seu trabalho. Entretanto, apesar do programa OBMEP na Escola se constituir numa rica oportunidade de formação continuada para professores de Matemática, consideramos que, ao longo do programa, além da prática de resolução de problemas, seria importante a abordagem e discussão de outras tendências do ensino de Matemática, à luz das pesquisas recentes voltadas para a formação do professor e para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Por fim, a discussão sobre os resultados obtidos pelos alunos nas Olimpíadas de Matemática pode oferecer subsídios à reflexão sobre suas reais contribuições ao ensino de Matemática no Brasil, o que pode motivar e justificar a realização de futuras pesquisas em Educação Matemática.

Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 2008.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Coleção Professor Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

SILVA, Renato Cândido da. **O estado da arte das publicações sobre as Olimpíadas de Ciências no Brasil**. 2016. 82 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

UM MAPEAMENTO SOBRE A TRANSIÇÃO ENTRE OS PENSAMENTOS MATEMÁTICOS ELEMENTAR E AVANÇADO EM PESQUISAS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Carlos Roberto Torrente
carlos.torrente@aluno.ufop.edu.br

Resumo: Este artigo tem como objetivo identificar as abordagens teórico-bibliográficas sobre a transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado em pesquisas desenvolvidas na área de Educação Matemática. Para tanto, realizamos uma pesquisa do tipo mapeamento no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Após um refinamento com foco na transição entre os pensamentos matemáticos, foram selecionados para análise 40 trabalhos, sendo 14 teses e 26 dissertações, publicadas no período de 2009 a 2021. A análise dos trabalhos selecionados aponta que teorias que visam conhecer os processos de formação do pensamento matemático contribuem de forma significativa para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior. Destaca-se também que David Tall e Tommy Dreyfus são os principais pesquisadores utilizados como referenciais teórico-bibliográficos sobre o desenvolvimento de teorias do pensamento matemático, especialmente, seus trabalhos dentro do *Advanced Mathematical Thinking*. Por fim, os resultados revelam, especificamente, uma escassez de pesquisas referentes à transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado e, praticamente, a inexistência de pesquisas focadas na investigação de tal transição na perspectiva da formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Elementar. Pensamento Matemático Avançado. Mapeamento de Teses e Dissertações. Educação Matemática.

Introdução

A investigação sobre o Pensamento Matemático Avançado (tradução do termo / movimento conhecido por *Advanced Mathematical Thinking*) vem crescendo na Educação Matemática mundialmente, com destaque para as pesquisas que apontam suas contribuições teóricas e práticas para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, nos mais variados níveis de ensino.

Inicialmente, ressaltamos que Tall (2002) aponta a existência de uma transição do PME para o PMA, na medida em que o PME é característico de uma Matemática focada na compreensão de conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio, enquanto o PMA caracteriza-se por se desenvolver no início do Ensino Superior e por possuir características de abstração, dedução e demonstração em Matemática. A "mudança" do PME para o PMA envolve uma transição significativa: de descrever para definir, de convencer para provar em uma forma lógica baseada nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva que é vista, durante os esforços iniciais dos estudantes universitários com abstrações formais, na medida em que eles enfrentam o primeiro ano da universidade. É a transição da coerência da Matemática elementar (trabalhada na Educação Básica para a consequência da Matemática avançada (trabalhada no Ensino Superior), baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções, a partir de definições formais (TALL, 2002, p. 20).

Já para Henriques (2010, p. 16), tal transição está associada aos processos e mudanças cognitivas, pois: “A complexidade dos processos usados no pensamento matemático e as mudanças cognitivas que se verificam no indivíduo é que determinam o tipo de pensamento envolvido na aprendizagem de um dado conceito e caracterizam a transição do PME para o PMA”.

A pesquisadora considera que a mudança dos hábitos experimentais e intuitivos do raciocínio matemático da escola para o formalismo do PMA é abrupta e que as dificuldades no raciocínio matemático avançado se devem às mudanças do pensamento concreto para o abstrato e às noções dedutiva e indutiva de prova matemática. Com base em Tall (2002), ela considera que, no centro da transição da Matemática elementar para a avançada, está a ideia de construir conceitos a partir da definição, em vez de encontrar propriedades a partir de conceitos já existentes, usando-as como axiomas para construir teorias matemáticas sistemáticas e modificando a noção de prova. Em ambos os casos, a linguagem é usada para formular as propriedades dos objetos mas, na Matemática elementar, a descrição é construída a partir de experiências sobre o objeto, enquanto na Matemática avançada, as propriedades dos objetos são construídas a partir da definição (HENRIQUES, 2010, p. 17-18).

Entretanto, cabe destacar que, embora a Matemática avançada seja focada na abstração, definição e dedução, não há uma distinção totalmente clara entre o PMA e o PME, no sentido de que é possível abordar tópicos da Matemática avançada de uma forma elementar. A relevância, então, está em como esses tópicos são abordados. É necessário que haja uma interação entre os processos envolvidos nas diferentes formas de representação de um mesmo conceito, na generalização e na abstração (SANTOS; BIANCHINI, 2011, p. 3).

Nessa mesma direção, Dreyfus (2002) também defende que a forma como é conduzida a transição de um pensamento para o outro é o que os difere (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 5). Para Dreyfus (2002), não podemos relacionar, de forma simplista, o PMA ao nível de Ensino Superior. Ele afirma que o PMA independe da idade do aluno e que esse pensamento pode ocorrer sem que isso interfira. Corroborando com essa ideia, Elias, Barbosa e Savioli (2012, p. 8) afirmam que “a linha separadora entre o PME e o PMA não está na impossibilidade de um estudante da Educação Básica conseguir desenvolver um PMA por não ser um adulto, e sim, na maneira como a Matemática é apresentada neste nível de ensino".

No presente artigo, apresentamos uma visão panorâmica de diferentes abordagens teórico-bibliográficas sobre a transição do PME para o PMA, à luz de pesquisas produzidas na Educação Matemática, a partir de uma pesquisa do tipo mapeamento, como descreveremos a seguir.

Sobre o mapeamento como metodologia de pesquisa

Segundo Fiorentini *et al.* (2016, p. 18) o termo mapeamento da pesquisa diferencia-se do estado da arte da pesquisa, por fazer referência à identificação, à localização e à descrição das pesquisas que são realizadas num determinado tempo, espaço e campo de conhecimento. Assim, o mapeamento preocupa-se mais com os aspectos descritivos de um campo de estudo do que com seus resultados:

> Em síntese, entenderemos o mapeamento da pesquisa como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos. (FIORENTINI *et. al.*, 2016, p. 18).

O mapeamento da transição do PME para o PMA em pesquisas

O levantamento que caracterizou nosso mapeamento foi feito por meio de uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Inicialmente, indicamos para busca os seguintes termos: "Pensamento Matemático", sendo encontrados 217 trabalhos (56 teses, 161 dissertações).

A seguir, indicamos para busca os termos "Pensamento Matemático Elementar", sendo encontrados 6 trabalhos (2 teses e 4 dissertações) que foram publicados no período de 2010 a 2020 e que foram selecionados para análise por acreditarmos que, em alguma medida, eles abordam aspectos da transição do PME para o PMA. Entretanto, devido ao número reduzido de trabalhos selecionados, na sequência, indicamos para busca os termos "Pensamento Matemático Avançado", sendo encontrados 50 trabalhos (13 teses e 37 dissertações).

Como, ao indicarmos para busca os termos "Transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado", não foram encontrados trabalhos, decidimos realizar a leitura dos resumos dos 50 trabalhos encontrados na última busca e optamos, então, por também selecionar para análise, outros 34 trabalhos (13 teses e 21 dissertações) que foram publicados no período de 2009 a 2021 e que mencionam o Pensamento Matemático Avançado em seus resumos, apresentando-o como um de seus componentes teórico-bibliográficos.

As pesquisas mapeadas que abordam o PMA

Inicialmente, apresentamos os 34 trabalhos (13 teses e 21 dissertações) selecionados por retratarem pesquisas que abordam o PMA.

No quadro a seguir, apresentamos os trabalhos selecionados, cronologicamente, destacando: autor, ano da defesa, título, tese (T) ou dissertação (D) e instituição.

Quadro 1: Pesquisas selecionadas por abordar o PMA

AUTOR	ANO	TÍTULO	T / D	INSTITUIÇÃO
Vinicius Mendes Couto Pereira	2009	Cálculo no Ensino Médio: uma proposta para o problema da variabilidade	D	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
João Cláudio Brandemberg Quaresma	2009	Uma análise histórica epistemológica do conceito de grupo	T	Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Anderon Melhor Miranda	2010	As tecnologias da informação no estudo do Cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa	T	Universidade do Minho (Portugal)
Lílian Ferreira de Amorim	2011	A (re)construção do conceito de limite do Cálculo para Análise: um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática	D	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Érika Andersen	2011	As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática	D	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Vilmar Gomes da Fonseca	2011	O uso de tecnologias no Ensino Médio: a integração de Mathlets no estudo da função afim	D	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Hernando José Rocha Franco	2011	Os diversos conflitos observados em alguns alunos de licenciatura num curso de Álgebra: identificação e análise	D	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)
André Seixas de Novais	2011	Equações indeterminadas e lugares geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em R²	D	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Adriana Tiago Castro dos Santos	2011	O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra	D	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Elen Andrea Janzen	2011	O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de Geometria Dinâmica	T	Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Kátia Socorro Bertolazi	2012	Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre sistemas de equações lineares	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Henrique Rizek Elias	2012	Dificuldades de estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Debora Cristiane Barbosa Kirnev	2012	Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Sonia de Cassia Santos Prado	2012	O uso da calculadora e o Pensamento Matemático Avançado: uma análise a partir das situações de aprendizagem nos Cadernos do Professor de Matemática	D	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Jean Peixoto Campos	2014	Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino de Matemática	D	Universidade Federal de Rondônia (UNIR)
Valter Costa Fernandes Júnior	2014	Repensando o ensino de Análise: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais	D	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Rieuse Lopes Pinto	2014	Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do Cálculo	D	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

José Cirqueira Martins Júnior	2015	Ensino de derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra	D	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
João Lucas de Oliveira	2016	A utilização de softwares dinâmicos no ensino de Análise Real: um estudo sobre a construção do conceito de Integral de Riemann	D	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Eneias de Almeida Prado	2016	Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para formação do profissional da Educação Básica	T	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)
Willian Vieira	2016	Do Cálculo à Análise Real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas	T	Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN)
Jair Lucas Jorge	2017	Teoria de Conjuntos: processos manifestados do Pensamento Matemático Avançado	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Marta Burda Schastai	2017	Tall e Educação Matemática Realística: algumas aproximações	T	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Francisca Cláudia Fernandes Fontenele	2018	Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear	T	Universidade Federal do Ceará (UFC)
Paulo Ferreira do Carmo	2018	Pensamento Matemático Avançado: como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?	T	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Daniel Brandão Menezes	2018	O ensino do Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização da mediação de um bom professor	T	Universidade Federal do Ceará (UFC)
Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias	2018	Teorias cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade	T	Universidade Federal do Pará (UFPA)
Leide Maria Leão Lopes	2019	Formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas ao ensino de vetores em Geometria Analítica	D	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Thaise Thurow Schaun	2019	As representações tridimensionais das superfícies quádricas na disciplina de Cálculo com realidade aumentada	D	Universidade Federal de Pelotas (UFPEL)
Christian James de Castro Bussmann	2019	Pensamento Matemático-Computacional: uma teorização	T	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Michelle Andrade Klaiber	2019	Introdução à Álgebra Linear em um curso de Licenciatura em Química: o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino	T	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
João Arci Junior	2021	O Princípio da Casa dos Pombos: uma aplicação da Modelagem Matemática no ensino	D	Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR)
Mariana Maestripieri Okamoto	2021	Processos e subprocessos do Pensamento Matemático Avançado identificados nas habilidades do pensamento computacional	D	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Ronaldo Dias Ferreira	2021	Compreensão do conceito de limite por alunos de cursos de Ciências Exatas	T	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Fonte: Dados da pesquisa.

Passaremos, agora, a descrever brevemente cada trabalho selecionado, destacando o foco de pesquisa e alguns aspectos abordados relacionados ao PMA.

A dissertação de Pereira, defendida em 2009, teve motivação nas dificuldades existentes no ensino de Cálculo nos cursos iniciais das universidades brasileiras. O trabalho de David Tall, um dos criadores da área de pesquisa denominada PMA, é um dos suportes teóricos para o desenvolvimento desse trabalho, ao sugerir que o ensino de Matemática não deve ter o foco apenas na construção formal de um dado conceito, mas que uma gama de ideias e relações devem estar presentes na abordagem pedagógica desse conceito. O pesquisador concluiu que a alegada “falta de base” para a aprendizagem de Cálculo, justificativa preferida para os altos índices de reprovação que ocorrem nessa disciplina, está na pequena habilidade apresentada pela maioria dos alunos em procedimentos algébricos, tais como desenvolvimento de produtos notáveis, fatoração de polinômios, completamento de quadrados e a manipulação de identidades trigonométricas.

A tese de Quaresma, defendida em 2009, analisa o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de grupo à luz da teoria do PMA à luz do trabalho de Tommy Dreyfus, também um dos criadores da referida área de pesquisa, e apresenta subsídios didáticos que contribuam para o ensino e a aprendizagem das estruturas algébricas, visando dar maior significado ao referido conceito abordado na graduação em Matemática. Buscando garantir uma aprendizagem diferenciada do conceito de grupo, o pesquisador concluiu que o professor deve conhecer, pelo menos de forma geral, o processo de desenvolvimento do conceito, pois somente dessa forma, ele poderá reconhecer ou estabelecer as relações entre os conceitos básicos relacionados às teorias constituintes e, com isso, construir um conjunto de representações fundamentais, segundo Dreyfus (2002), para a aprendizagem de um conceito abstrato como o conceito de grupo.

A tese de Miranda, defendida em 2010, surgiu de sua experiência docente vivenciada nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e das leituras sobre as dificuldades e direções norteadoras de seu ensino. Assim, com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, em conceitos do Pensamento Matemático Avançado e no Pensamento Visual-Espacial, o pesquisador apresentou uma proposta de ensino e de aprendizagem para os estudos de funções reais de duas variáveis e gráficos em IR^3, auxiliadas com o uso de uma tecnologia informática. Com base nos resultados da pesquisa, sugeriu-se que professores de Cálculo de Várias Variáveis utilizem as tecnologias em suas aulas, compreendendo algumas das abstrações, ideias e pensamentos que seus aprendizes estabelecem nos diálogos entre eles, em um ambiente informatizado, pois esse contexto possibilitará aos aprendizes, visualizações e simulações gráficas na aprendizagem de conceitos matemáticos.

A dissertação de Amorim, defendida em 2011, discutiu, de forma geral, o ensino de Cálculo e de Análise na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior e, especificamente, investigou o papel das imagens conceituais e definições conceituais para a aprendizagem de limites de funções reais de uma variável. O PMA foi contemplado em situações do ensino de Cálculo e de Análise. A pesquisadora concluiu que uma postura mais crítica e ativa dos alunos pode contribuir para a criação de uma nova sala de aula que se constitua num espaço de trabalho, no qual se podem estabelecer novas relações entre professor e alunos. Os dados evidenciaram que os participantes de nossa pesquisa reconheceram um desenvolvimento pessoal, a partir da superação de dificuldades, o que certamente corrobora para uma desmistificação das dificuldades no ensino de Análise e reafirmação de sua importância como disciplina formadora de conceitos fundamentais, tais como números, funções e limites.

A dissertação de Andersen, defendida em 2011, teve como objeto de estudo as ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo, tendo como participantes alunos de Licenciatura em Matemática. A pesquisadora concluiu que a análise dos protocolos dos estudantes indicou que vários processos do PMA foram mobilizados. As conclusões da pesquisa mostraram que o objetivo da pesquisa foi alcançado, uma vez que muitos dos participantes conjecturaram que a integração e derivação são operações inversas uma da outra.

A dissertação de Fonseca, defendida em 2011, teve o objetivo de discutir e avaliar a utilização integrada do Mathlet como ferramenta nas aulas de Matemática, no estudo da função afim, em turmas do Ensino Médio. Para tanto, utilizou-se, como aportes teóricos, o trabalho de Tall e Vinner (1981). Como resultados, o pesquisador constatou que os alunos, de modo geral, tiveram muitas dificuldades em estabelecer uma relação de dependência entre as variáveis e também de generalização, um dos processos do PMA. Entretanto, no decorrer das aulas, à medida que os alunos interagiam com os Mathlets, eles começaram a entender a dependência das variáveis e desenvolver a capacidade de generalização da função afim.

A dissertação de Franco, defendida em 2011, investiga os conflitos de aprendizagem que emergem quando estudantes de Licenciatura em Matemática estão diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata. O estudo fundamentou-se nos processos constituintes do PMA, na teoria da imagem conceitual e definição conceitual, e nos níveis de sofisticação do pensamento matemático – procedimento, processo e proceito. Os conflitos investigados evidenciaram as diferenças entre a Álgebra, enquanto campo matemático estruturado em bases formais, e os processos cognitivos requeridos para a sua aprendizagem. O pesquisador concluiu que se, por um lado, expressar a Matemática por meio de uma linguagem rigorosa e concisa diminui as chances de ambiguidades ou interpretações subjetivas, por outro, essa forma de expressão apresenta-se como um forte complicador para alunos iniciantes. A notação simbólica da Álgebra, ao mesmo tempo que possibilita ao matemático se comunicar de modo rápido e preciso, requer do aprendiz, muitas vezes, um grau de abstração demasiadamente elevado, como mostraram as dificuldades dos alunos com os exercícios de demonstração ou no entendimento de determinada definição formal.

A dissertação de Novais, defendida em 2011, foi motivada pelas dificuldades encontradas pelos alunos em relacionar as representações gráficas e algébricas de equações e funções. Na fundamentação teórica para análise e estruturação metodológica da pesquisa foram destacadas algumas teorias do PMA. Dentre as hipóteses levantadas que possivelmente agravam essa problemática, algumas puderam ser comprovadas ao longo da elaboração, aplicação e análise dos dados. O pesquisador concluiu que uma proposta alternativa que envolva uma sequência didática bem estruturada, associada à utilização de um *software* de Geometria Dinâmica, destacando as conexões entre coordenadas na reta, coordenadas no plano, lugares geométricos, equações indeterminadas e sistemas de equações, minimizará as dificuldades encontradas na compreensão das relações existente entre as equações e as diversas representações de suas soluções, assim como proporcionará a conjectura de propriedades que poderão ser discutidas através de uma argumentação matemática sólida.

A dissertação de Santos, defendida em 2011, teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o *software* GeoGebra como uma estratégia pedagógica. Para tanto, foi escolhido como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação e Semiótica e os processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (2002). Os sujeitos da pesquisa foram estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Os processos do PMA envolvido nas estratégias de resoluções dos estudantes foram a descoberta por meio de investigação, a mudança de representação de um mesmo conceito, a generalização e a abstração. A pesquisadora concluiu que esses processos são relevantes para a compreensão de um conceito matemático e a aplicação da sequência didática utilizando o *software* GeoGebra foi uma estratégia de ensino eficiente.

A tese de Janzen, defendida em 2011, visou trabalhar com provas em Geometria num ambiente dinâmico da perspectiva do papel do professor de Ensino Superior, em seu papel de formador do pensamento matemático. Inicialmente, foi apresentada uma discussão sobre o que é o pensamento matemático e o que se entende por provas, que são vistas como um processo e não apenas um resultado formal, pois segundo Tall (2002), muitos dos processos do PMA não são aprofundados ou não possuem a clareza necessária. Foi realizado um estudo prático para buscar então compreender o papel do professor de Ensino Superior quando trabalha com provas em Geometria num ambiente dinâmico. Na análise dos dados, a pesquisadora identificou que, enquanto o professor faz uso das potencialidades do *software*, suas intervenções são direcionadas nos sentidos de cunho organizacional e de cunho matemático, ou seja, não basta o professor ter domínio do conteúdo matemático, ele precisa estar apto a guiar o aluno no processo de prova, e isto exige uma faceta de organizador para auxiliar o aluno a organizar suas ideias, para que este chegue a uma prova como resultado.

A dissertação de Bertolazi, defendida em 2012, teve por objetivo investigar processos do PMA manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre sistemas de equações lineares. A pesquisadora buscou nos registros escritos, relatos e indícios que assinalassem a presença de processos do PMA, conforme Dreyfus (2002) e Resnick (1987). As análises revelaram que, entre os participantes, apenas um pequeno grupo atingiu o processo de abstração matemática, isto é, a capacidade de sintetizar, formalizar e generalizar pensamentos matemáticos.

A dissertação de Elias, defendida em 2012, teve como objetivo identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. Foi elaborado um roteiro com algumas perguntas e realizou-se entrevistas semiestruturadas a estudantes que já haviam estudado os conceitos e, a partir das respostas incorretas dadas pelos estudantes, identificou-se as dificuldades na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos, considerando que o entendimento de alguns desses conceitos da Álgebra Abstrata exige um PMA. O pesquisador concluiu que os estudantes participantes apresentaram dificuldades com conceitos prévios e que alguns ainda permaneciam com um pensamento matemático considerando mais elementar, no sentido de Tall (2002), mostrando que ainda não se desprenderam de um padrão de imitar soluções, ao qual estavam acostumados.

A dissertação de Kirnev, defendida em 2012, investigou as dificuldades relacionadas às formas de demonstrações matemáticas sejam diretas, contrapositivas, por redução ao absurdo, por contra exemplo, evidenciadas em registros de graduandos de um curso de Matemática. O principal referencial teórico da pesquisa em seus estudos sobre o PMA foi Dreyfus (2002). A pesquisadora concluiu que essa pesquisa foi relevante por explicitar dificuldades em demonstrações matemáticas que podem ser comuns a inúmeros outros graduandos de cursos de Matemática.

A dissertação de Prado, defendida em 2012, teve como objetivo investigar a inserção do uso da calculadora nas Situações de Aprendizagens propostas para os anos finais do Ensino Fundamental da Rede Pública do Estado de São Paulo, nos Cadernos do Professor, à luz do PMA. Buscou-se elementos nas ideias do PMA sobre como um conceito matemático pode ser compreendido pelo aluno, segundo a interação entre os processos mentais de representação, visualização, generalização, síntese e abstração, a partir da utilização da calculadora. A pesquisadora concluiu que as contribuições da pesquisa foram a iniciativa da elaboração desse material permitiu ao professor um novo olhar em relação às abordagens mais tradicionais, possibilitando, a partir das orientações dadas, a utilização de novas práticas.

A dissertação de Campos, defendida em 2014, apresentou uma proposta de ensino de Matemática com o auxílio do desenvolvimento e implementação de algoritmos para fatoração e primalidade de inteiros positivos. Para tanto, utilizou-se da teoria construcionista e de subsídios do PMA para guiar a construção da sequência didática que discutiu temas de divisibilidade e números primos. O pesquisador concluiu que a inserção da tecnologia pode contribuir para o desenvolvimento da aprendizagem matemática quando é utilizada como um elemento que leve o aluno a refletir sobre suas ações e saberes com os quais está lidando e, portanto, a tecnologia no ensino de divisibilidade e números primos deve ser fonte de pesquisas que buscam fazer do ensino de Matemática um prazer para a comunidade discente.

A dissertação de Fernandes Júnior, defendida em 2014, introduziu uma reflexão a respeito da forma como a disciplina de Análise vem sendo trabalhada, há algum tempo. Para essa reflexão, a revisão de literatura envolveu os processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina e, como referencial teórico, apresentou trabalhos sobre a teoria de imagens de conceito e definição de conceito com base na teoria do PMA. O pesquisador concluiu que é necessário ampliar as discussões sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Análise e propôs também uma alternativa metodológica, com base na possibilidade de desenvolvimento dos processos do PMA.

A dissertação de Pinto, defendida em 2014, foi motivada por inquietudes surgidas da própria prática profissional da pesquisadora, como professora de Cálculo, relacionadas com as dificuldades que os estudantes universitários, geralmente, apresentam na aprendizagem dos conteúdos abordados nessa disciplina. Os dados foram analisados a partir dos métodos e procedimentos de codificação e categorização de vários pesquisadores, com interpretações fundamentadas em teóricos do PMA (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 2002) e também em fundamentos do Interacionismo Simbólico. A pesquisadora concluiu que o educador matemático deve atuar como mediador do conhecimento, de forma que os estudantes possam experienciar uma aprendizagem permeada pelas distintas interações que conduzam a uma compreensão dos conceitos de Cálculo, cabendo aos estudantes uma atuação interativa e o cumprimento das condições acordadas com o professor que deve estar sempre atento aos processos do PMA desenvolvidos em sala de aula.

A dissertação de Martins Júnior, defendida em 2015, teve como objetivo discutir as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de diversos conteúdos relacionados a derivadas de funções reais de uma variável real, no ensino de Cálculo, a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra. A visualização foi concebida como uma característica do PMA que pode ser incorporada aos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina de Cálculo I. O pesquisador concluiu que o ensino de Cálculo mediado pelo uso de tecnologias cria um ambiente de ensino para a aprendizagem e que as propostas de atividades exploratórias desenvolvidas na pesquisa, com o uso de um *software* matemático, apontam para a preparação do professor em conhecimento pedagógico e conhecimento específico, com um saber que oriente para um ensino em que a sua participação seja a de mediador na aprendizagem dos alunos, proporcionando a construção das etapas para a realização de experimentação, conjecturação e exploração.

A dissertação de Oliveira, defendida em 2016, objetivou investigar os processos de ensino e aprendizagem de Integral de Riemann em disciplinas de Análise Real, oferecidas em cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, a partir da utilização de *softwares* dinâmicos. O trabalho fundamentou-se teoricamente em pesquisas sobre os processos do PMA, os significados da Integral de Riemann e a relação entre rigor e intuição nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo e de Análise. O pesquisador concluiu que a utilização do *software* GeoGebra contribuiu para uma possível discussão entre professores e alunos no que tange a construção e ressignificação do conceito de Integral de Riemann em Análise e/ou na transição entre o Cálculo e a Análise, assim como para a possibilidade de discussões de conteúdos tais como a Integral de Lebesgue.

A tese de Prado, defendida em 2016, teve o objetivo de compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica e buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear nessa formação, concebendo um conjunto de conhecimentos em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra a ser ensinada na Educação Básica. A relevância da pesquisa residiu na necessidade de investigar o papel da Matemática acadêmica na licenciatura e no fato da Álgebra Linear ser importante na formação inicial de profissionais na área das Ciências Exatas e afins. As ideias teóricas que embasaram as análises relacionaram-se à formação inicial do professor, ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, e ao aporte teórico do PMA, como proposto por Dreyfus (2002). O pesquisador concluiu que a Álgebra Linear presente nos documentos institucionais investigados demonstra ser planejada, muitas vezes, de forma a não considerar o ensino e a aprendizagem de Matemática na Educação Básica e, por outro lado, é uma disciplina na qual se manifestam diversos processos do PMA.

A tese de Vieira, defendida em 2016, teve por objetivo identificar se algumas dificuldades no ensino de sequências numéricas, apontadas por docentes do Ensino Superior que já ministraram o assunto em diversas disciplinas e cursos são, de fato, aquelas enfrentadas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, em cuja estrutura curricular, as sequências numéricas aparecem em duas disciplinas. Como aporte teórico, utilizou-se a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais e o desenvolvimento de processos do

PMA, destacados por Dreyfus (2002). O pesquisador concluiu que, de maneira geral, os participantes não interrelacionaram aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na resolução das questões propostas sobre sequências e não demonstraram ter desenvolvido certos processos do PMA, como mudança entre representações, visualização, generalização e síntese, ao final da disciplina Introdução à Análise Real, programada para o último semestre letivo do curso. Identificou-se, também, dificuldades dos estudantes participantes com aspectos lógico-formais, relativos à elaboração de justificativas e à argumentação matemática, e erros e incompreensões graves em assuntos como números reais e funções.

A dissertação de Jorge, defendida em 2017, teve o objetivo verificar as tarefas desenvolvidas por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática com a intenção de identificar os processos do PMA em relação à Teoria de Conjuntos. O pesquisador concluiu que todos os estudantes apresentaram ao menos uma característica dos processos do PMA, tais como a representação e a abstração, e um pequeno grupo apresentou características de diversos outros processos do PMA.

A tese de Schastai, defendida em 2017, caracterizou-se como uma investigação de cunho especulativo, por ter como objetivo produzir afirmações teóricas a partir de outras afirmações teóricas. A pesquisa teórica especulativa tomou três eixos fundamentais: interpretar, argumentar e recontar. O PMA, de uma forma geral, foi usado no sentido de designar o pensamento de matemáticos profissionais que inclui a criatividade, a imaginação, a conjectura e a demonstração de teoremas, como concebido por Gray *et al*. (1999) ou seja, estando relacionado com o ensino e a aprendizagem da Matemática no nível superior. A pesquisadora concluiu que o desenvolvimento do PMA e da Educação Matemática Realística contribui para uma forma de ensino que oportuniza aos estudantes uma aprendizagem matemática com sentido, para uma dinâmica de sala de aula na qual a atuação do professor como mentor/guia e do aluno como sujeito ativo e responsável pela sua aprendizagem precisam estar sincronizados, sendo recomendável a realização de tarefas de resolução de problemas que possibilitam a matematização horizontal e vertical.

A tese de Fontenele, defendida em 2018, discutiu relações entre a metodologia de ensino Sequência Fedathi e a teoria do PMA, buscando a compreensão de como a ação docente favorece o desenvolvimento do pensamento matemático discente, à medida que possibilita a ação-reflexão em sala de aula. A pesquisadora concluiu que a Sequência Fedathi pode propiciar um ambiente favorável ao desenvolvimento de processos de PMA de alunos de Licenciatura em Matemática em aulas de Álgebra Linear, uma vez que favorece a ação discente e orienta o professor quanto à maneira de interagir e realizar a mediação do conteúdo em sala de aula, de modo a respeitar o tempo de maturação do alunos, seu desenvolvimento cognitivo, levando-os a entender os conceitos de modo significativo, sem se limitar à memorização de regras e manipulação algorítmica.

A tese de Carmo, defendida em 2018, apresentou uma investigação sobre a formação do PMA nas concepções de educadores matemáticos brasileiros expressas em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016. O pesquisador concluiu que as dissertações e teses apresentadas no período estudado associam a noção de PMA ao pensamento matemático desenvolvido na aprendizagem de conteúdos matemáticos do Ensino Superior e à formalização dos conceitos matemáticos. A análise do *corpus* também revelou que o processo de formação do pensamento matemático necessário para o desenvolvimento de certas atividades, geralmente, é pautado por obstáculos cognitivos e, em consequência, esses obstáculos são geradores de dificuldades de aprendizagem.

A tese de Menezes, defendida em 2018, retratou uma pesquisa sobre a metodologia de pesquisa e de ensino Sequência Fedathi, cuja finalidade foi investigar como sua relação com a teoria do PMA pode alicerçar os processos de ensino de Cálculo Diferencial e Integral dos alunos de um grupo de estudos de uma universidade, intentando responder de que maneira isso contribui para a aprendizagem de conceitos e procedimentos nessa disciplina e, em particular, do conteúdo de taxas de variação. O pesquisador concluiu o quão benéfico foi para a compreensão dos conteúdos por meio do uso do recurso computacional, com as questões contextualizadas utilizadas como problemas na vivência da tomada de posição, ou seja, contribuiu para demandar compreensões para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, além de desenvolver avanços para as pesquisas em Educação Matemática e, acima de tudo, como o comportamento docente influenciou nas emoções dos alunos em relação à Matemática e na condução da vivência da Sequência Fedathi.

A tese de Messias, defendida em 2018, teve o objetivo de conjecturar sobre que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo, de modo a possibilitá-lo compreender efetivamente os conceitos de limites e continuidade de uma função. A fundamentação teórica foi baseada em duas teorias cognitivas no âmbito do PMA. A pesquisadora destacou que, embora o estudo tenha permitido alcançar importantes resultados para o contexto das pesquisas em Educação Matemática no Brasil, deve-se reconhecer suas limitações, no sentido de que não se realizou uma experimentação da decomposição genética ou executou-se, efetivamente, uma instrução para o ensino de limites e continuidade de uma função norteada pela decomposição genética elaborada. Salientou-se, ainda, a relevância da pesquisa no que tange aos estudos efetivados no âmbito do PMA, especialmente, em se tratando da compreensão dos conceitos de limites e continuidade, os quais são de grande importância para a aprendizagem de outros conceitos pertencentes à esfera de conhecimentos do Cálculo.

A dissertação de Lopes, defendida em 2019, propôs apresentar as contribuições de atividades de Geometria Analítica na formação de imagens de conceito e na elaboração de definições de conceito relacionados a vetores, por estudantes de Licenciatura em Matemática. A pesquisa se fundamentou teoricamente em fundamentos do PMA, tais como as noções de imagem de conceito e definição de conceito. A pesquisadora concluiu que a maneira como o conteúdo é trabalhado representa um rico potencial de investigação para a formação de imagens e definições de conceito por parte dos estudantes de Licenciatura em Matemática e, nesse sentido, as atividades elaboradas no decorrer da pesquisa podem ser parte de um conjunto de sugestões para apoiar a aprendizagem de vetores no Ensino Superior.

A dissertação de Schaun, defendida em 2019, investigou como estudantes de uma universidade federal compreendem conceitos de superfícies quádricas, a partir do uso da Realidade Aumentada na visualização de objetos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral no espaço tridimensional. Foram utilizados conceitos da teoria do PMA como concebido por Tall (2002), tais como o embasamento a respeito da importância da visualização na compreensão de conceitos matemáticos, trabalhando-se mais especificamente com superfícies quádricas. A pesquisadora destacou que emergiram três categorias de análise, relacionadas às disciplinas e currículos, às práticas docentes, e às contribuições da Realidade Aumentada para a aprendizagem dos estudantes, concluindo que a visualização possui um papel destacado na compreensão e significação das superfícies quádricas.

A tese de Bussmann, defendida em 2019, teve como objetivo construir uma teorização tendo como base os processos do PMA apresentados por Dreyfus (2002) e as concepções do Pensamento Computacional. O pesquisador concluiu apresentando o Pensamento Matemático-Computacional como uma teorização e algumas de suas características, como relação entre conceito e simbologia, representações concretas, interações e observação de padrões, ações que envolvem padrões, reflexões, diálogo e arguição, conexão entre os assuntos da disciplina, experienciação da evolução do pensamento científico, representante genérico, construção da definição, estudo de teoremas, construção da notação e sistema de representações.

A tese de Klaiber, defendida em 2019, objetivou investigar indícios de desenvolvimento do PMA em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química, em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma experiência de ensino. A pesquisadora conclui que o ensino de conteúdos como matrizes e sistemas de equações lineares, por meio de tarefas investigativas, com uma abordagem exploratória fundamentada em dificuldades e conhecimentos prévios dos estudantes, pode proporcionar o desenvolvimento de processos do PMA e, em especial, dos processos relacionados à abstração.

A dissertação de Arci Junior, defendida em 2021, objetivou investigar as implicações da aplicação de uma sequência de ensino sobre o Princípio da Casa dos Pombos na aprendizagem de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. Na fase de experimentação da pesquisa, foi utilizada a Modelagem Matemática como método de ensino (Modelação Matemática), com o respaldo da teoria do PMA. O pesquisador concluiu que as atividades propostas desenvolveram a criatividade e permitiram a modelagem do conceito matemático desejado. Notou-se também a formação ou aperfeiçoamento da imagem conceitual do Princípio da Casa dos Pombos e, posteriormente, a compreensão do conceito formal objetivado, de uma maneira geral.

A dissertação de Okamoto, defendida em 2021, teve como objeto central explorar o pensamento computacional de Wing, ao estudar o PMA, como concebido por Dreyfus (2002), investigando os processos e subprocessos do PMA presentes nas habilidades do pensamento computacional. A pesquisadora concluiu que os processos e subprocessos do PMA, destacadamente, abstrair, representar, generalizar, visualizar e modelar, estão presentes nas habilidades do pensamento computacional, enquanto os processos e subprocessos de conjecturar e sintetizar não são identificadas com conexão ou significado nas habilidades do pensamento computacional.

A tese de Ferreira, defendida em 2021, teve como objetivo analisar a compreensão do conceito de limite de função de uma variável real, por alunos de cursos de Ciências Exatas de uma universidade pública. Para a elaboração e a análise das atividades, utilizou-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica e a teoria do PMA. O pesquisador concluiu que os resultados obtidos evidenciaram os elementos que emergiram de todas as atividades desenvolvidas e indicaram que diferentes representações podem potencializar a compreensão da definição formal de limite.

As pesquisas mapeadas que abordam a transição do PME para o PMA

Sequencialmente, apresentamos os 6 trabalhos (2 teses e 4 dissertações) selecionados por retratarem pesquisas que abordam alguns aspectos da transição do PME para o PMA.

No quadro a seguir, apresentamos os trabalhos selecionados, cronologicamente, destacando: autor, ano da defesa, título, tese (T) ou dissertação (D), instituição.

Quadro 2: Pesquisas selecionadas por abordar a transição do PME para o PMA

AUTOR	ANO	TÍTULO	T / D	INSTITUIÇÃO
Bárbara Nivalda Palharim Alvim Sousa	2010	Modelagem Matemática e Pensamento Matemático: um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Daila Silva Seabra de Moura Fonseca	2012	Convergências de sequências e séries numéricas no Cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos	D	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Laís Cristina Viel Gereti	2014	Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Alessandra Senes Marins	2014	Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo transformações lineares	D	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Debora Cristiano Barbosa Kirnev	2019	Um estudo da mobilização de processos mentais entre o Pensamento Matemático Elementar e o Pensamento Matemático Avançado	T	Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Viviane Raquel Backendorf	2020	O processo da abstração reflexionante na construção do conceito de Integral Dupla com a utilização de Matemática Dinâmica	T	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Fonte: Dados da pesquisa.

Passaremos, agora, a descrever brevemente cada trabalho selecionado, destacando o foco de pesquisa e alguns aspectos abordados relacionados à transição do PME para o PMA.

A dissertação de Souza, defendida em 2010, descreveu uma investigação que buscou apontar elementos sobre o modo como ocorre o pensamento matemático de alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática, que Tall (2002) associa ao PME e ao PMA. A pesquisadora concluiu que atividades de Modelagem Matemática favorecem a utilização de diversos modos de operação relacionados aos Três Mundos da Matemática e que alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática, por meio desses modos de operação, desenvolvem processos cognitivos que propiciam interações entre o PME e o PMA.

A dissertação de Fonseca, defendida em 2012, buscou verificar se a aplicação de atividades, com o auxílio do *software* GeoGebra, favoreceu a corporificação dos conceitos de convergência de sequências e séries e a transição entre os mundos corporificado e simbólico, levando a uma compreensão desses conceitos, investigando se a transição entre os mundos corporificado e simbólico contribuiu para a construção da base do mundo formal, levando à transição do PME para o PMA. Para a pesquisadora, a distinção entre o PME e o PMA está na complexidade do conceito matemático e na forma como ele é tratado. Ao analisar a corporificação dos conceitos de convergência e a relação com a proceitualização e a axiomatização, foca-se no processo de construção de uma base para o mundo formal por meio das transições entre os Três Mundos da Matemática e, assim, a transição do PME para o PMA revela o processo de construção do PMA. A pesquisadora concluiu que, mais do que compreender cada um dos processos separadamente, deve-se buscar, também, entender se as transições entre os Três Mundos da Matemática favorecem a transição entre os pensamentos matemáticos.

A dissertação de Gereti, defendida em 2014, objetivou descrever e discutir indícios / características dos processos do PMA evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática de uma universidade e, ao resolverem questões discursivas do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). Para tanto, a pesquisadora fez um estudo sobre a transição do PME para o PMA, entendendo que os processos de abstração e representação são os mais globais, sendo constituídos de outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, dentre outros. Em relação ao PMA, a pesquisadora destacou que, diferentemente de outros autores, Resnick (1987) o concebe como um pensamento de ordem superior e afirma que não existe uma definição precisa desse pensamento, mas existem características chave que podem acontecer. Dos estudantes participantes, a maioria mobilizou algum tipo de pensamento, entretanto muitos não desenvolveram alguns processos do PMA. Ainda segundo a pesquisadora, a resolução de cada estudante nos permite dizer que tais processos são evidenciados de maneiras diferentes, pois para cada um as notações / símbolos matemáticos possuem significados individuais, bem como as relações que se podem constituir entre os diversos conceitos / objetos matemáticos.

A dissertação de Marins, defendida em 2014, teve por objetivo identificar e discutir os indícios de processos do PMA que estudantes do curso de Matemática manifestam, ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. Para isso, realizou-se um estudo a respeito do PMA, segundo Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), a fim de obter características comuns aos autores, que serviram de base para a análise dos registros escritos dos estudantes. A pesquisadora fez várias análises que envolvem a transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado, definindo os processos que envolvem essa transição. Dos sete processos presentes do PMA, sendo cinco de representação e dois de abstração, alguns estudantes manifestaram indícios de apenas um processo, o de representação simbólica, e somente poucos manifestaram características de todos os processos. As categorias confirmam que estudantes do curso de graduação podem manifestar características dos processos do PMA durante a graduação, porém, a maioria dos estudantes não evidenciaram indícios desses processos. Para os autores, esses processos não ocorrem por si mesmos e, se acontecem, não são conscientes por parte dos estudantes. Desse modo, é preciso que o professor propicie o desenvolvimento de atividades as quais possibilitem a sua manifestação.

A tese de Kirnev, defendida em 2019, teve o objetivo de investigar a mobilização de processos mentais entre o PME e o PMA. Para isso, realizou-se uma análise descritiva e comparativa em tarefas de uma prova em fases, aplicada a graduandos em Matemática, a fim de diagnosticar que processos mentais são mobilizados na realização das tarefas e que indícios de PME e PMA podem ser identificados. A pesquisadora investigou sobre o desenvolvimento do PME e do PMA, com base nas teorias de Dreyfus (2002) e Tall (2002), a respeito dos processos mentais inerentes ao desenvolvimento do pensamento matemático, de modo a compreender como um sujeito constitui um PMA. Destacou-se que, no processo de escolarização da Educação Básica, entende-se que um estudante seja capaz de desenvolver o PME de uma forma mais ampla, e que podem ocorrer indícios de desenvolvimento de PMA, dependendo das experiências anteriores do sujeito. Já para um pensamento formal matemático, exigido no Ensino Superior, é preciso gerenciar situações mais complexas que, em geral, possibilitam o desenvolvimento do PMA. Diferencia-se, então, o PMA do PME por meio das reflexões que um sujeito promove a respeito de suas experiências em Matemática ao resolver problemas que exigem gerenciar situações complexas no desenvolvimento de processos mentais e ao lidar com diversos processos mentais interagindo com eles. A pesquisadora identificou, ainda, a mobilização de processos mentais associados ao PME, derivados de pensamentos instrumentais, e outros decorrentes de pensamentos relacionais que indicam evidências do PMA. Assim, de modo geral, a pesquisa apontou a importância que professores de disciplinas relacionadas com as estruturas algébricas entendam quais são as principais dificuldades dos alunos durante as resoluções de tarefas, bem como a identificação de erros inerentes a essas resoluções, por meio de parâmetros de processos mentais dos estudantes que são utilizados para resolução das tarefas.

A tese de Backendorf, defendida em 2020, teve como objetivo investigar, baseando-se na teoria da abstração reflexionante, como ocorre a compreensão do conceito de integral dupla com auxílio de um *applet* do *software* GeoGebra. Para embasar as discussões, além da abstração reflexionante de Piaget, utilizou-se a teoria desenvolvida por Tall (2002) sobre a

Matemática elementar e a Matemática avançada, como suporte para entender as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no Ensino Superior. Destacou-se que as tecnologias digitais têm importante papel na construção e compreensão de um conceito matemático, em especial, o conceito de integral dupla. A pesquisadora concluiu que as contribuições da pesquisa não se restringem apenas ao desenvolvimento do conteúdo de integral dupla, mas sua relevância pode ser percebida tanto na Matemática avançada como na Matemática elementar, por meio da identificação dos processos dos pensamentos matemáticos manifestados.

Considerações Finais

Pesquisadores vêm discutindo, há alguns anos, a transição do PME para o PMA, destacadamente, Tall (2002), Dreyfus (2002), Gray *et al*. (1999) e Resnick (1987). Dentre esses autores, nosso mapeamento mostrou a predominância de David Tall e Tommy Dreyfus como referenciais teórico-bibliográficos da grande maioria das pesquisas mapeadas, tanto das que abordam o PMA ou como das que abordam a transição do PME para o PMA.

Nas 36 pesquisas aqui mapeadas que abordam o PMA, observamos que 24 delas investigam o desenvolvimento de processos do PMA relacionando-os aos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Superior, destacadamente, conceitos nucleares do Cálculo Diferencial e Integral. Já 6 pesquisas investigam o desenvolvimento de processos do PMA relacionando-os aos processos de ensino e de aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Médio, sem predominância de algum, em particular. Por sua vez, 2 pesquisas investigam relações entre o PMA e o pensamento computacional e, ainda, outras 2 pesquisas investigam relações entre o PMA sob óticas filosóficas da Educação Matemática.

Nas 6 pesquisas aqui mapeadas que abordam a transição do PME para o PMA, observamos que 4 delas investigaram tal transição relacionando-a aos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Superior, destacadamente, conceitos nucleares do Cálculo Diferencial e Integral, da Álgebra Linear e das Estruturas Algébricas. Uma pesquisa investigou a transição do PME para o PMA a partir da realização de atividades de Modelagem Matemática. Outra pesquisa, ainda, investigou a transição do PME para o PMA a partir da resolução de questões do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE).

Destaca-se, pois, a quase total inexistência de pesquisas especificamente focadas na investigação da transição do PME para o PMA na perspectiva da formação de professores de

Matemática, seja inicial, seja continuada. Donde concluímos que existe uma grande urgência na realização de pesquisas que discutam tal transição à luz de suas contribuições para a formação de professores de Matemática.

Por fim, convém relembrar que, de acordo com Dreyfus (2002), os processos dos pensamentos matemáticos ocorrem principalmente por meio de representação e abstração, e que a transição entre eles também está relacionada com os processos de intuir, descobrir, verificar, definir, provar, dentre outros. Já para Tall (2002), no ensino da Matemática, não existe uma grande diferença entre os dois processos de pensamento, mas a passagem de um para o outro acontece quando o aluno passa do descrever para o definir, e do convencer para o provar.

Assim, a transição do PME para o PMA requer, portanto, construções e reconstruções cognitivas, conforme Tall (1995). Donde concluímos que também existe uma grande urgência na realização de mais pesquisas sobre tal transição, em diferentes níveis de ensino, com foco nos processos de ensino e de aprendizagem dos mais diversos conteúdos matemáticos relacionados a Álgebra, Geometria e Análise.

Referências

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.25-41.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C.; SAVIOLI, A. M. P. D. Indícios de dificuldade na compreensão da Matemática avançada: o conceito de grupo. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5, 2012. **Anais...** Petrópolis: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2012, p.1-17.

FIORENTINI, D.; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. S.; CRECCI, V. M.; LIMA, R. C. R.; COSTA, M. C. O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Orgs.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática**: período 2001 – 2012. Campinas: FE/UNICAMP, 2016, p. 17-41.

GRAY, E.; PINTO, M. M. F.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, n. 1-3, p. 111-133, 1999.

HENRIQUES, A. C. C. B. **O Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação**. 2010. 462 f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. Washington, DC: National Academy Press, 1987.

SANTOS, A. T. C.; BIANCHINI, B. L. O Pensamento Matemático Avançado e o ensino de logaritmos. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13, 2011. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011, v. 1, p. 1-12.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: MEIRA, L.; CARRAHER, D. (Ed.). **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995, v. 1, p. 61-75.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 65-81.

A MOBILIZAÇÃO DE PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DA OBMEP

Carlos Roberto Torrente
carlos.torrente@aluno.ufop.edu.br

RESUMO: Este artigo apresenta uma pesquisa que teve como objetivo investigar a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração característicos do Pensamento Matemático Avançado, na resolução de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada a partir da análise das resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP, feitas por 5 alunos do Ensino Médio, medalhistas de ouro da Região MG03 da OBMEP, formada pelos Vales do Aço, Rio Doce, Mucuri e Jequitinhonha, localizados no interior do estado de Minas Gerais. A análise das resoluções foi embasada na teoria de Tommy Dreyfus e evidenciou a mobilização dos seguintes processos mentais característicos do Pensamento Matemático Avançado: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, visualização, modelação, sintetização e generalização. As conclusões da pesquisa apontam para a potencialização do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado a partir da resolução de questões da OBMEP, especialmente, pela possibilidade de mobilização dos processos de modelação, sintetização e generalização em atividades matemáticas não rotineiras no cotidiano escolar.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Educação Matemática.

Introdução

A Matemática elementar é definida por Tall (1995, p. 61) como aquela que se inicia com as percepções e ações em objetos no mundo externo. Esses objetos são descritos e analisados conduzindo à classificação, contagem e diversas operações que correspondem a diferentes desenvolvimentos do processo matemático. Já Backendorf (2020, p. 29-30) afirma que, na Matemática elementar que corresponde à Matemática básica e envolve a Aritmética, a Geometria e a Álgebra, a descrição é construída a partir da experiência com os objetos.

No contexto do ensino, então, cabe questionar se a descrição e a análise de objetos são processos que se desenvolvem à medida em que se trabalha com uma Matemática mais avançada do ponto de vista dos conteúdos envolvidos.

A partir dessa perspectiva, Tall (1995) considera dois desenvolvimentos diferentes em relação à construção de estruturas de conhecimento no que tange a uma transição cognitiva do chamado Pensamento Matemático Elementar (PME) para o chamado Pensamento Matemático Avançado (PMA), partindo da percepção para a ação. Uma visão semelhante é defendida por

Tall (2002) ao postular que muitas das atividades que ocorrem no ciclo completo de atividade do PMA também ocorrem na resolução de problemas da Matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é o fator que distingue o PMA do PME (HENRIQUES, 2010, p. 16).

Já para Dreyfus (2002), existe uma relação entre o PME e o PMA exigido em processos mentais aplicados em conceitos formais da Matemática. Segundo Dreyfus (2002, p. 26): "Não há distinção nítida entre muitos dos processos básicos e avançados do pensamento matemático, mas a Matemática avançada é mais centrada nas abstrações de definição e dedução".

A partir dessas relações, para analisarmos indícios do desenvolvimento das formas do pensamento matemático, especialmente, a forma avançada, precisamos compreender como os processos mentais são mobilizados no seu desenvolvimento (DREYFUS, 2002).

No presente artigo, pois, investigamos a mobilização de processos mentais característicos do PMA a partir de resoluções de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), como delinearemos a seguir.

Sobre o Pensamento Matemático Avançado

O Pensamento Matemático Avançado (PMA) foi inicialmente descrito na década de 1980, no decorrer do evento *The International Group for the Psychology of Mathmatics Education*. Objetivou-se a produção de uma obra com foco no PMA e, como consequência, foi criado o grupo chamado *Advanced Mathematical Thinking Group* (ALMEIDA; IGLIORI, 2013).

Os pesquisadores Dreyfus (2002) e Tall (2002) são unânimes em afirmar que o PMA permeia a aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos mais variados níveis escolares, manifestando-se com maior intensidade nos anos finais do Ensino Médio e ao longo do Ensino Superior.

De um lado, Dreyfus (2002) caracteriza o PMA por meio de uma série de processos mentais que ele classifica e caracteriza como processos de representação e de abstração, como detalharemos no próximo tópico.

Por outro lado, Tall (2002) afirma que o PMA envolve um ciclo de atividades a considerar desde o ato de modelar um problema para a pesquisa matemática até a sua formulação criativa de conjecturas, concluindo com a prova. O PMA envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para construir novas ideias que conduzem ao desenvolvimento e ampliação de um sistema crescente de teoremas estabelecidos (TALL, 1995, p. 63).

Cabe ressaltar que, segundo Tall (1995, p. 65), “o pensar em Matemática avançada nem sempre é um processo lógico para a criação de ideias matemáticas”. Para ele, somos criativos, mas é bem depois do pensamento elementar que nos ocorre a abstração das coisas que aprendemos, ou seja, é nesse estágio que é exigido a abstração das propriedades de conceitos matemáticos. Baseando-nos na definição de Tall (1995), quando isso ocorre, o sujeito (aluno) é capaz de manipular as suas próprias definições conceituais produzidas, de forma abstrata, para desenvolver as relações lógicas dos conceitos que foram estudados anteriormente.

Já para Gray *et al*. (1999), o termo PMA tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Os pesquisadores acrescentam, ainda, que esse termo também se aplica ao pensar dos alunos a quem lhes é apresentado definições e teoremas criados por outros e se lhes pede a construção de um conceito (HENRIQUES, 2010, p. 16).

Sobre os processos do Pensamento Matemático Avançado

Assim como não existe uma uniformidade na concepção e caracterização do PMA, também é possível verificarmos que seus pesquisadores apresentam uma diversidade de processos cuja interação está fortemente presente na construção do PMA.

No presente artigo, apresentaremos as ideias de Dreyfus (2002), para quem o PMA consiste na interação entre vários processos, sendo que os principais são os processos de representação e de abstração. Sobre tais processos, Gereti e Savioli (2015) afirmam que:

> Por meio de nossos estudos, entendemos que os processos de representação e de abstração são os mais globais, sendo constituídos por outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, entre outros. (GERETI; SAVIOLI, 2015, p. 209)

Importante ressaltar que, para Dreyfus (2002), tais processos mentais podem ser encontrados tanto no PME quanto no PMA, indistinção assim retratada por Gereti e Savioli (2015):

> Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado e do Pensamento Matemático

> Elementar. Há tópicos da Matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados. O que distingue esses dois tipos de pensamentos é a complexidade como são tratados e gerenciados tais processos presentes em cada um deles. (GERETI; SAVIOLI, 2015, p. 208)

Ainda segundo Dreyfus (2002), o desenvolvimento do PMA ocorre de modo gradual, a partir de interações que um sujeito realiza com atividades matemáticas, partindo de um PME para formas de pensamento cada vez mais complexas. Nesse sentido, os processos mentais que ocorrem na mente de um indivíduo são decorrentes de uma sequência de atividades, interagindo entre si e promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático. Dessa forma, o pesquisador afirma que os processos de representação e de abstração possibilitam ir de um tipo de pensamento para outro, por meio de certo "gerenciamento" dessa complexidade.

Entretanto, Dreyfus (2002) dá um destaque especial para o processo de abstração, apontando-o como essencial para o desenvolvimento do PMA e afirma que, se um sujeito desenvolve a habilidade de, conscientemente, fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático e, assim, os processos de generalizar e sintetizar são desenvolvidos de forma simultânea. Para o pesquisador, a generalização é a derivação ou indução a partir de indicações, a fim de identificar pontos em comum e, desse modo, expandir domínios de validade, e a sintetização implica em combinar ou compor partes, de maneira que constituam um todo.

Para uma caracterização dos diversos processos de representação e de abstração, apresentamos o quadro a seguir, no qual Gereti e Savioli (2015) descrevem os processos do PMA, a partir de suas interpretações de Dreyfus (2002):

Quadro 1: Descrição dos Processos do PMA a partir de Dreyfus (2002)

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representação Simbólica	Pode-se representar um conceito / objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto, é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito / objeto matemático representado.
Representação Mental	A representação de um conceito / objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito / objeto.
Visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de Representações e Tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito / objeto matemático demanda habilidade para interligá-las corretamente, sempre que necessário.

	Traduzir representações se refere à passagem de informações de um enunciado / propriedade matemático(a) para outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).
Modelação	O objeto / processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura / teoria matemática que abrange suas características.
Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Sintetização	Utilizar uma composição de objetos / conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver a tarefa como um todo.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.

Fonte: Gereti e Savioli (2015, p. 211)

Ainda cabe destacar que, de acordo com Tall (2002), muitos dos processos do PMA já são encontrados em um nível mais elementar, entretanto, com algumas diferenças em nível de abstração formal. Assim, a importância de se identificar os processos do pensamento matemático ganha fôlego, não somente na caraterização desse pensamento em elementar ou avançado mas, principalmente, na transição entre os tipos de pensamento matemático.

Sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Abordaremos, de forma breve, um pouco de história e atualidades sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) uma vez que, na pesquisa aqui retratada, utilizaremos questões da OBMEP como fonte para nossa coleta de dados.

A OBMEP foi lançada oficialmente no dia 19 de maio de 2005, em Brasília – DF, pelo então Presidente da República, Luiz Inácio Lula da Silva, e pelos Ministros da Ciência e Tecnologia, Eduardo Campos, e da Educação, Tarso Genro. A 1ª edição da OBMEP, realizada em 2005, contou a participação de mais de 10 milhões de alunos, colocando o Brasil como recordista mundial em número de participantes em competições científicas de Matemática e alçando a OBMEP à condição de um dos maiores eventos do gênero no mundo, superando em número de inscrições, por exemplo, a Olimpíada de Matemática realizada nos Estados Unidos da América que reunia, à época, cerca de 6 milhões de alunos a cada ano.

Até 2016, a OBMEP era direcionada especificamente às escolas públicas de todo o país. Após esse ano, as escolas privadas passaram a ser convidadas a participar deste evento e, com isso, atualmente, a OBMEP é um projeto dirigido aos alunos das escolas públicas municipais, estaduais, federais e privadas.

A OBMEP é organizada pelo atual Ministério de Ciências, Tecnologia e Inovação (MCTI), em parceria com o Ministério de Educação e Cultura (MEC) e com o apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica da OBMEP que tem como objetivos: Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas; Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento; Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.

As provas da OBMEP são realizadas em 3 níveis: Nível 1 (alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental), Nível 2 (alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e Nível 3 (alunos do Ensino Médio). As provas dos Níveis 1, 2 e 3 são constituídas de 2 fases. Disputam a 1ª fase (prova com 20 questões fechadas) todos os alunos inscritos pelas escolas públicas e privadas e classificam-se para a 2ª fase (prova com 6 questões abertas), aproximadamente, 5% dos alunos inscritos pela escola em cada nível. Cabe a cada escola selecionar os alunos com melhor desempenho nas provas da 1ª fase que participarão da 2ª fase. Ao final, os alunos com os melhores desempenhos na 2ª fase são premiados com medalhas de ouro, prata ou bronze, de acordo com o quadro abaixo e, na condição de medalhistas da OBMEP, recebem Bolsas de Iniciação Científica Júnior do CNPq:

Quadro 1: Distribuição de Medalhas da OBMEP

Tipo de Escolas	**Medalhas de Ouro**	**Medalhas de Prata**	**Medalhas de Bronze**
Escolas Públicas	500	1500	4500
Escolas Privadas	75	225	675

Fonte: Site da OBMEP.

Também como consta no site da OBMEP, sua 16ª edição, realizada em 2021, teve 53.375 escolas inscritas e contou com a participação de 17.774.936 alunos de todo o Brasil. Particularmente, em Minas Gerais inscreveram-se 5.009 escolas e 1.796.147 alunos. Especificamente, a Região MG03 da OBMEP, conhecida como Região dos Vales, formada pelos Vales do Aço, Rio Doce, Mucuri e Jequitinhonha, localizados no interior do estado de Minas Gerais, contou com a participação de 888 escolas e 281.574 alunos, dos quais 15 alunos foram premiados com a medalha de ouro (3 no Nível 1, 7 no Nível 2 e 5 no Nível 3), além de 34 alunos premiados com a medalha de prata e 121 alunos premiados com a medalha de bronze.

Apresentando a pesquisa em seu contexto

Nossa pesquisa teve como objetivo central investigar a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração característicos do PMA, na resolução de questões da OBMEP.

A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada a partir da análise das resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP apresentadas pelos 5 alunos do Ensino Médio, medalhistas de ouro da Região MG03 da OBMEP, como detalhamos anteriormente.

Para tanto, na condição de Coordenador Regional da OBMEP na Região MG03 desde 2005, entramos em contato com a Direção Acadêmica da OBMEP (IMPA / SBM) que, prontamente, permitiu nosso acesso às provas resolvidas pelos alunos medalhistas de ouro de nossa região de coordenação, sob a condição de manutenção do sigilo em relação à identificação de tais alunos por nomes, escolas ou localidades. Assim, neste artigo, identificaremos os 5 alunos medalhistas de ouro simplesmente por A1, A2, A3, A4 e A5, sem nenhum tipo de distinção entre as notas obtidas por eles, nem mesmo sua identificação por gênero ou ano cursado no Ensino Médio.

Para descrição e análise, que faremos a seguir, selecionamos as 4 últimas questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP que, lembramos, foi composta por 6 questões abertas. A partir, então, de resoluções apresentadas pelos 5 alunos medalhistas de ouro aos diversos itens de tais questões, buscaremos identificar indícios de mobilização de processos de representação e de abstração, característicos do desenvolvimento do PMA.

Descrevendo e analisando a resolução de questões da OBMEP

A prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP deve ser realizada em 3 horas e 30 minutos, tempo considerado suficiente para que os alunos resolvam as 6 questões abertas, permitindo que eles não só apresentem uma resolução mais concisa mas também justifiquem suas escolhas e estratégias de resolução, especialmente, em questões que demandam tais justificativas.

Destacamos que, dentre as competências e habilidades previstas na matriz da OBMEP, destaca-se o incentivo ao desenvolvimento de habilidades matemáticas como o pensamento lógico e a criatividade. A partir dessa premissa, então, acreditamos que a maioria das questões da prova exigem resoluções que podem levar os alunos a mobilizarem processos do PMA.

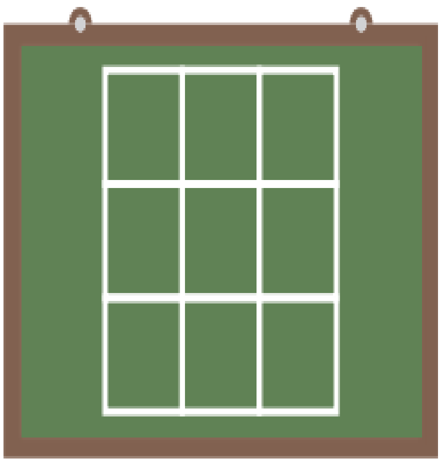
Dentro dessa perspectiva, por meio da descrição dos diversos processos de representação e de abstração feita por Gereti e Savioli (2015) a partir de suas interpretações de Dreyfus (2012), apresentamos as resoluções apresentadas por 2 alunos, escolhidos dentre os 5 medalhistas de ouro, para as 4 últimas questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP, buscando identificar, justificadamente, indícios de processos mobilizados em cada um dos itens componentes das questões selecionadas. Cabe observar que nossa escolha pelas 4 últimas questões se deu pelo fato de que, tradicionalmente, as 2 primeiras questões são consideradas mais simples do ponto de vista da resolução pelos alunos ainda que, certamente, também demandem a mobilização de processos mentais para a sua resolução.

A Questão 3 contemplou conteúdos de probabilidade, como apresentamos a seguir:

Figura 1: Enunciado da Questão 3 e do item 3.a

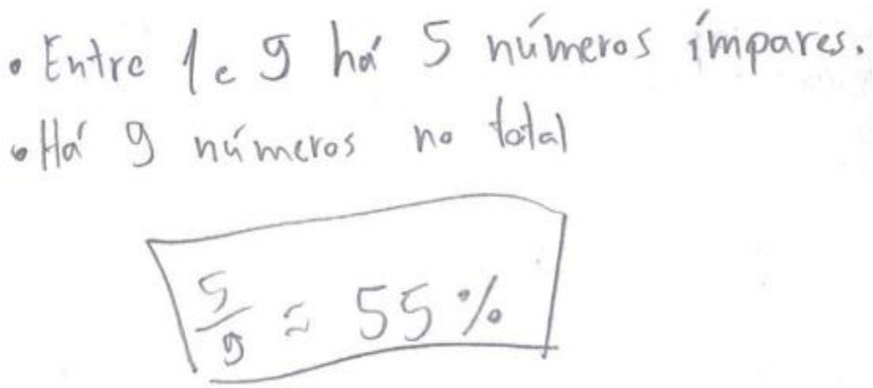
3. Os números de 1 a 9 são distribuídos ao acaso e sem repetição nas casas do quadriculado desenhado na lousa ao lado.

a) Qual é a probabilidade de que a casa central seja preenchida com um número ímpar?



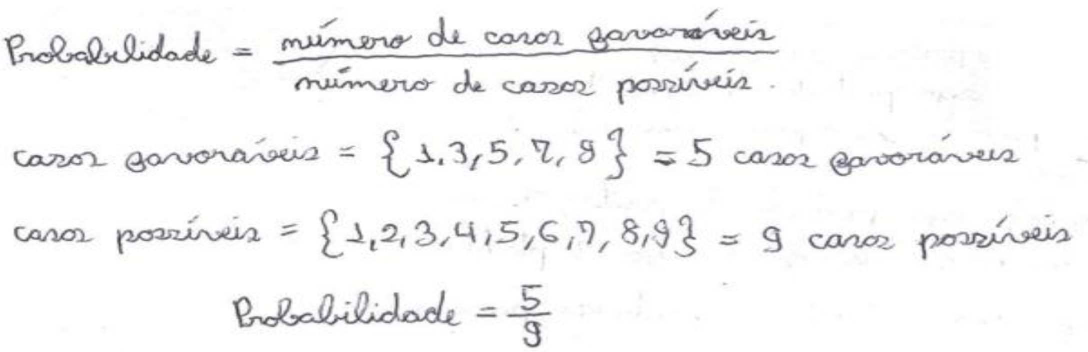
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 2: Registro escrito da resolução da Questão 3.a pelo aluno A1



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 3: Registro escrito da resolução da Questão 3.a pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução do aluno A1 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando transforma a representação fracionária da probabilidade para a representação percentual. Já a resolução do aluno A4 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando utiliza notações e símbolos característicos da teoria de conjuntos.

Figura 4: Enunciado do item 3.b

b) Qual é a probabilidade de que o quadriculado tenha uma coluna preenchida apenas com números pares?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 5: Registro escrito da resolução da Questão 3.b pelo aluno A3

Temos 4 números pares. A quantidade de colunas com apenas números
$3 \cdot A_4^3 = 72$. Note que a quantidade de arranjos foi multiplicada por 3, porque o quadriculado tem 3 colunas). E existem 6! de maneiras de se distribuir os outros números no quadriculado. E existem 9! de maneiras de se distribuir todos os números no quadriculado.

Assim a probabilidade de se distribuir esses números no quadriculado é, preenchendo uma coluna com apenas números pares é:

$$p = \frac{72 \cdot 6!}{9!} \to p = \frac{6!}{7!} \to \boxed{p = \frac{1}{7}}$$

A probabilidade encontrada é $\boxed{p = \frac{1}{7}}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 6: Registro escrito da resolução da Questão 3.b pelo aluno A5

Casos favoráveis: • 1º coluna $= 4.3.2.6! \to 3.4.3.2.6!$

• 2ª e 3ª colunas são análogas a 1º $= 3.4!.6!$

Casos totais: 9!

Probabilidade: $\frac{C.F.}{C.T.} = \frac{3.4!\cancel{6!}}{9.8.7.\cancel{6!}} = \frac{\cancel{3}.4.3.2}{\cancel{9}.8.7} = \frac{1}{7}$

Fonte: Dados da pesquisa.

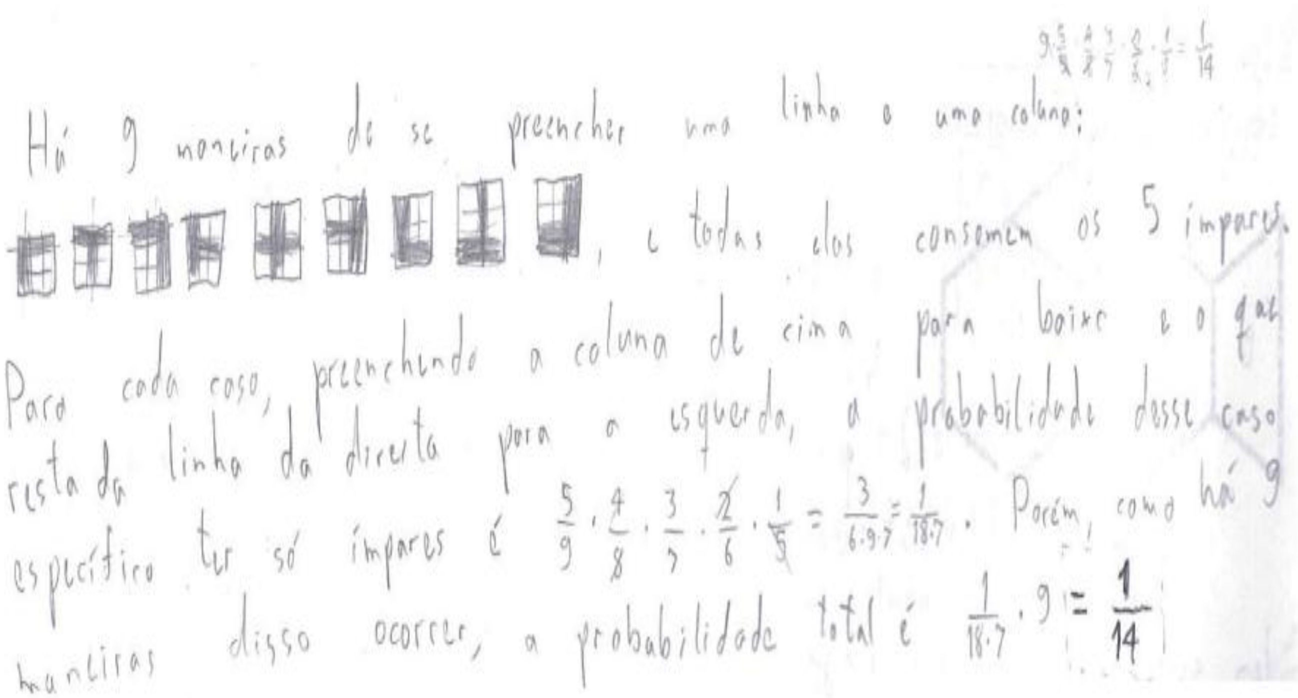
A resolução do aluno A3 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza notações simbólicas características de conceitos da análise combinatória e quando mobiliza uma composição desses conceitos para a resolução. Já a resolução do aluno A5 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando utiliza diversas notações para o cálculo da probabilidade.

Figura 7: Enunciado do item 3.c

c) Qual é a probabilidade de que o quadriculado tenha uma linha e uma coluna preenchidas apenas com números ímpares?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8: Registro escrito da resolução da Questão 3.c pelo aluno A2

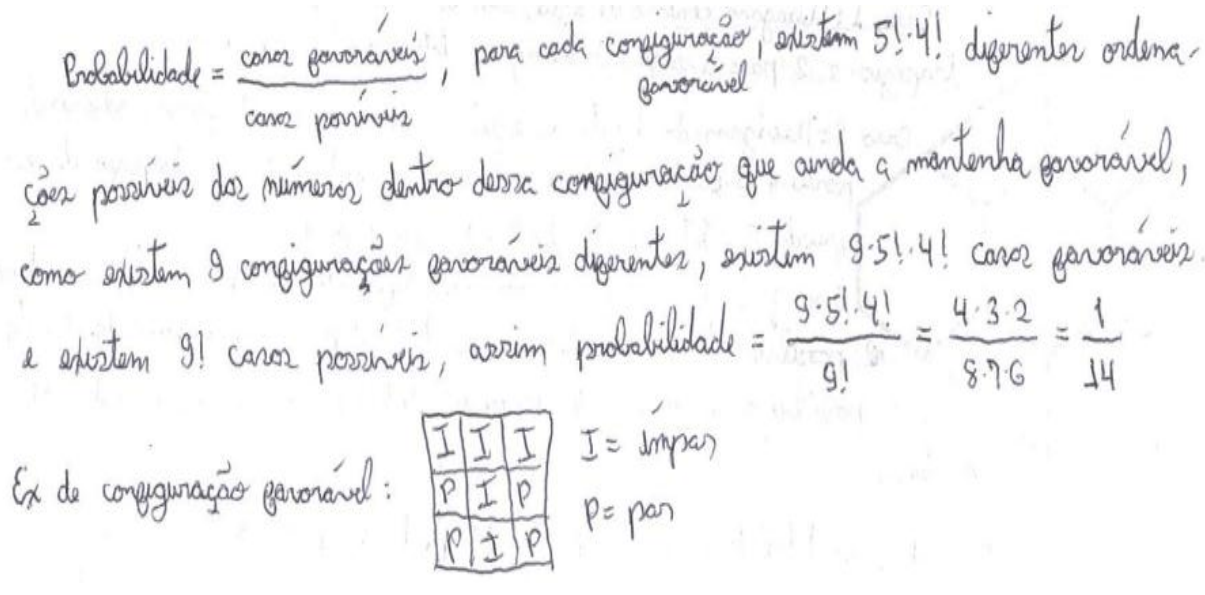


$9 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{14}$

Há 9 maneiras de se preencher uma linha e uma coluna: , e todas elas consomem os 5 ímpares. Para cada caso, preenchendo a coluna de cima para baixo e o que resta da linha da direita para a esquerda, a probabilidade desse caso específico ter só ímpares é $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{6 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{1}{18 \cdot 7}$. Porém, como há 9 maneiras disso ocorrer, a probabilidade total é $\frac{1}{18 \cdot 7} \cdot 9 = \frac{1}{14}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 9: Registro escrito da resolução da Questão 3.c pelo aluno A4



Probabilidade = $\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$, para cada configuração favorável, existem $5! \cdot 4!$ diferentes ordenações possíveis dos números dentro dessa configuração que ainda a mantenha favorável, como existem 9 configurações favoráveis diferentes, existem $9 \cdot 5! \cdot 4!$ casos favoráveis e existem $9!$ casos possíveis, assim probabilidade = $\frac{9 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{14}$

Ex de configuração favorável:

I	I	I
P	I	P
P	I	P

I = ímpar

P = par

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *visualização*, especialmente, quando utiliza representações gráficas para intuir e representar os casos prováveis. Já a resolução do aluno A4 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza uma combinação de cálculos e mobiliza conceitos combinatórios para a resolução.

A Questão 4 contemplou conteúdos de geometria espacial, como apresentamos a seguir:

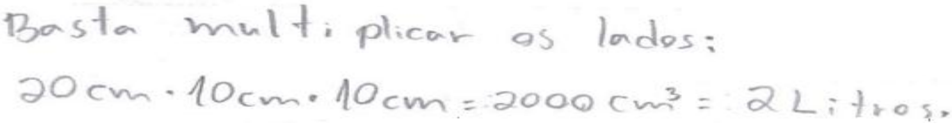
Figura 10: Enunciado da Questão 4 e do item 4.a

4. Uma lata medindo 20 cm × 10 cm × 10 cm, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45° com o plano horizontal, conforme mostra a figura. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura *h* em relação ao plano horizontal, também como indicado na figura.

a) Qual é o volume total da lata?

Fonte: Dados da pesquisa.

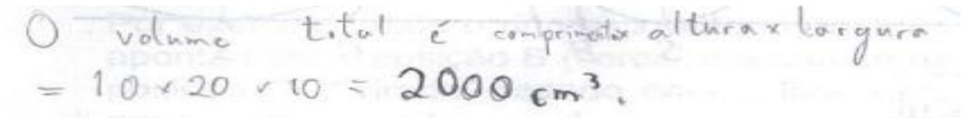
Figura 11: Registro escrito da resolução da Questão 4.a pelo aluno A1



Basta multiplicar os lados:
20cm · 10cm · 10cm = 2000 cm³ = 2 Litros.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 12: Registro escrito da resolução da Questão 4.a pelo aluno A2



O volume total é comprimento x altura x largura
= 10 x 20 x 10 = 2000 cm³.

Fonte: Dados da pesquisa.

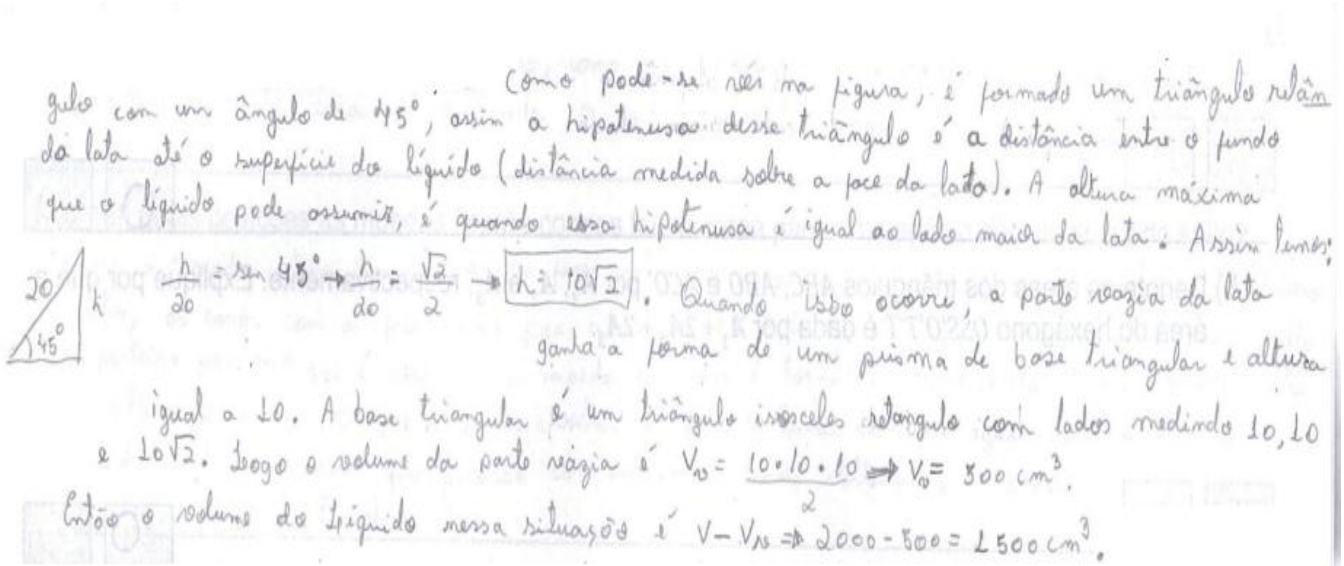
A resolução do aluno A1 evidencia, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas, e sintetização*, especialmente, quando faz uma conversão entre medidas de diferentes sistemas e quando inter-relaciona um cálculo operacional para a resolução. Já a resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando representa por extenso a fórmula para o cálculo do volume.

Figura 13: Enunciado do item 4.b

b) Explique por que a altura máxima que o líquido vai atingir é $10\sqrt{2}$ cm e calcule o volume de líquido na lata quando essa altura é atingida.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 14: Registro escrito da resolução da Questão 4.b pelo aluno A3



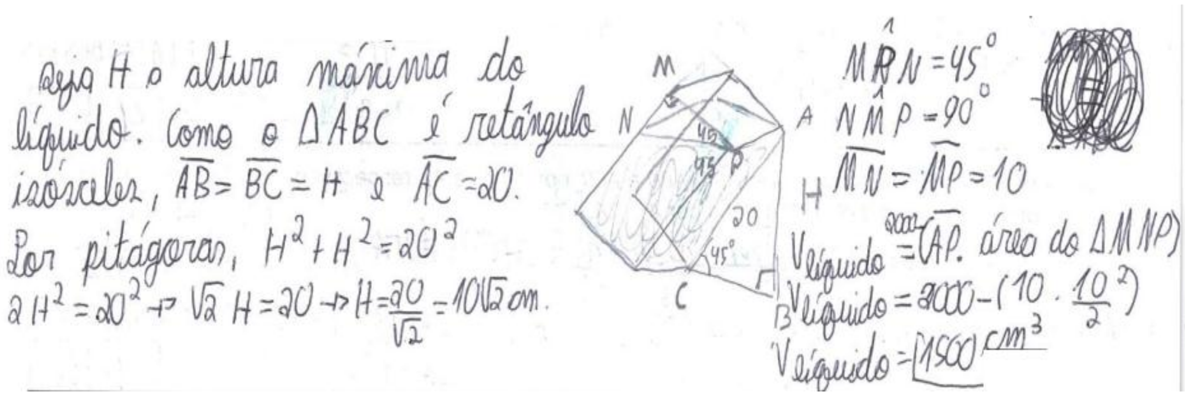
Como pode-se ver na figura, é formado um triângulo retângulo com um ângulo de 45°, assim a hipotenusa desse triângulo é a distância entre o fundo da lata até a superfície do líquido (distância medida sobre a face da lata). A altura máxima que o líquido pode assumir, é quando essa hipotenusa é igual ao lado maior da lata. Assim temos:

$\frac{h}{20} = \text{sen}\, 45° \to \frac{h}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \boxed{h = 10\sqrt{2}}$. Quando isso ocorre, a parte vazia da lata ganha a forma de um prisma de base triangular e altura igual a 10. A base triangular é um triângulo isosceles retângulo com lados medindo 10, 10 e $10\sqrt{2}$. Logo o volume da parte vazia é $V_v = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2} \Rightarrow V_v = 500\ cm^3$.

Então o volume do líquido nessa situação é $V - V_v \Rightarrow 2000 - 500 = 1500\ cm^3$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 15: Registro escrito da resolução da Questão 4.b pelo aluno A5



Seja H a altura máxima do líquido. Como o ΔABC é retângulo isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC} = H$ e $\overline{AC} = 20$.

Por pitágoras, $H^2 + H^2 = 20^2$

$2H^2 = 20^2 \to \sqrt{2}\, H = 20 \to H = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$ cm.

$M\hat{P}N = 45°$

$N\hat{M}P = 90°$

$\overline{MN} = \overline{MP} = 10$

$V_{líquido} = 2000 - (\overline{AP}.$ área do $\Delta MNP)$

$V_{líquido} = 2000 - (10 \cdot \frac{10^2}{2})$

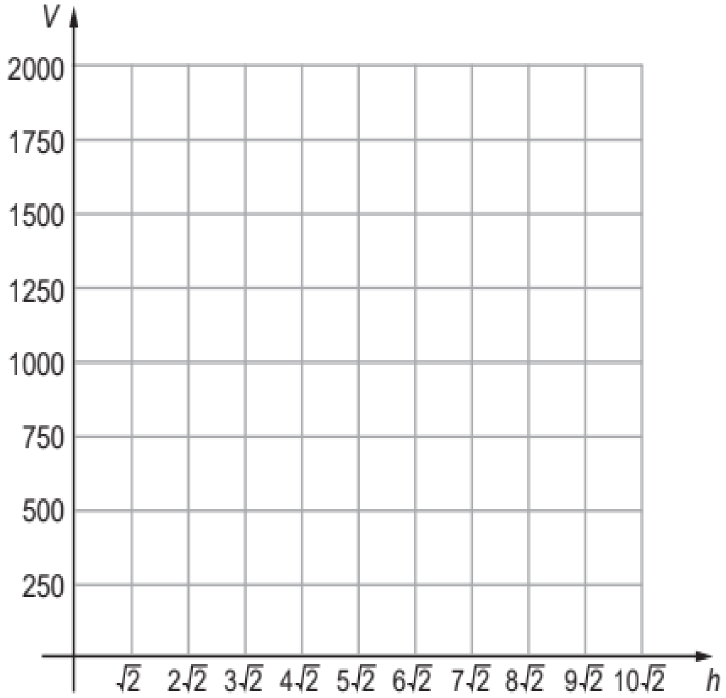
$V_{líquido} = \boxed{1500}\ cm^3$

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução do aluno A3 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utiliza representações algébricas para o cálculo do volume e quando inter-relaciona um cálculo trigonométrico para a resolução. Já a resolução do aluno A5 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica*, especialmente, quando utiliza notações e resultados características da geometria plana.

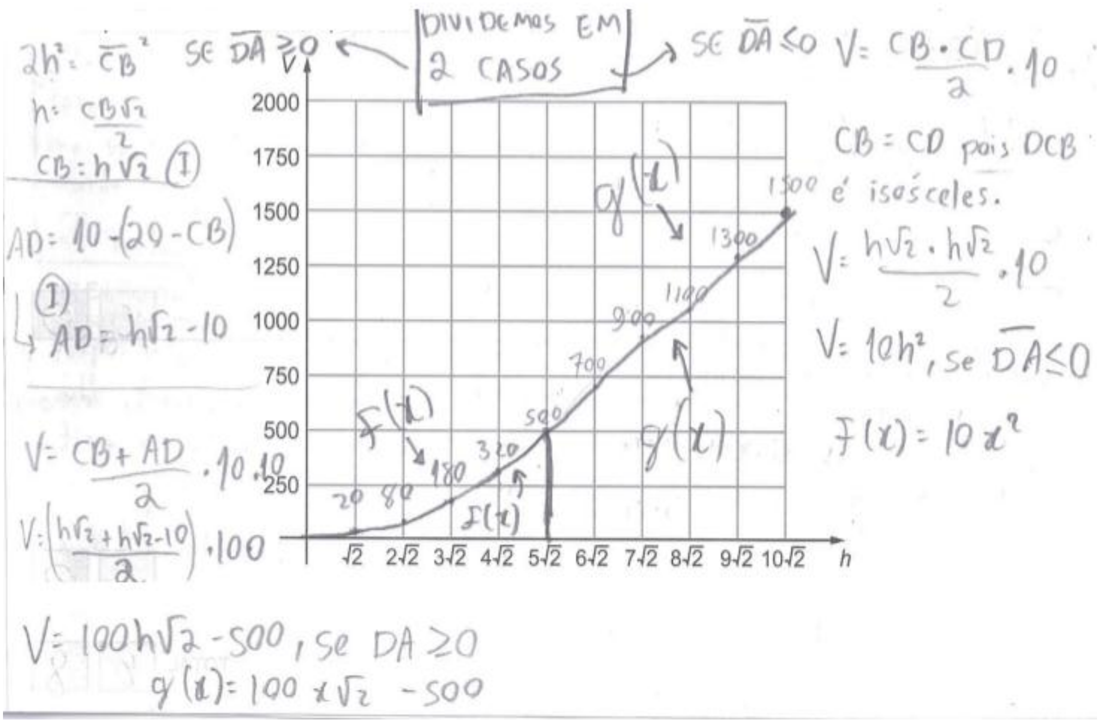
Figura 16: Enunciado do item 4.c

c) Faça o gráfico da função *V*, que fornece o volume *V*(*h*) de líquido na lata, em cm³, quando sua superfície está na altura *h*, em cm.



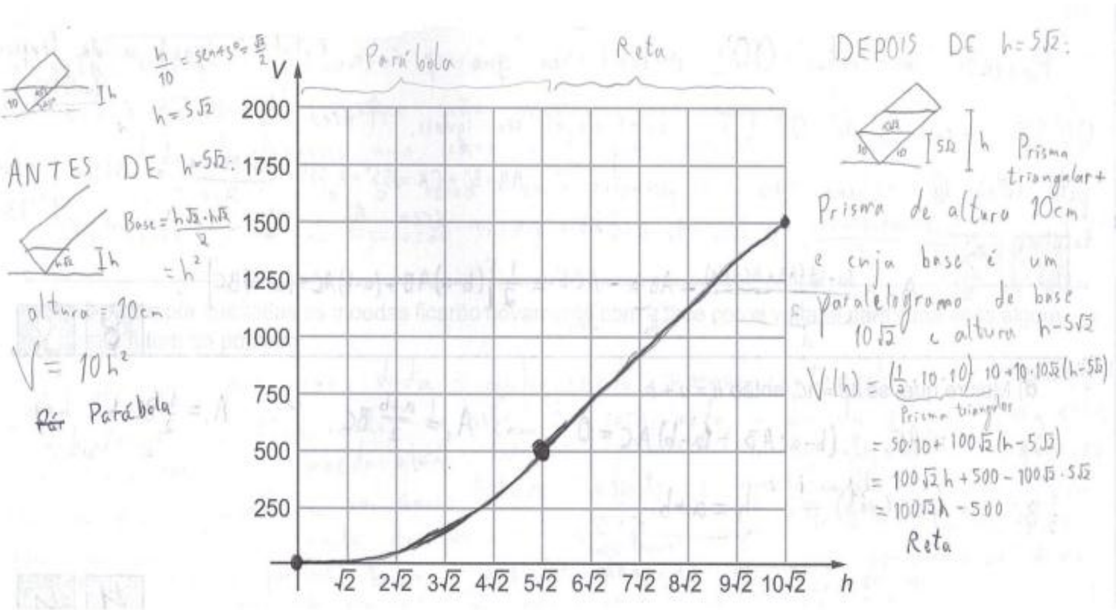
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 17: Registro escrito da resolução da Questão 4.c pelo aluno A1



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 18: Registro escrito da resolução da Questão 4.c pelo aluno A2



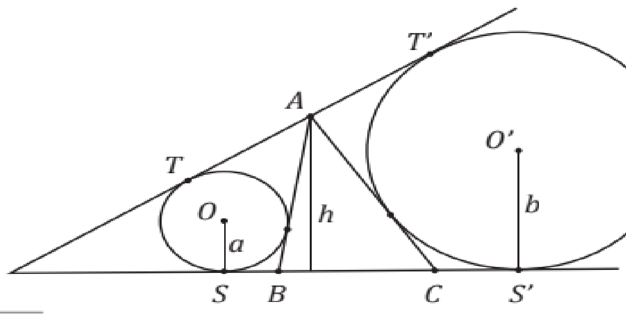
Fonte: Dados da pesquisa.

As resoluções dos alunos A1 e A2 evidenciam, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas, e modelação*, especialmente, quando representam graficamente o volume em função da altura e quando modelam as expressões algébricas para as sentenças que definem tal função. Adicionalmente, a resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *sintetização*, especialmente, quando inter-relaciona as expressões algébricas para as sentenças que definem a função modelada com os conceitos geométricos de parábola e reta característicos tanto da álgebra, se identificados como gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º grau, como também da geometria analítica, se formalizados como lugares geométricos.

A Questão 5 contemplou conteúdos de geometria plana, como apresentamos a seguir:

Figura 19: Enunciado da Questão 5 e do item 5.a

5. Na figura, as circunferências de raios a e b, centradas em O e O', são tangentes aos lados do ângulo em S e T e em S' e T', respectivamente. Elas também tangenciam os lados AB e AC de um triângulo ABC, em que A pertence a TT' e BC está contido em SS'. Esse triângulo ABC tem altura h relativa à base BC.



a) Calcule o perímetro do triângulo ABC quando $SS' = 10$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 20: Registro escrito da resolução da Questão 5.a pelo aluno A4

Observando o desenho, temos que $SS'^2+(b-a)^2=OO'^2=TT'^2+(b-a)^2 \therefore SS'=TT'$

Pelo Teorema do Bico, $SB=BP$, $CQ=CS'$, $TA=AP$ e $T'A=AQ$, o perímetro do triângulo é dado por: $BC+BP+CQ+PA+QA=\underbrace{BC+SB+CS'}_{SS'}+\underbrace{TA+T'A}_{TT'}=SS'+TT'=2SS'=20$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 21: Registro escrito da resolução da Questão 5.a pelo aluno A5

Lema:

Se AP e AN não tangentes ao círculo de centro O, $\overline{AN}=\overline{AP}$

$\rightarrow$ $PT=PS$

Na figura, $PT'=PS'$, $PT+TT'=PS+SS'$, $TT'=SS'=10$

$\boxed{TT'+SS'=20}$

Perímetro $= AM+AN+CN+BM+BC = AT+AT'+SB+CS'+BC =$

Fonte: Dados da pesquisa.

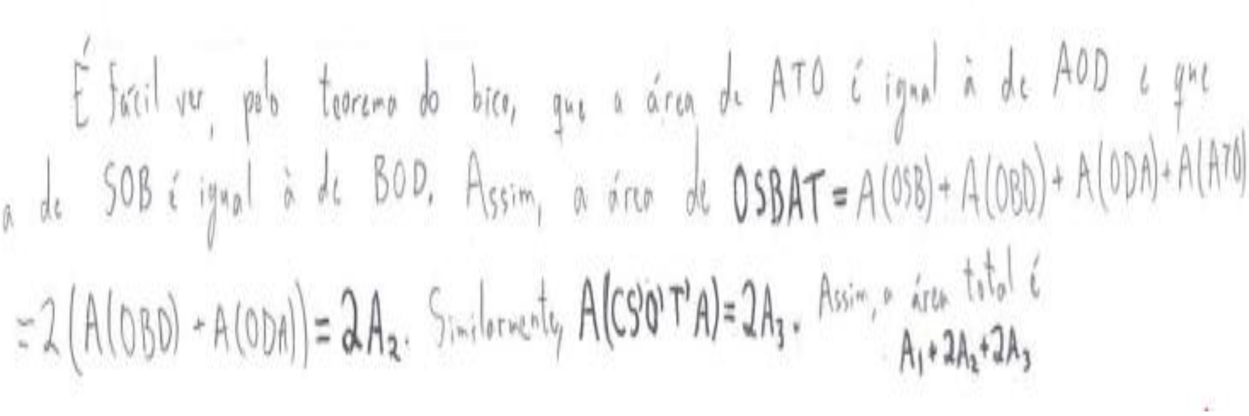
As resoluções dos alunos A4 e A5 evidenciam, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização*, especialmente, quando utilizam notações e símbolos característicos da geometria plana e quando mobilizam um resultado específico para a resolução. Entretanto, há que se diferenciar que o aluno A4 utiliza esse resultado como um teorema já conhecido (teorema do "bico"), enquanto o aluno A5 enuncia um lema a ser utilizado na resolução que, obviamente, equivale ao teorema do "bico".

Figura 22: Enunciado do item 5.b

b) Denote as áreas dos triângulos *ABC*, *ABO* e *ACO'* por A_1, A_2 e A_3, respectivamente. Explique por que a área do hexágono *OSS'O'T'T* é dada por $A_1 + 2A_2 + 2A_3$.

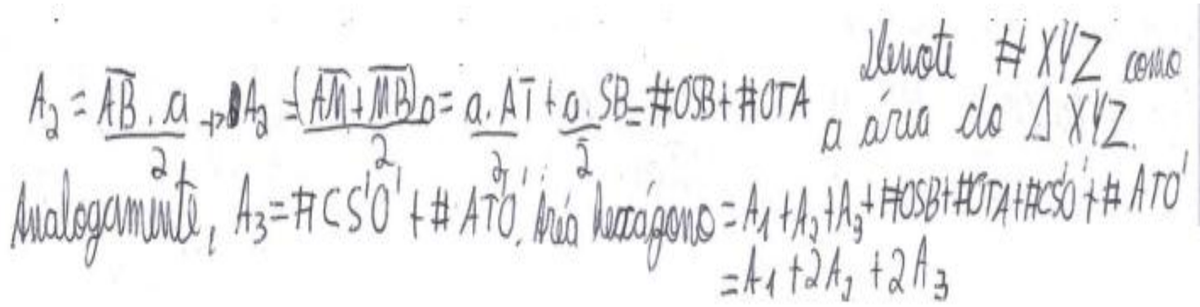
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 23: Registro escrito da resolução da Questão 5.b pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 24: Registro escrito da resolução da Questão 5.b pelo aluno A5



Fonte: Dados da pesquisa.

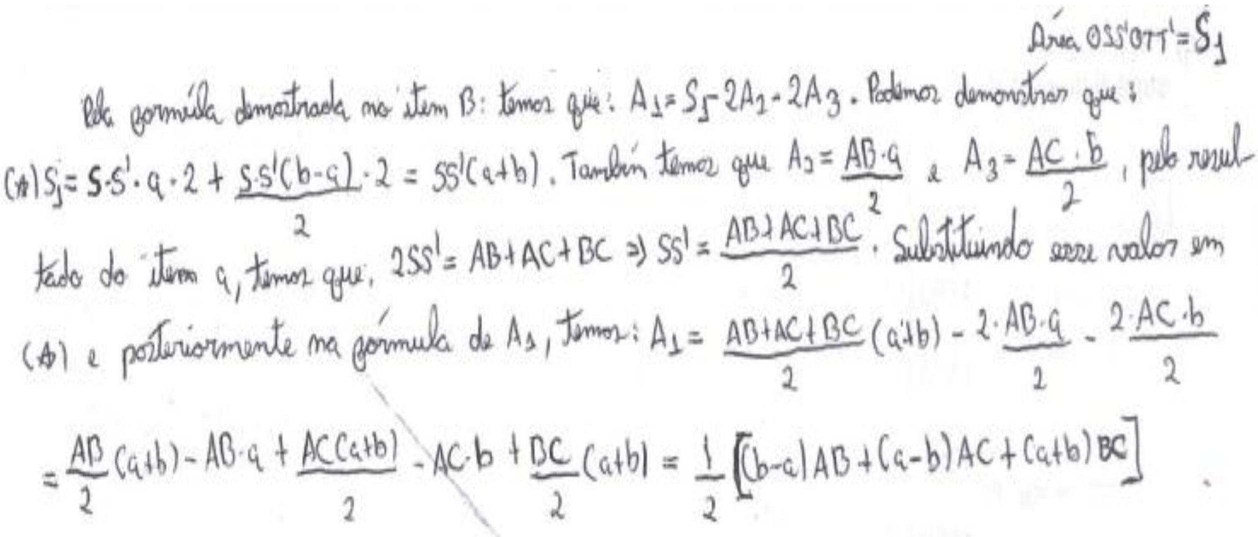
A resolução do aluno A2 evidencia, destacadamente, indícios de *representação simbólica e sintetização,* especialmente, quando utiliza notações e símbolos característicos da geometria plana e quando mobiliza um resultado específico para a resolução, como um teorema já conhecido (teorema do “bico”), além da noção de equivalência de áreas. Já o aluno A5 evidencia, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas,* especialmente, quando utiliza um símbolo “próprio” para denotar área e quando introduz um novo ponto (ponto M) na resolução, além daqueles apresentados no enunciado.

Figura 25: Enunciado do item 5.c

c) Mostre que a área do triângulo ABC é $\boldsymbol{A_1} = \frac{1}{2}[(b-a)\cdot AB + (a-b)\cdot AC + (a+b)\cdot BC]$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 26: Registro escrito da resolução da Questão 5.c pelo aluno A4



Área $OSS'OTT' = S_1$

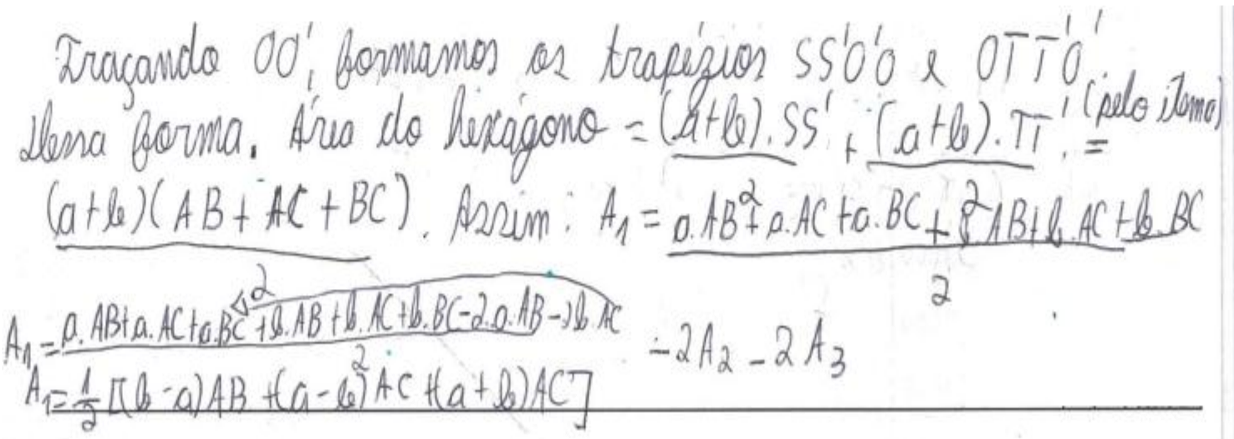
Pela fórmula demonstrada no item B: temos que: $A_1 = S_1 - 2A_2 - 2A_3$. Podemos demonstrar que:

(*) $S_1 = S.S'.a.2 + \frac{S.S'(b-a)}{2}.2 = SS'(a+b)$. Também temos que $A_2 = \frac{AB\cdot a}{2}$ e $A_3 = \frac{AC\cdot b}{2}$, pelo resultado do item a, temos que: $2SS' = AB+AC+BC \Rightarrow SS' = \frac{AB+AC+BC}{2}$. Substituindo esses valores em (*) e posteriormente na fórmula de A_1, temos: $A_1 = \frac{AB+AC+BC}{2}(a+b) - \frac{2\cdot AB\cdot a}{2} - \frac{2\cdot AC\cdot b}{2}$

$= \frac{AB}{2}(a+b) - AB\cdot a + \frac{AC(a+b)}{2} - AC\cdot b + \frac{BC}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left[(b-a)AB + (a-b)AC + (a+b)BC\right]$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27: Registro escrito da resolução da Questão 5.c pelo aluno A5



Traçando OO', formamos os trapézios $SS'O'O$ e $OTT'O'$. Dessa forma, Área do hexágono $= \frac{(a+b).SS'}{2} + \frac{(a+b).TT'}{2}$ (pelo item a) $= \frac{(a+b)(AB+AC+BC)}{2}$. Assim: $A_1 = \frac{a.AB+a.AC+a.BC+b.AB+b.AC+b.BC}{2} - 2A_2 - 2A_3$

$A_1 = \frac{a.AB+a.AC+a.BC+b.AB+b.AC+b.BC-2a.AB-2b.AC}{2}$

$A_1 = \frac{1}{2}[(b-a)AB + (a-b)AC + (a+b)AC]$

Fonte: Dados da pesquisa.

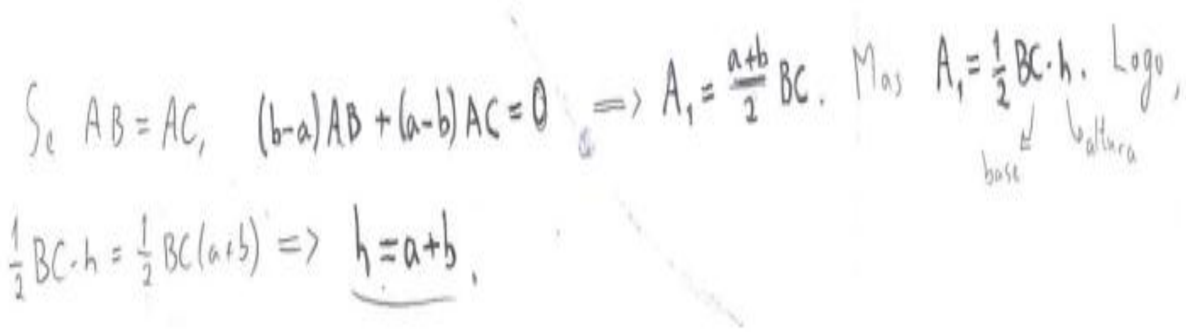
As resoluções dos alunos A4 e A5 evidenciam, destacadamente, indícios de *generalização*, especialmente, quando utilizam resultados validados em itens anteriores para a demonstração solicitada. Nesse caso, os resultados obtidos e utilizados nos itens anteriores podem ser pensados como “casos particulares” que possuem características e propriedades comuns com aquelas exploradas na resolução, especialmente, a decomposição de áreas para a obtenção da área solicitada.

Figura 28: Enunciado do item 5.d

d) Mostre que, se $AB = AC$, então $h = a + b$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 29: Registro escrito da resolução da Questão 5.d pelo aluno A2



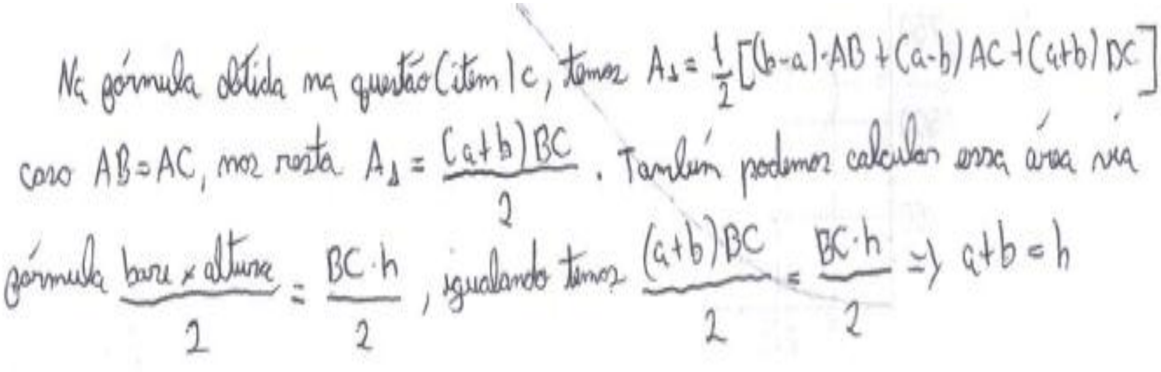
Se $AB = AC$, $(b-a)AB + (a-b)AC = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{a+b}{2} BC$. Mas $A_1 = \frac{1}{2} BC \cdot h$. Logo,

base altura

$\frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} BC(a+b) \Rightarrow \underline{h = a+b}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 30: Registro escrito da resolução da Questão 5.d pelo aluno A4



Na fórmula obtida na questão (item) c, temos $A_\Delta = \frac{1}{2}[(b-a)\cdot AB + (a-b)AC + (a+b)BC]$

caso $AB = AC$, nos resta $A_\Delta = \frac{(a+b)BC}{2}$. Também podemos calcular essa área via

fórmula $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2}$, igualando temos $\frac{(a+b)BC}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} \Rightarrow a+b = h$

Fonte: Dados da pesquisa.

As resoluções dos alunos A2 e A4 evidenciam, destacadamente, indícios de *mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando retiram as informações da figura do enunciado e as representações simbólicas que os demais itens demandaram para a resolução, como já esperado nesse tipo de questão em que todos os itens remetem à figura do enunciado. Adicionalmente, o aluno A4 utiliza o resultado obtido para a área do triângulo no item anterior, porém, particularizando-o de acordo com a condição imposta na hipótese levantada para a demonstração solicitada.

A Questão 6 contemplou conteúdos de análise combinatória, como apresentamos a seguir:

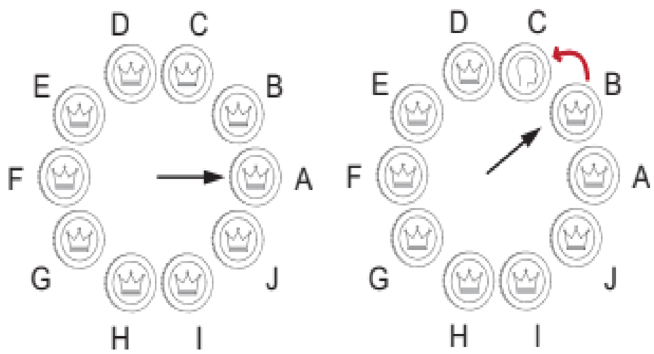
Figura 31: Enunciado da Questão 6 e do item 6.a

6. Em cada uma das dez posições marcadas com as letras de A a J na figura abaixo, é colocada uma moeda. Inicialmente, todas as dez moedas são colocadas com a face coroa voltada para cima e um ponteiro aponta para a posição A. Esse ponteiro começa a se movimentar no sentido anti-horário, saltando de uma posição para a outra mais próxima.

Após cada salto,

- se o ponteiro apontar para uma moeda com a face cara para cima, nada acontece;
- se o ponteiro apontar para uma moeda com a face coroa para cima, deve-se, então, virar a moeda seguinte.

Por exemplo, após o primeiro salto, o ponteiro aponta para a posição B (coroa) e a moeda na posição C é virada, ficando com a face cara para cima.



a) Como ficarão as moedas nas posições C e D logo após o segundo salto do ponteiro?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 32: Registro escrito da resolução da Questão 6.a pelo aluno A2

Após o segundo salto, a seta cairá em C, que é cara. Logo, C e D permanecerão sendo cara e coroa, respectivamente.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33: Registro escrito da resolução da Questão 6.a pelo aluno A3

No segundo salto
o ponteiro irá apontar para a moeda C, como ela é cara, nada acontece. Assim a moeda C continua sendo cara e a moeda D continua sendo coroa.

Fonte: Dados da pesquisa.

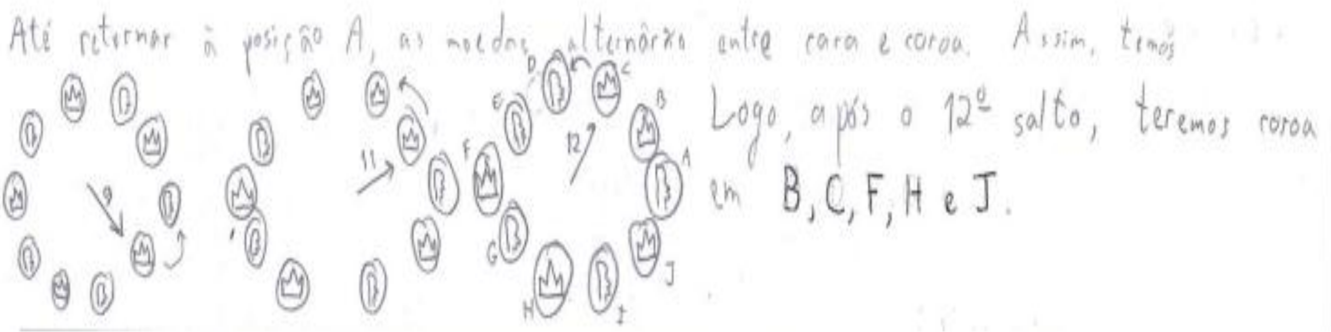
As resoluções dos alunos A2 e A3 evidenciam, destacadamente, indícios de *visualização*, especialmente, quando demonstram compreensão das informações fornecidas no enunciado que os leva a intuírem as posições das moedas, como solicitado. Observamos, ainda, que ambos optaram por uma resolução mais discursiva, destacadamente, sem a utilização de notações características de análise combinatória e probabilidade (tais como Ca e Co ou C e K).

Figura 34: Enunciado do item 6.b

b) Em quais posições as moedas ficarão com as faces coroa para cima após o décimo segundo salto?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 35: Registro escrito da resolução da Questão 6.b pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 36: Registro escrito da resolução da Questão 6.b pelo aluno A3

Como as moedas estão ficando com as faces coroa pra cima apenas a cada duas coisas, até o décimo
salto, as coisas com a face coroa pra cima serão: B, D, F, H e J. No décimo primeiro salto
o ponteiro para em B que é coroa, e a moeda C vira e torna-se coroa. No décimo segundo salto
o ponteiro para em C que é coroa, e vira D que se torna cara. Assim após o décimo
segundo salto as moedas que ficarão com as faces coroa voltadas pra cima
são: B, C, F, H e J.

Fonte: Dados da pesquisa.

As resoluções dos alunos A2 e A3 evidenciam, destacadamente, indícios de *visualização*, especialmente, quando utilizam a intuição para a previsão das posições das moedas nos saltos anteriores ao 12º salto do ponteiro. Observamos, ainda, que o aluno A2 utiliza representações gráficas para representar tais saltos, enquanto o aluno A3 opta por continuar apresentando uma resolução mais discursiva.

Figura 37: Enunciado do item 6.c

c) Explique por que nunca todas as moedas ficarão com a face cara voltada para cima.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 38: Registro escrito da resolução da Questão 6.c pelo aluno A4

Como a cada salto, somente mudamos a face de uma única moeda, para que todas fiquem
no máximo
Ca = Cara, Co = Coroa
com a face cara para cima, em um momento teríamos 9 faces cara e 1 face coroa, porém não se vira nenhuma moeda ao ponteiro saltar para uma face cara, e ao saltar para a única face coroa presente na mesa, essa irá virar a moeda logo a sua frente, fazendo com que essa se torne coroa. Logo, nunca teremos as 10 moedas com a face cara voltada para cima.
↳ Assim, é impossível passar da configuração 9Ca, 1Co para 10Ca

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 39: Registro escrito da resolução da Questão 6.c pelo aluno A5

Suponha, por absurdo, que todas as moedas ficassem com cara para cima. Na posição inicial, há moedas com coroa para cima. Então, haverá uma última moeda X a ser virada. (para cara)
Mas para que isso aconteça, a moeda anterior a X precisa apresentar coroa, absurdo, uma vez que X é a última moeda coroa.

Fonte: Dados da pesquisa.

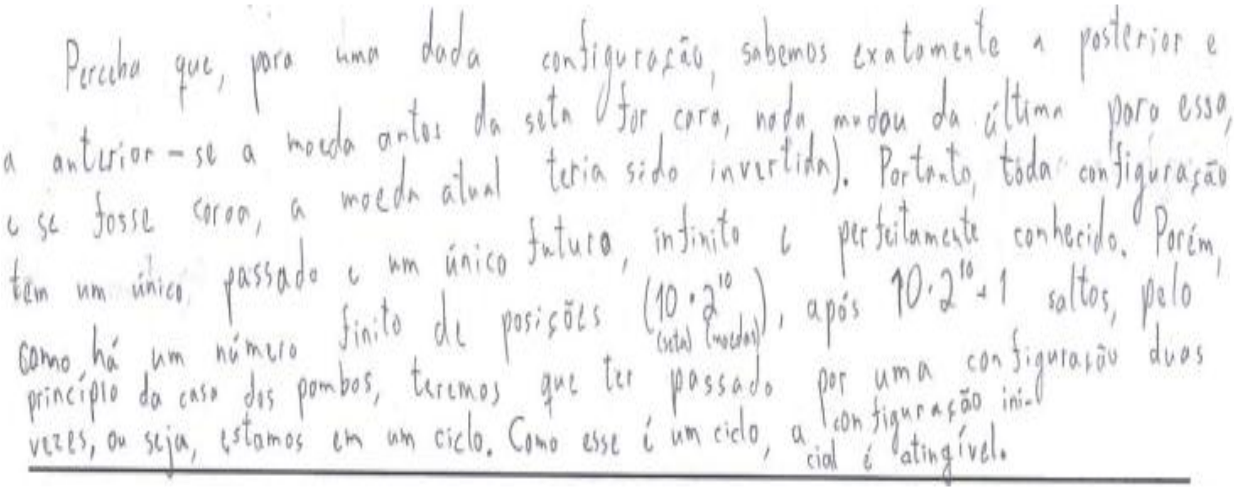
As resoluções dos alunos A4 e A5 evidenciam, destacadamente, indícios de *generalização e sintetização*, especialmente, quando utilizam estratégias de recorrência e indução para construir a explicação solicitada e quando combinam argumentos lógicos num encadeamento que culmina com tal construção. Destacadamente, o aluno A5 utiliza a demonstração por absurdo (ou por contradição) como forma de validar sua argumentação explicativa.

Figura 40: Enunciado do item 6.d

d) Explique por que todas as moedas ficarão novamente com a face coroa voltada para cima após algum salto futuro do ponteiro.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 41: Registro escrito da resolução da Questão 6.d pelo aluno A2


Perceba que, para uma dada configuração, sabemos exatamente a posterior e a anterior – se a moeda antes da seta for cara, nada mudou da última para essa, e se fosse coroa, a moeda atual teria sido invertida). Portanto, toda configuração tem um único passado e um único futuro, infinito e perfeitamente conhecido. Porém, como há um número finito de posições ($10 \cdot 2^{10}$ (seta) (moedas)), após $10 \cdot 2^{10}+1$ saltos, pelo princípio da casa dos pombos, teremos que ter passado por uma configuração duas vezes, ou seja, estamos em um ciclo. Como esse é um ciclo, a configuração inicial é atingível.

Fonte: Dados da pesquisa.

Excepcionalmente, para o item 6.d apresentamos apenas a resolução do aluno A2, único a resolver (corretamente) tal item. Tal resolução evidencia, destacadamente, indícios de *generalização e sintetização*, especialmente, quando utiliza estratégias de recorrência, partindo de um caso particular para validar o caso enunciado e quando mobiliza uma combinação de cálculos e princípios combinatórios para sustentar a argumentação delineada. Destacadamente, o aluno A2 utiliza o princípio da casa dos pombos de forma fundamental na conclusão da explicação solicitada.

Considerações Finais

Na perspectiva dos pesquisadores Dreyfus (2002) e Tall (2002) de que o PMA permeia os processos de ensino e de aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que se manifestam com maior intensidade nos anos finais do Ensino Médio e ao longo do Ensino Superior, nossa pesquisa objetivou investigar a mobilização de processos mentais característicos do PMA a partir de resoluções de questões da OBMEP, particularmente, questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da edição realizada em 2021.

Nesse contexto, adotamos como referencial teórico-bibliográfico que serviu como "contraste" em nossa análise das resoluções de questões, a caracterização do PMA feita por Dreyfus (2002), por meio de uma série de processos mentais classificados como processos de representação e de abstração, assim concebidos como processos globais e descritos sob a forma de outros processos a eles associados por Gereti e Savioli (2015).

À guisa de conclusão, observarmos que, apesar de não termos feito destaques particulares, entendemos que em todas as resoluções aqui apresentadas, assim como nas resoluções de questões de Matemática, de modo geral, podemos evidenciar indícios de *representação mental, mudança de representações e tradução entre elas*, especialmente, quando os alunos necessitam ler o enunciado de cada questão, relacioná-lo a um conjunto de representações concretas que possuem sobre os conceitos envolvidos, retirar as informações do enunciado e traduzi-las em uma linguagem matemática, para que possam resolver os itens propostos.

Outrossim, no conjunto das resoluções dos 14 itens das 4 questões selecionadas e aqui descritas e analisadas, foram evidenciados, de forma destacada, indícios de: *representação simbólica* (em 11 resoluções), *mudança de representações e tradução entre elas* (em 7 resoluções), *visualização* (em 5 resoluções), *modelação* (em 2 resoluções), *sintetização* (em 11 resoluções) *e generalização* (em 5 resoluções).

Há que se considerar que os processos de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas*, *e visualização* são mobilizados nas resoluções de questões de Matemática, de modo geral, porquanto parece-nos natural que as questões da OBMEP propiciem tal mobilização, ainda que algumas representações e traduções aqui descritas mereçam destaque por sua elaboração mais avançada.

Entretanto, entendemos que os processos de *modelação, sintetização e generalização* que foram mobilizados em resoluções de determinados itens revelam um alto potencial das questões da OBMEP para o desenvolvimento do PMA. Inicialmente, por permitirem aos alunos a interação com uma sequência de atividades matemáticas, partindo de um pensamento matemático mais elementar para formas de pensamento mais complexas promovendo, assim, o desenvolvimento do pensamento matemático. Sequencialmente, por algumas questões possibilitarem o desafio da abstração, processo essencial para o desenvolvimento do PMA, contribuindo para a habilidade dos alunos fazerem abstrações a partir de situações matemáticas não rotineiras no cotidiano escolar. Finalmente, por outras questões, ainda que poucas, demandarem a mobilização dos processos de sintetização e generalização de forma simultânea, contribuindo para que os alunos alcancem um nível avançado de pensamento matemático.

Entendemos que o incentivo ao desenvolvimento de habilidades matemáticas como o pensamento lógico e a criatividade, uma das premissas da OBMEP, deve ser considerado por todos os atores do cenário educacional e acadêmico da Educação Matemática e, nesse contexto, deve ganhar uma relevância cada vez maior a investigação sobre a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração para o desenvolvimento do PMA.

Referências

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. B. C. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013.

BACKENDORF, V. R. **O processo da abstração reflexionante na construção do conceito de Integral Dupla com a utilização de Matemática Dinâmica**. 2020. 127 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.25-41.

GERETI, L. C. V.; SAVIOLI, A. M. P. D. Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. **Bolema**, v. 29, n. 51, p. 206-222, 2015.
GRAY, E.; PINTO, M. M. F.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, n. 1-3, p. 111-133, 1999.

HENRIQUES, A. C. C. B. **O Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação**. 2010. 462 f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ . Acesso em: 19 nov. 2022.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: MEIRA, L.; CARRAHER, D. (Eds.). **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995, v. 1, p. 61-75.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

CONCLUSÃO DA PESQUISA

> O que o pesquisador acredita ser a Matemática e a Educação Matemática e seu entendimento de conhecimento e de como ele é produzido (ou transmitido, ou descoberto) são fundamentos que influenciam diretamente os resultados da pesquisa.
>
> Jussara de Loiola Araújo & Marcelo de Carvalho Borba

À guisa de considerações finais

Como deixamos claro na apresentação da presente pesquisa, nossa experiência como Coordenador Regional da OBMEP tem trazido diversos desafios em sua execução, porém, tem revelado grandes possibilidades de interação que têm se constituído em ricas oportunidades para nosso desenvolvimento profissional.

Por outro lado, mesmo após a realização de nossa pesquisa, como professor de Matemática, nossas inquietações a respeito da diferença entre os pensamentos matemáticos de nossos alunos ainda permanecerão, uma vez que a prática educativa está sempre a revelar novas respostas, contudo, também novos questionamentos.

Neste momento de considerações finais, retomamos a questão norteadora de nossas ações de pesquisa, lembrando que ela surgiu a partir de nossas experiências na Coordenação Regional da OBMEP mas também de nossos questionamentos oriundos de muitas décadas de docência de Matemática:

Que processos característicos da transição do Pensamento Matemático Elementar para o Pensamento Matemático Avançado podem ser identificados na resolução de questões da OBMEP – Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021?

A partir do objetivo geral de discutir a mobilização de processos mentais característicos da transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA), no contexto da resolução de questões da OBMEP – Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021, traçamos os seguintes objetivos específicos, os quais procuramos justificar ter alcançado por meio da metodologia de pesquisa desenvolvida em cada um dos artigos que compõem a presente dissertação:

- Investigar a história e atualidades das Olimpíadas Científicas de Matemática no Brasil e no mundo, com destaque para a OBMEP: acreditamos ter alcançado tal objetivo pois, no Artigo 1, apresentamos uma pesquisa teórico-bibliográfica que nos permitiu delinear um breve passeio pelas Olimpíadas de Matemática, iniciando pelas suas origens, desde o século XVI, perpassando pelo século XX, quando as Olimpíadas de Matemática ganharam proporções internacionais e desembocando nos dias atuais, apresentando as principais olimpíadas realizadas no cenário internacional, destacando as principais competições realizadas no Brasil, dando uma ênfase maior à OBMEP que, atualmente, constitui-se numa das maiores Olimpíadas de Matemática do mundo;

- Mapear as principais teses e dissertações desenvolvidas na área de Educação Matemática no Brasil, relacionadas à transição do PME para o PMA: acreditamos ter alcançado tal objetivo pois, no Artigo 2, identificamos as abordagens teórico-bibliográficas sobre a transição do PME para o PMA em pesquisas desenvolvidas na área de Educação Matemática, realizando uma pesquisa do tipo mapeamento no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, iniciando com um refinamento com foco na transição entre os pensamentos matemáticos, no qual foram selecionados para análise 40 trabalhos, sendo 14 teses e 26 dissertações, publicadas no período de 2009 a 2021;

- Analisar resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 (Ensino Médio) da edição de 2021 da OBMEP apresentadas por alunos medalhistas de ouro, identificando os principais processos de representação e de abstração mobilizados para o desenvolvimento do PMA: acreditamos ter alcançado tal objetivo pois, no Artigo 3, investigamos a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração característicos do PMA na resolução de questões da OBMEP por meio de uma pesquisa, de cunho qualitativo, realizada a partir da análise das resoluções de questões da prova de 2ª fase do Nível 3 da edição de 2021 da OBMEP, feitas por 5 alunos do Ensino Médio, medalhistas de ouro da Região MG03 da OBMEP, formada pelos Vales do Aço, Rio Doce, Mucuri e Jequitinhonha, localizados no interior do estado de Minas Gerais.

Como a presente dissertação foi estruturada no formato *multipaper*, entendemos que, mesmo nossa pesquisa tendo uma questão central de investigação, cada um dos 3 artigos trouxe conclusões próprias, porém, cuja união pode ser considerada um conjunto consistente de respostas a tal questão que, em certa medida, se relacionam e se completam.

O **Artigo 1 – Um passeio pelas Olimpíadas de Matemática: das origens aos atuais cenários no mundo e no Brasil** apontou que as Olimpíadas de Matemática são, reconhecidamente, um poderoso instrumento não só para a descoberta de talentos, mas também para a difusão dessa área fundamental do conhecimento, entretanto, pode-se questionar se elas têm cumprido o papel de contribuir para o ensino e a aprendizagem de Matemática, em que medida e de que formas isso realmente está acontecendo ou, ainda, poderia acontecer mais efetivamente. Nessa discussão, destacamos a importância da participação e apoio de diversos órgãos públicos e outras organizações de nossa sociedade que poderiam configurar às Olimpíadas de Matemática um caráter de maior inclusão rumo à cidadania e autonomia que se espera como fruto do processo educacional. Particularmente, entendemos que o caráter inclusivo associado à OBMEP fica explícito na análise de sua estrutura de funcionamento, com suas Coordenações Regionais preocupadas em viabilizar a participação de alunos das mais diferentes regiões do país.

Já o **Artigo 2 – Um mapeamento sobre a transição entre os Pensamentos Matemáticos Elementar e Avançado em pesquisas de Educação Matemática** revelou que teorias que visam conhecer os processos de formação do pensamento matemático contribuem de forma significativa para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior, destacando que David Tall e Tommy Dreyfus são os principais pesquisadores utilizados como referenciais teórico-bibliográficos sobre o desenvolvimento de teorias do pensamento matemático, especialmente, seus trabalhos dentro do *Advanced Mathematical Thinking*. Especificamente, o mapeamento realizado revelou uma escassez de pesquisas referentes à transição do PME para o PMA e, praticamente, uma inexistência de pesquisas focadas na investigação de tal transição na perspectiva da formação de professores de Matemática.

Por sua vez, o **Artigo 3 – A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP** evidenciou a mobilização dos seguintes processos mentais característicos do Pensamento Matemático Avançado: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, visualização, modelação, sintetização e generalização, o que demonstra a potencialização do desenvolvimento do PMA a partir da resolução de questões da OBMEP, especialmente, pela possibilidade de mobilização dos processos de modelação, sintetização e generalização em atividades matemáticas não rotineiras no cotidiano escolar. Finalmente, também foi evidenciado que algumas questões demandam a mobilização dos processos de sintetização e generalização de forma simultânea, contribuindo para que os alunos alcancem um nível avançado de pensamento matemático.

Por fim, a partir das considerações feitas nos 3 artigos, concluímos com algumas perspectivas para futuras investigações na área de Educação Matemática:

- A partir da discussão sobre os resultados obtidos pelos alunos nas Olimpíadas de Matemática, o que pode oferecer subsídios à reflexão sobre suas reais contribuições ao ensino de Matemática no Brasil e, assim, motivar e justificar a realização de mais pesquisas sobre objetivos, ações e possibilidades das olimpíadas científicas e, particularmente, da OBMEP;

- Sobre a transição do PME para o PMA que requer construções e reconstruções cognitivas, donde concluímos que existe uma grande urgência na realização de mais pesquisas sobre tal transição, em diferentes níveis de ensino, com foco nos processos de ensino e de aprendizagem dos mais diversos conteúdos matemáticos relacionados a Álgebra, Geometria e Análise;

- Com foco no desenvolvimento de habilidades matemáticas como o pensamento lógico e a criatividade que deve ser considerado por todos os atores do cenário educacional e acadêmico e, por isso, deve ganhar uma relevância cada vez maior a investigação sobre a mobilização dos processos mentais de representação e de abstração para o desenvolvimento do PMA.