O universo dinâmico de Friedmann

Hermano Velten[1] e Winfried Zimdahl[2]

[1]*Universidade Federal de Ouro Preto*
[2]*Universidade Federal do Espírito Santo*

Resumo
Apresenta-se uma tradução do alemão, do artigo seminal de Alexander Friedmann publicado em 1922, onde encontram-se as bases de um modelo cosmológico dinâmico.

Abstract
This is a translation from German to Brazilian Portuguese of the seminal work by Alexander Friedmann, published in 1922, where the basics of a dynamical cosmological model are developed

Palavras-chave: modelo de Friedmann, modelo cosmológico dinâmico.
Keywords: Friedmann's model, dynamical cosmological model.

DOI: 10.47456/Cad.Astro.v3n1.37322

1 Introdução

A cosmologia relativista é um ramo da ciência bem estabelecido que tenta fornecer respostas a algumas das questões que sempre perseguiram o homem, por exemplo, qual a origem e idade do universo? Apesar de intrigantes, estas perguntas só puderam ter suas respostas formuladas a partir dos trabalhos pioneiros de Albert Einstein, Willem de Sitter, Alexander Friedmann e Georges Lemaître há cerca de um século.

É justo dizer que Einstein é o fundador da cosmologia relativista, bem como de Sitter foi um de seus pioneiros. No entanto, o entendimento geral na época era que o universo fosse estático.

O artigo de Friedmann de 1922 que apresentamos aqui numa tradução do alemão[1] é o ponto de partida do conceito de um universo dinâmico em expansão e, junto com trabalhos de Georges Lemaître anos depois, forma a base da cosmologia relativista moderna. Curiosamente, Einstein inicialmente recusou as soluções de Friedmann encontradas neste artigo mas mais tarde teve que corrigir sua posição.

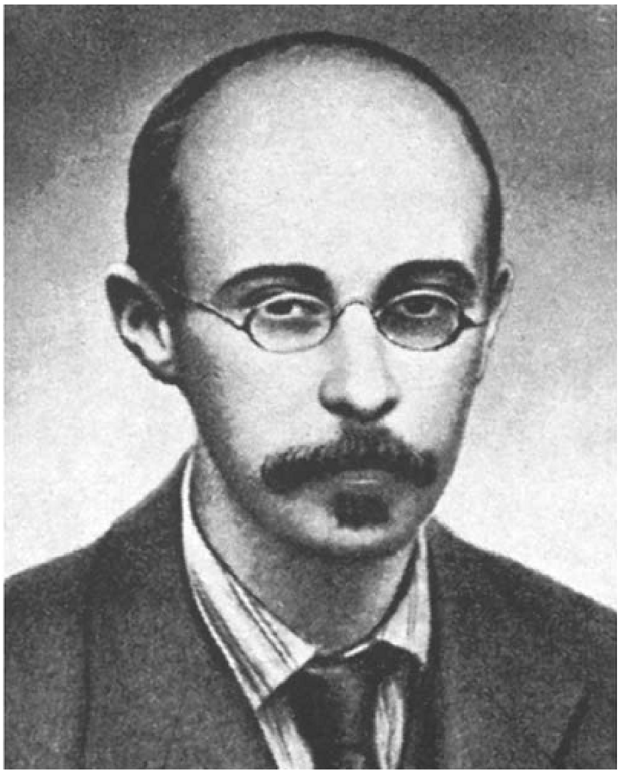


Figura 1: Foto de Alexander Friedmann. Crédito: domínio público. Fonte: Wikimedia Commons.

Estas soluções tratavam-se, à época, de uma interpretação especulativa da possível dinâmica cósmica e o artigo de Friedmann passou despercebido pelos astrônomos da época.

[1]Existe um manuscrito do artigo escrito em russo, disponível no site do Insituto Lorentz, Universidade de Leiden, Holanda. No entanto, o trabalho foi publicado na revista alemã Zeitschrift für Physik e, portanto, em alemão.

De fato, apenas ao longo da década de 1920 o conceito de galáxia emergiria, culminando nas observações de Hubble, em 1929, que constatariam a expansão do universo. Maiores detalhes desta história podem ser encontrados no texto de Ioav Waga nesta mesma edição do Cadernos de Astronomia.

Sobre o texto de Friedmann de 1922, aqui traduzido para o português, destaca-se a objetividade matemática de Friedmann e sua astúcia científica por tentar encontrar soluções bem genéricas de tal forma que as soluções de Einstein e de de Sitter seriam casos particulares de seu trabalho.

Um aspecto interessante no final do artigo é uma estimativa tentativa do idade do universo. Friedmann chega a 10 bilhões de anos o que é bem da ordem do valor preferido na cosmologia atual.

Ao nosso conhecimento, trata-se da primeira tradução do trabalho de Friedmann para o português. Apesar de já existirem traduções deste trabalho para o idioma inglês, acreditamos que esta nossa tradução possa ser útil para estudantes da área que tem pouca oportunidade de ter contato com os textos clássicos originais da área.

A tradução apresentada a seguir tenta se manter o mais próximo possível da diagramação do artigo original de Friedmann. Acreditamos que tal estratégia colabora para a experiência de se estar estrando em contato com um texto tão icônico quanto este.

Sobre os tradutores

Hermano Endlich Schneider Velten (hermano.velten@ufop.edu.br) é professor da UFOP. É doutor em física pela UFES e bolsista de produtividade do CNPq. Fez estágios de pós-doutoramento na Alemanha e França. O foco de suas pesquisas encontra-se nas áreas de astrofísica e cosmologia.

Winfried Zimdahl (winfried.zimdahl@gmail.com) é pesquisador do Núcleo Cosmo-ufes e um dos fundadores do PPGCosmo. Doutorou-se pela Universidade de Rostock, Alemanha, em 1975, com uma tese sobre física estatística. Autor de quase cem artigos científicos, foi citado recentemente na lista dos pesquisadores mais influentes do mundo, elaborada pela Universidade de Stanford (EUA). Desenvolve pesquisas em cosmologia e gravitação, com especial ênfase nos estudos do setor escuro do universo. Orientou mais de uma dezena de estudantes de mestrado e doutorado.

Sobre a curvatura do espaço[†]

A. Friedmann - Petersburgo (recebido em 29 de junho de 1922)

§ 1. 1. Em seus conhecidos trabalhos sobre as questões cosmológicas gerais, Einstein[1]) e de Sitter[2]) chegam a dois possíveis tipos de universo; Einstein obtém o chamado universo cilíndrico[3]) em que o espaço possui uma curvatura constante, independente do tempo, de forma que o raio de curvatura está relacionado à massa total da matéria presente no espaço; de Sitter obtém um universo esférico, em que não apenas o espaço, mas também o universo, pode ser tratado, de certa forma, como um universo de curvatura constante[4]). Tanto Einstein quanto de Sitter fazem certas hipóteses sobre o tensor de matéria-energia, que correspondem a incoerência da matéria e seu repouso relativo, no sentido de que a velocidade da matéria é suficientemente pequena comparada à velocidade base, a velocidade da luz.[5])

O objetivo desta nota é, primeiramente, obter o universo cilíndrico e esférico (como casos especiais) a partir de premissas gerais e, em segundo lugar, demonstrar a possibilidade de um universo cuja curvatura espacial seja constante em relação às três coordenadas que são consideradas coordenadas espaciais e dependente do tempo, que seria a quarta coordenada - a coordenada temporal; este novo tipo é, no que diz respeito às suas outras propriedades, um análogo do universo cilíndrico de Einstein.

2. As suposições nas quais baseamos nossas considerações recaem em duas classes. A primeira classe inclui suposições que coincidem com as suposições de Einstein e de Sitter; elas se relacionam com as equações que os potenciais gravitacionais satisfazem, e com o estado e o movimento do matéria. A segunda classe inclui suposições sobre o, por assim dizer, caráter geral geométrico do mundo. A partir da nossa hipótese obtém-se, como caso especial, o universo cilíndrico de Einstein e também o universo esférico de de Sitter.

As hipóteses da primeira classe são as seguintes:

1. Os potenciais gravitacionais satisfazem o sistema de equações de Einstein com o termo cosmológico, que também pode ser posto igual a zero:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}\overline{R} + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ij} \quad (i, k =, 1, 2, 3, 4). \tag{A}$$

Aqui g_{ik} são os potenciais gravitacionais, T_{ik} o tensor de matéria, κ - uma constante, $\overline{R} = g^{ik}R_{ik}$; R_{ik} é determinado através das equações

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 lg}{\partial x_i}\frac{\sqrt{g}}{\partial x_k} - \frac{\partial lg\sqrt{g}}{\partial x_\sigma}\left\{\binom{i\,k}{\sigma}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{\binom{i\,k}{\sigma}\right\} + \left\{\binom{i\,\alpha}{\sigma}\right\}\left\{\binom{k\,\sigma}{\alpha}\right\}, \tag{B}$$

onde os x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ são as coordenadas de mundo, e $\left\{\binom{i\,k}{l}\right\}$ os símbolos de Christoffel de segundo tipo[6]).

[†]Título original: *Über die Krümmung des Raumes*. Publicado em: Zeitschrift für Physik **10**, 377 (1922).

[1]Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte Berl. Akad. 1917.

[2]de Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Monthly Notices of the R. Astronom. Soc. 1916–1917.

[3]Sobre "espaço" entendemos aqui um espaço que pode ser descrito como uma variedade em três dimensões; o "universo" equivale a uma variedade de quatro dimensões.

[4]Klein, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt. Götting. Nachr. 1918

[5]Veja este nome no livro de Eddington, Espace, Temps et Gravitation, 2 Partie, S. 10. Paris 1921.

[6]Nossa escolha do sinal de R_{ik} e de $\overline{R}$ é diferente do normal.

2. A matéria é incoerente e em repouso relativo; ou, sendo direto e menos rigoroso, a velocidade relativa da matéria é desprezível em comparação com a velocidade da luz. No que segue a estas hipóteses o tensor de matéria é dado pelas equações

$$T_{ik} = 0 \quad \text{para} \quad i \text{ e } k \neq 4, \qquad T_{44} = c^2 \varrho g_{44}, \tag{C}$$

aqui ϱ é a densidade da matéria e c a velocidade base; fora isso, as coordenadas de mundo são divididas em três coordenadas espaciais x_1, x_2, x_3 e a coordenada temporal x_4.

3. As hipóteses da segunda classe são as seguintes:

1. Em termos das coordenadas espaciais em x_1, x_2, x_3 teremos um espaço de curvatura constante, mas que pode depender de x_4 - a coordenada temporal. O intervalo[7]) ds, determinado através de $ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k$, pode, ao se introduzir coordenadas espaciais adequadas, ser colocado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(dx_1^2 + sin^2x_1\, dx_2^2 + sin^2x_1 sin^2x_2\, dx_3^2) \\ &+ 2g_{14}\, dx_1\, dx_4 + 2g_{24}\, dx_2\, dx_4 + 2g_{34}\, dx_3\, dx_4 + g_{44}\, dx_4^2. \end{aligned}$$

Aqui R depende apenas de x_4; R é proporcional ao raio de curvatura do espaço que pode, portanto, variar com o tempo.

2. Na expressão para ds^2 é possível, através de uma escolha apropriada de coordenadas, eliminar g_{14}, g_{24}, g_{34}, em outras palavras, o tempo é ortogonal ao espaço. Sobre esta segunda hipótese, ao que me parece, podem não existir motivos físicos ou filosóficos; ela serve apenas para simplificar os cálculos. É preciso observar que os universos de Einstein e de de Sitter, dentro de nossas hipóteses, são casos especiais.

Seguindo as hipóteses 1 e 2, ds^2 pode ser colocado na forma

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + sin^2x_1\, dx_2^2 + sin^2x_1\, sin^2x_2\, dx_3^2) + M^2 dx_4^2, \tag{D}$$

onde R é uma função de x_4 e M, no caso geral, depende das quatro coordenadas. O universo de Einstein será obtido ao se substituir R^2 por $-\frac{R^2}{c^2}$ e, além disso, colocar M igual a 1 em (D), onde R significa o constante (independente de x_4) raio de curvatura do espaço.

O universo de de Sitter será obtido ao se substituir R^2 por $-\frac{R^2}{c^2}$ e M por $cos\, x_1$ em (D):

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + sin^2x_1\, dx_2^2 + sin^2x_1 sin^2x_2\, dx_3^2) + dx_4^2, \tag{D$_1$}$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}(dx_1^2 + sin^2x_1 dx_2^2 + sin^2x_1 sin^2x_2 dx_3^2) + cos^2x_1 dx_4^2\,.^{8)} \tag{D$_2$}$$

4. Precisamos agora ter o compromisso de encontrar os limites nos as coordenadas de mundo estão confinadas, ou seja, quais os pontos da variedade quadridimensional vamos tratar como sendo diferentes. Sem nos ater a uma explicação mais detalhada, vamos supor que as coordenadas espaciais estão dentro dos seguintes intervalos: x_1 no intervalo $(0, \pi)$; x_2 no intervalo $(0, \pi)$ e x_3 no intervalo $(0, 2\pi)$; com respeito à coordenada de tempo não vamos fazer por enquanto nenhuma suposição limitadora, mas vamos considerar esta questão mais abaixo.

§2.1. Das hipóteses (C) e (D) segue que, quando fazemos $i = 1, 2, 3$ e $k = 4$ nas equações (A),

$$R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_3} = 0;$$

[7]Veja, por exemplo, Eddington, Espace, Temps et Gravitation, 2 Partie. Paris 1921.

[8]O ds^2, do qual se supõe que possui dimensão de tempo, designaremos como $d\tau$, então a constante κ terá a dimensão de comprimento/massa e no sistema c.g.s é igual a $1,87 \times 10^{-27}$. Veja Laue, Die Relativitätstheorie, Bd. II, S. 185. Braunschweig 1921.

o que resulta em dois casos: (1.) $R'(x_4) = 0$, R é independente de x_4, queremos descrever esse universo como estacionário; (2.) $R'(x_4)$ não $= 0$, M depende apenas de x_4, este deve se chamar de universo não estacionário.

Vamos considerar primeiramente o universo estacionário e escrevemos as equações (A) para $i, k = 1, 2, 3$ e, além disso, i não $= k$, obtendo o seguinte sistema de fórmulas:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} - cotgx_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} - cotgx_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} - cotgx_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

A integração destas equações entrega a seguinte expressão para M:

$$M = A(x_3, x_4) sinx_1 sinx_2 + B(x_2, x_4) sinx_1 + C(x_1, x_4), \tag{1}$$

onde A, B, C são funções arbitrárias de seus argumentos. Resolvendo as equações (A) para R_{ik} e eliminamos a densidade desconhecida ϱ das, até então não utilizadas equações[9]), obtemos, utilizando para M a expressão (1), depois de longos mas elementares cálculos, duas possibilidades para M:

$$M = M_0 = const, \tag{2}$$
$$M = (A_0 x_4 + B_0) cosx_1, \tag{3}$$

onde M_0, A_0, B_0 significam constantes.

Se M é uma constante, então o universo estacionário é o universo cilíndrico. É então vantajoso trabalhar com os potenciais gravitacionais da fórmula (D_1); determinamos a densidade ϱ e a quantidade λ, assim é obtido o conhecido resultado de Einstein:

$$\lambda = \frac{c^2}{R}, \quad \varrho = \frac{2}{\kappa R^2}, \quad \overline{M} = \frac{4\pi^2}{\kappa} R,$$

onde $\overline{M}$ significa a massa total do espaço.

No segundo caso possível, quando $\overline{M}$ é dado por meio de (3), chegamos, com uma transformação razoável de x_4 [10]), ao universo esférico de de Sitter no qual $M = cosx_1$; Com a ajuda de (D_2) obtemos as relações de de Sitter:

$$\lambda = \frac{3c^2}{R}, \quad \varrho = 0, \quad \overline{M} = 0.$$

Nós temos então o seguinte resultado: o universo estacionário será ou o universo cilíndrico de Einstein ou o universo esférico de de Sitter.

2. Nós queremos considerar agora o universo não estacionário. Atualmente, M é uma função de x_4; com uma escolha adequada de x_4 pode-se encontrar (sem perda de generalidade) que $M = 1$; Para ligar a nossas ideias comuns, colocaremos ds^2 em uma forma que é análoga a (D_1) e (D_2):

$$d\tau^2 = -\frac{R^2(x_4)}{c^2}(dx_1^2 + sin^2 x_1 dx_2^2 + sin^2 x_1 sin^2 x_2 dx_3^2) + dx_4^2. \tag{D$_3$}$$

Nossa tarefa agora é determinar R e ϱ a partir das equações (A). É claro que as equações (A) com índices diferentes não fornecem nada; as equações (A) para $i = k = 1, 2, 3$ fornecem a relação:

[9]A densidade ϱ é uma função desconhecida das coordenadas de mundo x_1, x_2, x_3, x_4.

[10]Esta transformação é obtida por meio da fórmula $d\bar{x}_4 = \sqrt{A_0 x_4 + B_0} dx_4$.

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R} - \lambda = 0, \tag{4}$$

a equação (A) com $i = k = 4$ fornece a relação:

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R} - \lambda = \kappa c^2 \varrho, \tag{5}$$

com

$$R' = \frac{dR}{dx_4} \quad \text{e} \quad R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}.$$

Sendo R' não $= 0$, então a integração da equação (4) dá, quando escrevemos t para x_4, a equação:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^2}R^3}{R}, \tag{6}$$

onde A é uma constante arbitrária. A partir desta equação obtemos R por meio de uma inversão de uma integral elíptica, quer dizer, com a resolução para R da equação

$$t = \frac{1}{c}\int_0^R \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}dx + B, \tag{7}$$

na qual B e A são constantes, onde que deve-se levar em consideração as condições comuns da mudança de sinal da raiz quadrada. Da equação (5) tem-se como determinar ϱ:

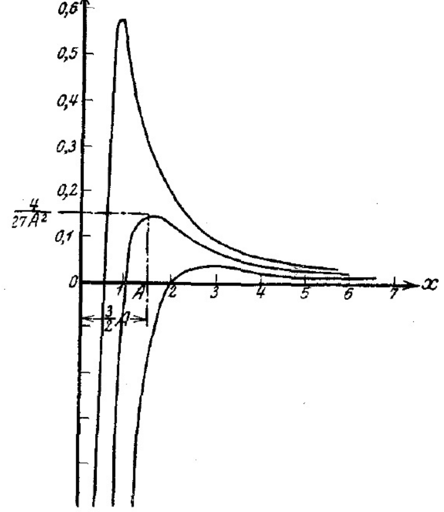
$$\varrho = \frac{3A}{\kappa R^3}; \tag{8}$$

através da massa total $\overline{M}$ do espaço a constante A se exprime da seguinte maneira

$$A = \frac{\kappa \overline{M}}{6\pi^2}. \tag{9}$$

Se $\overline{M}$ é positivo, então A é positivo.

3. Para considerar um universo não estacionário devemos ter como base as equações (6) e (7); e ainda, a quantidade λ não está determinada; Nós vamos aceitar que ela pode assumir valores arbitrários.



Vamos determinar agora aqueles valores da variável x para os quais a raiz quadrada da fórmula (7) pode mudar de sinal. Vamos restringir nossas considerações para raios de curvatura positivos, ou seja, para x no intervalo $(0, \infty)$ e neste intervalo, os valores de x que façam o radical ser igual a 0 ou ∞. Um valor de x para o qual a raiz quadrada em (7) seja nula é $x = 0$; os valores restantes de x para quais a raiz quadrada em (7) muda de sinal são dados pelas raízes positivas da equação $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$. Vamos denotar $\frac{\lambda}{3c^2}$ como y e consideramos no plano (x, y) a família de curvas de terceiro grau

$$yx^3 - x + A = 0. \tag{10}$$

A é um parâmetro da família que varia no intervalo $(0, \infty)$. As curvas da família (v. Fig.) cortam o eixo x no ponto $x = A, y = 0$ e tem um máximo no ponto

$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Da figura é visível que para valores negativos de λ a equação $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ possui uma raiz positiva x_0 no intervalo $(0, A)$. Considera-se x_0 como uma função de λ e A:

$$x_0 = \theta(\lambda, A),$$

então encontra-se que θ é uma função crescente de λ e uma função crescente de A. Se λ está no intervalo $(0, \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2})$, a equação possui duas raízes positivas $x_0 = \theta(\lambda, A)$ e $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$, onde x_0 está no intervalo $(A, \frac{3A}{2})$ e x_0' cai no intervalo $(\frac{3A}{2}, \infty)$; $\theta(\lambda, A)$ é uma função crescente tanto de λ quanto de A, $\vartheta(\lambda, A)$ uma função decrescente de λ e A. Finalmente, sendo λ maior que $\frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}$ a equação não possui raízes positivas.

Agora passamos a considerar a fórmula (7) e fazemos a seguinte observação preliminar: seja o raio de curvatura igual a R_0 para $t = t_0$; o sinal da raiz quadrada em (7) é positivo ou negativo, dependendo de que, se o raio de curvatura cresce ou decresce para $t = t_0$; substituímos, se necessário, t por $-t$, podemos sempre fazer a raiz quadrada positiva, ou seja, pela escolha do tempo sempre pode ser alcançado que o raio de curvatura para $t = t_0$ aumenta com o tempo.

4. Vamos considerar primeiro o caso $\lambda > \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2}$, ou seja, o caso onde a equação $A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3 = 0$ não possui nenhuma raiz positiva. A equação (7) então pode ser escrita

$$t - t_0 = \frac{1}{c}\int_{R_0}^{R} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx, \tag{11}$$

onde, de acordo com nossas observações, a raiz quadrada é sempre positiva. Segue então que R é uma função crescente de t; não há restrição sobre o valor inicial positivo R_0.

Como o raio de curvatura não pode ser menor que zero, ele deve, com tempo decrescente t a partir de R_0, alcançar o valor zero num instante t'.

O tempo para crescer em R de 0 até R_0 gostaríamos de chamar do tempo de criação do universo [11]); esse tempo t' é fornecido por:

$$t' = \frac{1}{c}\int_{0}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx. \tag{12}$$

Tal universo chamaremos de universo monotônico de primeiro tipo.

O tempo decorrido desde a criação do universo (monótono e de primeiro tipo), visto como uma função de R_0, A, λ, tem as seguintes propriedades: 1. ele cresce para um R_0 crescente; 2. ele decresce quando A cresce, quer dizer, a massa do espaço aumenta; 3. ele decresce quando λ cresce. Se $A > \frac{2}{3}R_0$ então para um λ arbitrário o tempo decorrido desde a criação do universo é finito; se $A \leq \frac{2}{3}R_0$ então pode-se sempre encontrar um tal valor $\lambda = \lambda_1 = \frac{4c^2}{9A^2}$ tal que quando λ se aproxima deste valor, o tempo desde a criação do universo aumenta sem restrições.

5. Agora esteja λ no intervalo $(0, \frac{4}{9}\frac{c^2}{A^2})$, então o valor inicial do raio de curvatura pode estar nos intervalos: $(0, x_0), (x_0, x_0'), (x_0', \infty)$. Com R_0 no intervalo (x_0, x_0') então a raiz quadrada da fórmula (7) é imaginária; um espaço com esta curvatura inicial é impossível.

Dedicaremos a próxima seção ao caso onde R_0 está no intervalo $(0, x_0)$; aqui consideramos ainda o terceiro caso: $R_0 > x_0'$ ou $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$. Com considerações análogas às anteriores, pode-se mostrar que R é uma função crescente do tempo, onde R pode começar com o valor $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$. O tempo que se passou desde o instante quando $R = x_0'$ até o instante quando $R = R_0$ tomamos novamente como o tempo desde a criação do universo. Este será t', tal que

$$t' = \frac{1}{c}\int_{x_0'}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx. \tag{13}$$

[11] O tempo desde a criação do universo é o tempo desde o instante onde o espaço era um ponto ($R = 0$) até o ponto atual ($R = R_0$); este tempo pode também ser infinito.

Tal universo chamaremos de universo monotônico de segundo tipo.

6. Nós vamos considerar agora o caso onde λ está dentro dos limites $(-\infty, 0)$. Se neste caso $R_0 > x_0 = \Theta(\lambda, A)$, a raiz quadrada in (7) se torna imaginária, o espaço com este R_0 é impossível. Sendo $R_0 < x_0$, trata-se do caso idêntico que desconsideramos na última seção. Nós assumiremos daqui para frente que λ está no intervalo $(-\infty, \frac{4c^2}{9A^2})$ e $R_0 < x_0$. Por meio de considerações conhecidas[12]) pode-se mostrar que R se torna uma função periódica de t, com período t_π, a qual chamaremos de período do universo; t_π é dado pela fórmula

$$t_\pi = \frac{2}{c} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2} x^3}} dx. \tag{14}$$

O raio de curvatura varia assim entre 0 e x_0. Chamaremos este universo de universo periódico. O período do universo periódico. O período do universo periódico aumenta quando aumenta-se λ e e tende para o infinito quando λ tende para o valor $\lambda_1 = \frac{4}{c}^2 9A^2$.

Para pequenos λ o período pode ser aproximado pela fórmula

$$t_\pi = \frac{\pi A}{c}. \tag{15}$$

No que diz respeito ao mundo periódico, dois pontos de vista são possíveis: contamos dois eventos como coincidentes, quando suas coordenadas espaciais coincidem e a diferença entre as coordenadas temporais é um múltiplo inteiro do período, então o raio de curvatura aumenta do valor 0 até x_0 e então diminui até o valor 0; o tempo de existência do universo é finito; por outro lado, quando o tempo varia entre $-\infty$ e $+\infty$ (ou seja, consideramos dois eventos como coincidentes apenas quando não só as coordenadas espaciais mas também suas coordenadas de mundo coincidem), chegamos a uma periodicidade verdadeira da curvatura espacial.

7. Nossos conhecimentos são totalmente insuficientes para conduzir cálculos numéricos e decidir qual é o nosso universo; é possível que o problema da causalidade e o problema da força centrífuga joguem luz sobre esta questão. Ainda se observa que a grandeza "cosmológica" λ que aparece nas nossas fórmulas permanece indefinida, uma vez que trata-se de uma constante excedente na tarefa; possivelmente considerações da eletrodinâmica podem levar à sua avaliação. Se usarmos $\lambda = 0$ e $M = 5 \,.\, 10^{21}$ massas solares, então o período do universo será da ordem de 10 bilhões de anos. Estes números podem apenas servir como uma ilustração da aplicação dos nossos cálculos.

Petrogrado, 29 de maio de 1922.

---

[12]Veja, por exemplo, Weierstrass, Über eine Gattung reell periodischer Funktionen. Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wissensch. 1866 e Horn, Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen. ZS. f. Math. und Physik 47, 400, 1902. No nosso caso as considerações destes autores devem ser alteradas apropriadamente. No entanto, a periodicidade no nosso caso pode ser estabelecida por considerações elementares.