

José Bruno do Nascimento Clementino

Agentização: aplicações em modelos de organização industrial

Mariana, Minas Gerais

2022

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP
Instituto de Ciências Sociais Aplicadas - ICSA
Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada

José Bruno do Nascimento Clementino

**Agentização: aplicações em modelos de organização
industrial**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada para obtenção do título de mestre em Economia Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea

Mariana, Minas Gerais

2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C626a Clementino, José Bruno do Nascimento.
Agentização [manuscrito]: aplicações em modelos de organização industrial. / José Bruno do Nascimento Clementino. - 2022.
75 f.: il.: color., gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea.
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada.
Área de Concentração: Economia Aplicada.

1. Empresas - Fusão e incorporação. 2. Organização industrial (Teoria econômica). 3. Teoria dos Jogos. I. Barrenechea, Martin Harry Vargas. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 330.101.8

Bibliotecário(a) Responsável: Essevalter De Sousa-Bibliotecário ICSAUFOP-CRB6a1407



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E APLICADAS
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
APLICADA



FOLHA DE APROVAÇÃO

José Bruno do Nascimento Clementino

Agentização: aplicações em modelos de organização industrial

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Economia Aplicada

Aprovada em 16 de fevereiro de 2022

Membros da banca

Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. Carlos Eduardo da Gama Torres - (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. Marcelo Aparecido Cabral Nogueira (Universidade Federal de Itajubá)

O Prof. Dr. Martin Harry Vargas Barrenechea, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 17/02/2022



Documento assinado eletronicamente por **Martin Harry Vargas Barrenechea, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 17/02/2022, às 18:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0281929** e o código CRC **1533273F**.

Agradecimentos

Diante de um cenário de pandemia, em que os pequenos desafios se tornaram maiores do que realmente são, realizar esse trabalho não foi tarefa fácil. Agradeço em especial o apoio dos meus pais, que me apoiaram de todas as maneiras imagináveis, a Ana Paula, que foi uma grande companheira, e aos meus amigos que foram acolhedores e pacientes.

Agradeço também ao Prof. Dr. Martin H. Barrenechea por sua valiosa orientação e oportunidades concedidas a mim, aos professores e funcionários do programa, à UFOP pelo apoio financeiro e ao CADE pela oportunidade de poder aprender e aplicar conhecimento aprendido ao longo dos últimos anos.

*“Plura sunt, Lucili,
quae nos terrent
quam quae premunt,
et saepius opinione
quam re laboramus.*

(Epistulae Morales ad Lucilium, vol. 2, carta XIII)

Resumo

Agentização se refere à situação em que modelos teóricos de economia são transformados em modelos computacionais por meio da flexibilização de suposições presentes nos modelos teóricos, que garantem a tratabilidade dos mesmos. Esse trabalho trata da agentização de dois modelos da área de organização industrial, dando foco especial em fusões horizontais. O primeiro modelo descreve a situação em que firmas estão numa competição de Bertrand com produtos diferenciados, na qual firmas escolhem preços de modo a maximizar seus lucros. Quantidades são escolhidas na segunda versão do modelo, que é o caso de Cournot. Desenvolvidas ao longo deste trabalho foram as versões baseadas em agentes em que firmas não possuem conhecimento a respeito da demanda do sistema em que estão inseridas. Os modelos baseados em agentes foram capazes de reproduzir resultados qualitativos e quantitativos de suas versões teóricas. De modo a garantir a reprodução dos resultados obtidos, os modelos foram integralmente disponibilizados.

Palavras-chave: Fusões Horizontais; Modelos Baseados em Agentes; Teoria dos Jogos.

Abstract

Agentization refers to the situation in which theoretical economics models are transformed into computational ones through the flexibilization of assumptions that are present in theoretical models, which supports their tractability. This work deals with the agentization of two models in the area of industrial organization, giving special focus to horizontal mergers. The first model describes the situation in which firms are engaged in a Bertrand with differentiated products competition, in which firms choose prices in order to maximize their profits. Quantities are chosen by firms in the second model, which is the Cournot case. Developed along this work are agent-based versions of these models in which firms do not know the demand they are facing. The agent-based versions were capable of reproducing qualitative and quantitative results from the theoretical versions. In order to guarantee reproduction of the obtained results, the models were provided in their entirety.

Keywords: Horizontal mergers; Agent-based Models; Game Theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Operação típica do modelo	38
Figura 2 – Evolução de preços e quantidades em função do tempo	43
Figura 3 – Média de preços antes e após fusão em função do tempo	44
Figura 4 – Evolução das medidas de bem-estar em função do tempo	45
Figura 5 – Ganhos de eficiência e mudança nos preços	47
Figura 6 – Média de quantidades antes e após fusão em função do tempo	49
Figura 7 – Média de lucros antes e após fusão em função do tempo	50

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros usados na simulação	39
Tabela 2 – Regressão linear que sintetiza o experimento de simulação	46
Tabela 3 – Síntese de resultados	48

Sumário

	Introdução	12
1	REFERENCIAL TEÓRICO	15
1.1	O que é a modelagem baseada em agentes?	15
1.2	A metodologia e seus usos	16
1.3	Algumas vantagens e desvantagens	17
1.4	Construindo modelos	19
1.5	Desenvolvendo, descrevendo e documentando modelos	22
1.6	Algumas aplicações da metodologia	25
2	EXPOSIÇÃO DOS MODELOS ANALÍTICOS	27
2.1	Modelo de Bertrand: competição por preços com produtos diferenciados	27
2.1.1	Obtendo a demanda	27
2.1.2	Obtendo preços de equilíbrio pré-fusão	29
2.1.3	Resultado pós-fusão	29
2.2	Modelo de Cournot: competição por quantidades de bens heterogêneos	31
2.2.1	Obtendo preços de equilíbrio pré-fusão	31
2.2.2	Resultado pós-fusão	31
2.3	Ganhos de Eficiência	32
3	O MODELO BASEADO EM AGENTES	34
4	EXPERIMENTOS DE SIMULAÇÃO	38
4.1	Implementação do modelo e seus parâmetros	38
4.2	Experimentos	39
4.2.1	Primeiro experimento	39
4.2.2	Segundo experimento	40
4.2.3	Terceiro experimento	40
4.2.4	Quarto experimento	40
5	RESULTADOS	42
5.1	Resultados do primeiro experimento de simulação	42
5.1.1	Antes das fusões	42
5.1.2	Depois das fusões	43
5.1.3	Resultados do segundo experimento de simulação	45

5.1.4	Resultados do terceiro experimento de simulação	46
5.1.5	Resultados do quarto experimento de simulação	48
	Considerações finais	51
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICES	56
	APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE BERTRAND EM NETLOGO V6	57
	APÊNDICE B – IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE COURNOT EM NETLOGO V6	66

Introdução

Uma fusão horizontal ocorre quando competidores de uma indústria realizam fusão. Como esse evento leva a concentração em uma dada indústria, uma de suas possíveis consequências é o exercício de poder de mercado unilateral – que implica aumento de preços não só dos bens produzidos pelas empresas que estão envolvidas na fusão, mas em todo o mercado. De acordo com a Federal Trade Commission, a agência dos Estados Unidos responsável pela avaliação de fusões e que possui papel similar ao Conselho Administrativo de Defesa Econômica no Brasil, mais de mil casos de fusões são revisados todos os anos¹. Na Europa, a Comissão Europeia recebeu cerca de 230 notificações em julho desse ano (2021)². De acordo com a Federal Trade Commission, cerca de 5% dos casos revisados pela agência apresentam problemas competitivos. Nesse caso, visando prevenir fusões que podem ter efeitos negativos sobre o bem-estar do consumidor e sobre a competição, se faz necessário estudar e desenvolver métodos que auxiliam na verificação dos efeitos, possivelmente negativos, que fusões podem exercer sobre a competição.

Um número significativo de metodologias que buscam mensurar efeitos de fusões foi desenvolvido como em Froeb e Werden (1994), Berry, Levinsohn e Pakes (1995), Epstein e Rubinfeld (2002) e DeSouza (2009). Todos os métodos mencionados utilizam ferramentas analíticas e estatísticas para a estimação de preços antes e depois de fusões. No entanto, observa-se uma ausência de modelos que descrevam tais efeitos relacionados ao exercício do poder de mercado unilateral dentro da literatura de economia computacional baseada em agentes. Embora a organização industrial estude a interação estratégica entre firmas, que poderia ser representada utilizando ferramentas de modelagem computacional, Nardone (2019) destaca a ausência de integração entre essas duas áreas. Essa dissertação tem como papel fazer uma pequena contribuição para diminuir a distância entre essas duas áreas de pesquisa.

Utilizando uma abordagem construtiva, como proposto por Tesfatsion (2006), dois modelos baseados em agentes que tratam de fusões horizontais foram desenvolvidos. Um dos modelos expostos em Motta (2004), no qual firmas estão num jogo de Bertrand com produtos diferenciados, é utilizado como marca de referência e passa pelo processo de *agentização*. O mesmo processo é realizado para o modelo de Cournot. Esse processo de *agentização* faz com que as suposições de racionalidade e informação perfeitas sejam efetivamente relaxadas nos modelos. Para tanto, um algoritmo de que representa a tomada de decisão das firmas no sistema, com base no trabalho de Kimbrough (2019), é utilizado.

¹ Veja: <<https://www.ftc.gov/tips-advice/competition-guidance/guide-antitrust-laws/mergers>>. Acessado em 02 de dezembro de 2021.

² Veja: <https://ec.europa.eu/competition-policy/mergers/statistics_en>. Acessado em 02 de dezembro de 2021.

Nesse caso, ao invés de firmas que sabem exatamente como seus concorrentes reagem, as firmas estão inseridas num cenário em que sua tomada de decisão está baseada unicamente em seus lucros, que dependem dos preços (quantidades) que foram escolhidos pelas firmas a depender da estrutura de mercado.

O objetivo da *agentização* é substituir agentes econômicos (e de outras áreas da ciência) de modelos matemáticos e estatísticos por agentes representados via software. Esses agentes, mesmo que de maneira rudimentar, podem aprender, interagir entre si e tomar decisões com base na necessidade de realização de objetivos individuais pré-programados. Ao longo do trabalho, mostra-se brevemente como a agenda de pesquisa que trata de *agentização* possui alguns trabalhos relevantes, embora não estejam necessariamente ligados à organização industrial. Ainda assim, a metodologia se mostra uma alternativa interessante para estudar a robustez de modelos previamente estudados e descritos teoricamente quando suas hipóteses são relaxadas.

Sob essas condições, de racionalidade limitada e total desconhecimento a respeito das ações dos outros agentes, evitando a possibilidade de que expectativas de qualquer maneira sejam formadas a respeito dos comportamentos de seus concorrentes, padrões emergentes anteriores e posteriores à fusão das firmas que compõem o sistema são estudados. Nesse trabalho em específico, embora haja evidência de que fusões sejam decisões tomadas por gestores de empresas, porque são estratégias capazes de determinar o lucro das firmas envolvidas dentro e fora de uma fusão, e por essa razão podem ser endogenizadas, fusões são fenômenos exclusivamente aleatórios. Aleatoriamente, pares de firmas são escolhidas para realizar fusões, sem que considerações sobre parcela de mercado sejam realizadas por outras firmas. Sob essas suposições de comportamento, múltiplos experimentos de simulação são realizados, seus dados são coletados e, por fim, os resultados qualitativos e quantitativos são testados e analisados. Embora algumas suposições limitantes tenham sido realizadas de modo a garantir a flexibilidade dos modelos construídos, não se observa nenhum tipo de dano, já que os resultados quantitativos e analíticos, se não idênticos, são extremamente similares aos dos modelos analíticos. Considera-se, então, que dentro do que é proposto por [Guerrero e Axtell \(2011\)](#), a flexibilização inicial do modelo foi um sucesso, abrindo uma janela de oportunidades para que o modelo seja estendido de modo a contemplar suposições secundárias e tornando-o mais realista.

A pesquisa utiliza o protocolo *Overview, Design Concepts and Details* (ODD), um método de exposição e difusão de modelos baseados em agentes que garante que as características relevantes sejam expostas. A metodologia é bastante difundida e validada, recebendo constantes mudanças para suas melhorias. Além disso, nos apêndices os códigos referentes aos construtos realizados para a pesquisa são disponibilizados. A vantagem de se utilizar tal protocolo e expor o código é a garantia de reprodutibilidade da pesquisa, além da facilitação para que contribuições propostas por outros pares sejam realizadas,

tornando o modelo final mais rico.

O trabalho se encontra dividido em seis capítulos. No primeiro capítulo, uma apresentação a respeito da metodologia escolhida para representar modelos de organização industrial é realizada. Modelos baseados em agentes são expostos considerando seus usos, vantagens, desvantagens e também uma visão geral de como esses modelos podem ser construídos e representados. O segundo capítulo expõe os modelos analíticos que foram agentizados nesse trabalho, sendo largamente baseados nos trabalhos apresentados por [Motta \(2004\)](#). A versão baseada em agentes desses modelos utilizando o protocolo ODD é exposta no terceiro capítulo. Apresentados no quarto capítulo são os parâmetros utilizados como base para o modelo, além dos experimentos de simulação que foram realizados e, em sequência, na quinta seção, os resultados desses experimentos são apresentados e discutidos. Finalmente, a sexta seção possui as observações finais a respeito desse trabalho e variadas extensões que podem tornar os modelos mais realistas, objetivo final da agenda de pesquisa referente à *agentizações*.

1 Referencial Teórico

Este capítulo trata de uma breve exposição da modelagem baseada em agentes. Uma explicação sobre seus usos, vantagens, desvantagens, metodologias de aplicação e também aplicações dentro da organização industrial serão brevemente apresentadas. Além disso, uma breve seção tratará de explicar o processo de *agentização*, fundamental para compreender o que está sendo realizado, em conjunto com uma explicação sobre como esse processo está intimamente ligado a uma abordagem construtiva de se fazer teoria econômica.

1.1 O que é a modelagem baseada em agentes?

A modelagem baseada em agentes se trata de uma metodologia que busca descrever um sistema de qualquer natureza quando se compreende que é preciso representar explicitamente os indivíduos que o compõem e seus respectivos comportamentos individuais (RAILSBACK; GRIMM, 2019, p.19). Como observado por Tesfatsion (2006), os indivíduos, denominados agentes, são meros conjuntos de dados e métodos comportamentais que são parte integrante de um mundo construído computacionalmente. Em modelos construídos de modo a representar sistemas econômicos, agentes podem representar trabalhadores, famílias, firmas, mercados, florestas e até mesmo infraestrutura. Ou seja, agentes podem representar desde entes tomadores de decisão até mesmo características passivas que estão presentes no mundo e, por consequência, não possuem nenhum tipo de função cognitiva.

A metodologia consiste em construir computacionalmente sistemas com agentes capazes de interagir entre si e depois, por meio de simulações, avaliar fenômenos que venham a emergir em decorrência das interações desses agentes. Os modelos que utilizam a metodologia devem ser construídos de maneira que evoluam sem influência direta daquele que o constrói, ou seja, os fenômenos que surgem das interações são puramente endógenos. É válido ressaltar que a modelagem baseada em agentes não é uma metodologia que tem como objetivo substituir abordagens que utilizam métodos matemáticos ou estatísticos. Tesfatsion (2006), argumenta que a ABM, dentro das ciências econômicas, serve principalmente para auxiliar na avaliação de teorias, por exemplo, ao se construir um modelo com base na teoria e relaxar algumas de suas suposições, abordagem que a autora denomina como construtiva.

Dito isso, se faz necessário elencar algumas das características de um modelo baseado em agentes. Epstein (1999) descreve algumas das características presentes nesses tipos de modelos:

1. a *autonomia* dos agentes que compõem o modelo, ideia diretamente relacionada a completude dinâmica. Os agentes que participam do modelo respondem a estímulos presentes no modelo;
2. os agentes podem conduzir seus processos num espaço *explicitamente definido*, ou seja, os modelos podem tratar de interações que ocorrem num dado espaço e as ações desses agentes podem ser determinadas pelas características do espaço em que estão inseridos;
3. dada a condição espacial, alguns modelos podem incluir *interações locais* (numa dada vizinhança ou um raio de interação), que são responsáveis pelo surgimento de regularidades globais;
4. os agentes possuem *racionalidade limitada* porque não possuem conhecimento sobre recompensas futuras atribuídas às suas ações tampouco dos riscos envolvidos. Agentes estão reagindo ao ambiente e aos seus vizinhos quando tomam decisões e, possivelmente, se adaptam conforme o tempo passa.

1.2 A metodologia e seus usos

Considerando a flexibilidade e complexidade que os modelos desse gênero apresentam, uma dúvida imediata é determinar quais são os estudos que podem ser realizados quando se utiliza a metodologia. Em modelos de economia computacional baseada em agentes, como denomina [Teshfatsion \(2006\)](#), a autora elenca quatro tipos de estudo em especial:

- Generativos: estudos que buscam reproduzir regularidades empíricas (ou fatos estilizados).
- Compreensão normativa: servem para melhor compreender os efeitos de uma mudança nos desenhos institucionais de um sistema, por exemplo: mudanças em leis, processos de produção políticas econômicas e instituições.
- Geração e exploração de teorias: consiste no exame de comportamentos dinâmicos de sistema sob diferentes condições iniciais.
- Avanços metodológicos: o objetivo desse tipo de estudo é desenvolver uma estrutura adequada para que experimentos que utilizem a metodologia sejam considerados como válidos, além de permitir que sejam explorados de maneira inovadora.

O estudo generativo, que busca reproduzir uma regularidade empírica, funciona como uma explicação candidata para o fenômeno estudado. O processo de validação desse

tipo de estudo, de acordo com [Tsfatsion \(2021\)](#), dependerá dos atributos iniciais dos agentes que compõem o sistema, as ações que esses podem realizar, a aproximação dos dados gerados pelo modelo com os dados ou padrões observados e, até mesmo, a capacidade do modelo realizar previsões a respeito do fenômeno.

Com relação aos estudos de compreensão normativa, o processo “é similar a encher um balde para determinar se ele transbordará” ([TESFATSION, 2006](#), p.5, tradução nossa). Nesse tipo de estudo, o autor constrói um mundo virtual que captura as características do sistema que ele busca modelar e altera parte do construto, de modo a contemplar as mudanças propostas, por exemplo, por uma política pública. No momento de realização do estudo, múltiplos parâmetros devem ser inicializados, seus resultados são coletados e depois são comparados a um mundo sem modificações, visando avaliar os impactos da política proposta.

Tratando-se da geração de teorias, o modelo baseado em agentes pode ser utilizado para entender o comportamento futuro de um sistema econômico. Quando se avalia um mesmo sistema sob diferentes parâmetros de inicialização, é plausível que diferentes trajetórias e desenvolvimentos de sistema sejam contemplados. Os dados gerados podem ser utilizados para a construção de aproximações de retratos de fase, permitindo que possíveis equilíbrios de sistema sejam identificados e, também, permitindo que o autor consiga avaliar estados de sistema que podem ser considerados viáveis, além dos que já são observados empiricamente.

O último tipo de estudo, que trata de avanços metodológicos, é autoexplicativo: sua motivação é a necessidade de se encontrar metodologias e ferramentas viáveis para que dados gerados através de, por exemplo, análises de sensibilidade sejam comparados aos dados do mundo real.

O uso da metodologia para os trabalhos de classe mencionada mostra vantagens que ela possui sobre outras técnicas mais difundidas (como as estatísticas e matemáticas). Por outro lado, é evidente que a metodologia possui desvantagens que não podem deixar de ser mencionadas. A seção seguinte trata de descrever vantagens e desvantagens relacionadas à metodologia.

1.3 Algumas vantagens e desvantagens

Afinal, por que empregar o uso dessa metodologia? A principal vantagem é a possibilidade de se representar diferentes agentes com objetivos distintos e estes podem interagir entre si enquanto perseguem interesses individuais. Além disso, os modelos podem levar em conta agentes multidimensionais e, até mesmo, evolutivos, no sentido de que não só algumas de suas características ou atributos são modelados, mas o agente modelado poderá também alterar a maneira como interage com o sistema enquanto o tempo progride:

o processo de aprendizagem pode ser explicitamente incluído no sistema. Heterogeneidade e adaptabilidade são características importantes e além dessas, outros elementos que compõem variados tipos de agentes podem ser modelados, como o grau de racionalidade presente nos agentes que compõem o sistema e suas capacidades sensoriais.

Tesfatsion (2006), reconhece que a principal desvantagem desse tipo de modelo vem da necessidade que o mesmo seja dinamicamente completo. Em termos simples, a partir do momento no qual um modelo é inicializado, esse deve ser capaz de se desenvolver ao longo do tempo sem que o modelador interaja com ele. Nesse caso, especificações iniciais de um modelo, bem como as características e pré-disposições de agentes, que podem ser representados, por exemplo, com modelos de decisão, precisam ser estabelecidos. No entanto, pode-se argumentar que essa acaba sendo uma vantagem, porque o responsável por modelar um sistema precisa compreender o objeto que busca modelar de modo que sua construção não dependa de choques exógenos como motivadores das dinâmicas de sistema. Dessa maneira, as características incluídas no modelo, os processos, responsáveis por determinar a independência e persistência do mesmo, funcionam como hipóteses auxiliam na explicação do sistema modelado.

Como especificações iniciais, como atributos de agentes e valores que determinam a importância relativa dos processos realizados por eles, precisam ser determinadas, é necessário que um modelo seja avaliado em uma vasta combinação de parâmetros distintos (e plausíveis para o estudo), já que a menor das perturbações nesses parâmetros iniciais de sistema pode induzir a resultados completamente diferentes dos obtidos com outros parâmetros. Com a evolução das tecnologias que são utilizadas para simulação de modelos, esse se torna o menor dos problemas, já que, a depender da complexidade do modelo, milhares de simulações podem ser realizadas em pouco tempo. Na prática, trabalhos realizados utilizam um menor número de simulações, mais próximos de dezenas por conjunto de parâmetros.

Uma outra desvantagem relevante desse tipo de modelo é a de que as distribuições de resultados obtidos por meio de simulações podem ser multimodais, sugerindo que um sistema pode ter múltiplos equilíbrios mesmo para uma combinação específica de parâmetros. O desafio, então, é confrontar os dados obtidos dessas simulações com o processo gerador de dados (pouco conhecido) advindo do mundo real. Por mais que o modelo baseado em agentes seja capaz de contemplar o processo gerador desconhecido, é possível que dentre a gama de resultados possíveis, a probabilidade de algo que tenha de fato acontecido seja pequena diante de todas as outras possibilidades geradas.

1.4 Construindo modelos

Evidentemente, um dos principais desafios é determinar como um modelo baseado em agentes deve ser criado. Se o objeto a ser modelado é complexo, com diversas interações e múltiplos agentes que determinam o estado de um dado sistema, como escolher quais dessas características devem ser incluídas no modelo? [Railsback e Grimm \(2019\)](#) argumentam que o bom modelo é aquele considerado estruturalmente realístico. Tal modelo não deve incluir todas as características observáveis no mundo real, mas deve incluir estruturas, como famílias ou mercados, e processos, como as interações realizadas pelos agentes presentes, responsáveis por reproduzir os fenômenos observados de um dado sistema.

Modelagem generativa

Se o objetivo for desenvolver um trabalho do tipo generativo, [Grimm e Railsback \(2005\)](#) e [Railsback e Grimm \(2019\)](#) propõem uma estrutura para a construção de estudos: a modelagem orientada à padrões (ou fatos estilizados). Em suma, os autores sugerem que o ciclo de construção de modelos ocorra da seguinte maneira:

- Determinação de padrões, regularidades empíricas ou fatos estilizados;
- Encontrar modelos de decisão para a representação de agentes e suas tomadas de decisão;
- Construção de um modelo baseado em agentes;
- Questionamento: o modelo consegue, de maneira satisfatória, reproduzir os padrões pretendidos?

Padrões no plural, porque a estrutura leva em conta a necessidade de se validar múltiplos padrões observáveis num estudo. Dessa maneira, cada um dos padrões serve como um filtro. O modelo capaz de reproduzir uma grande quantidade de padrões é considerado mais “estruturalmente realístico”. No entanto, identificar esses padrões se mostra um desafio, porque demanda que o modelador tenha conhecimento relevante a respeito não só do sistema que ele busca modelar, mas de processos que levam ao padrão observado.

É nesse contexto que o modelo baseado em agentes funciona, também, como uma espécie de laboratório virtual. Se um processo é incluído num modelo qualquer, mas o mesmo não leva a reprodução de um padrão, ele é removido do modelo. Por essa razão, é preciso levar em conta um conjunto de processos que englobem elementos que 1) já tenham sido propostos para determinar o comportamento dos componentes de um sistema; e 2) processos alternativos advindos de teorias ou dados empíricos. E, mesmo que um processo

seja capaz de reproduzir um padrão, o ciclo de modelagem não é necessário interrompido. Os autores apontam a necessidade de se continuar aprimorando um modelo, postulando novos processos responsáveis pela reprodução de padrões observados, acompanhado de testes.

Durante a construção do modelo, o processo de parametrização é um dos passos necessários para a construção de um modelo baseado em agentes, de certo modo, ela é responsável por determinar a importância relativa dos processos dentro de um modelo. O passo consiste na escolha de valores que determinam os parâmetros de processos escolhidos para modelar um sistema (RAILSBACK; GRIMM, 2019, p.263). Considerando um exemplo bastante simples, num modelo em que agentes se encontram numa feira e possuem uma lista de compras, desenvolvido por Hamill e Gilbert (2015), o número de itens na lista é um parâmetro.

Idealmente, levando em conta que um modelo contém múltiplos processos responsáveis pelo todo, cada modelo deve ser parametrizado individualmente, ou, por vezes, a escolha dos parâmetros pode ser determinada com base em trabalhos publicados. Na modelagem generativa, ocorre um tipo especial de parametrização denominada calibração. Busca-se, nesse caso, determinar o valor dos parâmetros de modo que os dados gerados pelo modelo se adequem, com base em algum critério previamente definido, aos dados empíricos.

Considerando um modelo generativo, a partir do momento em que um modelo é definido e se observa que ele é capaz de reproduzir padrões pretendidos, ainda é possível que o mesmo esteja realizando o feito pelo motivo errado – um conjunto de processos improváveis, que determinam a evolução do sistema modelado, podem, em combinação, reproduzir padrões desejados porque os valores dos parâmetros escolhidos podem estar errados. Como garantir, então, que o modelo desenvolvido não está reproduzindo padrões pelos motivos errados? Como realizar sua validação? Uma sugestão proposta por Railsback e Grimm (2019) é separar amostras de dados de modo que uma parte seja utilizada para calibrar o modelo, enquanto a outra parte seja utilizada para validá-lo.

Exploração de teorias

Para o caso da exploração de teorias ou mesmo da criação de teorias inteiramente novas, Tesfatsion (2006) sugere uma abordagem construtiva para a implementação de modelos que representem sistemas econômicos. A seguinte sequência de passos é postulada pela autora:

- Um modelo da literatura que esteja representado de maneira completa e acessível precisa ser escolhido com o objetivo de servir como parâmetro de comparação;

- Remoção completa de suposições que imponham externamente condições de equilíbrio (por exemplo, a suposição de que mercados se equilibram por meio de preços);
- Modelo dinamicamente completo, ou seja, o modelo precisa ser movido puramente pelas interações dos indivíduos representados no sistema;
- Definir uma condição de “equilíbrio”.

É válido mencionar que alguns modelos não possuirão equilíbrios, no sentido de que mudarão de estado ou vão progredir de maneira indefinida. No entanto, em alguns casos alguns modelos utilizam a estabilização de uma variável de estado qualquer como critério suficiente de equilíbrio.

Perceba que o ciclo proposto pela autora não é tão distante do proposto por [Railsback e Grimm \(2019\)](#). Escolher um modelo da literatura serve para determinar os padrões a serem reproduzidos. Ao remover uma suposição e incluir processos que tornem o modelo dinamicamente completo, o objetivo é verificar se o modelo baseado em agentes é capaz de reproduzir de fato o trabalho em questão, novamente, como uma espécie de laboratório. Caso não seja, ganha-se informação qualitativa a respeito do porquê o modelo não reproduz de maneira eficaz os padrões sob a ausência de uma suposição importante. Uma janela de oportunidade se abre para buscar processos que sejam capazes de reproduzir, mesmo com a ausência de uma suposição importante, o padrão em questão.

Agentização

[Guerrero e Axtell \(2011\)](#) descrevem o processo de *agentização* como sendo o processo de transformação de modelos de economia em modelos baseados em agentes, ou modelos produzidos computacionalmente. De maneira muito muito similar a Tesfatsion, os autores sugerem que quatro hipóteses comumente encontradas em modelos de economia podem ser substituídas por suposições mais realistas quando a *agentização* é realizada. A primeira suposição é a de que os agentes representados num modelo são racionais, isso significa que as escolhas dos agentes são racionais porque são completas, transitivas e contínuas. Que um equilíbrio seja definido é outra suposição comum nos modelos. Na seguinte passagem é possível notar que equilíbrios e a racionalidade de agentes estão intimamente ligadas:

(...) Existem diversos conceitos de equilíbrio para diferentes classes de modelos econômicos, mas todos esses conceitos se apoiam em suposições similares sobre a racionalidade dos agentes econômicos. Basicamente, duas suposições precisam ser feitas para se dizer que um sistema econômico estará em equilíbrio a priori. Primeiro, precisamos assumir que todos os agentes desejam e são aptos a maximizar suas utilidades esperadas e segundo, que todos os agentes possuem expectativas racionais. (...) significando que todos os agentes possuem crenças corretas e idênticas sobre como todos se comportarão. Agentes capazes de cumprir ambas suposições são denominados completamente racionais. (DAWID, 1999, p.7, tradução nossa)

Supor que os indivíduos de uma economia podem ser representados por um único agente, o agente representativo, é outra suposição comumente utilizada por esses modelos e, novamente, essa é uma condição facilitadora para o equilíbrio, porque se todos os agentes são idênticos, todos os agentes sabem do comportamento uns dos outros com precisão. A quarta suposição é a de não-interatividade, ou seja, os agentes não possuem diferentes respostas comportamentais e adaptativas para os diferentes cenários que surgem diante de suas interações com a economia.

Em síntese, a *agentização* se assemelha muito com o ciclo de modelagem proposto por [Railsback e Grimm \(2019\)](#). Guerrero e Axtell sugerem que o processo começa com um modelo *cru*, em que as suposições base (denominadas de primeira-ordem) do modelo são confrontadas, caso contrário não seria possível formular um modelo baseado em agentes, e alternativas são propostas. Um exemplo seria a inclusão de submodelos de comportamento para os agentes, descrevendo a maneira que eles interagem com o sistema e com os outros agentes que o compõem. O próximo passo é realizar uma análise de sensibilidade dos parâmetros e diferenças nos resultados produzidos entre o modelo baseado em agentes e o modelo analítico que está sendo estudado. Por fim, outras suposições acessórias identificadas no modelo vão gradualmente sendo confrontadas de modo a tornar a versão baseada em agentes mais realista e outra análise de sensibilidade é considerada. Assim como no ciclo de modelagem, então, o processo de *agentização* é um processo iterativo.

Considerando que a estrutura de modelos baseados em agentes foram trabalhadas, agora é necessário tratar de como esses modelos podem ser desenvolvidos, descritos e documentados para garantir a reprodutibilidade de resultados. A próxima seção tratará desse assunto.

1.5 Desenvolvendo, descrevendo e documentando modelos

Como já mencionado, modelos baseados em agentes são representações computacionais de sistemas complexos. Tais modelos podem ser construídos utilizando linguagens de programação de propósito geral ou linguagens dedicadas à implementação de modelos baseados em agentes. Tipicamente, linguagens que dão suporte ao paradigma de programação orientada a objetos (OOP) são utilizadas, como Python ou Java, porque objetos podem ser utilizados para representar os agentes que compõem os sistemas econômicos e os métodos associados às instâncias de classe são como possíveis ações tomadas por esses agentes. Em algumas linguagens de programação, existem pacotes dedicados para a implementação de modelos baseados em agentes, tornando mais fácil o processo de definição desses agentes e o processo de coleta de dados. Na linguagem de programação Python, dois exemplos são as bibliotecas AgentPy e Mesa. Por fim, além da possibilidade de se utilizar linguagens de programação de propósito geral, existem ambientes dedicados, como a linguagem de

programação Netlogo

Porque modelos baseados em agentes são desenvolvidos programaticamente e em diferentes plataformas, a replicação adequada de um trabalho desenvolvido por outros autores pode ser difícil quando o código de um modelo não é compartilhado. Em geral, as descrições do funcionamento dos modelos, suas teorias e as premissas dos mesmos são compartilhadas em trabalhos científicos, mas outros elementos importantes que facilitam a reimplementação de modelos por parte de outros autores podem não ser. Para auxiliar na uniformidade de trabalhos desenvolvidos que utilizam essa metodologia, protocolos como o Overview, Design Concepts and Details (ODD) e TRANSPARENT and Comprehensive model Evaluation (TRACE) foram desenvolvidos e são utilizados por alguns autores.

Overview, Design Concepts and Details (ODD)

O ODD surgiu inicialmente como protocolo que tinha como objetivo a padronização da maneira pela qual modelos baseados em agentes eram expostos, levando a uma melhor compreensão dos modelos desenvolvidos e facilitando a comunicação dos mesmos (GRIMM et al., 2006, p. 116-117). No protocolo, as características de modelo baseado em agentes são descritas de maneira factual e são divididas em três partes distintas que dão nome ao protocolo: visão global (overview), conceitos de design (design concepts) e detalhes (details). Cada parte é composta por outras partes menores cujo objetivo é responder perguntas relacionadas ao modelo, que por sua vez formam uma lista de controle que descreve os pontos considerados chave na explicação de um modelo, além de auxiliar autores na inclusão de características em seus modelos de maneira consciente e deixar leitores cientes das decisões tomadas por autores (GRIMM et al., 2010, p. 2760).

O protocolo está descrito em diferentes trabalhos com maior ou menor grau de detalhamento entre versões. Iterações mais recentes possuem algumas mudanças de modo a incluir melhorias e algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos mais elaborados. Alguns dos trabalhos em questão são Grimm et al. (2006), Grimm et al. (2010), Railsback e Grimm (2019) e Grimm et al. (2020). Abaixo alguns dos elementos que compõem o protocolo são destacados, mas os elementos que podem compor a descrição de um trabalho não são esgotados e, nesse caso, sugere-se a leitura mais aprofundada dos trabalhos realizados pelos autores.

A seção de visão global trata de descrever o funcionamento geral de um modelo baseado em agentes e é dividida em três partes:

- *Propósito e padrões*: a subseção se trata da descrição, em uma frase, do propósito geral de um modelo, explicitando qual o sistema que está sendo representado e, por consequência, delimitando quais são os elementos que devem fazer parte do modelo desenvolvido ou não.

- *Entidades, variáveis de estado e escalas*: subseção que descreve quais são os agentes representados por um modelo, podendo ser pessoas, empresas ou instituições; além de descrever as características que os diferenciam, como o sexo, idade ou receita, ou seja, quais são suas variáveis de estado. Outra característica descrita nessa subseção trata da escala de tempo e espaço em que se dá o modelo, se o modelo se desenvolve no curso de dias ou horas; se a distância entre entidades, se é representada, é dada por quilômetros ou centímetros.
- *Visão geral do processo e programação*: esta parte trata de descrever a dinâmica de um modelo, explicitando e elaborando quais são os mecanismos internos responsáveis pela alteração das variáveis de estado das entidades representada e a ordem que esses mecanismos ocorrem.

Na seção de conceitos de design, características que não podem ser tipicamente descritas com a utilização de modelos são tratadas. As perguntas respondidas nessa seção tratam de uma grande variedade de elementos que descrevem as características do modelo:

1. Quais as teorias e hipóteses que determinam o modelo e como elas são incorporadas em seu design?
2. Existem fenômenos emergentes que decorrem da interação das entidades que fazem parte do modelo?
3. Os agentes representados no sistema possuem comportamento adaptativo? Quais decisões são tomadas por esses agentes?
4. Os agentes são capazes de aprender com de acordo com as decisões tomadas? Se sim, como?
5. Existem processos estocásticos usados no modelo? Por quê?
6. Quais informações são extraídas das simulações e analisadas? Essas são apenas algumas das perguntas que o autor de um modelo deve responder ao desenvolver a descrição de um modelo baseado em agentes, mas outras questões que tratam de como a sensibilidade, previsão e interação são realizadas por agentes devem ser incluídas na descrição caso estejam presentes num modelo.

A terceira parte, que trata de detalhes, destaca as características de inicialização de um modelo, o seu estado inicial, de modo a garantir a reprodutibilidade dos resultados obtidos numa análise. Além disso, alguns modelos utilizam dados externos para o seu funcionamento e isso deve ser destacado caso ocorra num modelo desenvolvido. Por fim, os submodelos, que são os modelos dos processos presentes dentro de um modelo baseado em agentes, devem ser descritos na seção que trata dos detalhes dos modelos.

Com o seu nível de detalhamento e a formalização da descrição de um trabalho, o protocolo auxilia na uniformização dos trabalhos que utilizam a metodologia baseada em agentes. Num trabalho mais recente, [Grimm et al. \(2020\)](#) argumentam que, graças a sua estrutura e detalhamento, ele também pode ser utilizado como ferramenta para a formulação de modelos desde o seu princípio. Existem outros protocolos que visam aumentar o nível de detalhamento de um modelo, considerando não só seus propósitos e características, mas dando diretrizes para a documentação do desenvolvimento de um modelo desde o princípio. Esse é o propósito do TRAnsparent and Comprehensive model Evaluation (TRACE). Um documento desse tipo registra todas as características de design, testes e análises conduzidas pelo autor, desde o princípio do desenvolvimento até o final, o que torna a confecção mais complexa e extensa.

1.6 Algumas aplicações da metodologia

Em geral, como observa [Nardone \(2019\)](#), existem poucos trabalhos que utilizam modelagem baseada em agentes dentro da literatura de organização industrial. Os trabalhos que utilizam a metodologia estão tipicamente associados a literatura de dinâmica industrial, que buscam tratar de temas como a emergência de indústrias ou sua transformação de acordo com a interação de agentes que estão num sistema econômico. Por exemplo, [Chang \(2009\)](#) observou que indústrias possuíam padrões de entrada e saída qualitativamente similares entre elas e, utilizando modelagem baseada em agentes, o autor buscou representar os mesmos padrões observados.

Temas de pesquisas trabalhados na área tendem a estudar a modelagem de mercados específicos e suas características espaciais¹, como o caso do trabalho de [Heppenstall, Evans e Birkin \(2005\)](#), que teve como objetivo estudar o varejo de gasolina. [Sun e Tesfatsion \(2007\)](#) produziram um modelo que buscava representar o mercado de energia elétrica estadunidense, especificamente buscando determinar uma espécie de laboratório para as políticas de venda de energia que estavam sendo implementadas na época. Outros exemplos que modelam mercados específicos buscam construir modelos generativos, que são aproximações históricas (ou *amigáveis historicamente*). Dois exemplos nesse sentido são o trabalho de [Malerba et al. \(2001\)](#), que buscou reproduzir o histórico da indústria de computadores estadunidense, e o trabalho de [Wood, Mason e Finnoff \(2016\)](#), que tratou de construir um modelo que buscava reproduzir uma disputa entre as Sete Irmãs do Petróleo e a Organização dos Países Exportadores de Petróleo durante as décadas de 1960 e 1970.

Além desses trabalhos, modelos baseados em agentes vêm sendo desenvolvidos com o objetivo de *microfundamentar* modelos macroeconômicos. Um exemplo está disponível em [Mazzoli, Morini e Terna \(2017\)](#). Nesse modelo, os autores buscam modelar uma

¹ Alguns trabalhos chegam a sistemas de informação geográfica para representar o espaço em modelos baseados em agentes.

demanda agregada que é composta por diferentes tipos de agentes. Esses agentes podem representar trabalhadores e indivíduos desempregados, empreendedores que estão entrando no mercado e empreendedores incumbentes. Embora agentes tenham preferências similares, eles são heterogêneos com relação às suas restrições orçamentárias. O modelo consegue representar ciclos de negócios similares aos movimentos de uma economia, levando em conta a possibilidade de entrada e saída de firmas no mercado, além de mobilidade social entre os agentes, ou seja, os agentes podem deixar de ser trabalhadores para se tornarem empreendedores e vice-versa.

[Teshfatsion \(2006\)](#) desenvolve um modelo baseado em agentes de maneira conceitualmente parecida ao que é proposto pelos autores [Guerrero e Axtell \(2011\)](#). A autora desenvolve seu modelo considerando um modelo analítico que depende de um equilíbrio Walrasiano. No modelo original, a autora remove o leiloeiro Walrasiano, fazendo com que as firmas precisem interagir com os consumidores para que preços de mercadorias sejam determinados e os bens dessa economia sejam distribuídos de maneira eficiente. Firmas insolventes e consumidores incapazes de satisfazer seu consumo de subsistência acabam sendo removidos da economia. Com a remoção do leiloeiro, o modelo se torna substancialmente complexo, pois diversos submodelos que determinam as interações entre consumidores e firmas precisam ser definidos para o seu funcionamento.

2 Exposição dos modelos analíticos

Os modelos baseados em agentes produzidos para este trabalho são baseados no modelo de fusões horizontais exposto em [Motta \(2004, p.244-265\)](#). Para o leitor que não esteja familiarizado com o conceito de uma fusão horizontal, essas fusões ocorrem sempre que firmas de uma mesma indústria fundem, isto é, uma fusão entre concorrentes. Uma alternativa seria a ocasião em que uma firma vendedora de insumo (a montante) compra uma firma compradora desse mesmo insumo para a produção de um bem final (a jusante), nesse caso o evento seria denominado fusão vertical. Uma exposição do modelo será realizada ao longo dessa seção, começando pela utilidade de um agente representativo e então pela determinação de preços por parte das firmas que representam um equilíbrio de Nash em resposta a utilidade desse agente.

2.1 Modelo de Bertrand: competição por preços com produtos diferenciados

2.1.1 Obtendo a demanda

A utilidade do consumidor representativo depende de múltiplos produtos diferenciados que estão disponíveis no mercado. Sua utilidade é representada da seguinte maneira:

$$U = v \sum_{i=1}^n q_i - \frac{n}{2(1+\gamma)} \left[\sum_{i=1}^n q_i^2 + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 \right] + y \quad (2.1)$$

em que y é um bem externo e como a demanda é de tipo quasi-linear, o bem externo não afeta as decisões tomadas pelo consumidor com respeito aos produtos diferenciados; a variável q_i é a quantidade do i -ésimo produto; v é um parâmetro positivo; n é o número de produtos na indústria; e γ representa o grau de substituíbilidade entre os n produtos. Considerando a maximização da utilidade desse consumidor representativo, preços e quantidades podem ser determinados. Considera-se que o agente representativo possui a seguinte restrição orçamentária:

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i + p_y y = z \quad (2.2)$$

e o problema de otimização a ser resolvido será:

$$\begin{aligned} \max_{q_i, y} & v \sum_{i=1}^n q_i - \frac{n}{2(1+\gamma)} \left[\sum_{i=1}^n q_i^2 + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 \right] + y \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^n p_i q_i + p_y y = z \end{aligned} \quad (2.3)$$

o próximo passo é construir o lagrangiano e realizar as derivadas com respeito as quantidades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 1 - \lambda p_y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= v - \frac{2n}{2(1+\gamma)}(q_i + \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1}^n q_j) - \lambda p_i = 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

Considerando essas condições de primeira ordem, se p_y é o numerário, então $\lambda = 1$. A demanda inversa pode ser obtida da segunda expressão da equação 2.4:

$$p_i = v - \frac{1}{1+\gamma} \left(nq_i + \gamma \sum_{j=1}^n q_j \right)\tag{2.5}$$

de onde se pode obter a demanda marshalliana. Para isto, primeiro soma-se a demanda inversa para cada $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n p_j &= nv - n \sum_{j=1}^n q_j \\ \sum_{j=1}^n q_j &= \frac{nv - \sum_{j=1}^n p_j}{n}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Considera-se então que:

$$\begin{aligned}v - p_i &= \frac{nq_i + \gamma \sum_{j=1}^n q_j}{(1+\gamma)} \\ q_i &= \frac{v(1+\gamma)}{n} - \frac{p_i(1+\gamma)}{n} - \frac{\gamma \sum_{j=1}^n q_j}{n}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Ao substituir 2.6 em 2.7, obtém-se:

$$\begin{aligned}q_i &= \frac{v(1+\gamma)}{n} - \frac{p_i(1+\gamma)}{n} - \frac{\gamma}{n} \left(\frac{nv - \sum_{j=1}^n p_j}{n} \right) \\ &= \frac{v + \gamma v - \gamma v}{n} - \frac{p_i(1+\gamma)}{n} + \frac{\gamma}{n} \left(\frac{\sum_{j=1}^n p_j}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(v - p_i(1+\gamma) + \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1}^n p_j \right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Uma rápida inspeção mostra que a demanda pelo i -ésimo bem depende de seu próprio preço e o preço de outros bens, ou seja, se um bem tem um preço que é demasiadamente alto, ele poderá ser substituído por outros produtos, dependendo do grau de substituíbilidade. Portanto, ele não será demandado. Por outro lado, se os outros bens são caros demais, então o i -ésimo produto será comprado de maneira abundante. Essa função de demanda possui outras propriedades, como o fato de que a demanda agregada não depende do grau de substituição entre os produtos, como se pode ver em 2.6. Finalmente, se os preços são idênticos entre as firmas, a quantidade agregada não muda com o número de produtos que existe na indústria, ou seja, para que o número total de bens comprados por esse consumidor seja alterado, os preços dos produtos precisam variar de alguma maneira.

2.1.2 Obtendo preços de equilíbrio pré-fusão

Esse modelo presume que cada firma na indústria vende um único bem. O lucro desse bem obtido de sua venda é definido como sendo:

$$\pi_i = (p_i - c)q_i \quad (2.9)$$

em que c é o custo marginal de se produzir uma única unidade do i -ésimo bem. Para fins de simplicidade, esse modelo presume que não existem custos fixos na função de custos e que os custos são homogêneos entre as firmas. O comportamento esperado da firma é que ela escolha um preço que maximize seu lucro. Ao substituir 2.8 em 2.9 obtém-se:

$$\pi_i = \frac{1}{n}(p_i - c) \left[v - p_i(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1}^n p_j \right] \quad (2.10)$$

em seguida, ao derivar 2.10 com respeito a cada p_i , em que $i \in \{1, \dots, n\}$, e igualando o resultado a zero tem-se a condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{1}{n} \left(v - 2(p_i + \gamma p_i + \frac{\gamma}{n} p_i) + \frac{\gamma}{n} \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j + c(1 + \gamma - \frac{\gamma}{n}) \right) = 0. \quad (2.11)$$

De 2.11, o preço referente ao equilíbrio de Nash para o i -ésimo bem será:

$$p_i = \frac{nv + \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j + c(n + n\gamma - \gamma)}{2(n + n\gamma - \gamma)} \quad (2.12)$$

Realizando manipulações algébricas, o equilíbrio simétrico, isto é, impondo que $p_i = p_b$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ será o seguinte:

$$p_b = \frac{nv + c(n + n\gamma - \gamma)}{n(2 + \gamma) - \gamma}. \quad (2.13)$$

em que p_b é o preço de equilíbrio de Nash simétrico anterior a uma fusão.

2.1.3 Resultado pós-fusão

Quando uma firma se funde com outra firma, o grupo que realizou a fusão se torna uma firma multi-produtos. Essa nova firma venderá m produtos, enquanto as firmas remanescentes, por sua vez, venderão $m - n$ produtos. O lucro da firma multi-produtos será a soma dos lucros obtidos quando se considera todos os bens que fazem parte da fusão, esse lucro será dado pela seguinte equação:

$$\pi_I = \sum_{i=1}^m \frac{(p_i - c)}{n} \left(v - p_i(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{j=1}^m p_j + \sum_{k=m+1}^n p_k \right) \right) \quad (2.14)$$

por outro lado, o lucro da k -ésima firma, que fica de fora da fusão, é dado pela equação:

$$\pi_k = \frac{(p_k - c)}{n} \left(v - p_k(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{l=1}^m p_l + p_k + \sum_{j=m+1, j \neq k}^n p_j \right) \right) \quad (2.15)$$

Como no caso anterior, a firma multi-produtos e as firmas que ficam de fora da fusão determinarão preços que maximizarão seus respectivos lucros. Para obter essas condições, basta derivar 2.14 com respeito a cada p_i , em que $i \in \{1, \dots, m\}$. Por sua vez, para obter as condições de primeira ordem das k firmas, basta derivar 2.15 com respeito a p_k , em que $k \in \{m+1, \dots, n\}$. O resultado será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_I}{\partial p_i} &= v - p_i(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{j=1}^m p_j + \sum_{k=m+1}^n p_k \right) + (p_i - c)(-(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n}) + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{l=1, l \neq i}^m (p_l - c) \right) = 0 \\ \frac{\partial \pi_k}{\partial p_k} &= v - p_k(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{l=1}^m p_l + p_k + \sum_{j=m+1, j \neq k}^n p_j \right) + (p_k - c)(-(1 + \gamma) + \frac{\gamma}{n}) = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O próximo passo é impor a condição de simetria de preços. Para que ela seja realizada, substitui-se cada p_i por p_I e cada p_k por p_o , que resultará em:

$$\begin{aligned} v + c(1 + \gamma - \frac{m\gamma}{n}) - 2p_I(1 + \gamma - \frac{m\gamma}{n}) + \frac{\gamma}{n}(n - m)p_o &= 0 \\ v + c(1 + \gamma - \frac{\gamma}{n}) + \frac{m\gamma}{n}p_I - p_o(2(1 + \gamma) - \frac{\gamma}{n}(n - m + 1)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Os preços referentes ao equilíbrio de Nash são obtidos ao se resolver o sistema de equações em 2.17. O resultado será:

$$p_I(m) = \frac{c(n\gamma(4n - 2m - 1) + 2n^2 + \gamma^2(2n^2 - nm - 2n - m^2 + 2m)) + nv(2n + \gamma(2n - 1))}{\gamma^2(2n^2 - nm - 2n - m^2 + 2m) + 2\gamma n(3n - m - 1) + 4n^2} \quad (2.18)$$

$$p_o(m) = \frac{c(n\gamma(4n - m - 2) + 2n^2 + \gamma^2(2n^2 - nm - 2n - m^2 + 2m)) + nv(2n + \gamma(2n - m))}{\gamma^2(2n^2 - nm - 2n - m^2 + 2m) + 2\gamma n(3n - m - 1) + 4n^2} \quad (2.19)$$

Onde 2.18 é o preço da firma multi-produtos e 2.19 é o preço de qualquer firma que não fizer parte da fusão. Perceba como ambos lucros estão em termos dos produtos que são vendidos pelo grupo que realiza a fusão. Quanto maior for o número de produtos vendidos pela firma multi-produtos, maiores serão os lucros para ambos tipos de firmas, isto é, $\frac{\partial p_I}{\partial m} > 0$ e $\frac{\partial p_o}{\partial m} > 0$. Esse lucros aumentam em decorrência do aumento de preços ocasionado pela fusão, nesse caso, a quantidade agregada de bens consumidos pelo consumidor representativo deve diminuir. Por essa razão, o excedente do consumidor diminuirá diante de uma fusão. Para o leitor que não esteja familiarizado com o excedente do consumidor, o índice pode ser descrito como a quantidade de utilidade obtida por um consumidor após uma transação. Uma fórmula simples para o excedente seria $CS = \sum_{i=1}^n U(q_i) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$, em que \mathbf{q} e \mathbf{p} são vetores para quantidades e preços respectivamente. Com quantidades mantidas fixas, um aumento nos preços leva a um aumento no excedente do consumidor.

2.2 Modelo de Cournot: competição por quantidades de bens heterogêneos

2.2.1 Obtendo preços de equilíbrio pré-fusão

Tratando-se do modelo de Cournot com bens heterogêneos, a diferença se dá no fato de que 2.5 é inserida em 2.9, o que resultará na seguinte expressão:

$$\pi_i = \left[v - \frac{1}{1 + \gamma} \left(nq_i + \gamma \sum_{j=1}^n q_j \right) - c \right] q_i \quad (2.20)$$

A i -ésima firma determina a quantidade a ser produzida para maximizar seu lucro. Com isso, basta tomar a primeira derivada com relação a quantidade q_i , ao igualar o resultado a zero, obtém-se a condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \left[v - \frac{1}{1 + \gamma} \left(nq_i + \gamma \sum_{j=1}^n q_j \right) - c \right] - \left(\frac{n + \gamma}{1 + \gamma} \right) q_i = 0 \quad (2.21)$$

A quantidade referente ao equilíbrio de Nash para o i -ésimo bem será:

$$q_i = \frac{(v - c)(1 + \gamma) - \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^n q_j}{2(n + \gamma)}. \quad (2.22)$$

Com base no resultado anterior, determinando-se $q_i = q_b$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, obtém-se:

$$q_b = \frac{(v - c)(1 + \gamma)}{n(2 + \gamma) + \gamma} \quad (2.23)$$

2.2.2 Resultado pós-fusão

O próximo passo é considerar o resultado no pós-fusão. Como no caso de Bertrand, considera-se que uma firma multi-produtos que vende m bens. Seu lucro será representado pela seguinte equação:

$$\pi_I = \sum_{i=1}^m \left[v - \frac{1}{1 + \gamma} \left(nq_i + \gamma \left(\sum_{j=1}^m q_j + \sum_{k=m+1}^n q_k \right) \right) - c \right] q_i \quad (2.24)$$

por sua vez, o lucro das firmas que ficam de fora são representados pela equação:

$$\pi_k = \left[v - \frac{1}{1 + \gamma} \left(nq_k + \gamma \left(\sum_{j=1}^m q_j + q_k + \sum_{l=m+1, l \neq k}^n q_l \right) \right) - c \right] q_k. \quad (2.25)$$

Ao derivar 2.24 para cada q_i , em que $i \in \{1, \dots, n\}$, e a equação 2.25 para com relação ao k -ésimo produto, basta igualar a zero e as seguintes condições de primeira ordem são obtidas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_I}{\partial q_i} &= v - \frac{1}{1+\gamma} \left[nq_i + \gamma \left(\sum_{j=i}^m q_j + \sum_{k=m+1}^n q_k \right) - c \right] - \left(\frac{n+\gamma}{1+\gamma} \right) q_i - \frac{\gamma}{1+\gamma} \sum_{j=1, j \neq i}^m q_j = 0 \\ \frac{\partial \pi_k}{\partial q_k} &= v - \frac{1}{1+\gamma} \left[nq_k + \gamma \left(\sum_{j=i}^m q_j + q_k + \sum_{l=m+1, l \neq k}^n q_l \right) - c \right] - \left(\frac{n+\gamma}{1+\gamma} \right) q_k.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Considerando um equilíbrio simétrico, troca-se cada q_i por q_I e cada q_k por q_o . Nesse caso, obtém-se:

$$\begin{aligned}v - c - \left(\frac{2n}{1+\gamma} \right) q_I - \left(\frac{2m\gamma}{1+\gamma} \right) q_I - \left(\frac{\gamma n - \gamma m}{1+\gamma} \right) q_o &= 0 \\ v - c - \frac{2n}{1+\gamma} q_o - \frac{\gamma m}{1+\gamma} q_I - \frac{2\gamma}{1+\gamma} q_o - \frac{\gamma(n-m-1)}{1+\gamma} &= 0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Ao solucionar o sistema de equações, o resultado obtido para as quantidades após uma fusão para a firma multi-produtos será:

$$q_I(m) = \frac{(v-c)(1+\gamma)(2n+\gamma)}{(2n+2\gamma m)(2n+\gamma n-\gamma m+\gamma) - mn\gamma^2 + \gamma^2 m^2}\tag{2.28}$$

enquanto o as firmas que ficam de fora da fusão produzirão a quantidade:

$$q_o(m) = \frac{(v-c)(1+\gamma)[(2n+2\gamma m)(2n+\gamma n-\gamma m+\gamma) - mn\gamma^2 + \gamma^2 m^2 - 2\gamma(2n+\gamma)]}{[2n+\gamma(n-m+1)][(2n+2\gamma m)(2n+\gamma n-\gamma m+\gamma) - mn\gamma^2 + \gamma^2 m^2]}.\tag{2.29}$$

Nesse equilíbrio, a firma multi-produtos passará a produzir menos do que as firmas que ficam de fora da fusão. A consequência imediata é que a fusão pode não ser lucrativa se os produtos não forem suficientemente diferenciados. Quanto maior o grau de diferenciação, ou seja, menor o parâmetro de substitutibilidade (γ) mais lucrativa será a fusão. Esse resultado contra intuitivo, de fusões que não resultam em lucros imediatos, foi inicialmente documentado pelos autores [Salant, Switzer e Reynolds \(1983\)](#). Dessa conclusão, presume-se que, caso uma indústria de fato tenha sua estrutura de mercado similar ao caso representado pelo modelo de Cournot com bens diferenciados, algumas fusões deixarão de ocorrer porque não são lucrativas. Esse resultado aponta para o sentido de que fusões são endógenas.

2.3 Ganhos de Eficiência

Como discutido por [Motta \(2004\)](#), ganhos de eficiência podem ser responsáveis por compensar os efeitos negativos referentes a fusões horizontais. Ou seja, quando estão

presentes, ao invés de aumentos nos preços, é possível que eles fiquem estáveis ou até mesmo ocorra diminuição dos mesmos. Uma possível justificativa para isso é o fato de que firmas podem ter diminuição nos custos que estão associados à produção dos produtos após uma fusão porque passam a ter, em conjunto, um estoque de capital maior, como é sugerido por [Cunha e Vasconcelos \(2015\)](#). Outras justificativas podem estar relacionadas a economias de escala e escopo. A produção dos bens pode ser reorganizada, trazendo economias de escala, ou a produção conjunta dos bens produzidos pela firma multi-produtos pode levar a redução nos custos. Motta observa que uma possível justificativa está associada a mudança dos gestores das firmas, levando a troca de gestores menos eficientes por gestores mais eficientes, mas ressalta que as evidências empíricas não corroboram com essa hipótese.

No caso do modelo trabalhado, o ganho de eficiência afeta o lucro diretamente: se e é o ganho de eficiência, o lucro passa a ser $\pi_i = (p_i - (1 - e)c)q_i$, em que $e \leq 1$. Diante de ganhos de eficiências, então, a estratégia mais eficiente da parte da firma multi-produtos pode deixar de ser aumentar os preços, podendo até ser a diminuição dos mesmos. Por outro lado, as firmas que ficam de fora da fusão deixam de ser beneficiadas por uma fusão quando ganhos de eficiências estão presentes. A firma multi-produtos passa a ser mais competitiva, produzindo de maneira mais eficiente que seus concorrentes.

3 O modelo baseado em agentes

O Capítulo 2 deu uma breve visão geral a respeito dos modelos analíticos de fusão horizontal considerados. Descrever a *agentização* desses modelos é o propósito dessa seção. Como será demonstrado por meio do protocolo ODD que foi preparado para esse trabalho, baseado no trabalho de [Railsback e Grimm \(2019\)](#), a *agentização* desse modelo ocorrerá com respeito ao comportamento da firma. Ao invés de firmas que possuem acesso a informação e racionalidade perfeitas, firmas possuem racionalidade limitada. Com isso, nós estamos efetivamente relaxando duas das hipóteses do modelo original.

Propósitos e padrões

O propósito do modelo é reproduzir os resultados observados no modelo de Competição de Bertrand com bens diferenciados. Fusões levam a concentração de mercado, o que leva a um aumento generalizado nos preços dos bens vendidos no mercado.

Variáveis de estado das entidades e escalas

As entidades do modelo são firmas que estão engajadas num processo de competição. Nessa versão do modelo, espaço geográfico não é relevante. Todo período corresponde a um dia e as simulações são realizadas por períodos que vão de 1500 a 4000 dias. Todas firmas possuem as seguintes variáveis de estado:

- *current price*: da qual a entidade extrai lances a cada período.
- *cost*: o custo de se produzir um único bem.

Visão geral do processo e programação

A cada período, as firmas extraem lances que determinam seus preços praticados especificamente no período em questão. As quantidades são determinadas com base nos preços considerando a demanda de um agente representativo e, com base nessas quantidades, os lucros das firmas são calculados e guardados em suas memórias. Quando os preços estão estáveis, as firmas se envolvem num processo de fusão e uma nova fase de ajuste de preços se inicia.

Conceitos de design

Firmas tentam aprender os preços que maximizam seus lucros adaptativamente. Como as firmas não são capazes de ver informação de seus competidores, a interação

ocorre apenas por meios indiretos, pois seus preços afetam a demanda. A partir do processo de aprendizagem e adaptação, preços jogo-teóricos (preços do equilíbrio de Nash) emergem. Essas modificações são, fundamentadas na abordagem de Guerrero e Axtell (2011), modificações de primeira ordem, no sentido de que a aprendizagem e interação, mesmo que indireta, estão sendo incluídas num modelo em que não se presume aprendizagem. Os agentes, no modelo original, sabem como seus concorrentes vão se comportar e reagem de acordo com o que foi realizado por eles. Por outro lado, um competidor qualquer não sabe como eles se comportam, e aprendem com base nas respostas observadas em seu lucro.

Inicialização

Nessa versão, as firmas são idênticas quando se consideram os preços correntes, custos e parâmetros de aprendizagem. A única fonte de heterogeneidade no modelo são os lances que são escolhidos de forma aleatória. Os valores escolhidos para todos os parâmetros do modelo são mostrados no capítulo que trata de descrever os experimentos de simulação.

Submodelos

Além da equação responsável pela determinação da demanda, exposto na seção que trata de descrever os modelos analíticos, um outro submodelo é responsável pelo comportamento da firma. O método de aprendizagem é baseado no trabalho de Kimbrough (2019). É uma adaptação de um método de busca em linha que é útil para se determinar os pontos críticos de funções de uma única variável¹. As firmas extraem lances, que serão os preços num período específico, de uma distribuição uniforme:

$$bid \sim U(\text{current price} - \delta, \text{current price} + \delta) \quad (3.1)$$

Depois de extraírem os lances de preço, as quantidades são determinadas pela equação 2.8 do capítulo anterior. Os resultados de seus lucros são guardados em uma de duas listas: a primeira lista será utilizada no caso em que a firma dá um lance mais alto do que seu preço corrente; a outra lista é para quando a firma dá um lance inferior ao seu preço corrente. Depois que uma “época”, nome dado a uma fase de aprendizagem que consiste em 30 períodos (ou dias), a firma compara a média de ambas listas. Se a lista associada a preços maiores possui um lucro médio maior do que a lista com preços menores, então:

$$new\ current\ price = current\ price + \epsilon \quad (3.2)$$

¹ Veja Press et al. (2007) para uma breve exposição do método.

caso contrário:

$$\text{new current price} = \text{current price} - \epsilon \quad (3.3)$$

Depois que uma firma termina, as listas são esvaziadas e uma nova fase de aprendizagem se inicia. Perceba que os parâmetros δ e ϵ possuem um papel muito simples: o primeiro determina o intervalo que envolve o preço corrente e será utilizado para a extração de lances, enquanto o segundo altera permanente o tamanho desse preço corrente, ou seja, quanto a firma efetivamente acha que é o preço que maximiza seu lucro. Um pseudocódigo simples, adaptado de [Kimbrough \(2019, p.189\)](#) é apresentado para tornar o processo mais compreensível no algoritmo a seguir.

Algoritmo 1 Explorar e Ajustar

```

1: Definir os parâmetros de aprendizagem:  $\delta, \epsilon, epoch\_length$ 
2:  $counter \leftarrow 0$ 
3:  $returns\_up \leftarrow []$  (Uma lista vazia associada ao aumento nos preços correntes)
4:  $returns\_down \leftarrow []$  (Uma lista vazia associada à diminuição nos preços correntes)
5: Faça para sempre:
6:    $counter \leftarrow counter + 1$ 
7:    $price\_bid \sim U(current\_price - \delta, current\_price + \delta)$ 
8:    $profit \leftarrow$  Retorno de  $price\_bid$ 
9:   if  $bid\_price \geq current\_price$  then
10:     Anexar lucro à lista  $returns\_up$ 
11:   else
12:     Anexar lucro à lista  $returns\_down$ 
13:   end if
14:   if ( $counter \bmod epoch\_length = 0$ ) then (Isso significa que o período de aprendizagem terminou.)
15:     if  $mean\ returns\_up \geq mean\ returns\_down$  then
16:        $current\_price \leftarrow current\_price + \epsilon$ 
17:        $returns\_up \leftarrow []$ 
18:        $returns\_down \leftarrow []$ 
19:     else
20:        $current\_price \leftarrow current\_price - \epsilon$ 
21:     end if
22:   end if
23: Voltar ao passo 5

```

A ideia é similar para o caso de Cournot, ao invés de preços correntes, as firmas consideram quantidades correntes. Os lances extraídos pelas firmas são referentes a lances de quantidade, isto é, em cada período as firmas escolhem uma quantidade que será vendida no mercado e os preços são dados pelo agente representativo. Esse é o único ajuste realizado no algoritmo quando as estruturas de competição são diferenciadas.

De acordo com [Brenner \(2006\)](#), esse é um método baseado em rotinas. Presume-se que indivíduos aprendem utilizando mecanismos fixos ou rotinas, como as apresentadas no algoritmo anterior. Processos de aprendizagem baseados em rotinas são meras simplificações

dos processos de aprendizagem reais que ocorrem com os indivíduos presentes na sociedade, mas são representações úteis para o desenvolvimento de trabalhos porque se aplicam a diversas situações, como argumenta o autor. De fato, uma representação ou um modelo correto para se representar o processo cognitivo de um humano fielmente não existe, embora existam diversas alternativas possíveis para isso.

Mais especificamente, considerando o ponto de vista de Brenner, o modelo de Kimbrough se aproxima mais do que se denomina “melhoramento e coleção de experiências”. Entende-se, primeiramente, que os indivíduos capazes de aprender o fazem por tentativa e erro. Isto é, indivíduos são capazes de escolher diferentes ações baseadas no contexto em que esses indivíduos estão inseridos e, com base no resultado de suas ações, informação é coletada e incorporada para a tomada de decisão futura. Um exemplo de utilização de experimentação para a representação da aprendizagem está presente no trabalho de [Osborne e Rubinstein \(1995\)](#), em que um agente toma variadas decisões ao longo de um período de tempo k e determina qual a ação mais adequada. Aqui, no entanto, a representação da aprendizagem do agente é um pouco mais complexa, porque a experiência coletada pelo agente ao longo do tempo determina como seu espaço de escolha de ações deve ser adaptado em resposta às consequências observadas e não necessariamente determina uma ação em específico.

Um outro submodelo para estabilidade de preços (ou “equilíbrio”) é necessário para a inicialização de uma fusão. O que se pretende é contar uma história na qual fusões só ocorrem quando preços pré-fusão já estão estáveis, isto é, preços já estão em equilíbrio. A estabilidade é definida em termos de médias móveis, que considera a média de preço corrente de três épocas. Seja μ_1 a média de preço corrente de três épocas; depois disso, μ_2 é definida como a média das próximas três épocas. Se o valor absoluto da diferença entre essas duas médias é menor do que um limiar arbitrário, denominado θ , por exemplo $|\mu_2 - \mu_1| \leq \theta$, então os preços são estáveis. Isso significa que as firmas encontraram um equilíbrio. Perceba que a regra não pressupõe que o equilíbrio seja simétrico, mas sim que seja estável: não há incentivos para que as firmas mudem, dramaticamente, seus preços. Caso contrário, $\mu_1 = \mu_2$ e o novo valor de μ_2 é calculado com base no valor das próximas três épocas.

O interesse está na média dos preços correntes antes e depois das fusões. Por essa razão, somente quando os preços estiverem estáveis o processo de fusões ocorrerá. Quando duas firmas realizam fusão, o lucro de cada produto é calculado individualmente, mas as firmas que são parte do grupo que realizou fusão veem seus lucros como a soma dos lucros individuais.

4 Experimentos de Simulação

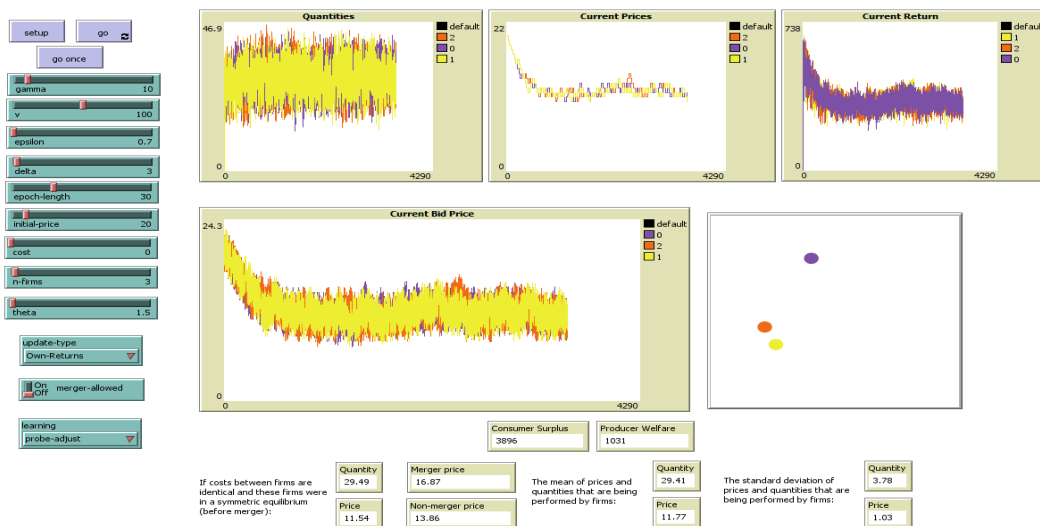
Neste capítulo, trataremos de explicar as ferramentas utilizadas para implementação e avaliação dos modelos, além de descrever quais experimentos foram realizados do trabalho e seus parâmetros base.

4.1 Implementação do modelo e seus parâmetros

O modelo foi implementado utilizando Netlogo v6.2 (Wilensky (1999)). Os códigos referentes aos modelos foram incluídos no apêndice, o que torna os resultados totalmente reproduzíveis. Seus parâmetros usados nas simulações foram os dados na tabela 1.

A Figura 1 mostra uma imagem de uma operação típica do modelo. Existem controles deslizantes que determinam o valor dos parâmetros de aprendizagem, como ϵ e δ , parâmetros de demanda, como γ e v , preços iniciais, custos das firmas (homogêneo entre as firmas) e o número de firmas.

Figura 1 – Operação típica do modelo



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando o modelo de Bertrand, o preço referente ao equilíbrio de Nash é 11,54, e a quantidade associada ao preço é de 29,49. Após a ocorrência de uma fusão, o preço para o grupo que realiza a fusão será de 16,87, com quantidade 24,36; para as firmas que não fazem parte do grupo, o preço será de 13,86, com quantidade 17,70. Tratando-se do modelo de Cournot, a quantidade do equilíbrio de Nash simétrico será 23,91, enquanto o preço será 28,26. Novamente, após a ocorrência de uma fusão, a quantidade do grupo que realiza fusão será 17,67, enquanto a do grupo que fica de fora será 28,71. Com relação

Tabela 1 – Parâmetros usados na simulação

Variável	Valor
γ	10
v	100
ϵ	0,7
δ	3
θ	3
Duração de uma época	30
Preço inicial (Bertrand)	20
Quantidade inicial (Cournot)	40
Custos das firmas	0
Número de firmas	3

Fonte: Produzido pelo autor.

aos preços, para o grupo de dentro tem-se um preço de 36,95, enquanto o grupo de fora cobra 33,94.

4.2 Experimentos

Essa seção descreve brevemente os experimentos de simulação que serão conduzidos. Em todos os casos, 10 simulações foram realizadas para cada combinação de parâmetros. Por exemplo, no caso do primeiro experimento, foram realizados um total de dez experimentos, mas no caso do segundo experimento, que envolve diferentes combinações de parâmetros, mais de 1000 simulações foram realizadas.

4.2.1 Primeiro experimento

O primeiro experimento consiste em realizar uma simulação em que, primeiro, as firmas engajam em competição e buscam por preços que maximizem seus lucros utilizando a pouca informação que está disponível para elas. Depois, quando preços estiverem estáveis, duas das firmas, escolhidas aleatoriamente realizarão fusão. Isso levará a uma nova rodada em busca de preços que maximizem seus lucros. Os parâmetros utilizados para essa simulação que serve como base são os mesmos presentes na tabela 1.

4.2.2 Segundo experimento

Firmas que possuem custos heterogêneos são incluídas no segundo experimento. Assim como no primeiro experimento, as firmas estão engajadas em competição em todo o processo e buscam por preços. No entanto, define-se três tipos de fusões dentro do escopo da simulação: eficientes, ineficientes e heterogêneas. No primeiro caso, ambas firmas que realizam fusão possuem custos baixos. O caso em que duas firmas de custos altos em relação aos seus competidores realizam fusão é denominado ineficiente. Por fim, quando uma firma de custo baixo (alto) realiza uma fusão com uma firma de custo alto (baixo), ocorre o caso denominado heterogêneo.

Diferente do primeiro experimento, alguns outros ajustes são feitos com relação aos parâmetros, para se considerar uma variedade de experimentos de simulação mais ampla. São elencados as diferenças presentes:

- O número de firmas varia: podem ser 4, 8 ou 12 firmas.
- Os custos podem variar: os custos vão de 0 a 3 unidades.
- Os custos são heterogêneos: 50% das tem custos 50% maiores do que as outras firmas, ou seja, supondo que numa rodada o custo base de uma firma seja equivalente a 3, a firma que for escolhida para ter um custo maior terá um custo de 6.

4.2.3 Terceiro experimento

Por vezes uma autoridade antitruste precisa avaliar casos relacionados a fusões horizontais. Uma das possíveis evidências apresentadas por grupos de firmas que vão realizar fusões são possíveis eficiências que são fruto da concentração. Considerando que as fusões podem trazer eficiências com relação a diminuição nos custos das firmas, o terceiro experimento consiste em avaliar qual o tamanho da *eficiência alegada* por duas firmas que realizam uma fusão, que seja capaz de manter os preços pós-fusão no mesmo nível de preços pré-fusão. Ênfase especial em eficiência alegada, pois não há submodelo no modelo baseado em agentes que seja gerador de eficiências¹.

4.2.4 Quarto experimento

O quarto e último experimento consiste na avaliação do modelo considerando que as firmas competem por quantidades ao invés de preços. Com base na discussão do capítulo anterior, presume-se que o resultado das fusões nessa estrutura de mercado consistirá em reduções dos lucros das firmas que realizem fusão. Por essa razão, dois valores

¹ Motta (2004) descreve a possibilidade de que eficiências possam gerar incentivos para que firmas incumbentes saiam do mercado. Essa hipótese não é considerada nessa versão do modelo.

distintos para o grau de substitutibilidade serão considerados. Primeiro, os valores base de simulação serão representados. Depois, um ajuste em γ será considerado com o objetivo de compreender o efeito de sua diminuição (de 10 para 2), sobre as quantidades produzidas pelas firmas que estão dentro e fora da fusão.

5 Resultados

Nesse capítulo ocorrerá a discussão dos resultados do modelo considerando os parâmetros discutidos no capítulo anterior. Os resultados de cada um dos experimentos serão analisados ao longo do Capítulo 4. Testes estatísticos serão realizados para se comparar, especificamente, resultados referentes aos preços (quantidades) correntes encontrados pelas firmas engajadas no processo de aprendizagem.

5.1 Resultados do primeiro experimento de simulação

5.1.1 Antes das fusões

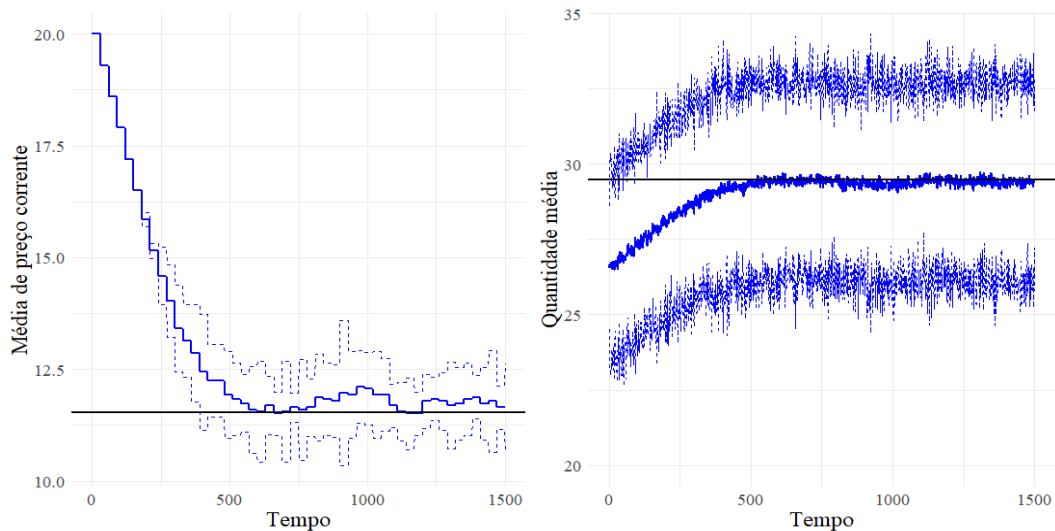
Na primeira parte do experimento, 10 simulações com os parâmetros iniciais estabelecidos no Capítulo 4 foram consideradas para se entender o comportamento do modelo. A cada período, a média e desvio padrão dos preços, quantidades e bem-estar foram calculadas. Os dados foram agrupados por período, então o leitor deve se atentar para o fato de que essas são médias de médias e desvios-padrão. A Figura 2 mostra a progressão dos preços e quantidades conforme o tempo evolui. Nas simulações realizadas, a estabilidade de preços ocorre perto do período de número 600. Inicialmente, as firmas percebem que seus preços correntes estão demasiadamente altos e ajustam, conjuntamente, os mesmos para baixo. Por essa razão, nos primeiros 250 períodos, não há variabilidade de preços. A medida que o tempo passa, a variabilidade de preços aumenta e os intervalos (linhas tracejadas que representam dois desvios-padrão) vão surgindo.

No equilíbrio de Nash, considerando preços simétricos, quantidades devem estar em torno de 29,49 para cada um dos bens disponíveis no mercado. A média da quantidade corrente considerando as simulações foi de 29,4, com um desvio padrão de 1,5. Com relação aos preços, o valor resultante do modelo analítico foi de 11,54. Nos experimentos de simulação, o valor médio observado para os preços foi de 11,75, ligeiramente maior do que o preço obtido por meio do modelo analítico. O desvio-padrão calculado com base nos preços correntes foi de cerca de 0,5.

A Figura 2 mostra a média dos preços no painel esquerdo e a média quantidades no painel direito, ambos em função do tempo. As linhas tracejadas representam as mesmas séries levando em conta a adição (subtração) de dois desvios-padrões. As linhas horizontais pretas representam os valores referentes ao equilíbrio de Nash.

Antes da ocorrência de fusões, depois de um período de aprendizagem, preços e quantidades referentes ao equilíbrio de Nash são aprendidos pelas firmas. Naturalmente, o processo de ajuste depende dos parâmetros de aprendizagem. Por exemplo, quando $\epsilon = 2$,

Figura 2 – Evolução de preços e quantidades em função do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

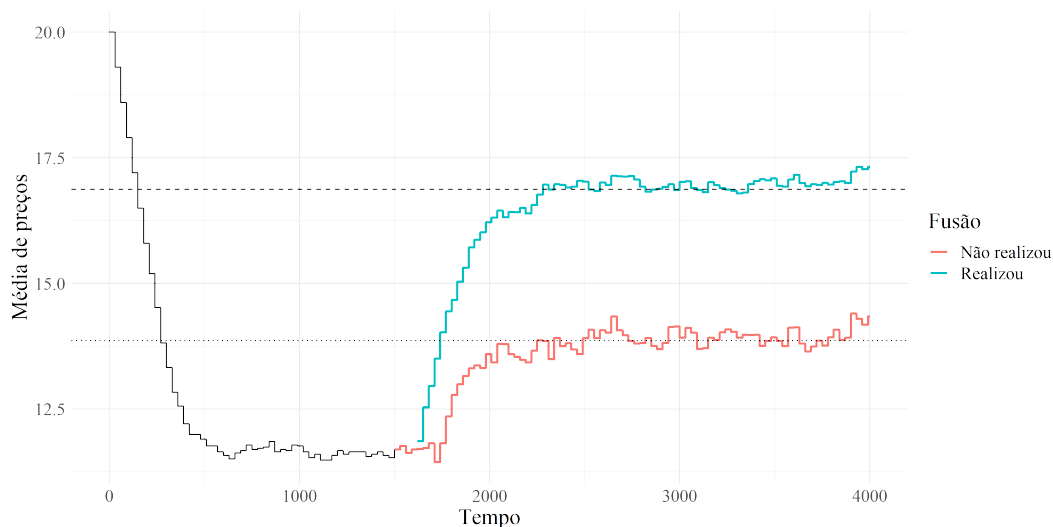
o processo de ajuste aconteceria até o período de número 250. No entanto, os desvios padrões de preços e quantidades seriam maiores. Nesse caso, se fusões são possibilidade dentro de um experimento de simulação, um ajuste ao parâmetro de estabilidade (θ) seria necessário de modo a considerar um desvio-padrão maior.

5.1.2 Depois das fusões

A segunda parte do experimento está relacionada ao efeito das fusões sobre os preços. Novamente, 10 simulações com os parâmetros base foram considerados, mas agora fusões só podem ocorrer a partir do período de número 1500 e contanto que a condição de estabilidade seja atingida. Na prática, firmas realizam fusão a partir do período de 1590. Resultados imediatos são dados pela Figura 3, que mostra os preços depois de uma fusão ter sido realizada, tanto para a firma multi-produtos como para a firma de fora da fusão. Aumentos nos preços estão presentes para ambos grupos que compõem a indústria: o grupo que realiza fusão e o que está de fora da fusão. Com valores similares ao modelo analítico, a média de preços está em torno de 16,5 com um desvio padrão de 1,08 para o grupo que realizou fusão. No caso da firma que está de fora da fusão, a média de preço é de 13,6 e seu desvio padrão é de 0,724.

A Figura 3 mostra a media de preços em função do tempo. Inicialmente, as firmas não estão fundidas e o processo de ajuste de preços ocorre. As firmas estão com um preço corrente médio muito superior ao preço de equilíbrio e vão reduzindo o valor gradualmente, chegando no preço pré-fusão, previsto pelo modelo analítico, em torno do período de número 600. A partir do período de número 1500 as fusões são permitidas pelo modelo e o gráfico passa a mostrar duas linhas distintas. A linha vermelha mostra o preço da firma

Figura 3 – Média de preços antes e após fusão em função do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

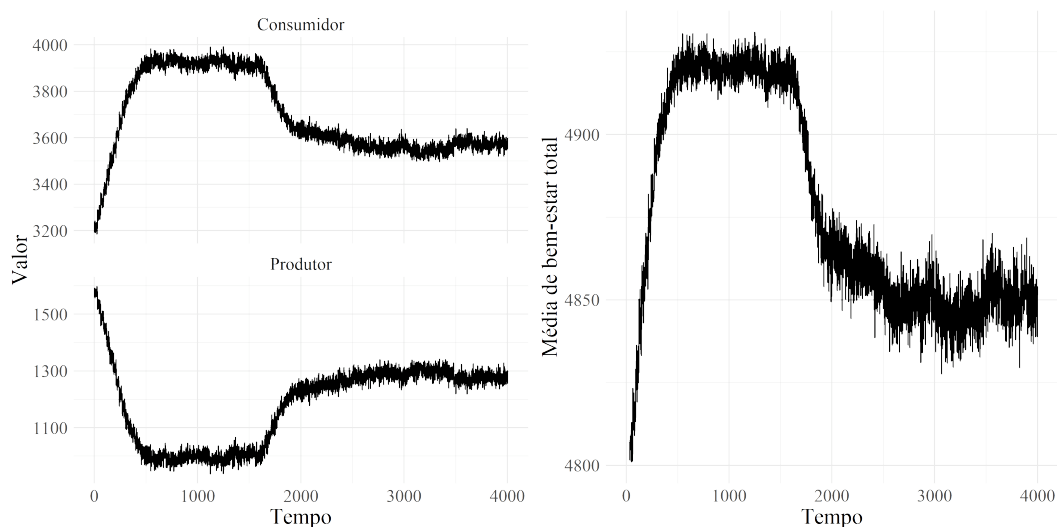
multi-produtos, enquanto a linha azul mostra o preço da firma que ficou de fora da fusão. Duas linhas horizontais tracejadas servem para mostrar os preços referentes ao equilíbrio de Nash pós-fusão. Como se pode notar, os preços de ambos grupos aumentaram, mas os da firma multi-produtos estão bem maiores. Em ambos os casos, as médias de preço estão próximas das previsões do modelo analítico.

É possível que essa diferença nos preços sejam fruto do acaso e, por essa razão, testes estatísticos foram conduzidos de modo a auxiliar na decisão de que a diferença entre as médias de preços entre os grupos são estatisticamente significativas. O resultado de um teste ANOVA simples Veja [Everitt e Hothorn \(2009\)](#). sugere que a hipótese nula de que a média de preços entre grupos que realizam a fusão e dos grupos que não realizam pode ser rejeitada a um nível de confiança de 95%. Quando um teste não paramétrico é considerado, no caso Kruskal-Wallis¹, o resultado é o mesmo: rejeita-se a hipótese nula de que a média de preços entre os grupos seja idêntica. Os resultados dão evidencia adicional de que a mudança nos preços observada após uma fusão não são mero fruto do acaso.

Como sugerido pelo modelo analítico, uma fusão leva a um aumento nos preços para ambos os grupos do mercado. Se os preços estão aumentando, tanto o excedente do produtor quanto o do consumidor são afetados. O painel esquerdo da Figura 4 mostra a evolução do excedente de produtores e consumidores. Não só o excedente do consumidor diminui após uma fusão, como o bem-estar total, que se trata da soma dos excedentes de ambos os grupos, diminui como é mostrado no painel direito. Esse é um outro resultado previsto pelo modelo analítico.

¹ Veja [Hollander e Wolfe \(1973\)](#).

Figura 4 – Evolução das medidas de bem-estar em função do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

5.1.3 Resultados do segundo experimento de simulação

O experimento adicional foi realizado para aprofundar o entendimento de padrões gerados pelo modelo. Diferentemente do primeiro experimento, considera-se que as firmas possuem custos positivos. O resultado imediato é um aumento nos preços. Como o experimento considera uma combinação de parâmetros razoavelmente grande (mais de 100 combinações), uma regressão linear foi utilizada para sintetizar os resultados obtidos. A Tabela 2 mostra os resultados da regressão linear estimada com base nos dados obtidos via experimentos de simulação.

Para a estimação do modelo, foram consideradas apenas as simulações que possuíam firmas de custo positivo. Além disso, apenas os valores referentes a preços após a realização da fusão e quando os preços já estavam estáveis foram utilizados. Com relação aos efeitos de fusão, somente efeitos que consideram custos heterogêneos foram utilizados, porque se a condição é falsa, os custos são homogêneos e todas as fusões são automaticamente “eficientes” do ponto de vista do experimento de simulação. Para se estudar esses efeitos, variáveis de tipo dummy foram criadas, isto é, quando uma das linhas da base de dados apresenta custo heterogêneo e fusão ineficiente, o valor da variável criada será 1 e caso contrário 0.

De acordo com os resultados da Tabela 2, como esperado, aumentar os custos de firmas no modelo baseado em agentes implica aumento nos preços dos produtos. Mais especificamente, aumentar o custo em 1% está associado a um aumento médio nos preços pós-fusão de 0.111%. Por outro lado, aumentar o número de firmas implica redução na média de preços pós-fusão. Uma firma adicional está associada a uma redução média dos preços em 0.26%. Quando os custos são heterogêneos, os preços aumentam mais

Tabela 2 – Regressão linear que sintetiza o experimento de simulação

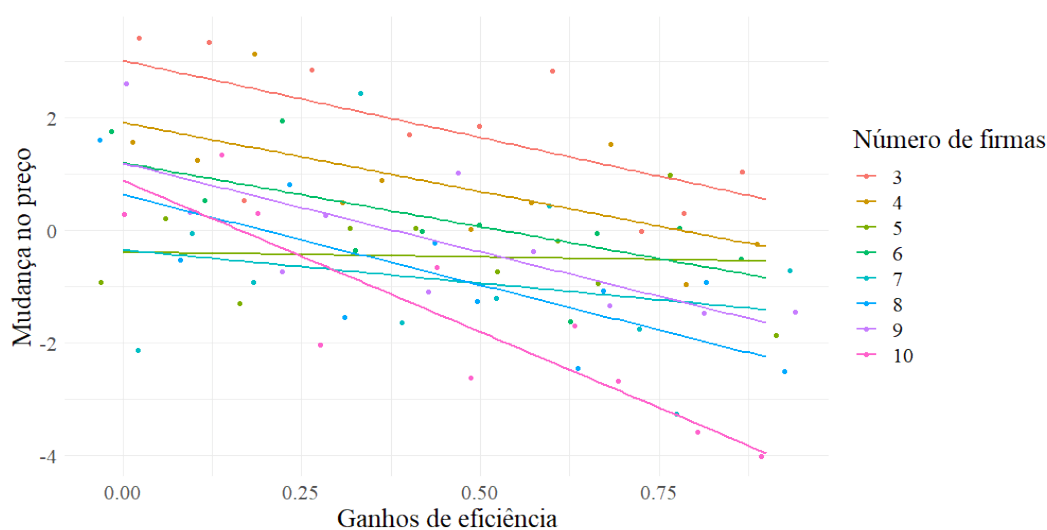
	<i>Variável Dependente:</i>
	<i>log(Média de preços pós-fusão)</i>
<i>log</i> (Custo)	0.111*** (0.007)
<i>log</i> (Número de firmas)	-0.261*** (0.009)
Custos heterogêneos e fusão ineficiente	0.044*** (0.012)
Custos heterogêneos e fusão heterogênea	0.024** (0.012)
Constante	2.989*** (0.019)
Observações	108
R ²	0.910
R ² ajustado	0.907
Erro padrão residual	0.044 (df = 103)
Estatística F	260.944*** (df = 4; 103)
<i>Nota:</i>	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

ainda, porque da maneira que a estrutura de preços foi delimitada no modelo, custos heterogêneos implicam que os preços serão maiores quando comparados a uma simulação de preços homogêneos. Em todos os casos, independente dos tipos de fusões consideradas, sejam eficientes, ineficientes ou heterogêneas, fusões estão inequivocamente associados ao aumento nos preços.

5.1.4 Resultados do terceiro experimento de simulação

Os ganhos de eficiência, em todas as simulações, levaram a reduções nos preços dos grupos que realizam fusões. A Figura 5.1.4 mostra os resultados de múltiplos experimentos de simulação que buscam entender os efeitos da mudança nos preços depois que uma fusão ocorre. O que se nota é que a mudança nos preços depende em grande medida do número de firmas que estão presentes no sistema. Quanto mais firmas presentes no sistema, menor será o aumento de preço decorrente de uma fusão e, por vezes, a diferença entre os preços anteriores e posteriores às fusões podem ser negativas, ou seja, as eficiências podem ser tão grandes que levam a preços pós-fusão inferiores a preços pré-fusão.

Figura 5 – Ganhos de eficiência e mudança nos preços



Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 5.1.4 sintetiza os efeitos dos ganhos de eficiência sobre os preços conforme o número de firmas varia. O objetivo é mostrar o tamanho do ganho de eficiência necessário para que uma os produtos de uma firma multi-produtos passem a ter preços pós-fusão igual aos preços pré-fusão. A outra coluna mostra o tamanho da eficiência necessária para que a firma que fica de fora da fusão passe a não vender nada. Para se obter os resultados, duas regressões foram estimadas: a primeira calcula a média de variação no preço em função do número de firmas e o ganho de eficiência. Supõe-se, então, que a média de variação é zero e calcula-se o tamanho da eficiência para cada firma. A segunda regressão calcula a variação da quantidade das firmas que ficam de fora de uma fusão em em função dos ganhos de eficiência e do número de firmas. Assim como no caso anterior, calcula-se o tamanho da eficiência necessária para cada firma considerando que a média da quantidade é nula.

Para que uma firma multi-produtos passe a cobrir a produção das outras competidoras em 100%, os ganhos de eficiência precisam ser grandes a ponto de ser uma impossibilidade. Por exemplo, num cenário com três firmas, a firma multi-produtos precisaria ser quase quatorze vezes mais eficiente do que antes para conseguir cobrir a produção da firma que fica de fora da fusão, isto é, fazer com que a firma que fique de fora passe a ter uma produção igual a zero. Isso significa que os custos marginais da firma multi-produtos precisariam ser negativos. É claro que isso dependerá, também, de outros parâmetros da demanda, como o grau de substitutibilidade dos produtos disponíveis no mercado. Não se considerou, no entanto, que firmas pudessem sair do mercado porque não são capazes de cobrir seus custos fixos, essa seria uma alternativa interessante para se explorar num trabalho posterior.

Tabela 3 – Síntese de resultados

Número de firmas	Eficiência de preço estável (%)	Eficiência de quantidade nula (%)
3	89	1382
4	75	1237
5	61	1092
6	47	946
7	33	801
8	18	656
9	04	511
10	-10	365

Fonte: Produzido pelo autor.

Com relação às mudanças nos preços, para que os preços fiquem inalterados, as eficiências são bastante menores, embora ainda sejam altas para os casos que possuem poucas firmas. Quando existem apenas três firmas no mercado, a firma multi-produtos precisa ter uma redução no custo equivalente a 89%. Por outro lado, quando o número de firmas é grande, é possível que a firma multi-produtos possua até uma folga para uma “perda de eficiência” e os preços ainda se manteriam reduzidos em comparação a um cenário com poucas firmas.

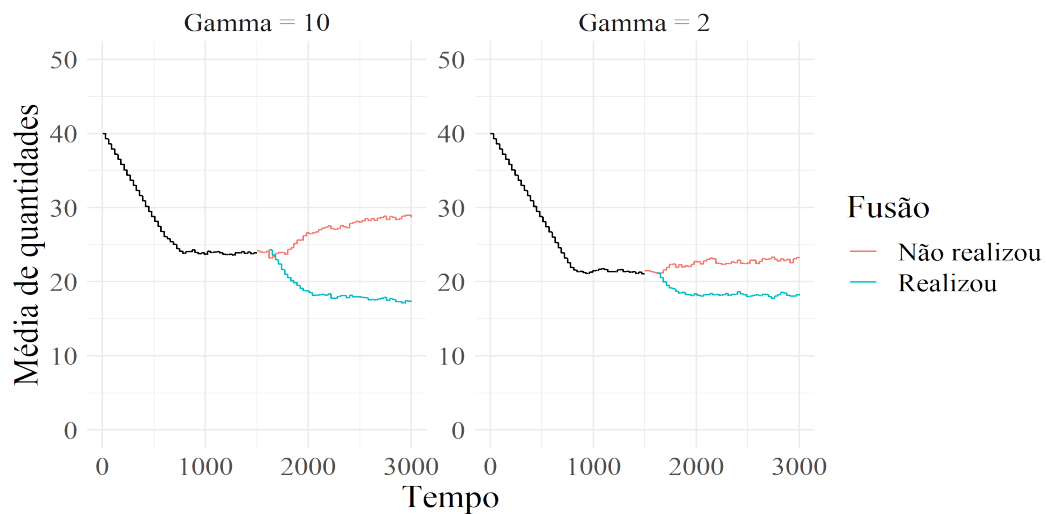
5.1.5 Resultados do quarto experimento de simulação

Como observado no capítulo anterior, o quarto experimento de simulação consistiu na simulação de um modelo de Cournot com bens diferenciados. Nesse caso, as firmas utilizam o algoritmo *Explorar e Ajustar* para definir suas quantidades. Assim como no caso do modelo de Bertrand, firmas estão engajadas em competição e, inicialmente, aprendem quantidades que maximizam seus lucros, ou seja, quantidades referentes ao equilíbrio de Nash. A partir do período de número 1590, as firmas do sistema realizam fusões e ajustam suas quantidades considerando o ocorrido.

A Figura 6 mostra a média das quantidades escolhidas pelas firmas do sistema em função do tempo. Inicialmente, as médias das quantidades escolhidas pelas firmas são superiores ao equilíbrio de Nash, considerando os parâmetros escolhidos, por essa razão as quantidades médias vão decaindo até que se estabilizam por volta do período de número 600. Quando as firmas se fundem, o grupo que realiza fusão diminui as quantidades. Em resposta, o grupo que está de fora da fusão passa a aumentar as quantidades, isso quando $\gamma = 10$. Quando γ é menor, a firma multi-produtos diminui as quantidades, mas a firma de fora mantém a quantidade quase que constante. Esse comportamento é exatamente como o previsto pelo modelo analítico, atestando a precisão do modelo baseado em agentes,

mesmo considerando que as firmas possuem racionalidade limitada.

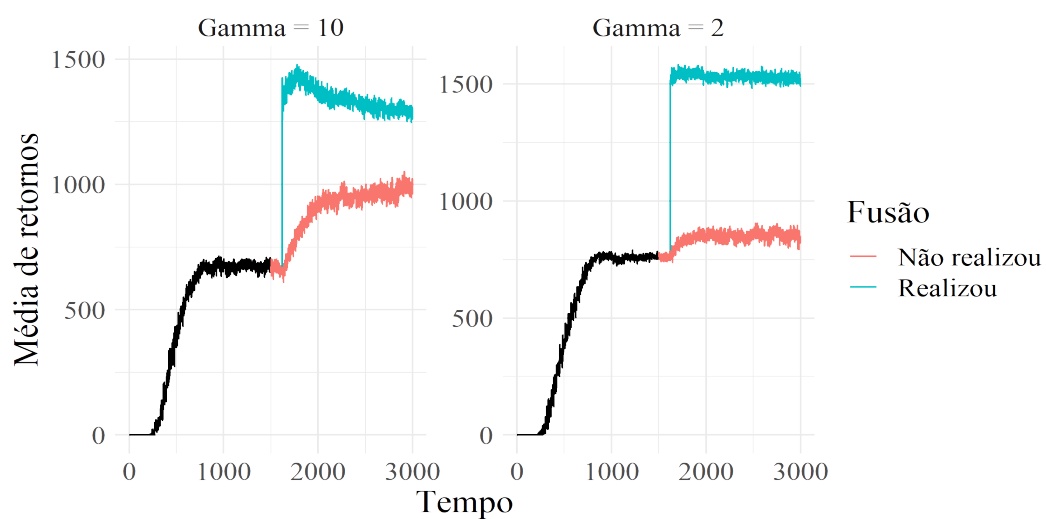
Figura 6 – Média de quantidades antes e após fusão em função do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

Tratando-se dos preços, percebe-se que no pós-fusão os preços são maiores quanto menor for o valor de γ . Ou seja, quanto menor for a substitutibilidade dos produtos, maior é o preço e, por consequência, maior será o lucro do grupo que realiza fusão. É importante notar, no entanto, que o lucro possui um comportamento curioso quando $\gamma = 10$. Inicialmente, o lucro do grupo que realizou fusão cresce até atingir um pico, mas depois vai reduzindo ao passo que o grupo que fica de fora da fusão começa a ofertar maiores quantidades de seus produtos. Isso está associado ao fato de que a firma que está de fora, inicialmente, não sabe que maiores quantidades irão aumentar seus lucros, mas ao passo que aumenta suas quantidades e nota que os lucros estão aumentando concomitantemente, suas quantidades correntes passam a aumentar até que fiquem estáveis. Essa dinâmica pode ser observada na Figura 7.

Figura 7 – Média de lucros antes e após fusão em função do tempo



Fonte: elaborada pelo autor.

Considerações finais

O presente trabalho mostrou como a agentização de um modelo de fusões horizontais pode ser conduzida considerando firmas com racionalidade imperfeita e informação incompleta. Mesmo com um método de aprendizagem rudimentar, firmas podem se adaptar ao ambiente e aprender preços ótimos em cenários distintos: tanto nos que fusões estão presentes quanto nos que não estão. Além disso, considera-se que o trabalho cumpre o seu objetivo de aproximar duas áreas algo que de fato, em conjunto, são pouco exploradas pela literatura disponível. Especificamente no caso de fusões horizontais, acredita-se que o trabalho possui até algum grau de ineditismo. As extensões e experimentos que podem ser realizados são bastante empolgantes e são consideradas nos parágrafos a seguir.

Futuras extensões para esse mesmo trabalho podem considerar uma porção de elementos. Dentre eles, métodos alternativos de aprendizagem podem ser implementados e comparados ao *Explorar e Ajustar*. Além disso, aprendizagem heterogênea poderia ser uma possibilidade a ser incluída em extensões futuras, pois diferentes padrões de precificação poderiam emergir em decorrência das alternativas de precificação por parte das firmas. Como exemplo, três alternativas candidatas para o método de aprendizagem poderiam ser consideradas: aprendizagem de mínimos quadrados, aprendizagem via algoritmos genéticos e aprendizagem via gradiente.

A competição espacial, que poderia ser incluída por meio de um parâmetro adicional da utilidade dos agentes, também poderia ser incluída como possível extensão, no entanto, alguma mudança com relação a utilidade do agente representativo precisaria ser realizada: por exemplo, invés de um único agente, uma possibilidade seria a inclusão de vários agentes de demanda unitária e a competição toda se daria num espaço toroide ou em forma de caixa. Outra alternativa de representação da competição espacial seria considerar que as firmas e consumidores estão num círculo, como foi proposto por [Levy e Reitzes \(1992\)](#).

Outra característica interessantes que podem ser consideradas como extensões para esse modelo, seria buscar explorar submodelos que determinam o processo que leva a fusão das firmas. A fusão é uma escolha do grupo que funde, mas além do aumento no lucro decorrente da maior possibilidade do exercício de poder de mercado, é possível que hajam explicações na literatura que possibilitem a endogenização do processo. Por exemplo, ao invés de ser um processo aleatório, como é o caso nos modelos desenvolvidos nesse trabalho, talvez essa poderia ser uma decisão de longo prazo, que leva em conta um leilão entre todas as firmas do mercado, processo que é descrito no trabalho de [Gowrisankaran \(1999\)](#). Duas outras possibilidades interessantes estão presentes no trabalho do autor que poderiam ser estendidas para o modelo aqui desenvolvido: a primeira se trata da

endogenização dos processos referentes a ganhos de eficiências advindos de fusão, que podem estar relacionados ao processo de inovação presente no modelo desenvolvido pelo autor. A segunda se trata da possibilidade de entrada e saída das firmas conforme o tempo se desenvolve, o aumento do poder de mercado inclui a possibilidade de que barreiras à entrada sejam levantadas pelos competidores incumbentes.

Essas extensões mencionadas poderiam ser inclusões relevantes para a reprodução de possíveis fatos estilizados relacionados a fusões horizontais ou poderiam fazer com que o modelo realizasse previsões mais precisas com relação à fusões que venham a acontecer num determinado mercado, o que naturalmente exigiria que mais características (parametrizações ou submodelos) fossem incluídas ao modelo de modo a representar melhor indústrias com características específicas. Quanto mais complexo o modelo se torna, guardadas as possibilidades de que ele estaria sob efeitos de um sobre ajuste, mais provável se torna a possibilidade de que o mesmo seja utilizado para representar mais fielmente fusões que já ocorreram por todo o mundo, o que torna o trabalho bastante empolgante.

Referências

- BERRY, S.; LEVINSOHN, J.; PAKES, A. Automobile prices in market equilibrium. *Econometrica*, 1995. Citado na página 12.
- BRENNER, T. Chapter 18 agent learning representation: Advice on modelling economic learning. *Handbook of Computational Economics*, v. 2, p. 895–947, 12 2006. Citado na página 36.
- CHANG, M.-H. Industry dynamics with knowledge-based competition: A computational study of entry and exit patterns. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, v. 4, p. 73–114, 03 2009. Citado na página 25.
- CUNHA, M.; VASCONCELOS, H. Mergers in Stackelberg Markets with Efficiency Gains. *Journal of Industry, Competition and Trade*, v. 15, n. 2, p. 105–134, June 2015. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/kap/jincot/v15y2015i2p105-134.html>>. Citado na página 33.
- DAWID, H. *Adaptive Learning by Genetic Algorithms*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1999. Citado na página 21.
- DESOUZA, S. A. Antitrust mixed logit model. *Série Estudos Econômicos*, n. 04, p. 4, 2009. Citado na página 12.
- EPSTEIN, J. M. Agent-based computational models and generative social science. *Complexity*, v. 4, n. 5, p. 41–60, 1999. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291099-0526%28199905/06%294%3A5%3C41%3A%3AAID-CPLX9%3E3.0.CO%3B2-F>>. Citado na página 15.
- EPSTEIN, R. J.; RUBINFELD, D. Merger simulation: A simplified approach with new applications. *Antitrust Law Journal*, v. 69, p. 883–919, 01 2002. Citado na página 12.
- EVERITT, B.; HOTHORN, T. *A handbook of statistical analyses using R*. Boca Raton: CRC Press, 2009. ISBN 9781420079333. Citado na página 44.
- FROEB, L.; WERDEN, G. The effects of mergers in differentiated products industries: Logit demand and merger policy. *Journal of Law, Economics and Organization*, v. 10, p. 407–26, 10 1994. Citado na página 12.
- GOWRISANKARAN, G. A dynamic model of endogenous horizontal mergers. *The RAND Journal of Economics*, [RAND Corporation, Wiley], v. 30, n. 1, p. 56–83, 1999. ISSN 07416261. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2556046>>. Citado na página 51.
- GRIMM, V. et al. A standard protocol for describing individual-based and agent-based models. *Ecological Modelling*, v. 198, n. 1, p. 115–126, 2006. ISSN 0304-3800. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304380006002043>>. Citado na página 23.
- GRIMM, V. et al. The odd protocol: A review and first update. *Ecological Modelling*, v. 221, n. 23, p. 2760–2768, 2010. ISSN 0304-3800. Disponível em:

<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030438001000414X>>. Citado na página 23.

GRIMM, V.; RAILSBACK, S. F. *Individual-based Modeling and Ecology*. Princeton University Press, 2005. ISBN 9781400850624. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/21819959/volker_grimm_individual_based_modeling_and_ecology.html>. Citado na página 19.

GRIMM, V. et al. The odd protocol for describing agent-based and other simulation models: A second update to improve clarity, replication, and structural realism. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, v. 23, n. 2, p. 7, 2020. ISSN 1460-7425. Disponível em: <<http://jasss.soc.surrey.ac.uk/23/2/7.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

GUERRERO, O.; AXTELL, R. Using agentization for exploring firm and labor dynamics. a methodological tool for theory exploration and validation. In: _____. [S.l.: s.n.], 2011. p. 139–150. ISBN 978-3-642-21107-2. Citado 4 vezes nas páginas 13, 21, 26 e 35.

HAMILL, L.; GILBERT, N. *Agent-Based Modelling in Economics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2015. Citado na página 20.

HEPPENSTALL, A. J.; EVANS, A. J.; BIRKIN, M. H. A hybrid multi-agent/spatial interaction model system for petrol price setting. *Transactions in GIS*, v. 9, n. 1, p. 35–51, 2005. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9671.2005.00204.x>>. Citado na página 25.

HOLLANDER, M.; WOLFE, D. *Nonparametric Statistical Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1973. Citado na página 44.

KIMBROUGH, S. O. *Agents, Games, and Evolution: Strategies at Work and Play*. [S.l.]: CRC Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 12, 35 e 36.

LEVY, D. T.; REITZES, J. D. Anticompetitive effects of mergers in markets with localized competition. *Journal of Law, Economics, and Organization*, v. 8, n. 2, p. 427–40, 1992. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:oup:jleorg:v:8:y:1992:i:2:p:427-40>>. Citado na página 51.

MALERBA, F. et al. Competition and industrial policies in a ‘history friendly’ model of the evolution of the computer industry. *International Journal of Industrial Organization*, v. 19, n. 5, p. 635–664, 2001. ISSN 0167-7187. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167718700000874>>. Citado na página 25.

MAZZOLI, M.; MORINI, M.; TERNA, P. Business Cycle in a Macromodel with Oligopoly and Agents’ Heterogeneity: An Agent-Based Approach. *Italian Economic Journal: A Continuation of Rivista Italiana degli Economisti and Giornale degli Economisti*, v. 3, n. 3, p. 389–417, November 2017. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/spr/italej/v3y2017i3d10.1007_s40797-017-0058-y.html>. Citado na página 25.

MOTTA, M. *Competition Policy: Theory and Practice*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 12, 14, 27, 32 e 40.

- NARDONE, C. Agent-based computational economics and industrial organization theory. In: _____. *Information and Communication Technologies (ICT) in Economic Modeling*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 3–14. ISBN 978-3-030-22605-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-22605-3_1>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. *A Course in Game Theory*. MIT Press Ltd, 1995. ISBN 0262650401. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/3629950/martin_j_osborne_ariel_rubinstein_a_course_in_game_theory.html>. Citado na página 37.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521880688. Citado na página 35.
- RAILSBACK, S. F.; GRIMM, V. *Agent-Based and Individual-Based Modeling*. Princeton University Press, 2019. ISBN 0691190836. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/34243950/steven_f_railsback_volker_grimm_agent_based_and_individual_based_modeling.html>. Citado 7 vezes nas páginas 15, 19, 20, 21, 22, 23 e 34.
- SALANT, S.; SWITZER, S.; REYNOLDS, R. Losses from horizontal merger: The effects of an exogenous change in industry structure on cournot-nash equilibrium. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 98, p. 185–99, 02 1983. Citado na página 32.
- SUN, J.; TEFATSION, L. Dynamic testing of wholesale power market designs: An open-source agent-based framework. *Computational Economics*, v. 30, n. 3, p. 291–327, 2007. ISSN 1572-9974. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10614-007-9095-1>>. Citado na página 25.
- TEFATSION, L. Chapter 16 agent-based computational economics: A constructive approach to economic theory. *Handbook of Computational Economics*, v. 2, p. 831–880, 12 2006. Citado 7 vezes nas páginas 12, 15, 16, 17, 18, 20 e 26.
- TEFATSION, L. Agent-based computational economics: Overview and brief history. *Economics Working Papers*, p. 13, 2021. ISSN 2572-679X. Citado na página 17.
- WILENSKY, U. *Netlogo*. Evanston, IL: [s.n.], 1999. Citado na página 38.
- WOOD, A. D.; MASON, C. F.; FINNOFF, D. Opec, the seven sisters, and oil market dominance: An evolutionary game theory and agent-based modeling approach. *Journal of Economic Behavior & Organization*, v. 132, p. 66–78, 2016. ISSN 0167-2681. Thresholds, Tipping Points, and Random Events in Dynamic Economic Systems. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167268116301202>>. Citado na página 25.

Apêndices

APÊNDICE A – Implementação do modelo de Bertrand em Netlogo v6

Essa é a versão que trata do modelo de Bertrand. Basta copiar o código na aba “code” de uma instância do programa e tudo ficará pronto. Será necessário definir os controles deslizantes que definem as variáveis globais, mas a primeira figura deste documento já apresenta como os mesmos foram definidos, tornando mais fácil.

Os dados analisados foram gerados via BehaviorSpace, uma ferramenta encontrada dentro do NetLogo. As análises foram conduzidas na linguagem de programação R.

```

;extensions [vid bitmap]
extensions [ csv ]
globals [counter winner winning-bid winning-quantity winning-return merge price-
    ↪ history1 price-history2]
breed [companies company]

companies-own [
  current-price
  bid-price
  quantity
  current-return
  returns-up
  returns-down
  own-returns-up
  own-returns-down
  meanup
  meandown
  own-cost
  return-difference
  price-memory
  quantity-memory
  learning-method
  efficiency
]

to setup
  ca
  ask patches[set pcolor white]
  set merge False
  set price-history1 []
  set price-history2 []
  create-companies n-firms [

```

```
forward 7
set shape "circle"
create-temporary-plot-pen (word who)
set-plot-pen-color color
set learning-method learning
if learning-method = "probe-adjust"[
  set current-price initial-price
  set bid-price current-price
  set quantity 0
  set returns-up []
  set returns-down []
  set own-returns-up []
  set own-returns-down []
  set own-cost cost
  set efficiency True
]

if learning-method = "least-squares"[
  set current-price initial-price
  set quantity 0
  set own-cost cost
  set price-memory []
  set quantity-memory []
]

if heterogeneous-costs = True [
  let non-efficient n-of (n-firms / 2) companies
  ask non-efficient[
    set own-cost 1.5 * own-cost
    set efficiency False
  ]
]

reset-ticks
end

to go
  ;if ticks >= 700 [set merger-allowed True]
  set counter counter + 1

  ; companies choose their prices
  ask companies [determine-prices]

  ; companies determine their quantities
  ask companies [
    set quantity calc-quantities (bid-price)
```

```

    if learning-method = "least-squares"[
      set quantity-memory fput quantity quantity-memory
    ]
  ]

; companies determine their returns
ask companies [set-returns]

if counter mod epoch-length = 0[
  set counter 0
  ask turtles [
    if learning-method = "probe-adjust" [evaluate-results]
  ]
  if merger-allowed = True [determine-merger]
]
tick
end

to determine-prices
  if learning-method = "probe-adjust"[
    set bid-price (random-float 2 * delta) + (current-price - delta)
    set bid-price ifelse-value bid-price >= 0 [bid-price][0]
  ]

  if learning-method = "least-squares"[
    ifelse ticks < 3
    [
      let placeholder-price (random-float current-price ) + own-cost
      set current-price ifelse-value (placeholder-price > own-cost) [placeholder-price
        ↪ ] [current-price]
      set price-memory fput current-price price-memory
    ]
    [
      set current-price new-price (price-memory) (quantity-memory) (current-price) (
        ↪ cost)
      set price-memory fput current-price price-memory
    ]
  ]
end

to set-returns
  if learning-method = "probe-adjust"[
    ifelse any? my-out-links
    [
      let peer-returns 0
      let peer-price [[bid-price] of other-end] of my-out-links
    ]
  ]
end

```

```

let peer-quantity [[quantity] of other-end] of my-out-links
let peer-cost [[own-cost] of other-end] of my-out-links

(foreach peer-price peer-quantity peer-cost [[p q c] -> set peer-returns peer-
  ↪ returns + calc-returns (p) (q) (c)])
set current-return calc-returns (bid-price) (quantity) (own-cost) + peer-returns
]
[
  set current-return calc-returns (bid-price) (quantity) (own-cost)
]
ifelse bid-price > current-price
[set own-returns-up lput current-return own-returns-up]
[set own-returns-down lput current-return own-returns-down]
] if learning-method = "least-squares"[
  set current-return calc-returns (current-price) (quantity) (own-cost)
]
end

to evaluate-results
if update-type = "Own>Returns" [
  ifelse (own-returns-up != []) [set meanup mean own-returns-up] [set meanup 0]
  ifelse (own-returns-down != []) [set meandown mean own-returns-down] [set meandown
    ↪ 0]
  ifelse meanup > meandown [
    set current-price current-price + epsilon
  ] [
    set current-price max (list (own-cost + delta) (current-price - epsilon))
  ]
  set returns-up []
  set returns-down []
  set own-returns-up[]
  set own-returns-down[]
]
end

to determine-merger
let mean-current-price mean [current-price] of companies
set price-history1 fput mean-current-price price-history1
if (ticks + 1) mod 90 = 0 [
  ifelse price-history2 = [] [
    set price-history2 price-history1
    set price-history1 []
  ] [
    let mean-history1 mean price-history1
    let mean-history2 mean price-history2
    let diff abs (mean-history1 - mean-history2)
    ifelse (diff <= theta) and (merge = false) [

```

```

set merge true
if heterogeneous-costs = False [
  ask one-of companies [
    let competitors other companies
    create-link-with one-of competitors
  ]
  let merged-companies turtles with [any? my-out-links = true]
  ask merged-companies [
    set own-cost own-cost * (1 - efficiency-gains)
  ]
]
if heterogeneous-costs = True[
  let efficient-companies companies with [efficiency = True]
  let inefficient-companies companies with [efficiency = False]
  if type-of-merge = "Efficient" [
    ask one-of efficient-companies [
      let competitors other efficient-companies
      create-link-with one-of competitors
    ]
  ]
  if type-of-merge = "Heterogeneous" [
    ask one-of efficient-companies [
      let competitors other inefficient-companies
      create-link-with one-of competitors
    ]
  ]
  if type-of-merge = "Inefficient" [
    ask one-of inefficient-companies [
      let competitors other inefficient-companies
      create-link-with one-of competitors
    ]
  ]
]
][
  set price-history2 price-history1
  set price-history1 []
]
]
end

; Turtle Reporters

to-report calc-quantities [price]
  let competitors-prices sum [bid-price] of companies
  let quantity-step 1 / n-firms * (v - price * (1 + gamma) + (gamma / n-firms) *
  ↪ competitors-prices)

```

```

    set quantity ifelse-value quantity-step >= 0 [quantity-step][0]
    report quantity
end

to-report consumer-welfare
  let quantities sum [quantity] of companies
  let squared-quantities sum [quantity ^ 2] of companies
  let results sum [bid-price * quantity] of companies
  let utility v * quantities - n-firms / (2 * (1 + gamma)) * ( squared-quantities + (
    ↪ gamma / n-firms) * (quantities) ^ 2)
  report utility - results
end

to-report producer-welfare
  ifelse merge = false [
    report sum [current-return - own-cost] of companies
  ] [
    let non-merged turtles with [any? my-out-links = false]
    let merged one-of turtles with[any? my-out-links]
    let new-set (turtle-set non-merged merged)
    report sum [current-return] of new-set
  ]
end

end

to-report calc-returns [p q c]
  report (p - c) * q
end

end

to-report new-price [price-data quantity-data cur-price cur-cost]
  let m-p mean(price-data)
  let m-q mean(quantity-data)
  let cov-mp 0
  (foreach price-data quantity-data [[p q] -> set cov-mp cov-mp + p * q])
  set cov-mp cov-mp / ticks
  let var-p variance (price-data)
  let beta (m-p * m-q - cov-mp) / (var-p)
  let alpha m-q + beta * m-p
  let price ifelse-value (alpha > 0 and beta > 0) [alpha / 2 * beta + cost / 2] [cur-
    ↪ price / 2]
  report price
end

end

; Data reporters
to-report symmetric-quantity
  report (v - cost) * (n-firms + n-firms * gamma - gamma) / (n-firms * (2 * n-firms +

```

```

    ↪ n-firms * gamma - gamma))
;report (v - cost) * (3 + 2 * gamma) / (6 * (3 + gamma))
end

to-report symmetric-price
  report (n-firms * v + cost * (n-firms * (1 + gamma) - gamma)) / (2 * (n-firms + n-
    ↪ firms * gamma - 2 * gamma))
end

; Merged party
to-report mean-quantity-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report mean [quantity] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

to-report mean-price-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report mean [bid-price] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

to-report sd-quantity-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report standard-deviation [quantity] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

to-report sd-price-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report standard-deviation [bid-price] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

```



```

; Non-merged party

to-report mean-quantity-non-merged
  report mean [quantity] of companies with [any? my-out-links = false]
end

to-report mean-price-non-merged
  report mean [bid-price] of companies with [any? my-out-links = false]
end

to-report sd-quantity-non-merged
  report standard-deviation [quantity] of companies with [any? my-out-links = false]
end

to-report sd-price-non-merged
  report standard-deviation [bid-price] of companies with [any? my-out-links = false]
end

; General info

to-report mean-quantity
  report mean [quantity] of companies
end

to-report mean-price
  report mean [bid-price] of companies
end

to-report sd-quantity
  report standard-deviation [quantity] of companies
end

to-report sd-price
  report standard-deviation [bid-price] of companies
end

; Individualized data (beware!)

to-report get-p-q
  let data [ (list who current-price quantity any? my-out-links) ] of turtles
  report csv:to-string fput ["who" "current_price" "quantity" "merged"] data
end

to-report merging-party-price
  let merge-size 2
  let numerator cost * (n-firms * gamma * (4 * n-firms - 2 * merge-size - 1) + 2 * n-
    ↪ firms ^ 2 + gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms
    ↪ - merge-size ^ 2 + 2 * merge-size)) + n-firms * v * (2 * n-firms + gamma * (2
    ↪ * n-firms - 1))
  let denominator gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms -

```

```
    ↪ merge-size ^ 2 + 2 * merge-size) + 2 * gamma * n-firms * (3 * n-firms - merge-
    ↪ size - 1) + 4 * n-firms ^ 2
  report numerator / denominator
end
```

```
to-report non-merging-party-price
```

```
  let merge-size 2
  let numerator cost * (n-firms * gamma * (4 * n-firms - 2 * merge-size - 2) + 2 * n-
    ↪ firms ^ 2 + gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms
    ↪ - merge-size ^ 2 + 2 * merge-size)) + n-firms * v * (2 * n-firms + gamma * (2
    ↪ * n-firms - merge-size))
  let denominator gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms -
    ↪ merge-size ^ 2 + 2 * merge-size) + 2 * gamma * n-firms * (3 * n-firms - merge-
    ↪ size - 1) + 4 * n-firms ^ 2
  report numerator / denominator
end
```

APÊNDICE B – Implementação do modelo de Cournot em Netlogo v6

Novamente, assim como no caso de Bertrand, basta copiar o código deste apêndice na aba “code” de uma instância do programa NetLogo.

```

;extensions [vid bitmap]
extensions [ csv ]
globals [counter winner winning-bid winning-quantity winning-return merge price-
    ↪ history1 price-history2 quantity-history1 quantity-history2]
breed [companies company]

companies-own [
  ; bertrand
  current-price
  bid-price
  quantity
  ; cournot
  current-quantity
  bid-quantity
  price
  current-return
  returns-up
  returns-down
  own-returns-up
  own-returns-down
  meanup
  meandown
  own-cost
  return-difference
  price-memory
  quantity-memory
  learning-method
  efficiency
]

to setup
  ca
  ask patches[set pcolor white]
  set merge False
  if competition = "bertrand" [
    set price-history1 []
    set price-history2 []
  ]

```

```
]
if competition = "cournot" [
  set quantity-history1 []
  set quantity-history2 []
]

create-companies n-firms [
  forward 7
  set shape "circle"
  create-temporary-plot-pen (word who)
  set-plot-pen-color color
  set learning-method learning
  if learning-method = "probe-adjust"[
    if competition = "bertrand"[
      set current-price initial-price
      set bid-price current-price
      set quantity 0
    ]
    if competition = "cournot"[
      set current-quantity initial-quantity
      set bid-quantity current-quantity
      set price 0
    ]
  ]
  set returns-up []
  set returns-down []
  set own-returns-up []
  set own-returns-down []
  set own-cost cost
  set efficiency True
]

if learning-method = "least-squares"[
  set current-price initial-price
  set quantity 0
  set own-cost cost
  set price-memory []
  set quantity-memory []
]

]

if heterogeneous-costs = True [
  let non-efficient n-of (n-firms / 2) companies
  ask non-efficient[
    set own-cost 1.5 * own-cost
    set efficiency False
  ]
]
]
```

```
    reset-ticks
  end

  to go
    ;if ticks >= 1500 [set merger-allowed True]
    set counter counter + 1

    ; companies choose their prices and quantities
    if competition = "bertrand" [
      ask companies [determine-prices]
      ask companies [
        set quantity calc-quantities (bid-price)
        if learning-method = "least-squares"[
          set quantity-memory fput quantity quantity-memory
        ]
      ]
    ]

    if competition = "cournot" [
      ask companies [determine-quantities]
      ask companies [
        set price calc-prices (bid-quantity)
      ]
    ]

    ; companies determine their quantities

    ; companies determine their returns
    ask companies [set-returns]

    if counter mod epoch-length = 0[
      set counter 0
      ask turtles [
        if learning-method = "probe-adjust" [evaluate-results]
      ]
      if merger-allowed = True [determine-merger]
    ]
    tick
  end

  to determine-prices
    if learning-method = "probe-adjust"[
      set bid-price (random-float 2 * delta) + (current-price - delta)
      set bid-price ifelse-value bid-price >= 0 [bid-price][0]
    ]
  end
```

```

if learning-method = "least-squares"[
  ifelse ticks < 3
  [
    let placeholder-price (random-float current-price ) + own-cost
    set current-price ifelse-value (placeholder-price > own-cost) [placeholder-price
      ↪ ] [current-price]
    set price-memory fput current-price price-memory
  ]
  [
    set current-price new-price (price-memory) (quantity-memory) (current-price) (
      ↪ cost)
    set price-memory fput current-price price-memory
  ]
]
end

```

```
to determine-quantities
```

```

if learning-method = "probe-adjust"[
  set bid-quantity (random-float 2 * delta) + (current-quantity - delta)
  set bid-quantity ifelse-value bid-price >= 0 [bid-quantity][0]
]

```

```

; if learning-method = "least-squares"[
; ifelse ticks < 3
; [
; let placeholder-price (random-float current-price ) + own-cost
; set current-price ifelse-value (placeholder-price > own-cost) [placeholder-price][
  ↪ current-price]
; set price-memory fput current-price price-memory
; ]
; [
; set current-price new-price (price-memory) (quantity-memory) (current-price) (cost)
; set price-memory fput current-price price-memory
; ]
; ]
end

```

```
to set-returns
```

```

if competition = "bertrand" [
  if learning-method = "probe-adjust"[
    ifelse any? my-out-links
    [
      let peer-returns 0
      let peer-price [[bid-price] of other-end] of my-out-links
      let peer-quantity [[quantity] of other-end] of my-out-links
    ]
  ]

```

```

    let peer-cost [[own-cost] of other-end] of my-out-links

    (foreach peer-price peer-quantity peer-cost [[p q c] -> set peer-returns peer-
      ↪ returns + calc-returns (p) (q) (c)])
    set current-return calc-returns (bid-price) (quantity) (own-cost) + peer-
      ↪ returns
  ]
  [
    set current-return calc-returns (bid-price) (quantity) (own-cost)
  ]
  ifelse bid-price > current-price
  [set own-returns-up lput current-return own-returns-up]
  [set own-returns-down lput current-return own-returns-down]
] if learning-method = "least-squares"[
  set current-return calc-returns (current-price) (quantity) (own-cost)
]
]

if competition = "cournot" [
  if learning-method = "probe-adjust"[
    ifelse any? my-out-links
    [
      let peer-returns 0
      let peer-price [[price] of other-end] of my-out-links
      let peer-quantity [[bid-quantity] of other-end] of my-out-links
      let peer-cost [[own-cost] of other-end] of my-out-links

      (foreach peer-price peer-quantity peer-cost [[p q c] -> set peer-returns peer-
        ↪ returns + calc-returns (p) (q) (c)])
      set current-return calc-returns (price) (bid-quantity) (own-cost) + peer-
        ↪ returns
    ]
    [
      set current-return calc-returns (price) (bid-quantity) (own-cost)
    ]
    ifelse bid-quantity > current-quantity
    [set own-returns-up lput current-return own-returns-up]
    [set own-returns-down lput current-return own-returns-down]
  ]
]

end

to evaluate-results
  if competition = "bertrand" [
    if update-type = "Own>Returns" [
      ifelse (own-returns-up != []) [set meanup mean own-returns-up] [set meanup 0]
    ]
  ]

```

```

    ifelse (own-returns-down != []) [set meandown mean own-returns-down] [set
      ↪ meandown 0]
    ifelse meanup > meandown [
      set current-price current-price + epsilon
    ] [
      set current-price max (list (own-cost + delta) (current-price - epsilon))
    ]
    set returns-up []
    set returns-down []
    set own-returns-up[]
    set own-returns-down[]
  ]
]
if competition = "cournot" [
  if update-type = "Own>Returns" [
    ifelse (own-returns-up != []) [set meanup mean own-returns-up] [set meanup 0]
    ifelse (own-returns-down != []) [set meandown mean own-returns-down] [set
      ↪ meandown 0]
    ifelse meanup > meandown [
      set current-quantity current-quantity + epsilon
    ] [
      set current-quantity max (list (own-cost + delta) (current-quantity - epsilon))
    ]
    set returns-up []
    set returns-down []
    set own-returns-up[]
    set own-returns-down[]
  ]
]
end

to determine-merger
  if competition = "bertrand"[
    let mean-current-price mean [current-price] of companies
    set price-history1 fput mean-current-price price-history1
    if (ticks + 1) mod 90 = 0 [
      ifelse price-history2 = [] [
        set price-history2 price-history1
        set price-history1 []
      ] [
        let mean-history1 mean price-history1
        let mean-history2 mean price-history2
        let diff abs (mean-history1 - mean-history2)
        ifelse (diff <= theta) and (merge = false) [
          set merge true
          if heterogeneous-costs = False [
            ask one-of companies [

```



```

let competitors-quantities sum [bid-quantity] of companies
let price-step v - 1 / (1 + gamma) * (n-firms * quantities + gamma * competitors-
  ↪ quantities)
set price ifelse-value price-step >= 0 [price-step][0]
report price
end

to-report consumer-welfare
  if competition = "bertrand" [
    let quantities sum [quantity] of companies
    let squared-quantities sum [quantity ^ 2] of companies
    let results sum [bid-price * quantity] of companies
    let utility v * quantities - n-firms / (2 * (1 + gamma)) * ( squared-quantities + (
      ↪ gamma / n-firms) * (quantities) ^ 2)
    report utility - results
  ]
  if competition = "cournot" [
    let quantities sum [bid-quantity] of companies
    let squared-quantities sum [bid-quantity ^ 2] of companies
    let results sum [price * bid-quantity] of companies
    let utility v * quantities - n-firms / (2 * (1 + gamma)) * ( squared-quantities + (
      ↪ gamma / n-firms) * (quantities) ^ 2)
    report utility - results
  ]
end

to-report producer-welfare
  ifelse merge = false [
    report sum [current-return - own-cost] of companies
  ][
    let non-merged turtles with [any? my-out-links = false]
    let merged one-of turtles with[any? my-out-links]
    let new-set (turtle-set non-merged merged)
    report sum [current-return] of new-set
  ]
end

to-report calc-returns [p q c]
  report (p - c) * q
end

to-report new-price [price-data quantity-data cur-price cur-cost]
  let m-p mean(price-data)
  let m-q mean(quantity-data)

```

```

let cov-mp 0
(foreach price-data quantity-data [[p q] -> set cov-mp cov-mp + p * q])
set cov-mp cov-mp / ticks
let var-p variance (price-data)
let beta (m-p * m-q - cov-mp) / (var-p)
let alpha m-q + beta * m-p
let n-price ifelse-value (alpha > 0 and beta > 0) [alpha / 2 * beta + cost / 2] [cur-
  ↪ price / 2]
report n-price
end

; Data reporters
to-report symmetric-quantity
  report (v - cost) * (1 + gamma) / (2 * n-firms + 2 * gamma + gamma * n-firms -
    ↪ gamma)
end

to-report symmetric-price
  report (v * (n-firms + gamma) + n-firms * cost * (1 + gamma)) / (2 * n-firms + gamma
    ↪ * (1 + n-firms))
end

; Merged party
to-report mean-quantity-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report mean [quantity] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

to-report mean-price-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report mean [bid-price] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

to-report sd-quantity-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report standard-deviation [quantity] of companies with [any? my-out-links]
  ] [

```

```
    report 0
  ]
end

to-report sd-price-merged
  let merged-pt companies with [any? my-out-links]
  ifelse count merged-pt > 0 [
    report standard-deviation [bid-price] of companies with [any? my-out-links]
  ] [
    report 0
  ]
end

; Non-merged party

to-report mean-quantity-non-merged
  report mean [quantity] of companies with [any? my-out-links = false]
end

to-report mean-price-non-merged
  report mean [bid-price] of companies with [any? my-out-links = false]
end

to-report sd-quantity-non-merged
  report standard-deviation [quantity] of companies with [any? my-out-links = false]
end

to-report sd-price-non-merged
  report standard-deviation [bid-price] of companies with [any? my-out-links = false]
end

; General info

to-report mean-quantity
  report mean [bid-quantity] of companies
end

to-report mean-price
  report mean [price] of companies
end

to-report sd-quantity
  report standard-deviation [bid-quantity] of companies
end

to-report sd-price
  report standard-deviation [price] of companies
end
```

```

; Individualized data (beware!)
to-report get-p-q
  let data [ (list who current-price quantity current-return any? my-out-links) ] of
    ↪ turtles
  report csv:to-string fput ["who" "current_price" "quantity" "current_return" "merged"
    ↪ "] data
end

to-report get-q-p
  let data [ (list who current-quantity price current-return any? my-out-links) ] of
    ↪ turtles
  report csv:to-string fput ["who" "current_quantity" "price" "current_return" "merged"
    ↪ "] data
end

to-report merging-party-price
  let merge-size 2
  let numerator cost * (n-firms * gamma * (4 * n-firms - 2 * merge-size - 1) + 2 * n-
    ↪ firms ^ 2 + gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms
    ↪ - merge-size ^ 2 + 2 * merge-size)) + n-firms * v * (2 * n-firms + gamma * (2
    ↪ * n-firms - 1))
  let denominator gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms -
    ↪ merge-size ^ 2 + 2 * merge-size) + 2 * gamma * n-firms * (3 * n-firms - merge-
    ↪ size - 1) + 4 * n-firms ^ 2
  report numerator / denominator
end

to-report non-merging-party-price
  let merge-size 2
  let numerator cost * (n-firms * gamma * (4 * n-firms - 2 * merge-size - 2) + 2 * n-
    ↪ firms ^ 2 + gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms
    ↪ - merge-size ^ 2 + 2 * merge-size)) + n-firms * v * (2 * n-firms + gamma * (2
    ↪ * n-firms - merge-size))
  let denominator gamma ^ 2 * (2 * n-firms ^ 2 - n-firms * merge-size - 2 * n-firms -
    ↪ merge-size ^ 2 + 2 * merge-size) + 2 * gamma * n-firms * (3 * n-firms - merge-
    ↪ size - 1) + 4 * n-firms ^ 2
  report numerator / denominator
end

```