Thaís Rocha Braga

APRENDENDO A ENSINAR FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE A PRÓPRIA PRÁTICA

Ouro Preto

2021

Thaís Rocha Braga

APRENDENDO A ENSINAR FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE A PRÓPRIA PRÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação da Prof.ª Dr.ª Ana Cristina Ferreira e coorientação do Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira (formalmente até 31/12/2020, quando desligou-se do programa. De fato, até a defesa).

Ouro Preto

2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

B813a Braga, Thaís Rocha.
Aprendendo a ensinar funções na educação básica [manuscrito]: um estudo sobre a própria prática. / Thaís Rocha Braga. - 2021.
171 f.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Educação matemática. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Professores de matemática - Formação. I. Ferreira, Ana Cristina. II. Moreira, Plínio Cavalcanti. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 517.9:37

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM EDUCACAO MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Thaís Rocha Braga

APRENDENDO A ENSINAR FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
UM ESTUDO SOBRE A PRÓPRIA PRÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado Profissional) da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Aprovada em 30 de abril de 2021

Membros da banca

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira - Orientadora - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Prof. Dr. André Augusto Deodato - Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira, orientadora do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 05/08/2021

AGRADECIMENTOS

Neste mundo vocês terão aflições; contudo, tenham ânimo! Eu venci o mundo. ***João 16:33***

Agradeço a Deus, o autor de nossas vidas, pelo sustento diário e pelo agir do Espírito Santo que me proporciona luz, força e sabedoria, por isso pude chegar até aqui.

A minha orientadora, Ana, que aceitou me orientar e o fez com competência. Também por não ter desistido dessa nossa problemática desafiadora, pela compreensão e cuidado que teve comigo, seu jeito sábio, paciente e carinhoso me ajudou a superar e resolver meus problemas, pessoais, profissionais e acadêmicos, da melhor forma possível.

Ao meu coorientador, Plínio, pelo imprescindível apoio durante todo o estudo, sempre muito prestativo e atencioso. Nossas longas conversas foram muito produtivas, aprendi muito com você. Agradeço também pelo excelente apoio na revisão desta dissertação e do Produto Educacional, você me ajudou muito a tornar a apresentação desses materiais de forma mais clara aos leitores.

A minha família, em especial meus pais e meu irmão, que muito me apoiaram, deram amor, tiveram paciência e confiança. Mesmo com alguns contratempos, não deixaram de acreditar no meu sonho e confiarem em mim, lutando contra todas as adversidades da vida para que hoje eu finalizasse mais essa etapa em minha vida.

Ao meu companheiro de todos os momentos, Pedro, que muito me incentivou, me deu forças, me amparou nos momentos mais difíceis, me consolou em minhas emoções e dificuldades pessoais e acadêmicas, além de ter compreendido todas as minhas ausências que foram necessárias em alguns momentos.

Aos meus colegas da turma de mestrado, em especial a Jéssica, pelo companheirismo, parceria, paciência e solidariedade vividas. Dividimos expectativas, alegrias, angústias e conquistas ao longo do percurso.

A UFOP, de modo especial aos professores presentes e já ausentes deste curso de Mestrado em Educação Matemática pelo conhecimento compartilhado e por contribuírem com seus ensinamentos e experiências para a concretização desta pesquisa.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, foram muitos que, cada um do seu modo, contribuíram para o sucesso dessa conquista. Agradeço a todos vocês e que Deus lhes recompense de maneira especial!

"É fundamental dispor do tempo necessário para crescer, aprender, mudar. E, normalmente, as pessoas estão ocupadas demais para isso, ou não lhes é dada a oportunidade de vivenciar os momentos com a calma necessária."
(Ferreira, 2003)

RESUMO

O presente estudo se enquadra na Linha de Pesquisa 1 – Formação de Professores que ensinam Matemática, do Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Ele surge de reflexões relativas a dificuldades vivenciadas em sala por uma professora de Matemática em início de carreira (que também é a pesquisadora), muitas dessas dificuldades relacionadas com a deficiência de conhecimentos matemáticos próprios para o ensino dessa disciplina. A partir dessa problemática, buscou-se investigar: *como um processo de reflexão sobre a própria prática de elaborar um conjunto de tarefas para o trabalho de introdução da noção de função na Educação Básica pode contribuir para o desenvolvimento profissional de uma professora de Matemática em início de carreira?* Inspirada teoricamente nas noções de Conhecimento Matemático para o Ensino e de Desenvolvimento Profissional, realizou-se uma pesquisa sobre a própria prática, em uma abordagem qualitativa. Ao longo de mais de um ano, a professora pesquisadora estudou a literatura especializada sobre o ensino de funções, analisou como alguns livros didáticos abordavam o tema funções, e refletiu sobre suas experiências com o ensino e a aprendizagem de funções. Esse processo culminou na elaboração de um conjunto de tarefas para a introdução da noção de função na Educação Básica. Os dados foram produzidos a partir de um diário de estudos composto por: reflexões feitas durante o processo vivenciado neste estudo; estudos feitos na literatura e em livros didáticos sobre o ensino de funções; registros sobre o processo de construção do conjunto de tarefas para a introdução da noção de função e transcrições de algumas conversas com os orientadores. A análise se deu por meio da interpretação de tais dados buscando identificar possíveis contribuições desse processo (de estudos, reflexões e construção de um conjunto de tarefas) para o desenvolvimento profissional da professora pesquisadora. Os resultados evidenciaram o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos próprios para o ensino de funções, bem como de habilidades relacionadas ao planejamento de ensino, além de um aprofundamento progressivo das reflexões sobre a própria prática, sinalizando claro desenvolvimento profissional da professora pesquisadora. Os resultados dessa pesquisa contribuem, tanto acadêmica quanto socialmente, para ampliar a compreensão acerca dos processos de aprendizagem profissional de professores de Matemática em início de carreira e favorecer a elaboração de ações mais coerentes com a mesma nos cursos de formação inicial. Além disso, a partir desse estudo, foi elaborado um Produto Educacional (pequeno livro) voltado para formadores de professores, futuros professores e professores de Matemática já em exercício, no qual o conjunto de tarefas elaborado para a introdução da noção de função na Educação Básica é apresentado e comentado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pesquisa sobre a Própria Prática. Conhecimento Matemático para o Ensino. Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática.

ABSTRACT

The present study fits into Research Line 1 - Formation of Teachers who teach Mathematics, of the Master's Program in Mathematical Education at the Federal University of Ouro Preto (UFOP). It arises from reflections related to difficulties experienced in the classroom by a mathematics teacher at the beginning of her career (who is also the researcher). The problems are due to the lack of mathematical knowledge proper to the teaching of this discipline. From this problem, one could ask how a process of reflection on the very practice of elaborating a set of tasks for introducing the notion of function in Basic Education can contribute to the professional development of a mathematics teacher in the beginning career? Theoretically inspired by the notions of Mathematical Knowledge for Teaching and Professional Development, we researched the practice of a qualitative approach. Over more than a year, the teacher researcher studied the specialized literature on teaching functions, analyzed how some textbooks approached the theme of mathematics functions and reflected on her experiences with teaching and learning functions. This process brought us to a set of tasks to introduce the notion of function in Basic Education. We collected the data from a study diary composed of: reflections made during the process experienced in this study; studies done in literature and textbooks on teaching functions; records on the process of construction of the set of tasks for the introduction of the notion of function and transcripts of some conversations with the advisors. We analyzed the interpretation of the data trying to identify possible contributions of this process. We analyzed the studies, reflections, and construction of a set of tasks for the professional development of the teacher researcher. The results showed the development of mathematical knowledge proper for teaching functions, also skills related to teaching planning, and a progressive deepening of reflections on their practice, signalling a clear professional development of the teacher researcher. The results of this research contribute, both academically and socially, to broaden the understanding of the professional learning processes of mathematics teachers at the beginning of their careers and to favor the development of more coherent actions with it in initial training courses. Besides, from this study, an Educational Product (small book) was prepared for teacher educators, future teachers, and mathematics teachers already in practice. The set of tasks designed to introduce the notion of function in Basic Education is presented and commented on in the book.

Keywords: Mathematical Education. Research on Own Practice. Mathematical Knowledge for Teaching. Professional Development of Mathematics Teachers.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

“Viver é um rasgar-se e remendar-se.”
(Guimarães Rosa)

A origem do interesse pelo tema vem de minhas experiências docentes[1], nas quais vivenciei momentos de insegurança ao ensinar Matemática bem como dificuldades para responder a questionamentos dos alunos durante as aulas. Isso criou algum desconforto em vários momentos de minha prática profissional na escola, levando-me a perceber evidências do que identifiquei como certo despreparo profissional[2]. Foi a partir de momentos como esses que comecei a refletir sobre minha prática docente, em busca de mudanças nessa prática e um desenvolvimento no exercício da profissão. Para exemplificar minhas dificuldades nesse período, apresento duas situações.

Certo dia, estava copiando no quadro algumas atividades que envolviam dízimas periódicas. Em uma das atividades, os alunos eram solicitados a encontrar a fração geratriz de cada uma das dízimas apresentadas. Observei que escrevi o número 0,99999... e então imaginei a fração $\frac{9}{9}$ como sua geratriz, porém essa fração é igual ao número 1. Naquele momento, em minha percepção, e possivelmente na dos alunos também, 0,99999... não poderia ser equivalente ao número 1. Para não me sujeitar a questionamentos que não saberia responder, apaguei essa dízima e a substituí por outra.

Noutra ocasião, em uma aula sobre o plano cartesiano, não soube responder a uma pergunta feita por minha aluna. O que aconteceu foi o seguinte: após desenhar no quadro uma representação do plano cartesiano, apresentei os quatro quadrantes e, para facilitar a visualização, coloquei, em cada quadrante, os sinais dos termos componentes dos pares ordenados, informando que para um par ordenado pertencer ao primeiro quadrante, deve ser do tipo (+,+), ao segundo quadrante (-,+), ao terceiro quadrante (-,-) e ao quarto quadrante (+,-). Em seguida, os alunos começaram a resolver algumas tarefas do livro, sobre o assunto.

---

[1] Optei pelo uso da primeira pessoa do singular em toda a pesquisa, uma vez que se trata de uma investigação que envolve reflexões e produções da professora pesquisadora que toma a sua prática como foco de investigação. Certamente essa prática está permeada pelas interlocuções estabelecidas no desenvolvimento da pesquisa com a literatura consultada, a orientadora, o coorientador, os colegas de trabalho, os docentes e discentes do Programa de Pós-graduação, entre outros.

[2] Utilizo o termo “despreparo profissional” pois me refiro a situações nas quais, por exemplo, não me vi capaz de dar respostas adequadas a certas questões matemáticas levantadas pelos alunos em sala de aula, ou evitei propor determinada tarefa, por perceber que não conseguiria esclarecer eventuais dúvidas que pudessem ser levantadas pelos alunos. Situações desse tipo, a meu ver, indicam certo despreparo profissional, mais especificamente em termos de limitações significativas no domínio de conhecimentos profissionais relevantes para a docência em matemática na Educação Básica.

Em uma delas, foram dados alguns pontos e eles deveriam dizer a qual quadrante esses pontos pertenciam. De repente, uma aluna me chamou: “Professora, no ponto (0,6) o seis está no meio certinho! Aí vai ser primeiro ou segundo quadrante?”. Nesse momento, me senti desnorteada por não saber identificar a qual quadrante pertenceria esse ponto. Respondi que iria pesquisar e traria uma resposta para ela na aula seguinte.

Situações como essas relatadas acima aconteceram com alguma frequência durante as minhas aulas e, a partir delas, fui percebendo que para lecionar Matemática na escola é importante saber bem mais do que aprendi no meu curso de Licenciatura. É recomendável, entre várias outras formas de conhecimento profissional, entender, por exemplo, por que e em quais situações certas fórmulas se aplicam ou não se aplicam. É relevante ter conhecimento suficiente para ser capaz de identificar, numa dada situação de sala de aula, o que levou um aluno a determinado erro ou a uma resposta inadequada e, a partir daí, mediar a construção de uma nova compreensão da questão, de modo que ele mesmo identifique onde errou e eventualmente corrija seu próprio erro. Ensinar não se restringe a dizer aos alunos como se resolve o problema corretamente.

Assim, constato que tenho sentido insegurança ao tentar mobilizar o conhecimento matemático relevante para tratar certas questões que emergem em minhas aulas e uma pergunta me vem à mente de forma insistente: o que deveria ter aprendido durante a formação inicial para exercer minha profissão com mais competência e segurança?

Cursei a Licenciatura em Matemática no período de 2014 a 2017 na Universidade do Estado de Minhas Gerais (UEMG). A escolha do curso se deu pela afinidade que sempre tive com o conteúdo desde a Educação Básica, aliada a influências familiares (algumas das mulheres da família são, ou foram, professoras, como é o caso de minha bisavó, avó, mãe e tias), bem como o gosto pelo ensino. Desde criança utilizava um quadro verde e giz, que “sobrava” das minhas professoras, para “dar aulas” para os meus brinquedos em casa. Mais tarde, ensinava meu irmão (oito anos mais novo que eu) e, na adolescência, dava “aulas de reforço” para meus colegas de classe.

Durante a licenciatura, minha expectativa era estudar apenas disciplinas de Matemática. Outras, como Filosofia, Sociologia, Leitura e Produção Textual, História da Matemática, Psicologia da Educação, Estágio, Libras, História e Cultura Afro-Brasileira não me pareciam “adequadas” ao curso, pois não envolviam cálculos matemáticos. Ao iniciar minha prática profissional como docente fui percebendo a complexidade que essa prática envolve. No início, tinha dúvidas sobre muitas coisas. Como iniciar a aula? Não sabia se fazia a chamada, se pedia aos alunos que se sentassem em seus lugares ou se chamava a atenção deles, no sentido de pararem de jogar bolas de papel uns nos outros. Porém, com o tempo, experimentando estratégias variadas, comecei a conseguir a atenção dos alunos e a mantê-los em suas cadeiras. Contudo, não sabia o que fazer a partir daí, pois minha meta (inconsciente) era manter os alunos em silêncio e sentados. E quando isso acontecia, não sabia dar o próximo passo, ou seja, ensinar Matemática para eles. Foi então que o livro didático passou a cumprir um papel intensivo no planejamento da aula, sob a justificativa de que todos os alunos tinham acesso a esse material. Comecei a seguir o livro didático do início ao fim, sem refletir muito sobre a adequação e a relevância das atividades propostas para os alunos. Essa postura me colocou em situações delicadas, como, por exemplo, quando algum aluno ia até minha mesa perguntar como poderia resolver certo problema, mas eu também não sabia resolver.

Tais vivências de dificuldades no exercício da docência fizeram com que eu, aos poucos, fosse tomando consciência da falta de conhecimentos profissionais que me possibilitassem exercer a profissão de forma confortável, competente e segura. Possivelmente, tais dificuldades sejam também vivenciadas por outros professores, uma vez que estudos sobre a formação de professores já no século XXI, segundo Gatti (2010), ainda apontam para a desvinculação entre o que os licenciandos aprendem em seus cursos universitários e os conhecimentos relevantes à sua futura atuação docente na escola. Essa autora também discute, dentre outras questões, a fragmentação formativa e a prioridade que os cursos de formação de professores atribuem às disciplinas específicas em detrimento da formação pedagógica, ressaltando que "[...] com a ausência de um eixo formativo claro para a docência, presume-se a pulverização na formação dos licenciados, o que indica frágil preparação para o exercício do magistério na Educação Básica" (GATTI, 2010, p. 1374).

Entendo que as dificuldades que venho enfrentando em minha prática docente são provenientes, em grande medida, da formação inicial que tive, a qual se ajusta ao cenário atual dos cursos formadores de professores para a Educação Básica, conforme apontado pela autora citada acima. Essa insatisfação para com minha atuação docente e o desejo de conhecer matemática numa forma que me permita ensinar de modo com compreensão, tanto para mim quanto para meus alunos, motivaram minha busca pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP em 2019.

Nessa época, contava com pouco mais de um ano e meio de experiência docente[3] e nesse período, ainda que curto, tive a oportunidade de trabalhar em escolas públicas estaduais da região metropolitana de Belo Horizonte (Contagem, Mário Campos e Ibirité) com Ensino Fundamental II e Ensino Médio, ambos na modalidade regular e na modalidade EJA (Educação de Jovens e Adultos), em todos os turnos: manhã, tarde e noite.

Em novembro de 2019, construí e apliquei um questionário aos meus alunos, com o intuito de conhecer a percepção deles sobre minha atuação como professora de Matemática. Devo esclarecer que a aplicação desse questionário não faz parte do desenvolvimento da pesquisa que aqui relato, trata-se apenas de uma tentativa de obter uma espécie de avaliação externa, digamos assim, que situasse um pouco melhor aquele meu sentimento de despreparo profissional acima relatado. E mostra também o meu interesse, ainda que imprecisamente direcionado nessa época, por refletir sobre minha prática profissional docente.

A maioria dos estudantes considerava a dinâmica das aulas boa e as explicações claras. Um dos aspectos mais destacados pelos estudantes[4] era minha boa vontade em ajudá-los a compreender os conteúdos. No entanto, um número significativo de alunos apresentou alguns pontos a melhorar: “deveria explicar a matéria de forma mais ampla, colocando assuntos do dia a dia para que os alunos entendessem melhor”; “você é uma boa professora, só precisa melhorar um pouco como explica a matéria. A respeito das dúvidas elas são sanadas, bom pelo menos as minhas são”.

Refletindo sobre isso, percebi o reconhecimento deles em relação à atenção que dedico às suas dúvidas e ao meu esforço (nem sempre bem-sucedido) no sentido de explicar a matéria de modo acessível. Por outro lado, reconheço que dava continuidade à matéria sem trabalhar adequadamente o conteúdo, preocupada em cumprir o programa previsto para o ano letivo. Isso não favorece a aprendizagem matemática, pois, antes de compreenderem um assunto, eu já dava início a outro, que muito frequentemente dependia do domínio do tópico anterior.

Alguns alunos ressaltaram que minhas exposições para a turma toda (eles falam “no quadro”) não são sempre inteiramente compreensíveis. E concordo com eles pois, ao trabalhar algum tópico pela primeira vez, não sinto segurança com relação à compreensão

[3] Minha experiência como professora de Matemática se iniciou em agosto de 2017.

[4] Exemplos de respostas: “sempre está disposta a ajudar e explicar aos alunos qualquer dúvida gerada”; “em caso de dúvida a professora vai na mesa, explica tudo e sempre quer que a pessoa aprenda”; “explica a matéria de maneira muito clara e muitas das vezes explica mais de uma vez quando o aluno não entende. E lida com as dúvidas dos alunos com muita paciência e atende a todos igualmente”.

deles, mas quando vou explicar pela segunda vez, tento melhorar, partindo da experiência anterior. O problema das limitações no domínio de vários tipos de conhecimentos matemáticos relevantes para o ensino escolar se soma a algumas das questões apontadas pelos alunos em suas respostas ao questionário.

Assim, a partir da identificação desses e de outros problemas relacionados tanto com a falta de experiência profissional, como também com as limitações da formação inicial, me propus a investigar como um processo de reflexão sobre minha própria prática de construir um conjunto de tarefas a serem usadas para introduzir a noção de função na Educação Básica, contribuiria para o meu desenvolvimento profissional docente. Mais precisamente, me propus a realização de uma pesquisa, através da qual procuro dar resposta à seguinte questão: *como um processo de reflexão sobre a própria prática de elaborar um conjunto de tarefas para o trabalho de introdução da noção de função na Educação Básica pode contribuir para o desenvolvimento profissional de uma professora de Matemática em início de carreira?*

Assim, o propósito mais geral deste estudo é investigar possíveis contribuições de um processo de reflexão sobre a própria prática para o desenvolvimento profissional de uma professora de Matemática em início de carreira, que também é a pesquisadora.

A reflexão sobre a própria prática é entendida aqui no sentido de voltar a pensar sobre a própria prática docente escolar[5], considerando-a com mais cuidado e atenção. Como Ponte (1994, p. 5), entendo que esse tipo de reflexão "parte sempre do confronto duma prática com um quadro de referência teórico, que pode ser uma reapreciação dos objectivos inicialmente fixados ou um confronto com outras perspectivas e valores". Foi nesse sentido que a presente pesquisa se desenvolveu.

Já a noção de desenvolvimento profissional é entendida como um processo de aprendizagem do ofício de professor que se diferencia do de outros profissionais pelas especificidades de sua prática e, principalmente, pela natureza do conhecimento que ela envolve e demanda. Assim, deixo claro que, neste trabalho, entende-se que desenvolver-se como profissional envolve, necessariamente, construir (para si) conhecimentos profissionais próprios da docência escolar. Esse processo envolve "uma perspectiva em que se reconhece

[5] Optei por não definir a noção de prática neste estudo, dada sua complexidade. Vou me remeter, ao longo do texto, a algumas das ações que compõem a prática profissional docente escolar, com destaque para o planejamento de tarefas a serem realizadas na sala de aula. Essa ação envolve diversas outras, na medida em que demanda estudo e reflexão ao longo do processo de construir uma rota didática, lógica e pedagogicamente fundamentada para o desenvolvimento da noção de função, estruturando essa rota através da organização e ordenação de tarefas criteriosamente selecionadas.

a necessidade de crescimento e de aquisições diversas, processo em que se atribui ao próprio professor o papel de sujeito fundamental" (PONTE, 1994, p. 6). Esse termo será discutido com um pouco mais de detalhe no capítulo a seguir.

Utilizo o termo início de carreira para me referir aos primeiros anos de experiência docente. Santana (2016, p. 34) ressalta que experiência não significa apenas viver determinadas situações, "mas refletir sobre o que se vive. Dependendo dos parâmetros a partir dos quais se realiza esse movimento de reflexão, a experiência pode ser contraproducente em termos de formação e/ou desenvolvimento de competências profissionais docentes".

Inicialmente, a pesquisa envolvia tanto o processo de estudos do conteúdo de funções, quanto o planejamento e desenvolvimento de um conjunto de tarefas para introduzir essa noção em minhas turmas de primeiro ano do Ensino Médio. Esperava contar com o retorno dos alunos para enriquecer e aprimorar minhas reflexões e aprendizagem profissional. No entanto, devido à pandemia causada pelo Covid-19, as aulas presenciais foram suspensas indefinidamente. A Secretaria Estadual de Educação elaborou Planos de Estudos Tutorados (PET)[6] mensais. Como consequência, nós, professores, perdemos a autonomia em sala de aula e passamos a tutorar nossos alunos, por meio do aplicativo oficial disponibilizado pelo Estado, o "Conexão Escola". Essa tutoria envolve basicamente esclarecer as dúvidas dos alunos em relação às atividades propostas nos PET. Assim, tornou-se necessário realizar uma adequação da pesquisa à realidade. Com o apoio de meus orientadores, decidi focar a pesquisa no processo de estudo e elaboração do conjunto de tarefas para a introdução da noção de função na Educação Básica.

A presente Dissertação está organizada em quatro capítulos. No primeiro apresento algumas noções que fundamentaram a pesquisa, com destaque para as noções de Conhecimento Matemático para o Ensino e de Desenvolvimento Profissional. No segundo capítulo, apresento as opções metodológicas da pesquisa e situo, brevemente, o que entendo por pesquisa sobre a própria prática. No capítulo seguinte, o terceiro, apresento o conjunto de tarefas voltadas para o trabalho docente de introdução do conceito de função na Educação Básica e a lógica segundo a qual foram estruturadas. No capítulo 4, descrevo e analiso o processo de estudos (de livros didáticos e da literatura sobre ensino de funções) e de elaboração das referidas tarefas, bem como as reflexões geradas a partir desse processo. Por

---

[6] Os PETs estão vinculados ao Regime Especial de Atividades Não Presenciais (REANP). Para saber mais acesse https://estudeemcasa.educacao.mg.gov.br/pets.

fim, baseada na descrição e análise feitas no capítulo anterior, apresento as Considerações Finais, incluindo uma resposta para a questão norteadora desse estudo.

A partir da pesquisa, elaborei um Produto Educacional, no formato de um pequeno livro, voltado para formadores de professores, futuros professores e professores de Matemática, no qual apresento e comento a sequência de tarefas elaboradas para a introdução da noção de função na escola. Esse material está disponível na página do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFOP (www.ppgedmat.ufop.br).

CAPÍTULO 1: APORTES TEÓRICOS QUE EMBASAM ESTE TRABALHO

Mas somente o tempo de exercício profissional não basta. Como se sabe, os tolos e os mal intencionados também envelhecem e não ficam melhores...”
(GUIMARÃES, 2010)

A partir das experiências descritas anteriormente, compreendi que precisava aprender, na prática, a ensinar Matemática para os alunos. Nessa tentativa, procurei discutir mais detalhadamente as resoluções dos exercícios, reelaborar os conceitos, quando necessário, ouvir cada aluno, prestar atenção em suas estratégias e em seus erros, de modo a melhor auxiliá-lo na compreensão da matemática, porém percebi que essas atitudes não são necessariamente suficientes.

Estudando mais, compreendi que é recomendável também olhar de um modo especial para a sala de aula, buscando compreender como os alunos pensam quando estão realizando uma tarefa matemática, bem como reconhecer as diferenças existentes entre eles, levando em conta questões sociais e pessoais que influenciam a aprendizagem. Llinares (2019), com base nas ideias de Even e Tirosh (2008), destaca que há bastante tempo se insiste na necessidade de os professores de Matemática levarem em consideração a forma como os alunos pensam matematicamente, para melhor planejar e conduzir suas aulas.

Para Stein, Engle, Smith e Hughes (2008 apud LLINARES, 2019, p. 31, tradução minha):

> a prática de ensinar matemática pode ser entendida como um sistema de atividades do professor que, no contexto de sala de aula, podemos identificar como (i) selecionar e produzir tarefas matematicamente relevantes para conseguir os objetivos de aprendizagem pretendidos, (ii) gerenciar as diferentes fases de uma lição e, em particular, coordenar as discussões matemáticas na sala de aula, e (iii) interpretar e analisar o pensamento matemático dos alunos[7].

De acordo com os autores, esse sistema de atividades pode ser exemplificado através de referências a algumas atividades particulares do professor. O tópico (i), por exemplo, implica na necessidade de o professor antecipar respostas prováveis dos alunos às tarefas propostas aos mesmos; o tópico (ii) envolve a possibilidade de o professor selecionar alguns

---

[7] Original: “la práctica de enseñar matemáticas se puede entender como un sistema de actividades del profesor que en un contexto de aula podemos identificar como (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticamente relevantes para conseguir los objetivos de aprendizaje pretendidos, (ii) gestionar las diferentes fases de una lección y en particular la gestión de las discusiones matemáticas en el aula, e (iii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes”.

alunos para apresentarem suas respostas e ideias durante uma dúvida comum, sequenciando, com um propósito explícito, a ordem segundo a qual os estudantes têm a oportunidade de discutir suas resoluções; (iii) reconhecer a possibilidade de fazer conexões com as diferentes respostas dos diferentes alunos e entre essas respostas e as ideias matemáticas chave que constituem o objetivo da tarefa. Dessa forma, esse sistema de atividades, identificado nos três tópicos, pode se contextualizar desde o momento do planejamento até momentos imprevistos durante o ensino na sala de aula.

Quando Stein, Engle, Smith e Hughes (2008 apud LLINARES, 2019) se referem especificamente ao planejamento, apontam que haverá momentos em que o professor tem que pensar na sequência das atividades, contemplando diferentes demandas cognitivas, levando em conta a diversidade dos alunos em sua sala de aula. Os autores destacam ainda que haverá momentos imprevistos em sala de aula, que podem ser aproveitados para apoiar a aprendizagem dos estudantes. Por exemplo, ao reconhecer alguma questão colocada pelos alunos, gerada durante as discussões matemáticas na aula, o professor pode imprimir uma determinada direção à aula, com o objetivo de apoiar a aprendizagem dos estudantes relacionada a essa questão específica.

Todas essas leituras me fizeram refletir acerca da matemática. Antes, me parecia que existia apenas uma, a matemática que aprendi na escola, especialmente, no curso de Licenciatura. Porém, ao iniciar minha experiência docente passei a observar que a matemática demandada em sala de aula era distinta daquela e não me sentia preparada para desenvolvê-la.

Neste capítulo, a partir de uma breve discussão acerca da existência de distintas matemáticas, reviso parte da literatura especializada, com o propósito de defender a ideia de que a expressão “saber Matemática” diz muito pouco a respeito da real preparação de um professor para o exercício da profissão docente na Educação Básica, dada a natureza e a complexidade do conhecimento matemático demandado por essa prática profissional. Finalizo apresentando sucintamente a noção de Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)[8].

[8] Original: Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

1.1 Matemática ou Matemáticas?

Refletindo sobre a matemática que aprendi na Educação Básica, recordo que essa consistia, essencialmente, da resolução de expressões numéricas e aplicação de fórmulas. A matemática que aprendi na graduação envolvia, quase sempre, valores associados a demonstrações formais e rigor. Aí já podemos observar duas matemáticas distintas. E ambas se diferenciam, como veremos adiante, do conhecimento matemático relevante para o ensino na Educação Básica, segundo Ball, Thames e Phelps (2008).

Ao iniciar a docência, como já relatado, enfrentei dificuldades e, a partir delas, percebi que os conhecimentos matemáticos que construí ao longo da minha formação inicial não se articulavam, de modo consistente, com a prática profissional na qual me iniciava. O exercício da profissão docente, acompanhado das lembranças dos tempos de discente e das leituras que fiz durante o Mestrado Profissional da UFOP, evidenciaram, para mim, que a matemática não é única e, além disso, despertaram, em mim, o interesse em aprender essa matemática própria do professor que ensina essa disciplina na escola.

Moreira e David (2007) entendem que os conhecimentos relevantes ao professor de Matemática da escola estão relacionados ao que chamaram de Matemática Escolar. Eles discutem as relações entre algumas formas de se conceber esse tipo de matemática e as consequências correspondentes na concepção do processo de formação do professor:

> Se a pensarmos [*a Matemática Escolar, adendo meu*] de uma perspectiva estritamente técnica, como mera versão "didatizada" da parte elementar da Matemática Científica, o processo de formação do professor acaba se estruturando em torno desta última. [...] Se, por outro lado, concebermos a Matemática Escolar como uma construção autônoma da prática escolar e esta como uma instância auto-suficiente em termos da produção dos saberes profissionais, então não há muita coisa a ser feita, ou melhor, não faz diferença o que se faça, no processo de formação do professor. Mas se pensarmos a Matemática Escolar como uma construção histórica que reflete múltiplos condicionamentos, externos e internos à instituição escolar, e que se expressa, em última instância, nas relações com as condições colocadas pelo trabalho educativo na própria sala de aula, então a referência da prática profissional efetiva dos professores assume um papel central no processo de formação (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 45-46).

Esses autores utilizam a expressão Matemática Escolar para se referirem a “um conjunto de práticas e saberes associados ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática (que não se restringem ao que se ensina aos alunos na escola, porque inclui também, por exemplo, os saberes profissionais vinculados ao trabalho docente nesse processo)” (DAVID; MOREIRA; TOMAZ, 2013; p. 45). De acordo com essa caracterização, a Matemática Escolar incluiria o conhecimento produzido pelos professores de Matemática em sua prática escolar, assim como conhecimentos produzidos pelas pesquisas sobre ensino e aprendizagem escolar de tópicos particulares da matemática a ser ensinada.

Dentre as diferentes formas de conhecer a disciplina Matemática, além da Matemática Escolar, David, Moreira e Tomaz (2013) referem-se também à Matemática Acadêmica e à Matemática do Cotidiano, embora ressaltem que estes termos se associam a ideias que estão em permanente reformulação e aprofundamento:

> II. *Matemática Acadêmica*, vista como um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal; III. *Matemática do Cotidiano*, vista como um conjunto de ideias, saberes e práticas (frequentemente, mas nem sempre, com um correspondente na Matemática Escolar) utilizadas em situações do cotidiano (dia a dia, trabalho, etc.) fora da escola (DAVID; MOREIRA; TOMAZ, 2013, p. 45).

Além de fazer essa distinção, os autores buscam uma compreensão das relações entre a Matemática Escolar, a Matemática Acadêmica e a Matemática do Cotidiano, bem como suas implicações na configuração dos saberes profissionais docentes e na formação do professor. Eles destacam certa "proximidade" entre elas, mas apontam que tais relações, muitas vezes, são percebidas de forma superficial e que por isso,

> costuma-se projetar uma visão, segundo a qual a Matemática Escolar se compõe basicamente de dois tipos de saberes: aqueles provenientes da parte elementar da Matemática Acadêmica e aquilo que seria possível "trazer para a escola", dentre as práticas do cotidiano que envolvem algum tipo de pensamento matemático. Deste modo, a Matemática Escolar se reduziria a um repositório de saberes adaptados, provenientes de duas fontes básicas: a academia e o cotidiano social. Entretanto, o que nossos estudos (e os de outros pesquisadores da área) têm indicado é que essas relações entre as matemáticas escolar, acadêmica e do cotidiano são extremamente complexas, podendo, circunstancialmente, serem percebidas como complementares e harmoniosas, mas, muitas vezes, se mostrando dissonantes e até mesmo antagônicas (DAVID; MOREIRA; TOMAZ, 2013, p. 44).

Assim, David, Moreira e Tomaz (2013) apontam para a complexidade das relações entre a Matemática Escolar, a Matemática Acadêmica e a Matemática do Cotidiano. E indicam que é fundamental conhecer a prática do professor e as dificuldades que ele enfrenta nessa prática para que, a partir disso, se possa identificar elementos relevantes para a constituição dos saberes adequados à sua formação profissional.

1.2 O Conhecimento Matemático para o Ensino

A formação em Matemática por si só, não contemplando os objetivos de estabelecer interações e conexões com outros componentes de saber da profissão docente, tem sido vista, de acordo com Ferreira (2014), como insuficiente e até mesmo inócua, em termos de uma preparação adequada do professor para atuar em um espaço tão complexo como são as salas de aula da Escola Básica. A autora ressalta, em sua tese de doutorado, que a discussão em torno de qual matemática deve ser utilizada para formar o professor de Matemática tem despertado o interesse de pesquisadores e formadores de professores de todo o mundo.

Ball, Thames e Phelps (2008) entendem que os professores devem conhecer o conteúdo que vão ensinar, denominado Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK)[9], mas esse conhecimento, por si só, não é suficiente para o ensino. Para esses autores, basta observar uma sala de aula por poucos minutos para perceber que a matemática utilizada pelos professores na Educação Básica não é a mesma matemática ensinada nas aulas dos cursos universitários de formação inicial. Além disso, argumentam que é pouco provável que a matemática avançada ou acadêmica seja adequada para responder às especificidades vivenciadas no ensino escolar. Esses pesquisadores concluem que o mais importante é conhecer e ser capaz de usar a matemática que é relevante para o trabalho do professor em sala de aula e, segundo eles, é preciso focalizar o tipo de matemática presente no trabalho dos professores em sua prática docente.

Essas discussões mais recentes pautam-se, em boa medida, nas ideias seminais de Lee Shulman (1986). A partir da análise da literatura existente na época, sobre a atuação e desenvolvimento do professor da Educação Básica nos Estados Unidos, este autor e seus colegas perceberam uma quase inexistência de pesquisas abordando o conteúdo efetivamente lecionado nas salas de aula e a maneira como os professores explicavam os conteúdos ou o que os levava a escolher uma determinada estratégia para abordar determinado conteúdo. Segundo esse autor, os programas de pesquisa continuavam a tratar o ensino de maneira genérica ou como se o conteúdo específico não tivesse grande importância, enquanto a psicologia da aprendizagem se preocupava com as questões da aprendizagem escolar. Analisando de maneira mais profunda a complexidade do processo de compreensão do conteúdo pelos professores, Shulman (1986) propôs uma diferenciação, em três categorias, do conhecimento disciplinar, ao apresentar sua Base de Conhecimentos

[9] Original: Common Content Knowledge (CCK).

para o Ensino: o conhecimento do conteúdo (Content Knowledge), o conhecimento pedagógico do conteúdo (Pedagogical Content Knowledge) e o conhecimento curricular (Curricular Knowledge).

De acordo com Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo vai além do conhecimento dos fatos ou dos conceitos da área e deve incluir o entendimento do processo pelo qual os resultados são aceitos como verdadeiros e/ou são substituídos ou descartados em cada área disciplinar. Ainda segundo esse autor, é importante que o professor compreenda, também, porque um determinado tópico tem papel central ou periférico na respectiva disciplina.

O conhecimento pedagógico do conteúdo, para Shulman (1986), é um tipo especial de conhecimento profissional docente: um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que constituiria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina. Inclui as formas de representação, as analogias, as ilustrações, os exemplos e as explicações mais eficazes para o trabalho com os conteúdos usualmente ensinados na escola. Inclui também a compreensão, por parte do professor, daquilo que torna a aprendizagem de determinados tópicos mais fácil ou mais difícil para os alunos, bem como as concepções equivocadas que os estudantes constroem a respeito dos conceitos e procedimentos estudados. A compreensão das concepções equivocadas dos alunos é fundamental para que o professor elabore estratégias de ensino que possibilitem ao aluno ultrapassá-las.

O conhecimento curricular deve incluir a programação dos conteúdos de acordo com os diferentes níveis escolares, os materiais utilizados para o ensino desses conteúdos, as indicações e contraindicações para a utilização de determinados materiais ou abordagens para o ensino de tópicos específicos em diferentes situações de ensino. Essa categoria deve contemplar ainda o conhecimento crítico de textos, softwares, materiais didáticos em geral, assim como aquilo que foi ensinado em séries anteriores sobre o assunto e o que será ensinado posteriormente.

Ao discutir o que deveria constituir uma base de conhecimento para o ensino (*knowledge base for teaching*), Shulman (1987) apresenta sete categorias que deveriam ser consideradas, aí incluídas as três apresentadas anteriormente:

> - Conhecimento do conteúdo; - Conhecimento pedagógico geral, com referência especial aos princípios e estratégias de gestão e organização da sala de aula que transcendem o conhecimento do conteúdo; - Conhecimento do currículo, com compreensão particular dos materiais e programas que servem como ferramentas de trabalho para professores; -

> Conhecimento pedagógico do conteúdo, esse amálgama especial de conteúdo e didática que é exclusivamente da competência dos professores e constitui uma maneira especial de compreensão profissional; - Conhecimento dos alunos e de suas características; - Conhecimento do contexto educacional, desde o funcionamento dos grupos de alunos da turma, a organização escolar, até as características das comunidades e de suas culturas; - Conhecimento dos objetivos, propósitos e valores educacionais e seus aspectos filosóficos e fundamentos históricos (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução minha[10]).

Shulman (1987) enfatiza que, entre essas categorias, o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial interesse, já que agrega diversos corpos de conhecimentos relevantes para o ensino. Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que todos concordam que a compreensão do conteúdo é importante para o ensino, mas o que constitui essa compreensão é definido de maneira vaga.

Assim, a proposta, feita por Shulman e seus colegas, de destacar uma nova categoria de conhecimento do professor - o conhecimento pedagógico do conteúdo - provocou interesse geral na área de formação de professores. E a razão pela qual esse interesse se mantém ainda hoje, com diferentes desdobramentos, é porque essa categoria estabelece a ligação entre o conhecimento do conteúdo e a prática pedagógica.

A partir das ideias de Shulman sobre conhecimento pedagógico do conteúdo, Ball e seus colegas realizaram pesquisas com o objetivo de entender o que era relevante para o trabalho profissional do professor de Matemática da escola, tomando por base a prática dos professores. Eles buscaram identificar o conhecimento matemático que é exigido para o trabalho que os professores executam em seu dia a dia. Nessa busca, eles definiram o conhecimento matemático para o ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT) como o conhecimento matemático advindo da prática do ensino, ou seja,

> o conhecimento matemático necessário para realizar as tarefas recorrentes de ensinar matemática para os alunos. Para evitar uma perspectiva estritamente reducionista e utilitarista, entretanto, nós buscamos uma concepção generosa de "necessitar" que permite incluir hábitos mentais e

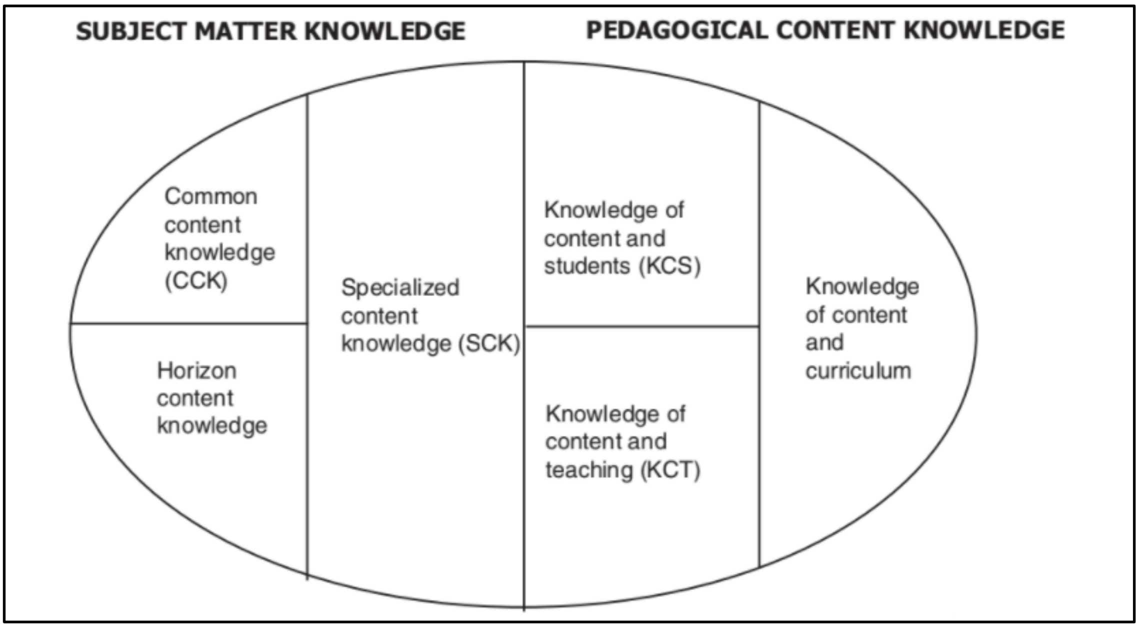
---

[10] Original: - content knowledge; - general pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter; - curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers; - pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding; - knowledge of learners and their characteristics; - knowledge of educational contexts, ranging from the workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and - knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds.

de apreciação que são importantes para um ensino eficaz da disciplina (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 399, tradução minha[11]).

O esquema a seguir ilustra os domínios e subdomínios que compõem o que Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403) denominaram "Conhecimento Matemático para o Ensino".

Figura 1 - Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403.

Ou seja, as demandas colocadas pelo trabalho de ensinar Matemática apontam para a relevância da constituição de um corpo de conhecimentos matemáticos específico para o ensino. A partir das demandas para o ensino, as pesquisas desses autores indicam:

Dois subdomínios no conhecimento do conteúdo:

- ✓ Conhecimento comum do conteúdo (*common content knowledge*- CCK);
- ✓ Conhecimento especializado do conteúdo (*specialized content knowledge*-SCK).

Dois subdomínios relativos ao conhecimento pedagógico do conteúdo:

- ✓ Conhecimento do conteúdo e dos alunos (*knowledge of content and students*-KCS);
- ✓ Conhecimento do conteúdo e do ensino (*knowledge of content and teaching*-KCT).

---

[11] Original: in other words, mathematical knowledge needed to perform the recurrent tasks of teaching mathematics to students. To avoid a strictly reductionist and utilitarian perspective, however, we seek a generous conception of "need" that allows for the perspective, habits of mind, and appreciation that matter for effective teaching of the discipline.

E dois outros subdomínios, que se encontravam, à época da publicação do artigo (2008), em processo de investigação teórica e empírica, mas que ainda não foram retomados em maiores detalhes pelos autores:

- ✓ Horizonte do conhecimento do conteúdo (*horizon content knowledge* - HCK);
- ✓ Conhecimento do conteúdo e do currículo (*knowledge of content and curriculum* - KCC).

Em seguida, explano um pouco mais sobre cada subdomínio citado acima. O conhecimento comum do conteúdo, para esses autores, é o conhecimento do conteúdo disciplinar que deve ser ensinado pelos professores e que outros profissionais também possuem. Ele inclui saber resolver alguns exercícios e problemas matemáticos, saber utilizar notações corretamente, saber identificar definições incorretas, assim como respostas incorretas dos exercícios. Os pesquisadores esclarecem que "comum" não está sendo utilizado para sugerir que todos possuem esse conhecimento, mas para explicitar que esse é um tipo de conhecimento utilizado em outras situações que não somente a de ensinar. Inclui o que é usualmente ensinado na sala de aula de matemática da escola.

O conhecimento especializado do conteúdo é um conhecimento do conteúdo que é específico para o ensino, não sendo necessário para outras atividades ou profissões que não o ensino escolar. Muitas das tarefas diárias dos professores demandam esse tipo de conhecimento. Por exemplo, entender os porquês dos métodos, conceitos e procedimentos, avaliar se afirmações feitas pelos alunos são pertinentes, reconhecer padrões nos erros dos alunos, analisar se determinadas estratégias não usuais, utilizadas pelos alunos, podem ser generalizadas, dentre outras.

Esse tipo de conhecimento inclui também: a escolha e desenvolvimento de definições úteis para o que se pretende ensinar; o reconhecimento das consequências da utilização de uma representação específica; a avaliação da adequação (e eventual adaptação) do conteúdo matemático presente nos livros didáticos; o conhecimento demandado para produzir modificações em atividades, de modo a torná-las mais fáceis ou mais difíceis, de acordo com os objetivos de ensino; a compreensão de diferentes interpretações das operações com números, entre outros. Para dar um exemplo pessoal de falha no domínio desse tipo de conhecimento (SCK), relato que, em certa ocasião, ao realizar uma atividade de sala de aula sobre conjuntos, minha aluna não utilizou o diagrama de Venn para resolver as questões propostas. Embora todas as suas respostas estivessem corretas, não soube dizer a ela se podia continuar fazendo daquela forma, pois não entendi seu raciocínio. Então sugeri que utilizasse o diagrama.

O conhecimento do conteúdo e dos alunos combina o conhecimento sobre os alunos e o conhecimento do conteúdo. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), os professores devem ser capazes de antecipar o que é possível que os alunos pensem sobre o que está sendo ensinado e o que eles acharão confuso; de prever o que os alunos acharão interessante ou motivador ao escolher um exemplo, assim como prever, ao propor uma atividade, o que eles serão capazes de fazer com maior ou menor facilidade ou dificuldade. Os professores devem ser capazes de escutar e interpretar o pensamento incompleto que está emergindo dos alunos e que é expresso, às vezes, em uma linguagem ainda imprecisa ou confusa. Cada uma dessas habilidades exige uma interação entre a compreensão dos conteúdos matemáticos e a familiaridade com a maneira de pensar matematicamente dos alunos. Uma tarefa central do professor é, para Ball, Thames e Phelps (2008), conhecer as concepções dos alunos a respeito de conceitos ou tópicos matemáticos específicos. Para esses autores, "o conhecimento dos alunos e do conteúdo é um amálgama, envolvendo uma ideia ou um procedimento matemático específico e a familiaridade com o que os alunos costumam pensar ou fazer" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 401, tradução minha[12]).

O conhecimento do conteúdo e do ensino combina o conhecimento sobre ensinar e o conhecimento sobre matemática. Para ensinar um conteúdo específico, os professores usualmente utilizam sequências de ensino, escolhem quais devem ser os exemplos mais adequados para iniciar o conteúdo e quais são mais propícios para aprofundamento. Eles também avaliam vantagens e desvantagens na utilização de determinadas representações e analisam as contribuições que diferentes métodos e procedimentos proporcionam para a aprendizagem. Cada uma dessas tarefas requer interação entre compreensão matemática dos conceitos específicos envolvidos e estratégias didático-pedagógicas que influenciam a aprendizagem. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), muitas vezes o professor deve tomar decisões relacionadas ao ensino como, por exemplo, quais contribuições dadas pelos alunos devem ser acatadas, quais devem ser ignoradas e quais devem ser guardadas para um momento posterior. Deve também decidir qual o momento propício para dar mais esclarecimentos sobre o assunto, quando utilizar um comentário feito por um estudante para

[12] Original: knowledge of students and content is an amalgam, involving a particular mathematical idea or procedure and familiarity with what students often think or do.

discutir uma questão matemática, quando propor uma pergunta ou uma nova tarefa para os alunos.

Todas essas decisões requerem uma integração entre o conhecimento da matemática que está sendo apresentada e os objetivos e opções de ensino presentes naquele contexto escolar. O conhecimento do conteúdo e do ensino "é um amálgama, envolvendo uma ideia matemática particular e a familiaridade com princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo específico" (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 402, tradução minha[13]).

O horizonte do conhecimento do conteúdo incluiria o conhecimento da maneira como os tópicos matemáticos presentes no currículo se relacionam ao longo do processo de escolarização. Esse domínio encontra-se ainda em processo de investigação e os pesquisadores têm dúvidas se ele deveria se constituir como um dos domínios ou se não é um tipo de conhecimento que perpassaria todos os outros domínios.

Provisoriamente, Ball, Thames e Phelps (2008) decidiram alocar o "horizonte do conhecimento do conteúdo" como um subdomínio da categoria do conhecimento do conteúdo e o "conhecimento do conteúdo e do currículo" como um subdomínio da categoria conhecimento pedagógico do conteúdo. Reconhecem que a categorização proposta não é formada por conjuntos inteiramente disjuntos, e que uma mesma situação pode ser analisada a partir de diferentes perspectivas e que, algumas vezes, pode ser difícil diferenciar o conhecimento especializado do conteúdo do conhecimento do conteúdo e dos alunos, por exemplo.

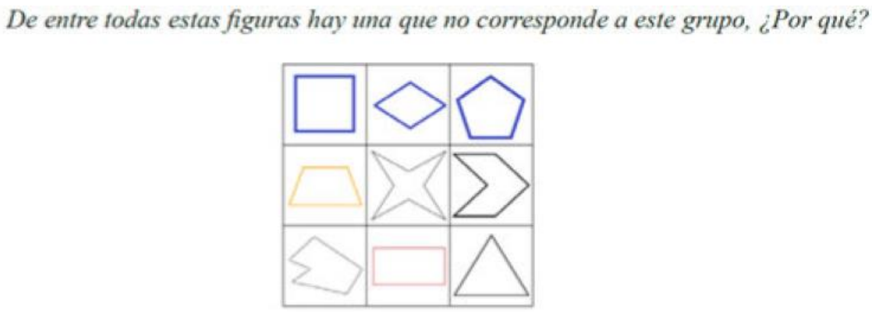
Assim, diferentes estudos, além dos que comentamos mais detalhadamente acima, têm procurado caracterizar os domínios do conhecimento necessário para ensinar Matemática na escola, e, em tese, relevantes para a realização do sistema de atividades relativas ao planejamento e desenvolvimento das aulas, sistema esse descrito nos itens i), ii) e iii) (p. 20-21). Uma característica revelada por esses estudos é a complexa relação entre o conhecimento matemático em si e como ele é usado em diferentes atividades que estruturam o ensino da matemática na escola. Produzir, adaptar, selecionar atividades para os alunos, interpretar suas falas, fazer inferências baseadas em evidências e, a partir daí, tomar decisões em relação ao ensino são atividades da prática profissional do professor que requerem o entrelaçamento de conhecimentos de diferentes domínios, em particular conhecimentos relativos ao conteúdo, conhecimentos curriculares, conhecimentos relativos aos alunos

[13] Original: is an amalgam, involving a particular mathematical idea or procedure and familiarity with pedagogical principles for teaching that particular content.

(como aprendizes), conhecimentos relativos a estratégias de ensino, etc. (cf. LLINARES, 2019, p. 32).

Esse mesmo autor refere-se, com maiores detalhes, ao reconhecimento do entrelaçamento de diferentes domínios de conhecimento quando um professor prevê as possíveis respostas que os estudantes podem dar para questões dentro de uma determinada tarefa. Para exemplificar essa situação, comenta que na Educação Primária (espanhola) são trabalhados certos polígonos e outras figuras geométricas, visando o reconhecimento dessas figuras, e discutindo-se suas semelhanças e diferenças. Para isso, se torna fundamental a apresentação de exemplos de figuras que cumpram certos requisitos, juntamente com figuras que não cumpram esses requisitos. O autor apresenta, então, a seguinte tarefa:

Figura 2 - Reconhecer semelhanças e diferenças entre figuras geométricas



Fonte: BERNABÉU; MORENO; LLINARES, 2018 apud LLINARES, 2019, p. 33.

Os estudantes deveriam indicar, dentre as nove figuras, uma que não correspondesse ao grupo das outras oito, que, por sua vez, possuem alguma característica em comum. O autor ressalta que existe sempre a possibilidade de algum aluno apresentar uma resposta que não tenha sido pensada pelo professor, mas para essa tarefa, ele antecipa três respostas possíveis de serem indicadas pelos alunos, que são:

- “Simetria”. A única figura que não se enquadra nessa característica é o hexágono côncavo não simétrico.
- “Diagonal”. A única figura que não se enquadra nessa característica é o triângulo equilátero.
- “Possui mais de um ângulo interno maior que 180º”. A única figura que não se enquadra nessa característica é o octógono côncavo simétrico “estrela”.

Dessa forma, Llinares (2019) aponta que essa tarefa reflete aspectos do currículo (tipo de figuras e atributos) e dos processos cognitivos que precisam ser desenvolvidos nos alunos (reconhecer atributos, e semelhanças e diferenças entre as figuras). Para isso, é esperado que o professor tenha certas estratégias de ensino que auxiliem os alunos a realizar comparações e conexões entre essas figuras. Por exemplo,

> a discussão em sala sobre os atributos reconhecidos das figuras e sobre as diferenças e semelhanças é uma estratégia de ensino que facilita a geração de novas ideias. Outra estratégia de ensino é permitir aos alunos comparar as respostas de seus companheiros com suas próprias para gerar a oportunidade de justificar e explicar suas próprias resoluções. A implementação de todas essas estratégias de ensino na aula por parte do professor está relacionada com o conhecimento mobilizado em relação ao currículo (o que devem conhecer os alunos?) e em relação com a aprendizagem (como os alunos aprendem?) o que reforça as fortes relações entre os diferentes domínios de conhecimento relevante para o ensino de Matemática (LLINARES, 2019, p. 35, tradução minha)[14].

Embora não haja consenso quanto à questão referente a qual matemática deve saber o professor de Matemática, nem quanto aos nomes utilizados para se referir a ela, o que se pode assegurar é a existência de um conjunto de autores que defendem, de forma fundamentada, a ideia de que o professor de Matemática da Educação Básica precisa, em sua atuação profissional, conhecer e ser capaz de utilizar em sua prática formas específicas do conhecimento matemático, próprias de sua profissão.

A fim de conhecer o que tem sido pesquisado nessa mesma temática no Brasil, realizei um levantamento no Catálogo de teses e dissertações da CAPES com o termo de busca “conhecimento matemático para o ensino”, entre os dias 12 de abril e 23 de maio de 2019. Identifiquei vinte e quatro pesquisas, sendo nove Teses de Doutorado e quinze Dissertações de Mestrado, duas delas pertencentes a cursos de Mestrado profissional (um em Educação Matemática e outro em Educação). Desse total, dois trabalhos foram defendidos em 2014, oito em 2015, sete em 2016, cinco em 2017 e dois em 2018. Dez desses estudos foram orientados por dois orientadores: Alessandro Jacques Ribeiro, da UFABC (seis orientações) e Ruy Cesar Pietropaolo da Universidade Anhanguera (quatro orientações). Os demais orientaram, cada um deles, uma pesquisa.

A produção se concentra na região Sudeste do Brasil (Minas Gerais, São Paulo e Rio de Janeiro). Dos dezenove estudos vinculados a essa região, sete pertencem à Universidade

[14] Original: “…la discusión en clase sobre los atributos reconocidos en las figuras y sobre las diferencias y semejanzas es una estrategia instruccional que facilita la generación de nuevas ideas. Otra estrategia instruccional es permitir a los estudiantes comparar las respuestas de sus compañeros con las suyas propias para generar la oportunidad de justificar y explicar sus propias resoluciones. La implementación de todas estas estrategias instruccionales en el aula por parte del profesor está relacionada con el conocimiento movilizado en relación con el currículum (¿qué deben conocer los estudiantes?) y en relación con el aprendizaje (¿cómo aprenden los estudiantes?) lo que subraya las fuertes relaciones entre los diferentes dominios de conocimiento relevante para la enseñanza de las matemáticas”.

Federal do ABC, cinco à Universidade Anhanguera de São Paulo, dois à Universidade Federal de São Carlos, um à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, um à Universidade Estadual de Campinas, um à Universidade Federal do Rio de Janeiro, um à Universidade Federal de Ouro Preto e um à Universidade Federal de Minas Gerais. O restante se divide entre a região Nordeste (três pesquisas da Universidade Federal de Pernambuco e uma da Universidade Federal do Ceará) e a região Centro Oeste (um estudo da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul).

No referencial teórico adotado pelos estudos desse levantamento, predominam os estudos de Ball e colaboradores sobre o MKT (vinte pesquisas). Em alguns casos, observa-se uma combinação dessa noção com outras, como, por exemplo, conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1986, 1987), formação de professores reflexivos (ZEICHNER, 1993, 2003, 2008), conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo (MISHRA e KOEHLER, 2006), conhecimento matemático especializado do professor (RIBEIRO, 2013) e Modelo do Conhecimento Didático-Matemático (GODINO, 2009).

Em 21 pesquisas, os participantes foram professores e futuros professores de matemática; uma foi bibliográfica e duas foram com alunos da escola. A coleta de informações aconteceu, predominantemente, por meio de questionários, entrevistas, gravações de encontros com os participantes. Apenas um estudo utilizou diário de campo.

Os resultados e conclusões foram diversificados. Alguns observaram que os professores participantes, através das atividades realizadas, passaram a buscar, em sua própria prática, estratégias para solucionar questões que os desafiam matematicamente, tais como a necessidade de refletir coletivamente, em processos formativos, a respeito de resultados de pesquisas que discutam os limites e possibilidades de realização do cálculo de área por meio de diferentes estratégias. Outros observaram a necessidade de haver, em processos formativos, uma articulação entre as diferentes abordagens, estratégias e materiais para os processos de ensino e aprendizagem. Também destacaram a multiplicidade de dimensões dos conhecimentos profissionais docentes mobilizados ao refletir sobre as avaliações, bem como o fato de que a interação com o grupo de professores e as reflexões propostas, sobre seus próprios processos avaliativos, favorecem a compreensão tanto dos tópicos matemáticos em estudo quanto de suas próprias práticas.

Os estudos analisados nessa revisão corroboram a relação entre desenvolver-se profissionalmente como professor de Matemática e ampliar ou construir conhecimentos matemáticos próprios da docência. No tópico a seguir discuto brevemente essa relação, bem como procuro explicitar meu entendimento acerca da noção de desenvolvimento profissional.

1.3 Desenvolvimento Profissional

Llinares (2019) destaca o ensino de matemática como uma prática na qual se mobilizam diferentes domínios do conhecimento (competência docente) e reafirma a importância dos conhecimentos matemáticos próprios da docência como parte central do que define sua atuação profissional. Logo, desenvolver-se profissionalmente como professor de Matemática envolve aprender conhecimentos matemáticos distintos dos utilizados em outras profissões.

No âmbito dessa discussão, frequentemente, as noções de “Formação” e “Desenvolvimento Profissional” se misturam. Discutirei brevemente ambas as ideias, procurando situar minha compreensão de que o processo vivenciado neste estudo se caracteriza como um processo de desenvolvimento profissional (DP).

Para Ponte (2005, 2014), a formação representa um movimento de fora para dentro (em termos do curso) e do formador para o formando, cabendo a este último assimilar os conhecimentos e as informações que lhe são transmitidos. Por outro lado, o desenvolvimento profissional constitui um movimento de dentro para fora, ou seja, do professor em formação para o ambiente onde está inserido, cabendo a esse professor em formação tomar as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projetos que quer empreender e ao modo como os quer executar.

Para o autor,

> a formação atende sobretudo ao que o professor não tem e “deveria ter” e o desenvolvimento profissional dá especial atenção às realizações do professor e ao que ele se revela capaz de fazer. A formação é vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional implica o professor como um todo nos seus aspetos cognitivos, afetivos e relacionais e contribui para o desenvolvimento da sua identidade profissional. De modo simplificado, podemos dizer que a formação tende a partir da teoria e frequentemente não chega a sair da teoria e o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de forma integrada. Na perspectiva da formação o professor surge como *objeto*, enquanto no desenvolvimento profissional assume o papel de *sujeito* (PONTE, 2014, p. 346).

Minha pesquisa se constitui um movimento de dentro para fora, pois nasce de minhas inquietações pessoais e profissionais e não por uma exigência externa. Embora se paute em lacunas e dificuldades que percebo em minha formação, não me move um parâmetro externo do que eu “deveria ter”, pois, poderia seguir desenvolvendo minhas aulas da forma usual, sem qualquer problema. Contudo, pessoalmente, escolhi a profissão docente e realizá-la da melhor forma possível é algo que me mobiliza como pessoa e como profissional. Busco o Mestrado como uma oportunidade de aprendizagem e crescimento profissional e estruturei meu projeto de pesquisa para atender a questões que escolhi investigar.

No entanto, Ponte (2005, p. 6) destaca que

> a formação pode ser encarada de modo mais amplo do que é habitual, sem ser subordinada a uma lógica de transmissão de conhecimentos ou aquisição de competências e, por isso, não existe uma incompatibilidade entre as duas ideias. Na verdade, tudo depende do modo como forem perspectivadas e da escala de tempo que se assume. A formação pode ser concebida de modo a favorecer o desenvolvimento profissional do professor, do mesmo modo que pode contribuir para lhe reduzir a criatividade, a autoconfiança, a autonomia e o sentido de responsabilidade profissional. O professor, para se desenvolver profissionalmente, tem toda a vantagem em tirar partido das oportunidades de formação que correspondem às suas necessidades e objectivos, sem abdicar por isso do seu papel de protagonista crítico. O desenvolvimento profissional requer tempo, experimentação e maturação e não se coaduna com calendários apertados decorrentes de agendas exteriores ao professor.

Assim, o professor pode desenvolver-se profissionalmente “pela sua participação em processos formativos que proporcionem oportunidades de reflexão, participando em práticas sociais, com um forte envolvimento pessoal e um suporte dado pelos grupos sociais em que participa” (PONTE, 2014, p. 347). Nesse sentido, entendo que a noção de desenvolvimento profissional seja a mais adequada para a presente pesquisa, por representar o processo de aprendizagem do meu ofício de professor, o qual envolveu a construção pessoal de conhecimentos matemáticos próprios para o ensino. A percepção da falta desses conhecimentos me levou à presente pesquisa e, consequentemente, ao longo processo de estudar mais sobre a noção de função, planejar seu ensino, refletir sobre cada tarefa elaborada e sobre a lógica que as articulava.

Como Llinares (2019, p. 21, tradução minha[15]), entendo que

> a falta deste conhecimento limita a competência do professor para escolher ou projetar tarefas matemáticas com alta demanda cognitiva para os alunos, para reconhecer oportunidades matematicamente relevantes durante o desenvolvimento da aula, para identificar aspectos relevantes para o pensamento matemático de seus alunos e para gerar um discurso profissional sobre o que acontece em sala de aula.

[15] Original: la falta de este conocimiento limita la competencia del profesor para elegir o diseñar tareas matemáticas con alta demanda cognitiva para los estudiantes, para reconocer oportunidades matemáticamente relevantes durante el desarrollo de la lección, para identificar aspectos relevantes del pensamiento matemático de sus estudiantes y para generar un discurso profesional sobre lo que sucede en el aula.

De acordo com Linares (2019), a competência docente do professor pode ser entendida como o uso pertinente desse tipo de conhecimento no desenvolvimento de tarefas profissionais. Para ele, “relacionar a prática de ensino de matemática a resolução de problemas profissionais reforça a ideia de competência do professor” (LLINARES, 2019, p. 32)[16]. Assim, a meu ver, me desenvolver profissionalmente envolve, necessariamente, construir (para mim mesma) conhecimentos matemáticos próprios da docência.

As ideias teóricas expressas neste capítulo constituem uma referência que considerei adequada para minha pesquisa e constitui, também, um pano de fundo que definiu parâmetros para as escolhas feitas ao longo da elaboração do conjunto de tarefas para a introdução da noção de função na Educação Básica. Essas ideias também orientaram, algumas vezes de modo explícito, outras vezes tacitamente, o direcionamento das reflexões que fiz sobre minha própria prática.

Mas como construir esses conhecimentos profissionais próprios da docência? Braga (2013, p. 42) considera que a investigação sobre a própria prática é “um processo fundamental de conhecimento sobre essa mesma prática e tem um grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que se envolvem com esse tipo de pesquisa”.

No Capítulo 2, a seguir, além de apresentar o caminho metodológico adotado, discorro brevemente a respeito desse tipo de pesquisa (sobre a própria prática).

[16] Original: relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor.

CAPÍTULO 2: OPÇÕES METODOLÓGICAS DO ESTUDO

“Conscientemente, ensinamos o que sabemos;
inconscientemente, ensinamos quem somos.”
(HAMACHEK, 1999 apud FLORES, 2010)

As inquietudes em relação à minha atuação como professora e as dificuldades enfrentadas em sala de aula tanto evidenciaram insegurança e despreparo para a atuação docente, quanto despertaram o desejo de aprimorar minha prática e de instigar os estudantes a se sentirem mais capazes.

Assim, o presente estudo, de cunho qualitativo e caracterizado como pesquisa da própria prática, tem o objetivo de investigar o processo de reflexão sobre a minha própria prática, ao planejar tarefas para introduzir a noção de função na Educação Básica, por meio da mobilização dos domínios e subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, de modo a desvelar possíveis contribuições para o meu desenvolvimento profissional.

Como mencionado anteriormente, me orientei pela seguinte questão: *como um processo de reflexão sobre a própria prática de elaborar um conjunto de tarefas para o trabalho de introdução da noção de função na Educação Básica pode contribuir para o desenvolvimento profissional de uma professora de Matemática em início de carreira?*

Inicialmente, planejava observar minhas aulas, elaborar um diário de campo e gravar (em áudio e vídeo) eventos ocorridos em sala de aula que suscitassem questões sobre a melhor forma de superar as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos conceitos matemáticos em estudo. Também seriam considerados registros matemáticos produzidos pelos alunos ao longo do estudo.

Tais registros (gravações e documentos) permitiriam a definição de tópicos matemáticos que necessitassem de aprimoramento e, por meio da construção de conhecimentos matemáticos para o ensino relacionados aos referidos tópicos, poderia retomar as dúvidas ou dificuldades expressas pelos estudantes, promovendo oportunidades de aprendizagem matemática para os mesmos. Ao lado disso, oportunidades de aprendizagem profissional para mim, como docente, também seguramente seriam promovidas.

No entanto, a pandemia de COVID-19 inviabilizou uma parte importante dessa proposta, que foi o desenvolvimento do trabalho efetivo com as tarefas construídas neste estudo, junto aos estudantes das turmas que leciono. Como consequência, precisei realizar adaptações no projeto inicial. A questão de pesquisa foi essencialmente mantida, porém, parte da metodologia precisou ser alterada, de modo a se concentrar, exclusivamente, em meus próprios estudos, reflexões e elaboração das tarefas.

Nas seções a seguir, além de apresentar minha compreensão acerca da pesquisa sobre a própria prática, descrevo e justifico os procedimentos adotados.

2.1 A pesquisa sobre a própria prática

Lima e Nacarato (2009) comentam que, para Hargreaves (2001), a sociedade contemporânea não passa por uma era de mudanças, mas uma mudança de era. O mundo, segundo Hargreaves, passou da era agrícola, para a era industrial e hoje vivemos na era da informação, que pode ser observada com o advento e uso desenfreado das tecnologias digitais de informação e comunicação. Isso pode gerar uma compreensão, de acordo com o senso comum, de que a escola deixou de ser um espaço privilegiado de ensino e de aprendizagem, uma vez que a informação pode ser acessada de qualquer lugar e a qualquer hora.

A meu ver, toda essa mudança faz com que o papel da escola também precise reconfigurar-se e, mais que isso, o professor também deveria compreender que houve uma mudança no seu papel em relação às práticas de ensino. Se em alguns momentos pôde ter chegado a se perceber como detentor do conhecimento que será transmitido aos alunos, atualmente faz mais sentido entender seu papel como mediador nesse processo, pois, a informação hoje é acessível a todos e o diferencial está na mediação seletiva que pode facilitar e direcionar adequadamente o processo de apropriação do conhecimento por parte daquele que aprende.

A partir da década de 1990, começam a se desenvolver pesquisas "com o intuito de propor novas alternativas educacionais, tendo a formação docente como centro dos debates" (LIMA; NACARATO, 2009, p. 245). Nesse sentido, o professor passaria a atuar também como pesquisador de sua própria atividade docente. Segundo essas autoras, a pesquisa sobre a própria prática pode se desenvolver em dois movimentos em relação aos professores. O primeiro envolve professores da Educação Básica que, ao participar de grupos de estudos ou de maneira individual, investiga e analisa problemas e oportunidades formativas que surgem na própria sala de aula. Geralmente, suas observações e reflexões são divulgadas nos grupos dos quais participa, e, com frequência, esse compartilhamento acontece por meio das narrativas relacionadas às aulas. O segundo movimento envolve aquele educador que, ao ingressar em um Programa de Pós-graduação, toma sua própria prática como objeto de investigação e análise. O compartilhamento das descobertas e/ou reflexões feitas se dá a partir da dissertação, tese, artigos, livros, dentre outros.

Entendo que esta minha pesquisa se enquadra no segundo movimento, uma vez que, ao ingressar no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFOP, tomei minha própria prática como objeto de investigação e análise. Além disso, os resultados e as reflexões feitas serão compartilhados por meio de textos e relatos que serão produzidos a partir da dissertação.

Para Lima e Nacarato (2009), assim como se observa em outros estudos analisados (como, por exemplo, Braga, 2013; Leandro e Passos, 2019; Ponte, 2002; Talarico, 2020), pesquisar a própria prática se inicia com um problema que seja relevante para a prática do professor/pesquisador, buscando-se, então, alcançar uma solução para esse problema através de reflexão e estudo, que produzem novos conhecimentos para o pesquisador. Finalmente, como qualquer outra pesquisa, a investigação sobre a própria prática deve ser tornada pública e fazer sentido para a comunidade à sua volta, não apenas da perspectiva acadêmica, mas também do ponto de vista da relevância social.

De modo semelhante ao descrito por Lima e Nacarato (2009), também vem de minha atuação docente o problema que procuro compreender melhor. E, nesse processo de investigar minha própria prática de planejar tarefas para o ensino de funções, refleti sobre como fazia isso anteriormente e observo que essas reflexões e os novos estudos que desenvolvi me proporcionaram a aquisição e/ou mobilização de muitos conhecimentos próprios do ensino de matemática na escola. Percebo, assim, um real aprimoramento de minha capacidade de mobilizar conhecimentos pertinentes para a atuação na prática docente escolar.

Contudo, trata-se de um tipo de pesquisa complexo. Leandro e Passos (2019) destacam que as dificuldades em se pesquisar a própria prática estão relacionadas ao fato de que o professor/pesquisador se coloca como o responsável por desenvolver seu papel profissional, que é o de proporcionar situações de aprendizagem, além de ser responsável, ao mesmo tempo, por analisar e refletir sobre os dados coletados para sua pesquisa. Sair de si e criticar seu próprio fazer pedagógico não é uma tarefa fácil, pois precisa envolver a crítica de sua própria ação pedagógica, sendo que esta pode se contrapor às teorias abordadas e estudadas na pesquisa. Dessa forma é preciso que o professor/pesquisador se distancie de si mesmo para observar seu trabalho como se fosse o trabalho de um outro professor, o que pode gerar dificuldades devido ao alto nível de abstração e ao grau de "suspensão de subjetividades" envolvidos nesse tipo de procedimento.

A meu ver, a pesquisa sobre a própria prática pode se constituir em uma oportunidade para amadurecimento e aperfeiçoamento da prática docente. No meu caso específico, observo que analisar minha própria prática de forma criteriosa, me permite tanto compreendê-la melhor quanto perceber aspectos que poderiam ser aprimorados ou modificados. Contudo, encarar as dificuldades oriundas da prática em sala de aula é algo complexo. Muitas vezes, é mais fácil vitimizar-se e colocar a culpa nos outros: nos alunos, porque não querem aprender; na família do aluno, que não se faz presente na educação dos filhos; na falta de recursos tecnológicos disponibilizados pela escola e até mesmo nas dificuldades do aluno: "mas ele não sabe nem o básico!". Entretanto, ao refletir sobre esse tipo de atitude e procurar sair dessa posição, posso fazer indagações a mim mesma (por exemplo: qual será o motivo do desinteresse desse aluno? qual deve ser o meu papel nesse processo? como posso ajudar?) e abrir a possibilidade de mobilizar saberes profissionais pertinentes e buscar alternativas.

Apesar das dificuldades, esse tipo de pesquisa possui potencialidades. Leandro e Passos (2019, p. 145) entendem que dar visibilidade para as pesquisas dessa natureza "nos possibilita entender como se dá o processo de tornar-se pesquisador da própria prática e, ainda, compreender a necessidade de o professor tornar-se pesquisador da própria prática no século XXI".

Ao se pautar, em muitos casos, no desconforto de educadores (seja com sua maneira de orientar ações educacionais em seu cotidiano de trabalho, seja com o paradigma educacional vigente em grande parte das instituições de ensino), a pesquisa sobre a própria prática favorece tanto a autoformação e o desenvolvimento profissional, como a construção de conhecimento acerca dos processos de aprendizagem docente.

Para Ponte (2002, p. 11),

> A investigação não é algo que se possa realizar de forma rotineira, sem paixão, sem um verdadeiro investimento intelectual e afectivo. [...] Fazer parte de um projecto sem assumir, desde o início, uma posição de compromisso e empenhamento significa representar nesse projecto um papel secundário, não chegando a viver uma verdadeira experiência de investigação.

A investigação começa, segundo esse autor, com a identificação de um problema relevante, teórico ou prático, para o qual se procura, de forma metódica, uma resposta convincente. E ela só termina quando foi comunicada a um grupo para o qual ela faz sentido, discutida e validada no seu seio. Ou seja, toda investigação, de acordo com Ponte, envolve quatro momentos principais:

> (i) a formulação do problema ou das questões do estudo, (ii) a recolha de elementos que permitam responder a esse problema; (iii) a interpretação da informação recolhida com vista a tirar conclusões, e (iv) a divulgação dos resultados e conclusões obtidas. (PONTE, 2002, p. 12).

O autor aponta que, muitas vezes, os professores fazem pesquisas que não estão diretamente relacionadas com a sua prática e exemplifica: "analisando cerca de uma centena de teses de mestrado realizadas por professores de Matemática em Portugal nos anos 80 e 90, Serrazina e Oliveira (2001), referem que apenas seis delas constituem pesquisas sobre problemas da sua própria prática" (PONTE, 2004, p. 40). No entanto, na pesquisa sobre a própria prática, "trata-se de reforçar a competência profissional do professor, habilitando-o a usar a pesquisa como uma forma, entre outras, de lidar com os problemas com que se defronta" (PONTE, 2004, p. 38). Para esse autor, a investigação sobre a própria prática é, "por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente" (PONTE, 2002, p. 3). E afirma que...

> [...] para além dos professores envolvidos, também as instituições educativas a que eles pertencem podem beneficiar fortemente pelo facto dos seus membros se envolverem neste tipo de actividade, reformulando as suas formas de trabalho, a sua cultura institucional, o seu relacionamento com o exterior e até os seus próprios objetivos (PONTE, 2002, p. 3).

A partir das dificuldades vivenciadas em sala de aula, percebi que meu planejamento de aulas precisava ser modificado, de forma que possibilitasse maior compreensão e uma aprendizagem mais qualificada por parte dos meus alunos. Assim, escolhi investigar minha própria prática, tomando como objeto de investigação o planejamento do ensino da noção de função, para compreender mais concretamente a natureza das minhas possíveis dificuldades relativas ao trabalho com este tópico e, a partir disso, melhorar minha atuação docente. Contudo, é preciso ter em mente que nada é definitivamente conquistado nem suficientemente refletido, quando se trata de planejar e/ou executar o ensino numa sala de aula da escola. Como Talarico (2020, p. 53), entendo que

> Quando uma turma propõe sugestões ou aponta dúvidas, é uma oportunidade para o docente reinventar a sua prática, refletir sua metodologia e, assim, instigar a construção do conhecimento. No entanto,

> não basta estar inserido num contexto que possibilite reflexões e impulsione investigações, para que automaticamente o professor se torne reflexivo e escolha investigar a própria prática. Para que isso aconteça, é preciso tomar consciência do privilégio vivenciado e assumir a responsabilidade político-educativa de sua função enquanto professor.

Ou seja, optar por pesquisar a própria prática envolve fatores que vão além do contexto específico em que o professor está inserido, pois requer, principalmente, uma consciência profissional ampla do professor-pesquisador. A meu ver, essa atitude de investigar a própria prática docente escolar está também diretamente relacionada à construção e à mobilização de conhecimentos matemáticos próprios para o ensino escolar.

Assim, se bem conduzida, a pesquisa sobre a própria prática pode contribuir para o esclarecimento e resolução de problemas concretos da prática docente escolar, pode proporcionar o desenvolvimento profissional dos respectivos autores das pesquisas, bem como contribuir para melhorar, institucionalmente, a organização escolar. Em certos casos, ela também pode contribuir para o desenvolvimento de uma cultura profissional no respectivo campo de prática, e até mesmo para o avanço do conhecimento a respeito da sociedade em geral (PONTE, 2002).

Para Ponte (2002, p. 8), "a investigação sobre a prática visa resolver problemas profissionais e aumentar o conhecimento relativo a estes problemas, tendo por referência principal, não a comunidade académica, mas a comunidade profissional". Segundo o autor, quando professores se tornam pesquisadores da própria prática o fazem por alguns motivos:

> (i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa mesma prática; (ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; (iii) para contribuírem para a construção de um património de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e (iv) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos (PONTE, 2002, p. 3).

Dessa forma, essa modalidade de pesquisa, ao possibilitar que o professor se torne protagonista de sua própria formação profissional, favorece a reflexão e, portanto, uma compreensão mais profunda dos problemas e potencialidades educacionais de sua prática docente. Além disso, Ponte (2002, p. 3) menciona que "o conhecimento gerado pelos professores na investigação sobre a sua prática pode ser útil a outras comunidades profissionais e académicas".

No entanto, a investigação sobre a prática, realizada por professores ou por outros profissionais, tem sido alvo de críticas. Segundo Ponte (2002), Cochran-Smith e Lytle sistematizaram as críticas em três grandes grupos que se referem ao conhecimento gerado no processo, aos métodos utilizados e ao próprio propósito da pesquisa.

Ponte (2002, p. 9) comenta que a crítica ao conhecimento proveniente de uma pesquisa sobre a prática costuma questionar a sua validade ou legitimidade científica. Segundo esse mesmo autor, uma resposta pertinente a essas críticas vai se basear numa discussão epistemológica a respeito da natureza do conhecimento. E, nesse sentido, alega que várias formas de conhecimento são, hoje, consideradas legítimas, dependendo das concepções de quem as utiliza e/ou dos fins a que se destina esse uso. Assim, esse autor considera que está sendo abandonada a ideia da existência de "uma forma de conhecimento universalmente superior a todas as outras" (PONTE, 2002, p. 10).

Para Ponte (2002), em relação à crítica aos métodos, cabe argumentar que é possível estabelecer padrões de qualidade metodológica adequados a este tipo de investigação. Além disso, "uma investigação sobre a prática pode ter menos sofisticação metodológica, mas, em contrapartida, tenderá a possuir um forte vínculo com a prática, autenticidade, novidade e dialogicidade" (p. 18).

A terceira crítica refere-se às finalidades da investigação sobre a prática. Em resposta a essa crítica, o autor indica que tanto a investigação sobre a própria prática como qualquer outro tipo de investigação

> pode assumir objectivos de natureza diversa, tendo em conta as preocupações e interesses dos respectivos actores. [...] pode e deve nortear-se por valores éticos, sociais e políticos, reconhecidos no seu campo profissional, mas não deve estar ao serviço deste ou daquele movimento exterior. Pelo contrário, a investigação sobre a prática deve emergir como um processo genuíno dos actores envolvidos, em busca do desenvolvimento do seu conhecimento, procurando solução para os problemas com que se defrontam e afirmando assim a sua identidade profissional (PONTE, 2002, p. 10-11).

Ponte (2002, p. 18) propõe alguns critérios para avaliação da qualidade da investigação de professores sobre a própria prática, critérios esses que, segundo ele, procuram ajustar-se ao que se poderá esperar de investigações qualificadas desse tipo.

Quadro 1: Critérios de qualidade da investigação sobre a prática

Critério	A investigação...
Vínculo com a prática	... refere-se a um problema ou situação prática vivida pelos atores.

Autenticidade	... exprime um ponto de vista próprio dos respectivos atores e a sua articulação com o contexto social, econômico, político e cultural.
Novidade	... contém algum elemento novo, na formulação das questões, na metodologia usada, ou na interpretação que faz dos resultados.
Qualidade metodológica	... contém, de forma explícita, questões e procedimentos de recolha de dados e apresenta as conclusões com base na evidência obtida.
Qualidade dialógica	... é pública e foi discutida por atores próximos e afastados da equipe.

Fonte: PONTE, 2002, p. 18.

Entendo que a pesquisa aqui relatada, caracterizada como pesquisa sobre a própria prática, satisfaz os critérios de qualidade descritos no quadro acima. A problemática do estudo surgiu das minhas experiências e inquietações vivenciadas no exercício da prática docente escolar, o que gerou preocupações tanto com relação a uma necessidade de melhora na minha formação e consequente atuação profissional, como com a promoção de oportunidades de aprendizagem efetiva dos alunos. A pesquisa também mostra originalidade em termos de suas eventuais contribuições para a formação de outros professores de Matemática da escola e também em potenciais contribuições para a formação de professores na licenciatura. Metodologicamente, acredito que a explicitação da questão de investigação e dos dados coletados, bem como dos fundamentos da análise desenvolvida, através de comentários e observações ao longo de todo o relato, garantem a qualidade do trabalho sob este ponto de vista. O último critério estará sendo contemplado, pelo menos parcialmente, com a avaliação, por parte da banca, e com a consideração atenta e cuidadosa que daremos, eu e meus orientadores, às eventuais sugestões e críticas dos examinadores, além da divulgação (para avaliação pública) tanto da dissertação como do Produto Educacional dela derivado.

Analisando algumas pesquisas brasileiras[17] sobre a própria prática, observei que Braga (2013) e Talarico (2020) se baseiam principalmente nas ideias de Ponte (2002, 2004) e Lima e Nacarato (2009) para fundamentar seu entendimento acerca da pesquisa da própria prática. Já Oliveira (2015), em sua tese, se apoia em D'Ambrosio, Gonçalves e Peres (2013) e opta pelo termo "estudo de si", retomando suas experiências enquanto estudante e professora de Matemática para compreender sua atuação docente. A seguir, apresento uma

[17] Duas dissertações e uma tese, intituladas, respectivamente: "Pesquisando a própria prática: narrativa de uma professora de Matemática" de Braga (2013), "Tessituras de um olhar sobre a própria prática pedagógica do professor de Matemática em sala de aula" de Talarico (2020) e "Aprendizagem e constituição profissional de uma professora de Matemática: um estudo de si" de Oliveira (2015).

breve síntese de cada uma dessas três pesquisas citadas, com o intuito de situar melhor a minha própria pesquisa, em termos de outras do mesmo tipo que vêm ocorrendo na área da Educação Matemática brasileira. Além disso, acredito que a síntese desses três estudos, ainda que tome um curto espaço dentro desta dissertação, ajuda a deixar claro que a pesquisa sobre a própria prática pode produzir conhecimentos que transcendem os interesses específicos dos autores da pesquisa, constituindo, de modo geral, elementos significativos de saber não só para os autores, mas também para toda a comunidade interessada na formação dos professores e na prática docente escolar em matemática.

Braga (2013, p. 59) planejou e trabalhou uma sequência de atividades matemáticas com o objetivo de "ensinar a Álgebra com sentido para o aluno e não simplesmente como manipulação de símbolos", em uma turma de oitavo ano de uma escola da Rede Municipal de Belo Horizonte. Essas aulas foram gravadas (em áudio e vídeo) e a professora também as registrou em um diário de campo. Dessa forma, a partir da transcrição das filmagens e do diário de campo, bem como de uma narrativa (auto)biográfica da história de sua formação escolar, a autora analisa sua prática. Ela afirma que apesar de difícil e doloroso, realizar essa pesquisa sobre a própria prática contribuiu significativamente para o seu (auto)conhecimento e para (re)significar sua prática em sala de aula. Segundo ela,

> a investigação é um processo de construção do conhecimento e, dessa forma, a investigação sobre a própria prática é, por consequência, um processo fundamental de conhecimento sobre essa mesma prática e tem um grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que se envolvem com esse tipo de pesquisa (BRAGA, 2013, p. 42).

Em sua tese, Oliveira (2015) buscou compreender como suas experiências com a aprendizagem de Matemática e a respeito da Educação Matemática, enquanto estudante e professora, foram influenciando sua prática docente e sua constituição profissional, sobretudo em relação a seus conhecimentos, suas crenças e sua identidade docente. O estudo foi desenvolvido mediante análise narrativa de experiências de aprendizagem. As práticas matemáticas, de discente a docente, foram analisadas diacronicamente, tendo por base a Teoria Social da Aprendizagem de Wenger (1998, 2013) e os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino. Os resultados revelam a influência da vida de estudante nas escolhas profissionais expressas nas crenças da professora, evidenciam a importância de o professor buscar espaços de formação em comunidades que valorizam a pesquisa e de fazer pesquisa para se desenvolver enquanto profissional. Ao final, a autora enfatiza a relevância de outras pesquisas sobre a própria prática, defendendo a "necessidade de o professor reconhecer suas experiências de aprendizagem como modo de reconhecer a si mesmo como pessoa e profissional do ensino e, assim, projetar outras práticas profissionais e também outras pesquisas sobre essas práticas" (OLIVEIRA, 2015, p. 175).

Já Talarico (2020), em sua pesquisa-formação, procurou lançar um olhar reflexivo para sua trajetória escolar e profissional, a fim de compreender sua identidade docente, por meio da reconstrução de suas práticas pedagógicas escolares. O autor trabalhou com a metodologia de resolução de problemas para o ensino de proporcionalidade no sétimo ano do Ensino Fundamental. A partir daí, narra as significações, ressignificações, reverberações e confrontos percebidos em dois momentos distintos de produção de dados, bem como na análise desenvolvida, utilizando como referência os conceitos de professor reflexivo e investigador, identidade profissional docente, pesquisa da própria prática e pesquisa-formação. Para Talarico (2020), com a investigação da própria prática foi possível compreender, de um ponto de vista profissionalmente relevante, movimentos de ousadia, de experiência, de significação, de descoberta, de "erros" e de construção coletiva do seu fazer pedagógico. Além disso, disse ter se colocado em um processo de permanente construção da sua identidade docente.

Dentre os critérios de qualidade propostos por Ponte (2002), destaco a autenticidade de cada uma dessas pesquisas comentadas acima, as quais serviram de inspiração para o presente estudo, bem como proporcionaram ensinamentos com relação ao que caracteriza uma pesquisa sobre a própria prática.

2.2 Contexto e procedimentos

Sendo eu tanto a pesquisadora quanto a professora observada, a pesquisa se dá no contexto da minha prática docente. Isso significa que envolveria minha atividade como docente integralmente, ou seja, tanto minha prática na escola, em sala de aula, como todo o processo extraclasse de estudo, planejamento e preparo das aulas.

Como já mencionado, planejava inicialmente realizar a pesquisa em uma escola pública da rede estadual de ensino localizada na cidade de Ibirité, onde leciono atualmente. As dúvidas e dificuldades dos estudantes das turmas nas quais leciono ofereceriam elementos para minhas reflexões e construções de conhecimento matemático para o ensino na Educação Básica. Nesse sentido, os estudantes teriam uma participação importante. No entanto, com a suspensão das aulas presenciais imposta pela pandemia, precisei repensar a pesquisa. Ao final, considerando as limitações de tempo do Mestrado, decidi focalizar exclusivamente o meu processo de elaboração de um planejamento para a introdução da noção de função na Educação Básica, bem como nos estudos e reflexões que esse planejamento envolve.

Assim, a presente pesquisa se configura como um estudo sobre minha própria prática docente, ao estudar e planejar tarefas para o trabalho docente de introdução da noção de função para alunos da Educação Básica. Os dados, portanto, envolvem as reflexões sobre o processo de estudo e construção de tarefas para o trabalho inicial com a ideia de função. Tais reflexões envolvem, por sua vez, minhas experiências como aluna e como professora, portanto, em certo sentido, aprendendo e ensinando funções na escola. Contemplam ainda a identificação de percepções pessoais relacionadas ao próprio processo de aprendizagem profissional e, consequentemente, de desenvolvimento profissional.

Um diário de estudos reúne observações a partir de minhas leituras sobre o ensino de funções na Educação Básica, reflexões sobre minhas experiências com o tema enquanto aluna e professora, estudo de livros didáticos referentes ao nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Além disso, conta com notas relativas ao processo de elaboração de um planejamento para o trabalho de introdução da ideia de função na Educação Básica.

Durante a preparação do conjunto de tarefas visando alcançar o objetivo de ensino proposto, em parceria com meus orientadores criei e adaptei atividades propostas em outras pesquisas com o intuito de promover uma compreensão consolidada do conceito de função. Nesse processo, as tarefas a serem selecionadas foram analisadas e reanalisadas várias vezes. Foram consideradas, por exemplo, as possíveis interpretações dos alunos, as quais poderiam desviar o foco do estudo. De fato, a cada vez que cada tarefa era analisada, detalhes relevantes foram observados e, eventualmente modificados, o que fez com que o conjunto de tarefas proposto fosse se ajustando cada vez mais aos estudos que vinham sendo feitos para planejá-lo, até tomar a forma atual. É importante destacar também as sugestões críticas a respeito de certos aspectos relativos à concepção das tarefas, recebidas dos examinadores por ocasião do Exame de Qualificação.

Entendo que esse foi um processo de muitas aprendizagens para minha formação profissional pois, pela primeira vez, realmente dediquei, de forma sistemática, um tempo significativo para planejar o trabalho com um tópico específico da Matemática. Antes, isso não acontecia com frequência, devido a vários fatores, sendo que o principal deles era não saber exatamente como preparar uma aula, não conhecer bem os aspectos considerados relevantes para o trabalho com cada tópico e não ter passado pela experiência de buscar referências na literatura especializada para, a partir desse levantamento, mobilizar esforços para planejar o trabalho na sala de aula.

Agora, no desenvolvimento desta pesquisa, li e reli os textos relacionados à literatura relativa ao assunto, considerei vários aspectos que poderiam facilitar ou dificultar a aprendizagem, pensei nos erros que poderiam ser cometidos pelos alunos, nas discussões que eles poderiam gerar e realizei, imaginando-me no papel de um aluno, todas as atividades propostas nos trabalhos estudados. Durante a realização dessas atividades observei (e anotei para estudo e discussão com meus orientadores) as dúvidas que me surgiram sobre o conceito de função e outros relacionados. Muitas vezes, me equivoquei nas respostas que considerei corretas para as atividades, mas, em alguns casos, também identifiquei erros nas respostas propostas como corretas pelos livros didáticos. Enfim, posso dizer que me colocar na posição do aluno e resolver as atividades propostas me auxiliaram significativamente a caminhar, aos poucos e a partir principalmente dos meus próprios erros, na direção de compreender melhor, no contexto do ensino escolar, a noção de função, suas particularidades, representações e características, bem como desenvolver uma sensibilidade mais fina em relação a possíveis erros dos alunos.

O propósito desses estudos (para a pesquisa) foi o de possibilitar uma maior compreensão minha, com relação ao conteúdo em si, bem como as questões relativas ao ensino e aprendizagem do assunto discutidas na literatura especializada e o tratamento dado a esse tópico pelos livros didáticos escolares.

Os registros do estudo desses livros didáticos foram pautados em minhas observações, nas possíveis dúvidas dos alunos, nos erros que encontrei para algumas das respostas apresentadas pelos livros, bem como na seleção de possíveis formas escolares de definição para alguns conceitos envolvidos no trabalho com o tema. Assim, fui levada também a me posicionar, com base em minhas experiências docentes e nos estudos feitos, quanto a qual forma de apresentação de um dado conceito matemático seria mais adequada, em um dado momento, para o trabalho com estudantes da Educação Básica. É claro que essa referência de mais adequada não é absoluta, mas refere-se a uma escolha de referenciais e também, em alguns casos, a escolhas pessoais, as quais remetem, por sua vez, às minhas experiências anteriores (muitas vezes, hoje consigo perceber, atravessadas por erros e equívocos) de aprendizagem e de ensino do assunto. Trata-se, portanto, de uma forma que eu considero mais adequada a partir de certos fundamentos teóricos e práticos. Isso não implica, evidentemente, que outras escolhas sejam necessariamente menos adequadas ou inadequadas.

No próximo capítulo, apresento as tarefas constituintes do conjunto pensado para o trabalho de introdução da noção de função e a lógica que fundamentou sua construção, buscando sempre dialogar com a literatura estudada.

CAPÍTULO 3: CONJUNTO DE TAREFAS PARA A INTRODUÇÃO DA NOÇÃO DE FUNÇÃO

“Tão difícil quanto pode ser contar uma história, mais difícil ainda é a tarefa igualmente importante, de recontar as histórias que permitem desenvolvimento e mudança.”
(Clandinin; Connelly, 2011)

Nesse tópico descrevo o processo de construção de um conjunto de tarefas para auxiliar a introdução do conceito de função e apresento tais tarefas, que foram construídas e reconstruídas a partir dos meus estudos sobre o conhecimento matemático para o ensino de funções, de minhas reflexões sobre esses estudos, bem como da reflexão sobre o próprio processo vivenciado, de construção e reconstrução das tarefas.

Partindo dos estudos realizados para a construção das tarefas, e considerando o contexto de sala de aula da Educação Básica, hoje entendo que a noção de função pode ser trabalhada com os alunos, no momento adequado, como uma correspondência entre valores de duas variáveis, que podem ser simbolizadas por quaisquer letras, por exemplo “*p*” (variável independente) e “*a*” (variável dependente), sendo que a cada valor de “*p*” corresponde um único valor de “*a*”. O conjunto de valores que a variável independente pode assumir, numa dada situação, é chamado de domínio da função. O conjunto dos valores que a variável dependente assume efetivamente é chamado de imagem da função. O conjunto imagem está sempre contido em outro conjunto, que pode ser mais amplo, chamado contradomínio.

Porém, essas e outras ideias que fui construindo acerca do conceito de função são recentes. Antes entendia que uma função era apenas uma lei matemática, e relacionava essa lei aos cálculos envolvidos para encontrar os valores de “x” ou de “f(x)”, numa dada situação-problema. Não via o diagrama de Venn como uma forma de representar funções, especialmente adequada para aquelas que possuem “poucos” elementos no domínio. Pensava que esse diagrama era utilizado apenas para falar de termos matemáticos como função injetora, sobrejetora e bijetora. Não percebia quão fundamentais são as ideias de dependência e de variável.

Além disso, durante a preparação das tarefas, discutindo-as com meus orientadores, comecei a compreender melhor as noções de variável dependente e independente e percebi que não se trata de uma definição matemática, rigidamente determinada pela situação descrita. Em outras palavras, hoje entendo que, do ponto de vista conceitual e abstrato, a situação em estudo, por si só, não define necessariamente qual variável deve ser considerada independente ou dependente. Muitas vezes essa qualificação das variáveis pode ser invertida, em função do propósito do estudo da situação dada. Também me pareciam confusas algumas questões relativas ao simbolismo: por exemplo, a letra x teria que representar sempre a variável independente e y sempre a variável dependente? Pude compreender que, embora haja certa necessidade de atenção à maior ou menor frequência de uso nos textos didáticos, essas notações são essencialmente arbitrárias, não são consequência de algum fundamento conceitual.

Outro aspecto que quero destacar é o fato de que, anteriormente, não entendia a representação de alguns pontos (discretos) no plano cartesiano como o gráfico de uma função (pensava que gráfico de função tinha que ser formado por linhas "cheias") e nunca me atentava para os elementos que constituem o domínio e o contradomínio da função. Mas hoje entendo que isso é fundamental para reconhecermos uma relação como sendo (ou não) função e para representá-la graficamente, num sistema cartesiano. Em síntese, antes era como se o estudo de funções se reduzisse a fazer cálculos com fórmulas matemáticas.

Posso dizer que essa maneira de entender as funções se desenvolveu (em mim) até a conclusão do Ensino Médio, em 2013. Recordo-me de que, até então, as atividades que me eram apresentadas consistiam essencialmente de construir tabelas com valores de x e y no trabalho com funções lineares ou quadráticas, sendo que neste último caso, quase sempre os procedimentos se restringiam a encontrar mecanicamente o valor do discriminante e os zeros da função.

Vivenciei uma experiência diferente quando, no primeiro período da Licenciatura em Matemática, cursei a disciplina "Funções". Nas aulas dessa disciplina realizei, pela primeira vez, atividades contextualizadas[18] que envolviam o tema. Inicialmente foi frustrante, pois, como o que havia estudado anteriormente se resumia a cálculos algébricos a partir de expressões envolvendo fórmulas matemáticas conhecidas, tinha dificuldades para realizar as atividades propostas, que me pareciam bastante complexas. Destaco uma atividade que relacionava uma função exponencial com a reprodução de bactérias e outra que envolvia uma função logarítmica. Além do problema do contexto, nunca tinha visto esses dois tipos

[18] Entendo por atividades contextualizadas aquelas que apresentam um enunciado que envolve alguma situação próxima da realidade social, ou seja, que faça sentido aos alunos como algo "potencialmente real". Por exemplo: suponha que a função a seguir represente o lucro de um comerciante em função das vendas de certo produto. Qual deve ser a quantidade de vendas para que se obtenha o lucro máximo? Alguns autores usam a denominação semi-realidade, por exemplo, Skovsmose (2000). São atividades diferentes das que estava habituada a resolver, como: encontre o x do vértice da função $f(x) = x^2 + 3x + 4$.

de função. Tinha estudado as funções afim e quadrática, mas essas duas (exponencial e logarítmica) eram novidade, sendo que a logarítmica foi a que mais me causou espanto, pois estava habituada com funções envolvendo números e as letras x e y, mas essa tinha o termo “log” e não havia uma fórmula algébrica simples, como as que conhecia, para se fazer cálculos com as letras x e y. Essas atividades, naturalmente, se mostraram muito difíceis para mim nesse momento, daí o sentimento inicial de frustração.

Já no Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, ao refletir sobre o contato que tive com funções no decorrer da Educação Básica e na formação inicial, me perguntei: que aspectos seriam relevantes a ponto de serem levados em conta na hora de introduzir a noção de função na Educação Básica?

Na tentativa de responder a esse questionamento, busquei na literatura informações sobre o ensino e aprendizagem desse conceito. Rosa (2005, p. 59) alerta: “não podemos esperar que os alunos construam facilmente o conceito de função”, e ressalta que a “ideia de função só fica clara usando outras ideias. Fazendo conexões com outros conceitos podemos dar forma a esta ideia, e com ela produzir entendimento sobre o significado de uma função” (ROSA, 2005, p. 59-60).

A partir dessas considerações, entende-se que o conceito de função carrega um alto grau de abstração e trabalhar esse conceito na Educação Básica exige conexões com outras noções matemáticas. Existem conceitos que são difíceis de definir ou que dispensam a apresentação de uma definição matematicamente correta para que os alunos da escola possam compreendê-los. Por exemplo, se tivermos que definir corretamente, no ensino escolar, o objeto número natural, provavelmente teremos dificuldades, mas pode-se construir uma ideia clara do que seja número natural, sem o apelo a uma definição formal e tecnicamente correta.

Faço uma analogia com a definição de função. Hoje, proponho, antes de tudo, trabalhar com os alunos a ideia de dependência/correspondência entre os valores de duas grandezas, levando-os a examinar uma variedade de exemplos e contraexemplos, até que percebam a ocorrência de um conjunto abrangente de relações possíveis entre duas variáveis, em uma gama de situações e contextos simples e que lhes façam sentido. Caberia, então, ao professor, sempre segundo meu entendimento atual (construído a partir de ideias inspiradas por estudos e pesquisas a respeito do conhecimento matemático para o ensino de funções), apontar as particularidades comuns a um grupo específico das relações examinadas e discutidas, particularidades essas que caracterizam a relação funcional e que distinguem esse grupo de um segundo grupo de relações, nas quais pelo menos uma das características especiais, identificadas no primeiro grupo, não ocorre. Feito isso, considero desnecessário, e talvez até inadequado, num primeiro momento, solicitar que os alunos apresentem uma definição de função, em atividades do tipo: o que é função? Em um trabalho de introdução do conceito de função, o fundamental, a meu ver, é o aluno saber reconhecer com competência quando está lidando com uma relação funcional e também saber identificar quando a relação em questão não caracteriza uma dependência do tipo função. Ficaria, então, a cargo de cada professor avaliar se cabe ou não, mais adiante, a construção, junto com os alunos, de uma definição formal para o conceito.

As tarefas (descritas mais adiante) que constam do conjunto construído para a introdução da ideia de função possibilitam que os alunos reflitam, a partir da mediação do professor, sobre os critérios que devem ser considerados para indicar se uma dada relação representa ou não uma função, antes mesmo de conhecer qualquer definição de função. Acredito, como ressaltado por diversos autores, que a definição não é capaz de substituir esse processo (de reflexão e de construção de um conjunto de exemplos e contraexemplos) que o aprendiz desenvolve ao realizar as tarefas propostas.

O trabalho com a noção de função deveria se iniciar de forma explícita, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, no terceiro ciclo do Ensino Fundamental. “A partir da generalização de padrões, o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos” (BRASIL, 1998, p. 51). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que a noção intuitiva de função seja “explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)” (BRASIL, 2018, p. 270) nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Já o estudo mais formal das conexões entre variável e função, bem como da noção de função e suas representações numérica, algébrica e gráfica, é proposto a partir do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Ponte, Branco e Matos (2009) abordam o conceito de função em um livro voltado para a formação de professores de Matemática. Os autores iniciam o capítulo 8 retomando a forma como usualmente se dá o trabalho com o conceito de função desde os primeiros anos escolares em Portugal:

> A aprendizagem do conceito de função é preparada desde os primeiros e segundos ciclos. As sequências com que os alunos trabalham nestes ciclos são funções de variável natural, que a cada número (ordem) fazem corresponder um dado termo – que pode ser um número, um objecto geométrico ou outro objecto qualquer. Além disso, muitas situações

> trabalhadas em Organização e Tratamento de Dados (OTD) envolvem correspondências entre duas variáveis que se podem representar em tabelas e gráficos. No segundo ciclo, assume grande relevância a resolução de problemas relativos a situações de proporcionalidade directa, que envolvem relações funcionais. No entanto, apesar de se trabalhar com correspondências representadas por diagramas, tabelas e gráficos, não se faz referência expressa ao conceito de função. Este conceito só é estudado de forma explícita no terceiro ciclo (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 116).

Assim, observa-se na literatura a recomendação de que o trabalho escolar com esse conceito aconteça de forma gradual e desde os primeiros anos da Educação Básica. No entanto, com base em minha (ainda limitada) experiência docente, acredito que os estudantes brasileiros, em sua maioria, chegam ao Ensino Médio sem terem construído a noção de função. Com isso em mente, no planejamento que apresentarei na próxima subseção, proponho a construção desse conceito (na Educação Básica) a partir de um roteiro estruturado em acordo com a orientação que recomenda um avanço progressivo, desde a análise de situações que envolvem o reconhecimento e a expressão, em forma de tabelas, por exemplo, de diversos tipos de dependência entre duas variáveis, passando pela distinção dos diversos tipos de relação estudadas, pela nomenclatura pertinente e pelas diferentes formas mais complexas de representação. Essa é então, basicamente, a lógica que orientou a construção da sequência de tarefas.

Os processos (de estudos e planejamento) aconteceram em paralelo com a docência[19], de forma interligada, ou seja, à medida que surgiam reflexões a partir dos diários de estudos e de planejamento e/ou reflexões vindas da docência, o conjunto de tarefas foi sendo repensado e reconstituído. Algumas ideias permaneceram por serem consideradas adequadas para o público alvo, mas outras foram adaptadas e/ou acrescentadas e/ou retiradas, à medida que novas reflexões se desenvolviam, a partir das informações registradas nos diários de estudos e planejamento.

Então, neste tópico, apresento o conjunto de tarefas pensado para auxiliar a introdução da noção de função (na Educação Básica) a partir de um roteiro estruturado em acordo com a orientação que recomenda um avanço progressivo, desde as tarefas que favorecem o desenvolvimento do pensamento funcional até aquelas em que se procura alcançar uma elaboração mais operacional do conceito. Incluem-se entre essas últimas a leitura e interpretação de gráficos cartesianos, após a devida familiarização do aluno com a

[19] Esta informação se refere, principalmente, ao período anterior à pandemia.

nomenclatura associada ao conceito e com o trânsito entre as várias formas de representação gráfica (tabelas, diagramas, etc.) e analítica (fórmulas matemáticas) de uma função.

Antes da apresentação das tarefas, no entanto, descrevo a lógica que acabou se impondo na constituição final da sequência das atividades propostas para o trabalho de introdução do conceito de função na Educação Básica. Para melhor compreensão, dividi o conjunto das tarefas em três blocos, tendo como referência o escopo e os objetivos agregados das tarefas que os compõem.

Bloco 1 (tarefas 1-9)

As oito primeiras tarefas enfatizam pelo menos quatro elementos fundamentais do trabalho de introdução ao conceito de função:

a) a constituição de um nível mínimo de desenvolvimento do pensamento funcional por parte dos alunos (reconhecimento de dependência/associação entre variáveis em situação, utilizando tanto variáveis quantitativas - cujos valores específicos são expressos por números – como também as de natureza não quantitativa, como figuras geométricas ou times de voleibol).

Embora tenha características específicas, o pensamento funcional é, de acordo com vários autores, parte do pensamento algébrico. O desenvolvimento do pensamento funcional está ancorado em relações entre variáveis, nas quais a variável independente pode assumir diversos valores. Assim, de acordo com Carraher e Schliemann,

> no início, os alunos aprendem a fazer generalizações em situações envolvendo quantidades físicas. Eles aprendem a usar tabelas, gráficos, notações algébricas e outras representações matemáticas para capturar aspectos gerais de seu raciocínio sobre tais situações. Gradualmente eles se sentem confortáveis usando letras para representar quantidades variáveis e operam diretamente em expressões algébricas. Apenas em estágios razoavelmente avançados os estudantes raciocinam em situações mais complexas dentro das restrições sintáticas desses sistemas simbólicos (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2008, apud MARQUES, 2019, p. 53).

b) a construção, para uso, tanto do professor, no ensino, como do aluno, na aprendizagem, de um pequeno arsenal de exemplos de situações (que fazem sentido para o estudante), a partir das quais se pode discutir na sala de aula, alguns aspectos teóricos fundamentais associados à elaboração de uma noção básica de função, incluindo a própria distinção entre dois tipos de relação entre variáveis: as funcionais e as não funcionais.

Rosa (2005), baseada nas ideias de Basson (2002), aponta para a relevância de iniciarmos o ensino de um conceito novo (no nosso caso, o conceito de função) explorando situações próximas do cotidiano real, por constituírem cenários que fazem sentido para o aluno e, por isso, de mais fácil apreensão do contexto em que acontecem as relações funcionais e suas representações mais simples. Gradativamente, dentro do mesmo processo, caminhamos para situações mais abstratas e representações mais sofisticadas, como as formas analíticas e o gráfico cartesiano.

c) a construção de uma familiaridade progressiva do estudante com a nomenclatura pertinente: variável dependente, variável independente, domínio, contradomínio, imagem de um elemento do domínio, conjunto imagem.

Rosa (2005, p. 177) afirma que a identificação do papel de cada variável (dependente ou independente), numa relação funcional foi qualificada por Sierpinska (1992) como uma forma de compreensão fundamental associada ao conceito de função, já que esse papel se vincula à determinação do domínio e do contradomínio da função e, em última instância, à própria natureza da relação funcional.

d) a construção de uma familiaridade progressiva do estudante com algumas formas escolares usuais de representação de função: linguagem natural, tabela, diagrama de Venn, fórmulas matemáticas simples. Coloca-se em pauta também a discussão das vantagens e limitações de cada uma dessas formas de representação e o eventual trânsito entre elas. Em tarefas posteriores, coloca-se a conveniência de avançar na direção do tratamento de um tipo mais sofisticado e mais completo de representação de função, que é o gráfico cartesiano.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 117), existem quatro modos principais de representar uma função:

> (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências. Estes modos de representação podem ser usados em conjunto, sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações.

Esses quatro aspectos fundamentais ligados ao trabalho docente de introdução do conceito de função (descritos nos itens a, b, c, d, acima) deverão ser objeto de discussão explícita numa aula dialogada, a partir dos trabalhos desenvolvidos pelos estudantes (focando também eventuais dificuldades e dúvidas) na resolução das oito primeiras tarefas.

A tarefa 9, nesse sentido, tem o propósito duplo de complementar e, de certa forma, sintetizar essa discussão.

Bloco 2 (tarefas 10 – 11)

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 127), os alunos

> [...] necessitam de trabalhar com gráficos que apresentem vários tipos de variação em certos intervalos. [...] Os alunos devem também saber interpretar gráficos construídos a partir de variáveis discretas, isto é, que podem tomar um conjunto específico de valores, como o "número de um sapato" ou variáveis contínuas, que podem assumir qualquer valor num certo intervalo, como a "distância percorrida".

Nesse bloco, concordando com Ponte, Branco e Matos (2009), retomam-se alguns aspectos da aprendizagem e do ensino relacionados com as tarefas anteriores, mas o foco específico está na construção, em alguns casos simples, de gráficos cartesianos de funções, com domínios e contradomínios numéricos, discretos ou contínuos (subconjuntos de R).

Bloco 3 (tarefas 12-17)

O último bloco de tarefas avança no sentido de trabalhar a leitura, interpretação e análise de gráficos cartesianos, sempre procurando reforçar o aprendizado dos elementos já discutidos nos blocos anteriores, fazendo uso de situações diversificadas do ponto de vista da aprendizagem.

Ponte, Branco e Matos (2009) apontam alguns aspectos, que incluem os destacados por Zuffi (1999), e que, segundo esses autores, constituem uma boa referência para aquilo que os estudantes devem compreender sobre o conceito de função. Sintetizo esses aspectos da seguinte maneira:

- Compreender as noções de dependência e correspondência entre variáveis;
- Identificar correspondências que são e que não são funções;
- Desenvolver a habilidade de construir, ler e interpretar gráficos de funções;
- Reconhecer que as funções podem ser representadas de diversas formas;
- Ser capaz de usar esse conceito (de função) na resolução de problemas.

Observo que algumas abordagens de ensino têm sido utilizadas com maior frequência (no campo da Educação Matemática) para o estudo das funções. Como exemplos, posso citar a abordagem via Resolução de Problemas ou Modelagem Matemática, entre outras. No entanto, considerando que o conjunto de tarefas que elaborei se restringe à introdução do conceito de função, considerei mais adequada a esse estudo introdutório, em acordo com meus orientadores, uma abordagem baseada na análise de situações simples das quais emergem (e podem ser progressivamente explorados) os cinco aspectos fundamentais destacados por Ponte, Branco e Matos (2009) e sintetizados acima.

Como se poderá notar, a proposta que faço não se enquadra exatamente em nenhuma das abordagens mais frequentes do tema, citadas anteriormente, nem constitui, rigorosamente, um plano de ensino de funções. Trata-se de um conjunto de tarefas, construído a partir de fundamentos ancorados na literatura especializada, cujo objetivo é, mais que ensinar, no sentido tradicional do termo, expor os alunos a situações em que se requer análise, reconhecimento e eventual assimilação da pertinência de certas ideias matemáticas ligadas ao conceito de função. A proposta é que o estudante construa os conhecimentos introdutórios relativos ao conceito de função sem muita preocupação com a heurística da resolução de problemas ou com técnicas de construção e avaliação de modelos matemáticos, e que tais conhecimentos, uma vez construídos, possam servir de base para as etapas subsequentes do estudo das funções, agora em condições talvez mais favoráveis ao trabalho com as abordagens referidas anteriormente.

A seguir, apresento as dezessete tarefas que proponho para o trabalho docente de introdução do conceito de função. Gostaria de destacar antes, no entanto, que, no processo de refletir sobre a adequação dessas tarefas ao propósito do conjunto delas como um todo, tentei me colocar na posição de um estudante e as “resolvi”, uma por uma, lendo cuidadosamente os enunciados e pensando também nas possibilidades de diferentes interpretações por parte dos alunos. Ao me colocar nessa posição, além de ter conseguido aprimorar as tarefas, aprendi que essa é uma atitude a ser transformada em hábito, permeando tudo que vier a fazer como professora de Matemática da escola. Afinal, pude perceber que saber se colocar na posição de quem aprende faz parte das competências profissionais daquele que ensina. Isso porque ajuda o professor da escola a entender melhor a dinâmica prevalecente no espaço em que se desenvolve a parte fundamental de sua prática docente: a sala de aula.

Quadro 2: Tarefa 1 - Número de salgados vendidos e valor a receber

Clarice trabalha, sozinha, na cantina de uma escola, atendendo aos alunos, professores e demais funcionários. Os salgados, principal demanda dos clientes, custam R$2,50 cada. Clarice não sabe de antemão quantos salgados cada pessoa vai comprar a cada momento e, por isso, gasta um pouco de tempo para calcular quanto deve cobrar pela quantidade de salgados pedidos por cada um dos diferentes frequentadores da cantina. Para tornar mais

rápido o atendimento, Clarice resolveu construir uma tabela, de modo que a simples leitura indicasse o valor a cobrar, sem ter que fazer certas contas. Para a construção da tabela, identificou as grandezas que se relacionam nessa situação: a **quantidade de salgados** pedidos por um cliente e o **valor a receber** pelos salgados entregues a esse cliente. Para simplificar as entradas da tabela, chamou de **S** o número de salgados e de **V** o valor correspondente a receber. A tabela ficou mais ou menos como abaixo.

S	V
1	2,50
2	5,00
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

a) Complete a tabela para ajudar a Clarice a ganhar tempo.

b) No dia 12 de setembro é aniversário da professora Mariana. Lucas e alguns colegas estão organizando uma festa na escola para ela e decidiram encomendar 130 salgados. Qual o cálculo que deve ser feito para saber quanto Clarice vai receber por esses 130 salgados?

c) Qual a conta que deve ser feita para calcular o valor V a receber por uma quantidade S de salgados vendidos? Em outras palavras, escreva uma fórmula matemática que explicite o valor de V, dada a quantidade S de salgados comprados.

d) É possível que alguém tenha gasto exatamente R$76,00 comprando apenas salgados na cantina da Clarice? Explique sua resposta.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa tarefa acima foi selecionada para ser a primeira porque descreve uma situação compreensível pelos estudantes e pode, em princípio, ser entendida com facilidade por eles. Essa situação mostra uma relação de dependência funcional entre as variáveis S e R, que foi descrita de tal forma que, para a pessoa que se coloca na posição de Clarice, fica subentendido que S é a variável independente e R é a variável dependente. Assim, o domínio dessa função é o conjunto dos números naturais, que é discreto e, por isso, a representação gráfica cartesiana dessa função é formada por um conjunto discreto de pontos do plano (embora alinhados).

Quadro 3: Tarefa 2 - Cubos enfileirados

De origem japonesa, a palavra Origami significa dobrar papel. Vamos utilizar essa técnica para construir alguns cubos. Agora vamos colocar um desses cubos encostados na esquina de duas paredes. Quantas faces desse cubo podem ser visualizadas? E se colocarmos dois cubos empilhados (um em cima do outro) e ambos encostados nas duas paredes, quantas faces ficam visíveis? Já se pode perceber que estamos interessados na relação que se estabelece, nesta situação, entre a **quantidade de cubos empilhados** e a **quantidade de faces visíveis** desses cubos.

a) Escolha letras do alfabeto para representar cada uma dessas duas grandezas, coloque a letra escolhida para a quantidade de cubos na primeira linha da coluna da esquerda e a letra escolhida para a quantidade de faces visíveis no espaço correspondente da coluna da direita. Agora complete os espaços que estão faltando na coluna da direita.

1	3
2	5
3	
4	
5	
6	
8	
15	
18	
20	
31	
40	
92	
120	

b) Como você calculou o número de faces visíveis para 120 cubos empilhados?

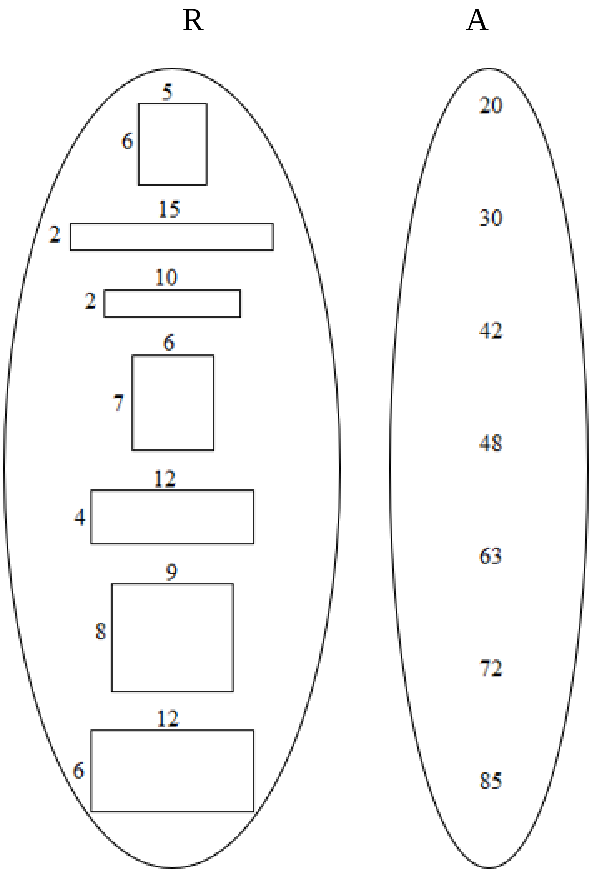
c) Estabeleça, se possível, uma fórmula matemática que permite calcular quantas faces ficam visíveis se for dado o número de cubos empilhados.

Fonte: adaptada de Veloso (2012, p. 79).

Essa tarefa se assemelha à primeira (ambas as variáveis independentes tomam valores em $\mathbb{N}$), mas tem algumas particularidades. Uma delas é que os estudantes devem nomear as variáveis relacionadas (um pequeno passo na direção de uma participação ativa do estudante na realização da tarefa). Outras particularidades se referem à obtenção da lei da função, bem como à construção e utilização de material concreto para facilitar o preenchimento da tabela e, com isso, favorecer a obtenção da lei da função.

Quadro 4: Tarefa 3 - Retângulos e suas áreas

Sabemos que para calcular a área de um retângulo devemos multiplicar a medida de sua base pela medida de sua altura. Assim, vemos que existe uma relação entre as dimensões (isto é, base e altura) de um retângulo e o valor da sua área, ou seja, dadas as dimensões, fica determinada a área. Associe, através de uma seta, por exemplo, cada retângulo de R (lado esquerdo do diagrama abaixo) com os valores dados em A (lado direito do diagrama) que indicam as possíveis medidas das áreas (as unidades de comprimento são centímetros e as de área centímetros quadrados).



Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa situação descreve uma relação de dependência funcional entre as variáveis R e A, sendo que fica subentendido, no enunciado, que R é a variável independente e A é a variável dependente. As particularidades dessa tarefa em relação à anterior estão: nos elementos do domínio que são objetos (figuras geométricas, com dimensões lineares específicas), não simplesmente números; na classificação dessa função como não sobrejetiva (o que não será discutido no momento, mas tem importância na compreensão da distinção entre as características das relações de tipo funcional e não funcional); na forma de representação dessa função, que foi dada pelo diagrama de Venn; no fato de que os alunos devem apenas associar os elementos do domínio com suas respectivas imagens, não fazendo sentido, neste caso, obter uma fórmula matemática que expresse a lei da função.

Quadro 5: Tarefa 4 - Ovos recolhidos e caixas para transporte

Toda segunda feira, Joana coordena o processo de transporte dos ovos que alguns funcionários de uma granja recolhem no fim de semana. Para não haver perdas com quebras durante o transporte, os ovos recolhidos são embalados em caixas que levam até 20 ovos cada uma e são transportados em pilhas de no máximo 8 caixas. A questão que Joana tem sempre que definir a cada segunda feira é o número de caixas que serão necessárias para acomodar os ovos recolhidos. Assim, nota-se que Joana deve prestar atenção na relação existente entre o número de ovos a serem embalados e a quantidade de caixas a serem usadas.

a) Represente cada uma dessas duas variáveis (o número de ovos recolhidos e a quantidade de caixas necessárias para embalá-los) por uma letra do alfabeto e coloque-as nos espaços em branco no extremo esquerdo da tabela abaixo, considerando que na primeira linha estão colocados os valores da primeira variável e na segunda linha os valores da segunda variável. Em seguida, complete os demais espaços vazios da segunda linha da tabela.

	1	2	4	20	26	47	58	60	181	297	306	341	424	638
	1	1		1	2									

b) Como você calculou a quantidade de caixas necessárias para embalar 638 ovos?

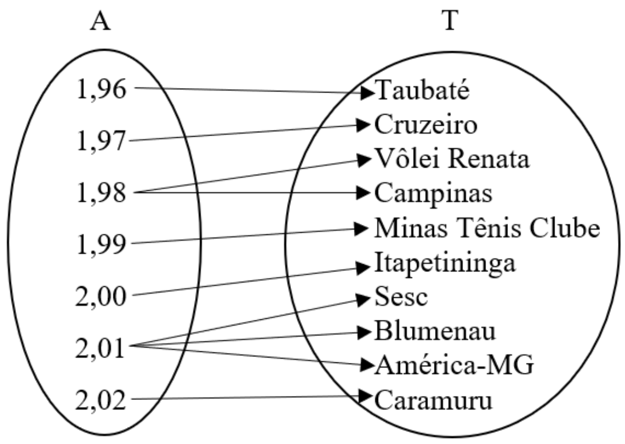
c) Nos fins de semana do mês de novembro, foram recolhidos um total de 2.468 ovos. Quantas caixas foram necessárias para embalar essa quantidade de ovos?

Fonte: adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 130).

Nessa tarefa, a situação apresentada é uma relação de dependência funcional entre as grandezas “número de ovos recolhidos” e “quantidade de caixas usadas para embalar os ovos recolhidos”, sendo que fica subentendida a relação de dependência entre essas duas variáveis (qual funciona como a dependente e qual como a independente, de acordo com a descrição da situação). Essa função pode ser representada graficamente por pontos discretos no plano cartesiano. No entanto, observe-se que a disposição dos pontos do gráfico no plano cartesiano indica uma forma de alinhamento horizontal em níveis que “sobem” uma unidade (na vertical) a cada 20 unidades (na horizontal). Conferir tarefa 10, adiante.

Quadro 6: Tarefa 5 - Altura média dos jogadores de times de voleibol da Superliga

O diagrama a seguir representa a relação entre a média das alturas dos jogadores de voleibol de alguns times da Superliga (figura A, à esquerda) e os respectivos times a que pertencem os jogadores (figura T, à direita). Obs.: as médias de altura são fictícias, mas os times são reais.



Pergunta-se:

a) Qual time tem a maior média de altura dos jogadores?

b) Qual time tem a menor média de altura dos jogadores?

c) Quantos times têm uma média de altura acima de 1,97?

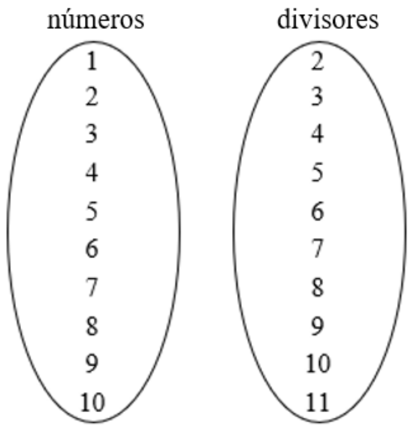
d) Existem times com a mesma média de altura? Se sim, quais?

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Nessa tarefa, a situação apresentada é uma relação de dependência entre a "média das alturas dos jogadores" e os "times de voleibol da Superliga". Porém, essa não é uma relação funcional, pois existem elementos do domínio que possuem mais de um correspondente no contradomínio. Observe-se, de passagem, que a relação inversa entre essas duas variáveis seria uma função.

Quadro 7: Tarefa 6 - Números naturais e seus divisores

Sabemos que um número natural *d* é divisor do número natural *n* se a divisão de *n* por *d* deixar resto zero. Assim, 1 é divisor de qualquer número natural e 20, por exemplo, tem os seguintes divisores naturais: {1, 2, 4, 5, 10, 20}. Associe (usando setas, por exemplo) cada número (lado esquerdo do diagrama abaixo) com seus respectivos divisores (lado direito do diagrama) e responda:



a) quais números (à esquerda) possuem apenas um divisor (à direita)?

b) quais números possuem mais de 2 divisores?

c) quais números possuem exatamente dois divisores?

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Assim como a tarefa anterior, essa relação de dependência entre os números e seus divisores em N não é uma função, pois além de existirem elementos do conjunto de partida que possuem mais de um correspondente no conjunto de chegada, existe um elemento do conjunto de partida (1) que não possui nenhum correspondente no conjunto de chegada. Observe-se que, neste caso, a relação inversa também não seria função.

Quadro 8: Tarefa 7 - Valor a pagar na saída do estacionamento de um Shopping

Roberto foi fazer compras num Shopping e deixou seu carro às 14 horas no estacionamento, que cobra o valor de R$ 2,00 a cada intervalo de até 15 minutos, sendo que os primeiros 15 minutos não são cobrados. Assim, se o carro permanecer no estacionamento até 14:15h, por exemplo, Roberto não pagará nada; se permanecer 18 minutos, deverá pagar R$2,00; se permanecer 40 minutos, deverá pagar 4 reais etc. Como estamos em período de pandemia, o estacionamento desse Shopping funciona diariamente, mas apenas entre 12:00 e 20:00 horas. Nessas condições, responda as seguintes perguntas relacionadas à situação descrita:

a) Qual a variável importante a ser considerada para o cálculo do valor a pagar, quando Roberto (ou qualquer outra pessoa que tenha deixado seu carro no estacionamento desse Shopping) for retirar seu carro? Escolha uma letra do alfabeto para representar essa variável e outra letra para representar o valor a pagar.

b) Coloque a letra que você escolheu para o preço a pagar na primeira linha da coluna da direita e a letra escolhida para a outra variável no espaço correspondente da coluna da esquerda. Agora complete os espaços que estão faltando na coluna da direita.

8	0,00
15	0,00
18	2,00
25	
30	
39	
45	
200	

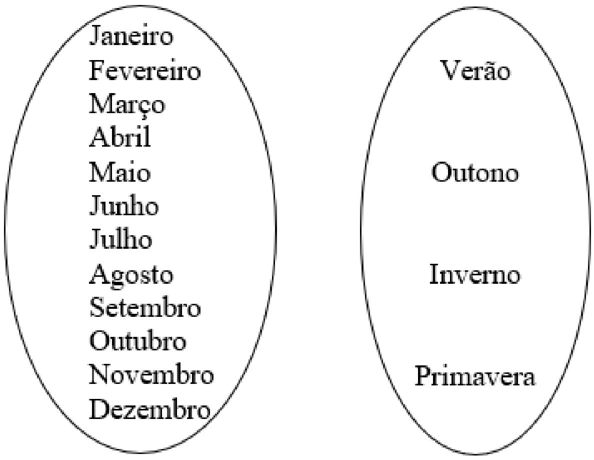
c) Quanto Roberto pagou pelo estacionamento se saiu às 18:12? Explique como você fez o cálculo.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa tarefa se refere a uma situação em que as variáveis envolvidas se relacionam segundo uma função. Uma particularidade dessa tarefa se mostra no fato de que o domínio dessa função (contido no conjunto dos reais não negativos) é um conjunto contínuo. Assim, a sua representação gráfica cartesiana é dada por linhas cheias e não por pontos discretos.

Quadro 9: Tarefa 8 - Estações e meses do ano

As estações do ano são subdivisões baseadas em padrões climáticos, representando quatro períodos distintos: verão, outono, inverno e primavera. O verão começa no dia 21 de dezembro e termina quando começa o outono, no dia 20 de março. Em seguida vem o inverno, que começa em 20 de junho e termina no dia 22 de setembro, quando começa a primavera. Esta estação vai até o começo do verão, quando um novo ciclo se inicia. De posse dessas informações, associe cada mês do ano a uma das quatro estações (observe que alguns meses poderão ser associados a mais de uma estação):



Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Nessa tarefa, a associação entre os meses e as estações do ano não é uma função, pois existem elementos do domínio (no caso, os meses do ano) que possuem mais de um correspondente no contradomínio (as estações). A relação inversa também não seria função.

Quadro 10: Tarefa 9 - Características de relações funcionais, nomenclatura pertinente

Em cada uma das tarefas de 1 a 8 verifique se a relação estabelecida entre as duas variáveis é ou não uma função, justificando sua resposta para cada caso. Nos casos em que for função, identifique a variável independente e a variável dependente.

Em cada caso, proponha um conjunto que possa ser considerado como o domínio da função e um conjunto que possa ser o contradomínio, de acordo com a situação descrita.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

Essa tarefa objetiva que o estudante identifique as relações funcionais e não funcionais apresentadas nas oito tarefas anteriores. Dessa forma, essa tarefa complementa a aula expositiva dialogada (que deve acontecer anteriormente à apresentação da tarefa 9), além de possibilitar discussões sobre o conceito de função e suas características próprias, uma vez que para as relações funcionais o estudante deve indicar o domínio e escolher o contradomínio de cada uma delas. Ao final dessa tarefa, seria interessante que o professor discutisse com os estudantes a representação gráfica cartesiana de uma função, além de discutir as diferenças características entre os gráficos de relações que são do tipo funcional e os de relações do tipo não funcional.

Quadro 11: Tarefa 10 - Construindo gráficos I

10.1 Reveja as respostas dadas na Tarefa 9 que se referem à função da Tarefa 1, na qual se associa a cada quantidade de salgados comprados na cantina da Clarice o valor correspondente a pagar. Agora responda: a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente? b) Qual é o domínio e qual é o contradomínio propostos por você na Tarefa 9? c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 1. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da função que fornece o valor a pagar, dado o número de salgados comprados. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido. **10.2** Reveja as respostas dadas na Tarefa 9 referentes à função da Tarefa 4, que associa a cada quantidade de ovos o número de caixas necessário para a embalagem. Agora responda: a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente? b) Qual foi o domínio e qual foi o contradomínio propostos por você na Tarefa 9? c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 4. Agora você tem todos os dados que precisa para construir o gráfico cartesiano da função que fornece o número de caixas necessárias, dado o número de ovos. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido.

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

O diferencial dessa tarefa está nas construções gráficas das relações funcionais, sendo que os gráficos cartesianos a serem construídos nos itens 10.1 e 10.2 são formados por pontos separados, pois o domínio dessas duas funções está contido no conjunto dos números naturais. A forma com que varia o valor recebido em função da quantidade de salgados vendidos é diferente da forma como varia a quantidade de caixas em função da quantidade de ovos. Isso também é um ponto que, segundo a literatura, contribui para uma compreensão mais abrangente do conceito de função: diversidade de exemplos que mostram a amplitude do espectro de formas quantitativas de dependência existentes entre duas variáveis, mantidas as características que definem as relações funcionais. Essa amplitude é contemplada também nos gráficos cartesianos construídos e/ou analisados nas tarefas 12 a 17, adiante.

Quadro 12: Tarefa 11 - Construindo gráficos II

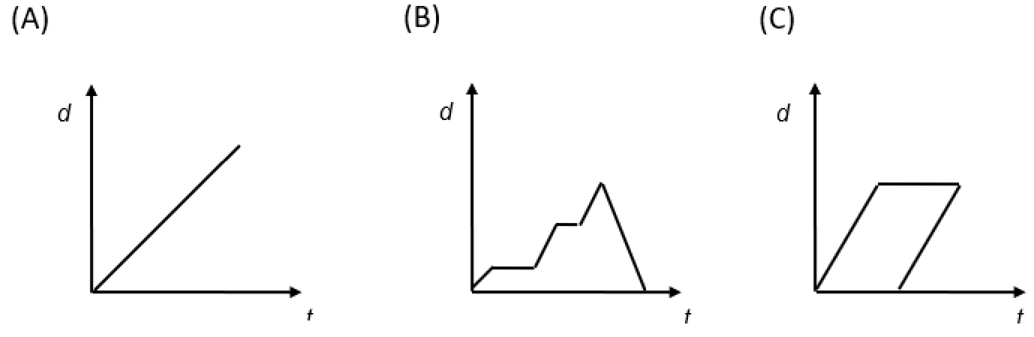
11.1 Reveja as respostas à tarefa 9 referentes à função da Tarefa 7, em que se associa a cada período de tempo que o carro passou no estacionamento o valor a pagar na saída. Agora responda: a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente? b) Qual foi o domínio e qual foi o contradomínio propostos por você na Tarefa 9? c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 7. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da função que fornece o valor a pagar, dado o tempo de permanência do carro no estacionamento. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido. **11.2** Reveja as respostas à tarefa 9 referentes à função da tarefa 2 (cubos e faces visíveis), em que se associa o número de faces visíveis à quantidade de cubos empilhados. Agora responda: a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente? b) Qual foi o domínio e qual foi o contradomínio propostos por você na Tarefa 9? c) Reveja também, se achar que ajuda, a tabela construída na Tarefa 2. Agora você tem todos os dados necessários para construir o gráfico cartesiano da referida função, que fornece o número de faces visíveis, dada a quantidade de cubos enfileirados. Construa esse gráfico no papel quadriculado fornecido.

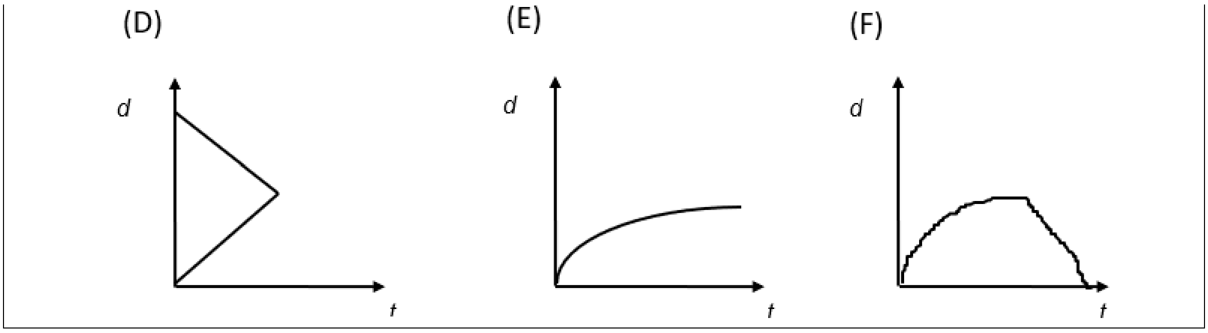
Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

A construção gráfica no item 11.2 é semelhante ao gráfico feito no item 10.1, mas se diferencia dele pelas respectivas leis das funções. Já o gráfico pedido no item 11.1 se diferencia de todas as demais construções de gráficos cartesianos anteriores, uma vez que o domínio dessa função é um intervalo dos reais, portanto contínuo. Por isso, a representação gráfica dessa função é feita por segmentos de retas (no caso, devido à lei da função, paralelos ao eixo das abscissas).

Quadro 13: Tarefa 12 - Comparando gráficos

Em todos os gráficos d é a distância relativa a um ponto de partida e t o tempo. Para cada gráfico, informe se é ou não uma função, justificando sua escolha.



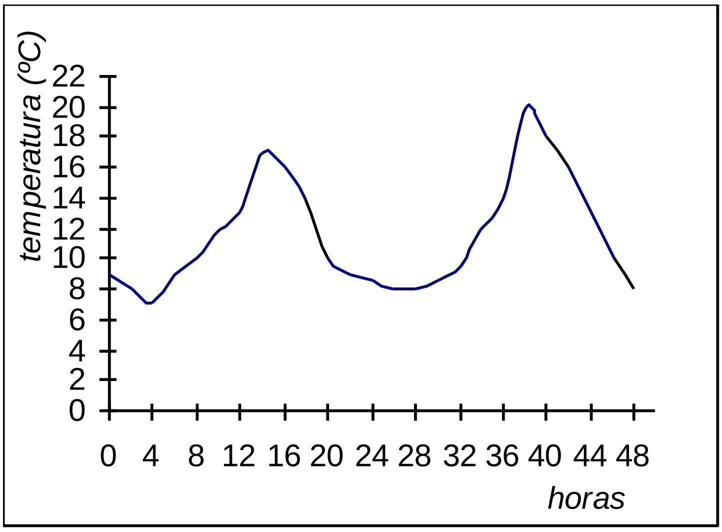


Fonte: adaptada de Teixeira et al. (1997, p. 70).

Feitas as construções gráficas das relações funcionais, é proposta essa tarefa para que o estudante indique, com base nos assuntos já trabalhados, os gráficos que representam funções. Essa tarefa pode remeter também às tarefas anteriores, relembrando as características que definem (ou não) como função, cada uma das relações estudadas nessas tarefas. Nota-se então que o gráfico cartesiano indica de modo claro se a relação representada é ou não uma função.

Quadro 14: Tarefa 13 - Temperatura ambiente

No gráfico abaixo, estão registradas as temperaturas ambiente durante um período de 48 horas de dois dias de Outono.



a) Identifique as variáveis dependente e independente da função representada no gráfico.

b) Identifique o domínio e o contradomínio.

c) A que horas se fez sentir a temperatura máxima em cada um dos dois dias? E a mínima?

d) Qual foi a temperatura máxima durante todo o período?

Fonte: adaptada de Teixeira et al. (1997, p. 67).

Essa tarefa, assim como as próximas, tem o objetivo de trabalhar a leitura, interpretação e análise de gráficos cartesianos de funções, reforçando a aprendizagem dos elementos já discutidos em tarefas anteriores. O diferencial dessa tarefa está na representação gráfica dessa função que possui taxa de variação constante apenas em um pequeno intervalo contido no domínio.

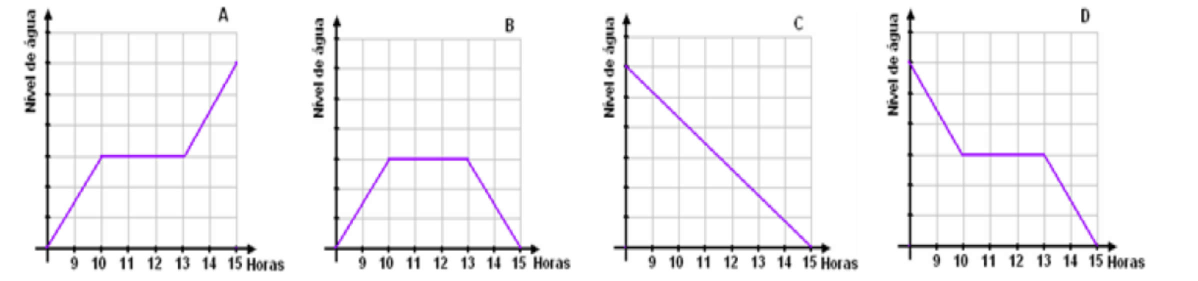
Ponte, Branco e Matos (2009) ressaltam que, muitas vezes, são apresentados aos alunos problemas que se enquadram em proporcionalidade direta ou inversa, ou seja, os valores das grandezas variam, mas, geralmente, com um padrão fixo nessa variação. Por exemplo: se o preço unitário de um certo produto é R$ 2,00, quando uma pessoa comprar três desses produtos, irá pagar R$ 6,00. Outro exemplo comum costuma ser o seguinte: em certo plano de telefone, é cobrada uma taxa fixa para liberação do plano e a pessoa tem 60 minutos para utilizar durante o mês, com um valor de R$ 0,15 que será cobrado por minuto que ultrapassar os 60 cobertos pela taxa fixa. Em ambos os exemplos as taxas de variação são constantes, embora num caso a função seja linear e, no outro, afim. Esses autores apontam a relevância de apresentarmos aos alunos situações em que grandezas variam a taxas não constantes, como, por exemplo, a medição, ao longo do tempo, do crescimento de uma planta. A ideia é evitar que os estudantes desenvolvam uma concepção equivocada, entendendo que em todos os processos de variação, as taxas sejam constantes. Esse aspecto foi considerado nessa tarefa 13, acima. Entretanto, é importante observar que o problema de apresentar uma grande diversificação de taxas de variação, especificamente no processo de introdução do conceito de função, se coloca porque as funções com taxas de variação não constantes possuem expressão analítica (e, em consequência, representação gráfica cartesiana) mais complexa do que aquelas que normalmente podemos utilizar num estudo introdutório. Por isso, tentei diversificar esse aspecto nas tarefas, mas sem contar com a necessidade de fazer uso de conhecimentos matemáticos que só serão trabalhados mais adiante, como, por exemplo, a associação do gráfico de uma função quadrática com a parábola, entre outros.

Quadro 15: Tarefa 14 - Esvaziando o tanque do agricultor

Às 8 horas um agricultor começou a esvaziar um dos tanques da sua propriedade, cuja capacidade é de 600 litros de água. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque. Sabendo que a vazão de água na saída do tanque é de 150 litros por hora, pergunta-se:

a) Às 11 horas, quantos litros de água ainda estavam dentro do tanque?

b) Qual dos gráficos abaixo representa mais corretamente a situação descrita no enunciado? Explique sua resposta.

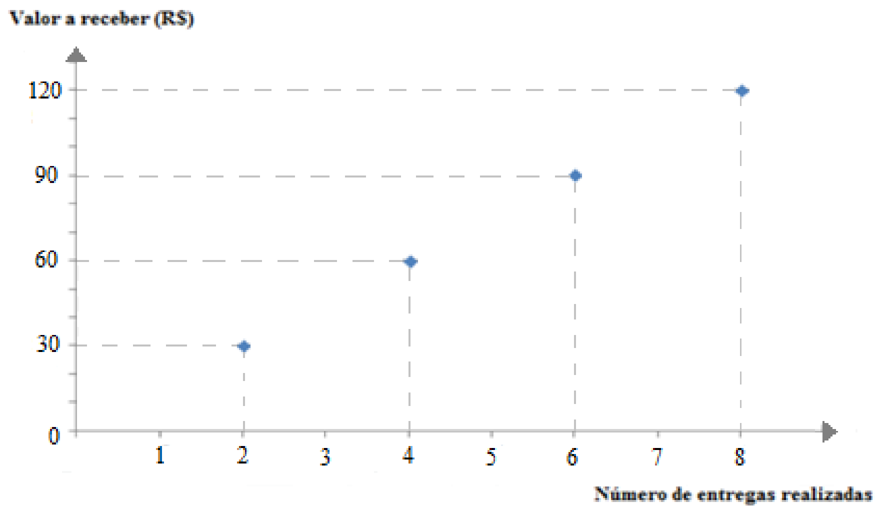


Fonte: adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 128).

Nessa tarefa, ao solicitar que o estudante explique as razões que o levaram a optar pelo gráfico indicado em sua resposta (assim como as razões que o fizeram descartar as demais opções), abre-se uma oportunidade para trabalhar a capacidade de argumentação dos alunos.

Quadro 16: Tarefa 15 - Entregas

Rogério trabalha em uma empresa que entrega mercadorias compradas pela internet. O gráfico abaixo representa a relação entre o valor que Rogério recebe e o número de entregas realizadas. Ele precisa pagar uma conta no valor de R$ 850,00, que vence hoje, e ele só tem R$ 550,00. Sabendo disso e com base no gráfico, responda:



a) Qual é a variável dependente e qual é a variável independente?

b) Determine a lei de correspondência dessa função, supondo que o processo descrito no gráfico até 8 entregas permaneça o mesmo para números de entrega maiores.

c) Se Rogério fez 45 entregas, quanto ele recebeu? Ou seja, quanto vale f (45)?

d) Quantas entregas Rogério precisa fazer para conseguir o dinheiro exato para pagar a conta hoje?

Fonte: adaptada de Souza (2016, p. 95).

Nessa tarefa, além de trabalhar a leitura, interpretação e análise de gráficos cartesianos, reforçando a aprendizagem de elementos já discutidos em tarefas anteriores, reforça-se também a notação f (45), para representar o valor da função f no ponto 45.

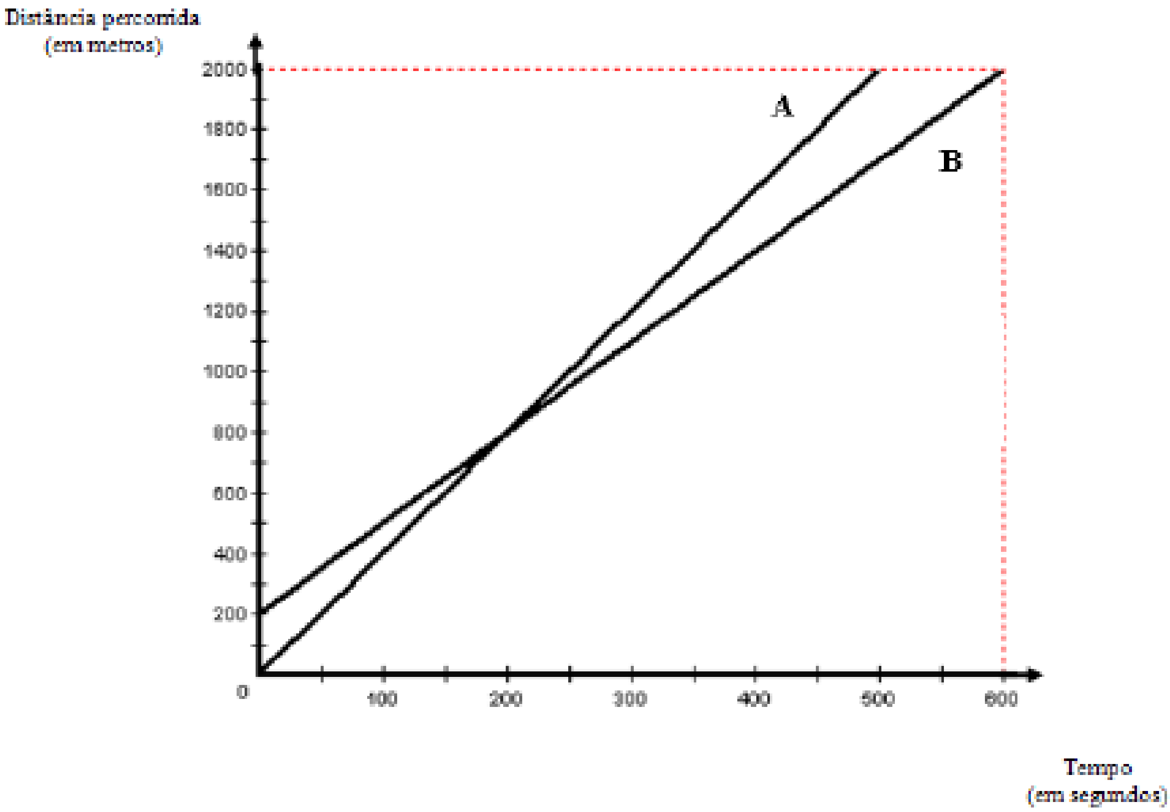
Quadro 17: Tarefa 16 - João e Maria

João e Maria resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo de 2000 metros. Por ser mais rápida e para tornar a corrida mais competitiva, Maria disse a João que o deixaria partir alguns metros à sua frente. Suponha que:

- Maria percorre 4 metros por segundo;

- João percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Os gráficos abaixo mostram como se desenvolveu a corrida (são dois gráficos num mesmo sistema de coordenadas)



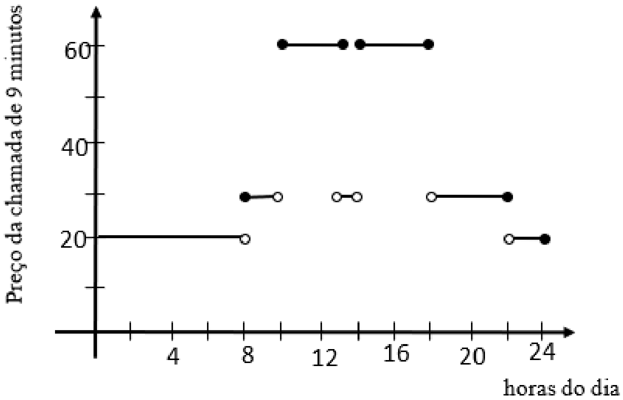
a) Identifique as variáveis (independente e dependente) que estão relacionadas em cada um dos gráficos.
b) Qual gráfico representa a distância percorrida por João em função do tempo?
c) Indique o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções representadas em cada gráfico.
d) Que distância Maria percorreu ao fim de 100 segundos?
e) Quanto tempo Maria demora para percorrer 1400 metros?
f) Quem venceu a corrida?

Fonte: adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 123).

Nessa tarefa, os estudantes devem indicar a imagem correspondente a um dado valor do domínio, bem como indicar o valor do domínio ao qual corresponde um dado valor no contradomínio. Além disso, o gráfico não indica explicitamente esses valores pedidos, o que pode fazer com que o aluno utilize outras estratégias para resolver essa questão, como por exemplo, encontrando as leis das funções.

Quadro 18: Tarefa 17 - Custo de chamada telefônica

Suponha que o custo de uma chamada telefônica varie com a distância para onde se deseja telefonar e com a hora do dia em que a ligação é feita. O gráfico abaixo fornece o preço (em reais) de uma chamada de 9 minutos de Belo Horizonte para Lisboa, em função da hora do dia em que a chamada é realizada.



Pede-se:

a) O domínio e o conjunto imagem dessa função.

b) Seja f(x) o preço pago pela chamada de 9 minutos e seja x a hora do dia em que essa chamada foi realizada. Calcule:

b1) f (4)
b2) f (9)
b3) os valores de x tais que f (x) = 20 reais
b4) os valores de x tais que f (x) = 60 reais
b5) f (23)
b6) f (0)

Fonte: adaptada de Teixeira et al. (1997, p. 74).

Aqui temos um gráfico análogo ao da tarefa 11.1, com a diferença de que lá, os "patamares" sempre sobem à medida que a abcissa aumenta, enquanto aqui, eles sobem e descem, dependendo da hora do dia. Aliás, um aspecto interessante a ser observado é que, nos pontos de descontinuidade (onde ocorrem os "saltos"), o critério utilizado para fixar o custo parece beneficiar a empresa operadora. Por exemplo, uma chamada que começa às 10 horas custa R$ 60,00, mas uma que tem início às 18 horas custa também R$ 60,00, quando deveria custar R$ 30,00, se fosse seguido um critério homogêneo de definição do custo nos valores extremos dos intervalos em que esse custo é constante.

Por último, gostaria de destacar que mantive esse enunciado da Tarefa 17, embora ele não corresponda mais, hoje em dia, à realidade das contas de telefone, pois o acesso mais facilitado à internet revolucionou as formas de cobrança dos serviços telefônicos (fixos ou móveis). No entanto, quero lembrar que a ideia de contextualização com que trabalho neste texto inclui situações não inteiramente realísticas, como essa. Ver nota de rodapé à p. 51.

CAPÍTULO 4: ANÁLISE DO PROCESSO VIVIDO AO LONGO DA PESQUISA

"E do lado de lá? Lá, é o lugar da professora. Professora que traz consigo traços da estudante que foi e que continua sendo, das percepções de si a respeito da própria aprendizagem e do que aprendeu nos diferentes espaços que percorreu."
(Oliveira, 2015)

Antes de preparar o conjunto de tarefas para a introdução da noção de função, apresentadas no capítulo anterior, busquei compreender melhor esse conceito, observando como alguns livros didáticos o abordam. Também busquei, na literatura e em documentos oficiais, informações sobre o ensino e aprendizagem desse conteúdo na Educação Básica. Esse processo de estudos vivenciado ao longo da pesquisa, aliado às memórias de minhas experiências como discente e docente, proporcionou momentos de reflexão, os quais impulsionaram minha busca por novos conhecimentos e possibilitou o aprimoramento gradativo do conjunto de tarefas eventualmente construído.

Neste capítulo, apresento minhas reflexões sobre esse processo de estudos vivido ao longo da realização da pesquisa. Para isso, identifiquei alguns momentos marcantes e procurei descrevê-los e analisá-los. São eles: o estudo da literatura sobre o ensino e a aprendizagem de funções na Educação Básica, o estudo de alguns livros didáticos com o propósito de observar como os autores concebem o trabalho introdutório com a temática das funções e as idas e vindas da construção do conjunto de tarefas para introduzir a noção de função na Educação Básica.

Assim, organizei esse capítulo em três subseções que se referem, respectivamente, a esses três momentos marcantes. Embora os dados tenham sido organizados, separadamente, nessas três subseções, ressalto que esses processos de estudos, reflexões e planejamento aconteceram simultaneamente, com razoável frequência. Á medida que surgiam reflexões a partir dos diários de estudos e de planejamento e/ou reflexões vindas de minhas experiências docente e discente, o conjunto de tarefas foi sendo reconstituído. Algumas ideias iniciais permaneceram, enquanto outras foram adaptadas, acrescentadas ou retiradas, à medida que me apropriava de novos conhecimentos e modos de pensar as tarefas, oriundos de reflexões desenvolvidas a partir das informações registradas nos diários de estudos e planejamento.

4.1 Estudo da literatura sobre o ensino e aprendizagem de funções na Educação Básica

Desde o início do curso de Mestrado, vinha estudando materiais sobre o ensino e aprendizagem de funções, como por exemplo: Ferreira (2014); Ferreira (2017); Ponte, Branco, Matos (2009); Veloso (2012); Rosa (2005); Estima (2009); Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes, Nápoles (1997); Zuffi (1999); Santos, Barbosa (2019); Rodrigues, Bolognezi (2020). Cada um desses trabalhos contribuiu para a minha pesquisa de diferentes formas: com recomendações para o trabalho com funções; com exemplos de situações já vivenciadas por outros professores em sala de aula ao ensinar funções; com exemplos de tarefas que podem ser adaptadas uso em sala de aula, dentre outras. No entanto, destaco os estudos da brochura de álgebra (Ponte, Branco e Matos, 2009), pois, durante esses estudos, registrei momentos que resultaram em reflexões especialmente relevantes para esta pesquisa. Assim, decidi selecionar para este relato, momentos específicos de reflexão e aprendizagem vivenciados durante o estudo dessa brochura, buscando associá-los, quando possível, aos domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino, propostos por Ball, Thames e Phelps (2008).

4.1.1 Desenvolvendo Conhecimentos Matemáticos para o Ensino de Funções

Nesta subseção descrevo e analiso alguns momentos de reflexão e aprendizagem vivenciados durante o estudo da brochura de Ponte, Branco e Matos (2009), os quais se relacionam, a meu ver, com o desenvolvimento de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino de funções na escola.

Começo destacando o tópico 4.2 da brochura, denominado Tarefas: Exemplos e Ilustrações na Sala de Aula. Nele são apresentados doze exemplos de tarefas que podem ser utilizadas em sala de aula, bem como possíveis resoluções dessas tarefas, tanto de uma maneira em que predomina um tipo de raciocínio e de linguagem mais informal, como também pela utilização de raciocínio mais formal, apoiado na linguagem algébrica padrão. Dentre esses exemplos, resolvi um de maneira inadequada (exemplo 6), e no exemplo 12 a brochura apresenta uma opção de resolução que não me havia ocorrido e me chamou particularmente a atenção.

- Exemplo 6 – Desigualdades

Figura 3 - Desigualdades

Utilizando os números naturais e o zero, indica, para cada um dos casos, os valores que os tornam afirmações verdadeiras:

$$\square < 5$$

$$\square + 1 < 7$$

$$10 < 6 + \square$$

Fonte: PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 33.

Dentre as três situações apresentadas, a que resolvi de maneira incorreta foi a última. Completei o quadrado com o número 1, contudo, o correto seria registrar qualquer número natural maior ou igual a 5. Não sei por que motivo, tinha entendido que 6 mais um número tinha que resultar em um valor menor que 10. E na verdade é o contrário, 10 que deve ser menor do que o resultado da soma entre 6 e esse outro número. É claro que conheço os símbolos > e <, mas, nesse exemplo, parece que meu cérebro "considerando a parte visual" enxergou a relação inversa. Na verdade, acredito que tenha acontecido o seguinte: nas três situações, o sinal utilizado é o de <, em todas elas, o espaço em branco a ser completado estava do lado esquerdo, exceto no último caso. Então, levanto a possibilidade de, por uma espécie de inércia de pensamento, inverti mentalmente a relação, de modo a uniformizá-la com as anteriores.

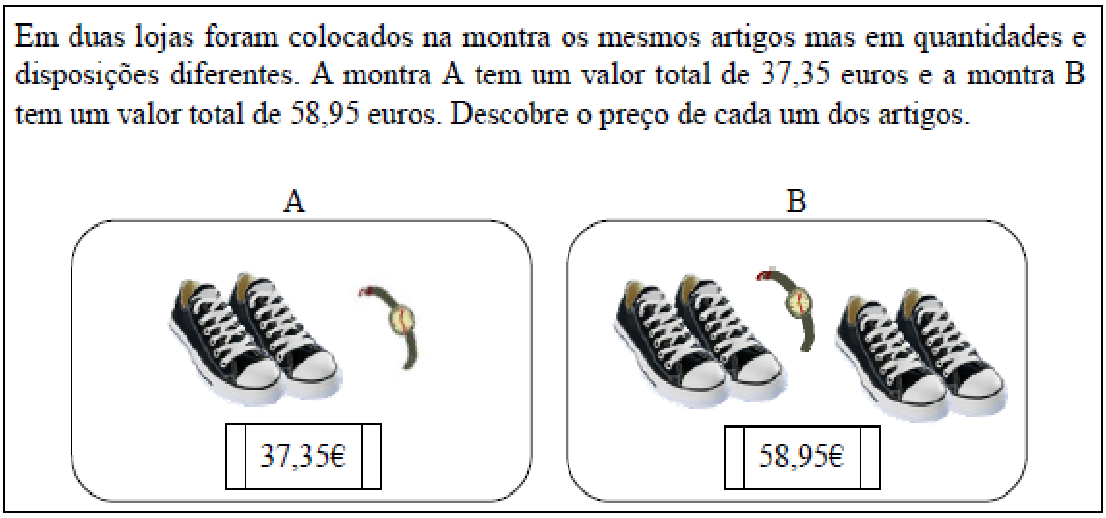
Nesse exemplo ainda, nas três situações, preenchi cada quadrado com apenas um número. No entanto, o enunciado deixa claro que deveriam ser indicados todos os valores que tornam as afirmações verdadeiras. Falha de atenção ao ler o enunciado? Acredito que não, pois ao ler que "a realização desta tarefa reforça a ideia de que algumas questões matemáticas podem ter mais do que uma solução" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 33), percebi que, muito provavelmente, a questão tenha tido o propósito de levar os alunos a preencherem os quadradinhos com diferentes números, mas todos corretos, e não o de exigir que cada aluno apresentasse como resposta uma lista de todos os números que poderiam tornar as igualdades verdadeiras. Até porque, no último caso, essa lista seria infinita, o que, dependendo da idade dos alunos, poderia dificultar a formulação correta da resposta completa. Entretanto, como rigorosamente de acordo com o enunciado, minhas respostas estavam incompletas, procurei completá-las. Revisei as situações, complementando as respostas com todos os valores adequados em cada caso e foi então que verifiquei que essa terceira situação tinha sido respondida por mim de maneira incorreta. Contudo, avaliei que a questão pode gerar discussões interessantes em sala de aula, quando diferentes alunos completam o quadradinho com números diferentes, porém de forma que todos eles tornem as afirmações verdadeiras.

Refletir sobre esse “erro” contribuiu, assim, para minha formação, uma vez que, agora, tendo vivenciado essa experiência, percebo o quanto é importante possibilitar momentos de diálogo entre os alunos em sala de aula, ao propor tarefas que contemplem uma variedade de respostas corretas. Isso poderá favorecer a construção de maior confiança, por parte dos alunos, na “defesa” de suas próprias resoluções, bem como o desenvolvimento de uma visão cognitivamente mais rica da natureza das tarefas matemáticas.

Esse tipo de aprendizagem profissional, desenvolvida a partir das reflexões descritas acima, ainda que não tenham relação direta com a construção do conjunto de tarefas a que me propus, certamente constitui um tipo de conhecimento matemático relevante para o ensino na escola, se enquadrando possivelmente no domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e nos seus subdomínios de Ball, Thames e Phelps (2008).

- Exemplo 12 - Relações com duas variáveis

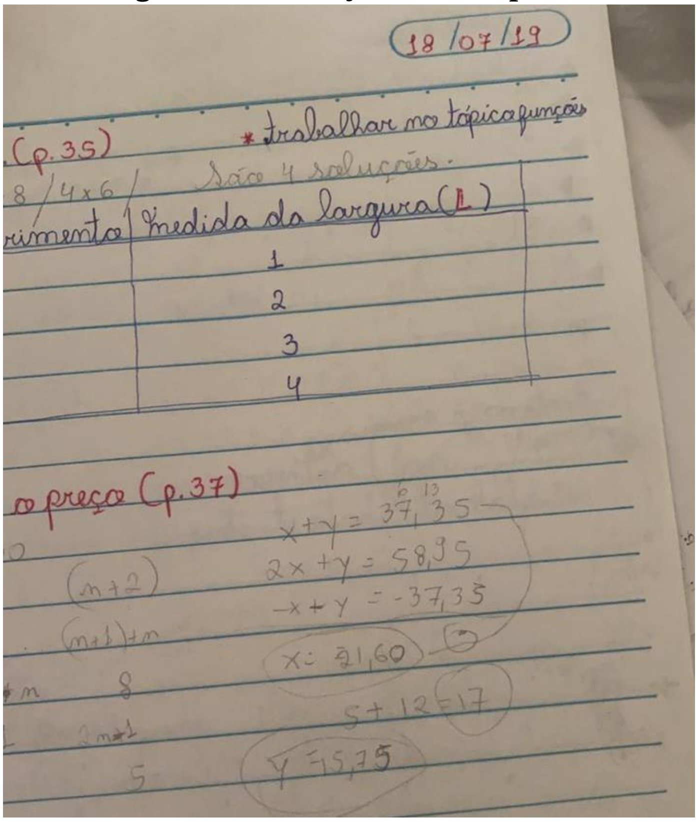
Figura 4 - Relações com duas variáveis



Fonte: PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 39.

Para resolver esse exemplo, recorri à linguagem algébrica:

Figura 5 - Resolução do exemplo 12



Fonte: diário da professora pesquisadora.

A resolução está correta, porém, a resolução apresentada na brochura, me surpreendeu ao utilizar apenas o raciocínio lógico e cálculos relativamente simples:

> Podemos começar por considerar o par de ténis e o relógio como um todo. Da primeira montra[20] concluímos que o par de ténis e o relógio custam 37,35 euros. Como os produtos são iguais em ambas as montras, também na montra B o par de ténis e o relógio custam 37,35 euros. A montra B tem mais um par de ténis do que a montra A e o seu valor acresce 21,60 euros. Ficamos assim a saber que o par de ténis tem um preço de 21,60 euros. Usando, por exemplo, a informação da montra A fazemos 37,35 − 21,60 e obtemos o preço do relógio (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 39).

Refletir sobre essas duas possibilidades de resolução dessa situação proposta, além de reforçar a ideia de que as tarefas de matemática podem ser resolvidas de várias maneiras, fez com que eu compreendesse que esse tipo de resolução e/ou tarefa pode ser trabalhada em vários níveis de ensino, adequando-a ao nível de ensino pretendido. Isso sugere que desenvolvi, em alguma medida, um tipo de conhecimento particular do professor de Matemática, denominado por Ball, Thames e Phelps (2008) como “Conhecimento Especializado do conteúdo”.

[20] Montra (português de Portugal) significa vitrine.

Outro momento de destaque está no estudo do capítulo 8. Nele, é abordado o conceito de Função com ênfase nas diversas formas de representação possíveis e, de forma particular, nos tipos de função trabalhados ao longo do Ensino Básico. Logo de início os autores apontam, nesse capítulo, que a aprendizagem do conceito de função em Portugal é preparada desde o primeiro e segundo ciclos, sendo que, em cada ciclo, há a indicação de um tópico relacionado à ideia de função. Ver esse comentário na brochura gerou em mim reflexões, pois não sabia, a essa altura dos estudos, que o trabalho docente relacionado com ideias que envolvem o conceito de função podia ter início nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Trata-se, mais tarde vim a entender, de expor a criança a formas elementares (adequadas ao seu estágio de aprendizagem) de desenvolvimento do pensamento funcional.

A partir dessas reflexões, busquei por informações nacionais a respeito e encontrei orientações semelhantes nos PCN. Segundo esses parâmetros, “a partir da generalização de padrões, o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos” (BRASIL, 1998, p. 51). Assim, essa inquietação que emergiu a partir do estudo dessa parte da brochura me instigou a buscar informação sobre as recomendações brasileiras a respeito do trabalho com funções na Educação Básica. Pude perceber, então, que há recomendações dos PCN para trabalhar ideias matemáticas ligadas ao desenvolvimento do pensamento funcional desde os anos iniciais, como em Portugal. Nesse momento, fui levada a identificar e reconhecer como relevantes, conhecimentos próprios da docência, que nesse caso, a meu ver, podem ser situados no subdomínio “Conhecimento do Conteúdo e do Currículo”.

Ponte, Branco e Matos (2009, p. 116) também apontam que “além de situações de proporcionalidade direta, são estudadas situações modeladas por funções afins (não lineares), do tipo $y = ax + b$ (com a e b diferentes de zero), e por funções de proporcionalidade inversa, do tipo $y = \frac{a}{x}$ (com a diferente de zero e x também diferente de zero)”. Durante a leitura desse trecho, a expressão “**funções afins (não lineares)”** chamou minha atenção. Nesse instante pensei: o que seria uma função afim não linear? No meu pensamento, função afim é aquela do tipo f(x) = ax+b e que representa sempre uma reta. No entanto, essa expressão que destaquei em negrito fez com que inquietasse por não compreender como poderia uma função afim não ser linear. A questão, vim a entender um pouco à frente, é que, até esse momento, associava a linearidade com o gráfico da função e não com suas propriedades algébricas.

De novo, a partir dessas inquietações, busquei por mais informações via internet e, além disso, contatei meus orientadores. Pude compreender, então, que meu entendimento sobre função linear estava equivocado, pois identificava como função linear qualquer função cujo gráfico fosse uma reta e não apenas aquelas cujos gráficos retilíneos passassem pela origem do sistema de coordenadas. Aqui, acredito que possa identificar esse tipo de conhecimento que vim a aprender como parte do Conhecimento Comum do Conteúdo, nos termos de Ball, Thames e Phelps (2008).

Já no tópico 8.1 (Conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem) os autores fazem relação entre o conceito de função, a geometria e a álgebra. Eles também citam os quatro modos principais de representar uma função e ressaltam que as tabelas permitem representar funções cujo domínio contém relativamente poucos elementos, ao passo que os gráficos cartesianos e as fórmulas podem, em algumas circunstâncias, representar funções com domínios formados por conjuntos numéricos infinitos.

Quando os autores começaram discutir sobre o conceito de variação, levantaram a importância de os estudantes terem contato com situações, por exemplo, de medição da temperatura ao longo do tempo, crescimento de uma planta, ou seja, situações em que não acontecem um aumento ou diminuição uniforme ou padronizado. Em outras palavras, não vai sempre dobrar e aumentar 1. No caso da planta por exemplo, ela pode crescer rapidamente no início, mas sem um padrão fixo. Pode crescer 3 mm em um dia, 5 mm no outro, 1 mm no outro, 7 mm no dia seguinte e, eventualmente, para de crescer. Esse tipo de relação entre o número de dias transcorridos e a correspondente medida da altura da planta, para mim, nesse momento, não poderia ser considerada uma função pois, não haveria uma lei matemática para estabelecer precisamente a relação entre as variáveis, por exemplo. Porém, com o tempo, estudando mais a brochura e outros materiais, bem como a partir de conversas com meus orientadores, fui amadurecendo a ideia de que tinha uma função não precisa necessariamente de ter uma representação no formato de lei matemática. Cheguei a lembrar até que, lá na faculdade, tinha estudado funções que obedeciam a determinada lei em certos intervalos, e outra lei em outros intervalos, por exemplo.

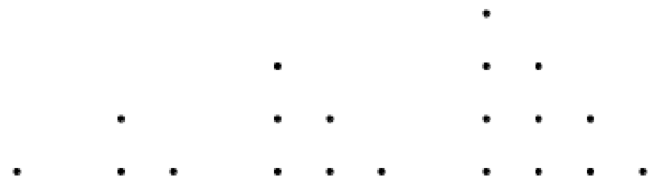
Outro aspecto que quero destacar é a utilização do termo “taxa de variação”. Eu estava lendo a brochura naturalmente, sem me atentar para o termo. Porém, em conversas com meus orientadores, comecei a ficar confusa, e percebemos que eu não tinha conhecimento do significado desse termo. Essa percepção fez com que eu fosse em busca de compreendê-lo. Então percebi que a noção de taxa de variação é algo mais complexo que eu pensava. Está relacionada ao comportamento da função, há taxa de variação média e taxa de variação instantânea, sendo que esta última extrapola a matemática que é objeto de estudo na Educação Básica, mas nos diz que a taxa de variação de uma mesma função pode variar ao longo dos pontos do domínio. Percebi que em alguns momentos associava taxa de variação constante com função constante; outras vezes usava a ideia de variação no lugar da de taxa de variação, o que aprendi que é outra coisa. Essa compreensão foi sendo melhorada mais a frente, quando os autores apresentam vários tipos de função e, mais especificamente, apresentam a função de proporcionalidade inversa. Antes entendia que para ter a taxa de variação que não fosse constante seriam necessárias várias leis de função definidas em vários intervalos, mas essa compreensão foi desconstruída, quando, no estudo da brochura, tive contato com a função de proporcionalidade inversa, por exemplo, representada pela lei f(x) = $\frac{2}{x}$. Ainda não me sinto segura com relação à noção de taxa de variação, mas compreendo agora que o gráfico de uma função não precisa seguir o mesmo "padrão de crescimento" do início ao fim, ou seja, que uma função pode ter taxa de variação não constante em certos intervalos. E isso me permitiu agregar às tarefas exemplos estratégicos, de modo a evitar o estímulo à produção de concepções equivocadas como as que eu mesma havia construído.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 9), Freudenthal "compara a linguagem corrente com a linguagem algébrica e sublinha a complexidade desta e a quantidade de interpretações incorretas que podem surgir na sua aprendizagem". Destaquei esse trecho por concordar com os autores, uma vez que além de meus alunos apresentarem essa dificuldade, eu também a tenho, ainda hoje. Em muitos momentos, inclusive no Mestrado, foi necessário que eu buscasse por informações sobre o significado de alguns símbolos, outras vezes, como discente, deixava a vergonha de lado e perguntava para o professor.

Além disso, destaquei esse trecho pensando no estudo dessa brochura, quando fui surpreendida com os diversos significados apresentados pelos autores para o sinal de igual (=). Parece algo simples, mas percebi que não é. A noção de igualdade, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), pode ser utilizada, por exemplo, para representar o resultado de uma operação aritmética (5 + 2 = 7 ou 7 = 5 + 2); para representar equivalência entre duas expressões numéricas (8 + 4 = 7+ 5) e para representar a relação de dependência entre duas variáveis (y = 2x + 7). Nunca pensei nesses "significados" diferentes para o sinal de igualdade, embora entenda que consigo trabalhar com eles no dia a dia. Mas, como professora, tomar consciência e compreender a distinção entre os diversos significados do sinal de igual constituiu, para mim, um aprendizado profissional importante. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), a percepção das diferenças entre os significados do sinal de igual constitui um elemento importante em várias situações de ensino e de aprendizagem matemática na escola. Por exemplo, a partir do número indicado pelo aluno a ser colocado dentro do quadrado em $8 + 4 = \square + 5$, o professor pode identificar se o aluno percebe o sinal de igual neste caso como o resultado da conta 8+4 ou como uma equivalência entre os resultados das contas indicadas em cada lado da igualdade. Trata-se assim, a meu ver, de um tipo de conhecimento que poderia se enquadrar no subdomínio Conhecimento Especializado do Conteúdo, pois, para o professor, ultrapassa o simples "saber usar para si", em situações de exercício profissional distinto da docência, tendo potencial impacto no processo de ensinar Matemática para outrem.

Mais adiante no estudo da brochura, tive dificuldade para determinar o termo geral dessa sequência:

Figura 6 - Sequência pictórica



Fonte: PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 42.

Pensei que esse termo geral poderia estar relacionado com a potência dois (2), pois o formato dos pontos, para mim, se assemelha a quadrados. Porém deveria ser subtraído desse n^2 uma parte que faltava acima da diagonal. Após pensar bastante, observar a distribuição do conjunto de pontos e tentar uma relação entre o número de pontos e a ordem da figura na sequência, percebi que o primeiro termo tem uma bolinha; o segundo termo tem uma, mais duas bolinhas; o terceiro termo tem uma, mais duas, mais três bolinhas; e assim sucessivamente. Assim, o termo geral seria dado pela soma dos termos de uma PA cujo primeiro termo é 1, a razão 1 e o último termo n. Lembrando da fórmula da soma dos termos da PA, consegui encontrar a expressão do termo geral. Mas ainda ficaram algumas questões a serem pensadas: como se justifica a fórmula da soma dos termos de uma PA? Haveria alguma forma de encontrar esse termo geral que fosse mais acessível a alunos que ainda não haviam estudado as Progressões Aritméticas? Tive que me remeter a novas fontes para responder a essas questões. Aprendi uma maneira "pictórica" de resolver a questão, sem usar fórmulas pré-estabelecidas. Esta maneira é basicamente a seguinte: o termo de ordem n pode ser visto como formado pelos pontos do quadrado inteiro (n^2) menos a metade dos pontos do quadrado sem a diagonal $(n^2 - n)/2$. Assim, o número de pontos desse termo da sequência seria dado pela diferença entre n^2 e $(n^2 - n)/2$. Destaquei essa dificuldade com o termo geral porque, apenas olhando para a sequência, imaginei que seriam de relativamente fácil resolução as questões sobre ela. Porém, após me colocar na posição de um estudante e realizar as tarefas a ela relativas, senti a dificuldade comentada acima.

Destaco agora alguns trechos, que foram recortados da brochura e anotados em meu diário pois estes fizeram com que eu refletisse sobre a ideia inicial que tinha a respeito da noção de função e passasse a compreender melhor esse conceito. São eles: "ao mesmo tempo que se desenvolve a teoria das equações algébricas, vai-se desenvolvendo também o conceito de função como uma correspondência entre os valores de duas variáveis" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 6); "os alunos devem compreender que uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que satisfaz uma certa condição" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 118).

Antes desses estudos, de forma generalizada, posso dizer que entendia que função era simplesmente a sua representação (algébrica, gráfica etc.), ou seja, ao visualizar um gráfico cartesiano ou a lei de uma função, entendia que essas representações eram as próprias funções. Mas as reflexões sugeridas pelas frases destacadas acima contribuíram para que compreendesse que o conceito de função não se identifica totalmente com uma de suas representações, pois um gráfico, por exemplo, é, estritamente, apenas um conjunto de pontos no plano cartesiano, mas uma função, do ponto de vista do ensino escolar, não é só isso. A noção de função remete a ideias como correspondência, dependência, variável etc. Além disso, não se trata de qualquer tipo de correspondência entre elementos de dois conjuntos, tem que satisfazer uma exigência fundamental, que é a unicidade do correspondente no contradomínio para cada elemento do domínio.

Sobre as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, sei que com certeza não as compreendo adequadamente, mas agora já sei por onde começar e sei também que devo buscar dominar o máximo possível de conhecimento matemático para o ensino desse conteúdo para ser capaz de exercer boas práticas pedagógicas, ou seja, práticas pedagógicas que promovam a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Em um certo momento a brochura traz o seguinte subtítulo: "funções lineares, afins (não lineares), de proporcionalidade inversa" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 16). Isso fez com que eu refletisse sobre esses tipos de funções. Inicialmente, para mim, função não linear e de proporcionalidade inversa era o mesmo tipo de função. Aqui já tinha aprendido que a função afim é um tipo de função representada por uma reta e a função linear é um tipo particular de função afim (cujo gráfico é também uma reta, mas que passa pela origem). Ainda assim, associei que a função afim não linear seria o mesmo tipo de função que a função de proporcionalidade inversa. Tal associação me gerou inquietações, as quais me remeteram fontes onde pudesse confirmar ou reavaliar essas ideias. Então aprendi que, na verdade, estava diante de um quadro de classificação em dois sentidos: num deles, a classificação se dava entre função de proporcionalidade direta (linear) e função de proporcionalidade inversa (um tipo especial de função não linear). No outro sentido da classificação, havia o critério de o gráfico ser uma reta (as funções afins) e, dentre estas o grupo das lineares e o das não lineares.

Em síntese, posso dizer que as reflexões feitas durante os estudos da brochura de álgebra aqui relatados contribuíram fortemente para o meu desenvolvimento profissional, uma vez que, por meio deles:

a) organizei melhor, em minha mente, várias ideias relativas a diferentes tópicos da Matemática Escolar, com destaque especial para aquelas vinculadas ao tema funções;

b) construí conhecimentos matemáticos para o ensino pertencentes a diferentes domínios e subdomínios do MKT;

c) descontruí algumas compreensões equivocadas que tinha sobre vários assuntos da Matemática Escolar, especialmente sobre o tema função. Em consequência, passei a compreender melhor o conceito de função e as noções a ele associadas;

d) aprendi que posso ensinar um mesmo conteúdo para vários anos de escolaridade, desde que utilize estratégias adequadamente diferenciadas, em função dos diferentes estágios de aprendizagem dos alunos;

e) aprendi que, a partir da resposta que o aluno entende ser a correta para uma dada tarefa, consigo obter informações a respeito do estágio em que se encontra seu pensamento matemático, em termos da adequação (ou não) à situação envolvida na tarefa (por exemplo, se está utilizando uma forma processual ou estrutural de pensar determinado conceito em uma dada situação);

f) compreendi melhor as relações, que me eram bastante confusas, entre as funções linear (proporcionalidade direta), afim e de proporcionalidade inversa, bem como reconhecer a lei de cada uma dessas funções e suas representações gráficas cartesianas;

g) aprendi que as formas de variação de uma função não precisam “encaixar” dentro de um padrão de regularidade (como exemplifiquei no caso do crescimento de uma planta).

Todas essas aprendizagens envolveram a construção, para mim, de conhecimentos próprios para o ensino (de modo especial o ensino de funções), podendo esses conhecimentos serem associados aos diferentes domínios que compõem o que Ball, Thames e Phelps (2008) denominaram “Conhecimento Matemático para o Ensino”.

4.2 Estudo da introdução da noção de função em alguns livros didáticos

Antes de preparar o conjunto de tarefas para auxiliar a introdução da noção de função, busquei compreender melhor esse conceito, estudando como os livros didáticos abordam o assunto. Inicialmente, fui orientada a buscar por livros dos autores Bigode, Dante e Imenes e Lellis, por serem autores que geralmente abordam os conteúdos matemáticos de forma diferenciada em relação à maioria dos outros autores. No entanto, não consegui nenhum livro do autor Bigode que tratasse do tema, mas, tive acesso a dez outros. Assim, estudei o conteúdo de funções nesses dez livros, sendo um referente a oitava série do Ensino Fundamental, equivalente ao nosso atual nono ano (DOMÊNICO, LAGO e ENS, 1986). Outros livros referentes ao nono ano do Ensino Fundamental foram (IMENES; LELLIS, 2010); (DANTE, 2012); (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012). Referentes ao primeiro ano do Ensino Médio foram (SOUZA, 2013); (BARROSO, 2010); (DANTE, 2010); (PAIVA, 2015); (DANTE, 2016); (IEZZI et al.; 2016). Ressalto que o primeiro, referente à oitava série, contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento profissional, mas as reflexões que emergiram a partir do estudo dessa obra serão apresentadas mais a diante por entender que essas se encaixam de uma forma mais adequada no tópico a seguir, que se refere ao processo de construção do conjunto de tarefas para a introdução da noção de função.

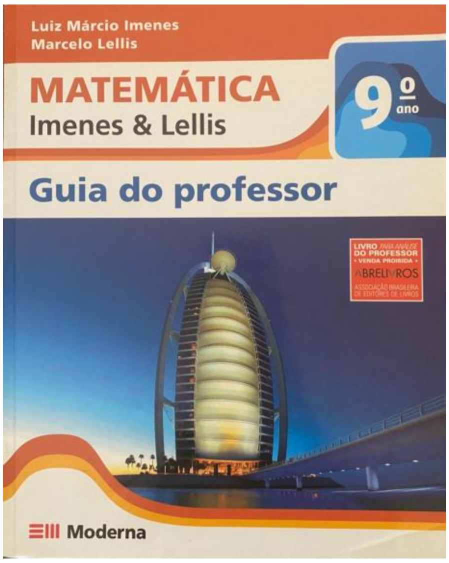
Observei que, de uma forma geral (embora cada autor opte por uma abordagem diferente ou escolha ordens diferentes para trabalhar o conteúdo), existe certa regularidade na apresentação referente ao conteúdo de funções em praticamente todos os dez livros. Selecionei três deles - Imenes e Lellis (2010), Paiva (2015) e Dante (2016) -para comentar aqui, por entender que me ofereceram mais oportunidades de reflexões para a pesquisa. Algumas dessas reflexões, ainda que possam parecer relativamente simples, mostram um avanço, significativo para mim, no processo de conquista de uma maior autonomia e autoconfiança profissional. Como relatado no início deste trabalho, minha atitude anterior, referente a uma “obediência” quase cega ao que constava nos livros didáticos de matemática, evoluiu para uma postura, sempre respeitosa, porém mais crítica em relação à maior ou menor adequação, do meu ponto de vista, das abordagens neles veiculadas. É claro que ainda há muito a percorrer nesse sentido, mas registro esse ponto como um dos indícios de contribuição (para o meu desenvolvimento profissional) do processo vivenciado ao longo do planejamento e execução desta pesquisa. Destaco, contudo, que esse estudo não se configura como uma análise desses materiais didáticos, uma vez que o foco central da análise não está nos livros didáticos em si, mas no desenvolvimento profissional da professora pesquisadora, que ocorreu ao longo do processo de estudo desses livros.

Dessa forma, o que descrevo e analiso a seguir é o processo de aprendizagem profissional que me aconteceu ao longo desse outro processo (de conhecer como os livros didáticos selecionados apresentam a introdução da noção de função, quais exemplos utilizam, bem como o de realizar todas as tarefas que são sugeridas pelos livros aos estudantes). Ou seja, os comentários eventuais a respeito de algumas abordagens desenvolvidas pelas obras em tela têm fundamento em minhas perspectivas pessoais atuais, no desejo de ampliar minha aprendizagem a respeito do tema e nas reflexões oriundas do estudo que fiz dessas obras, com o objetivo de me desenvolver profissionalmente. Não se trata, portanto, de desenvolver uma análise crítica da obra do autor, mas de apontar aspectos do desenvolvimento profissional que a sua leitura veio a produzir na pesquisadora ao longo do processo.

A apresentação de cada uma dessas três obras segue de forma que primeiro justifico sua escolha, apontando a razão principal que fez com que esse material fosse escolhido; em seguida apresento o material de uma forma geral, considerando o olhar que tive ao observá-lo como um todo; e, por último, considerando a forma que o livro apresenta o conteúdo específico de funções em determinado capítulo, trago as especificidades, reflexões e aprendizagens que emergiram do estudo desse capítulo em cada um dos respectivos livros. Fiz o exercício de me perguntar constantemente os porquês da presença de cada tópico apresentado nos livros, quando esses tópicos se referiam ao tema em questão nesta pesquisa.

4.2.1 Matemática - Imenes e Lellis

Figura 7 - Capa do livro de Imenes e Lellis (2010)



Fonte: (Matemática) de Imenes e Lellis (2010).

Sobre o tema em estudo, esse material denomina "Funções" o capítulo dez, composto pelos tópicos: Funções, suas tabelas e suas fórmulas; Gráfico: o retrato da função; Usando funções. Este livro, que é também Manual do Professor, possui formato maior que os demais que conheço. Ao invés de apresentar algumas orientações gerais no início ou ao final da obra, ele reproduz todas as páginas do livro-texto do aluno e acrescenta, nas laterais, comentários para auxiliar o professor em seu trabalho nas páginas específicas. Ou seja, os comentários dos autores para o professor não se limitam a alguns parágrafos ou páginas mais gerais no início do livro, mas contemplam observações específicas em cada página. Além disso, é apresentada uma síntese no final de cada capítulo. Essa obra se destacou, a meu ver, no quesito de conexão entre a Matemática, o cotidiano e outras áreas do conhecimento, abordando o conteúdo de uma forma, para mim, diferente, no sentido positivo, do que encontrei em outros materiais.

Para introduzir a noção de função, o livro apresenta situações que envolvem a relação de dependência implícita em trechos como por exemplo, "a quantidade de combustível que um veículo consome por quilômetro rodado é função de sua velocidade". (IMENES; LELLIS, 2010, p. 206). Em seguida, afirma que a expressão (é função de) indica que uma quantidade depende da outra e que esses exemplos se referem ao conceito de função e complementa que "para melhorar o entendimento do conceito de função, podemos pensar em duas grandezas que variam, uma dependendo da outra" (IMENES; LELLIS, 2010, p. 206). A partir disso, são apresentadas situações que envolvem a relação de dependência entre outras grandezas, em seguida apresenta exemplos (com situações descritas no enunciado, através de tabela e de fórmula matemática) com o intuito de que os estudantes percebam as noções de correspondência e variação envolvidas no conceito de função.

Destaco o momento inicial de localização de pontos no plano cartesiano, pois me chamou atenção a forma indicada pelo autor para esse tipo de atividade. Anteriormente, entendia que para localizar ou inserir pontos no plano era necessário traçar duas retas imaginárias, perpendiculares entre si, nos números correspondentes à ordenada e à abscissa. Ou seja, se o ponto for P (-3, 2), orientava meus alunos a traçarem uma reta imaginária que passasse pelo -3 da abscissa (paralela ao eixo das ordenadas) e outra que passasse pela ordenada 2 (paralela ao eixo das abscissas), mostrando-lhes que o ponto de encontro dessas duas retas imaginárias representava o ponto P (-3, 2).

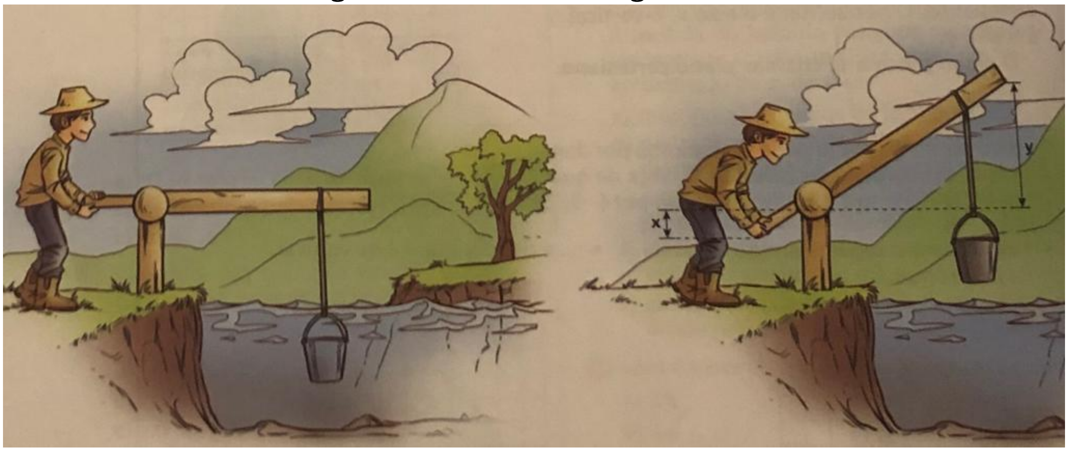
No entanto, os autores apresentaram uma outra estratégia para essa inserção do ponto no plano. Eles indicaram que o ponto de partida é a origem. Partindo dessa origem, um "boneco" caminha na horizontal até o -3. Em seguida, esse "boneco" caminha na vertical até o 2. Onde ele parou é o ponto P (-3, 2). Considerei muito interessante essa explicação, pois, já enfrentei dificuldades para trabalhar com a localização e inserção de pontos no plano cartesiano e não tinha conhecimento de outra estratégia que poderia ser utilizada para auxiliar os estudantes a compreenderem tal conteúdo.

No entanto, devo observar que, de todo modo, a localização, no texto, do trabalho com as ideias associadas à correspondência entre pontos do plano e pares de números me gerou reflexões. É que durante a preparação do conjunto de tarefas apresentado nesta dissertação, em acordo com a literatura que estudei e as reflexões durante esses estudos, considerei que seria mais adequado trabalhar esse assunto mais tarde, quando os alunos estivessem próximos de aprender a construir gráficos de função no plano cartesiano, uma vez que a situação vai, então, requerer esse tipo de conhecimento. Parece claro, por outro lado, que não seria adequado trabalhar simultaneamente a construção de gráficos cartesianos de funções e as noções básicas relativas à correspondência entre pontos do plano e pares (ordenados) de números. Em suma, a ideia que me ficou como conclusão (talvez temporária) dessas reflexões, é a de trabalhar a correspondência entre pontos do plano e pares de números o mais próximo possível (mas antes) do trabalho de construção de gráficos cartesianos de funções.

Imenes e Lellis (2010, p. 206) representam quase sempre a variável independente pela letra x e a variável dependente pela letra y, sem explicitar esses termos, mas apontando que “o comprimento **y** depende do comprimento **x**, por isso, temos aqui uma função. Dizemos que **y** é função de **x**”. Sabemos que o uso recorrente das letras x e y para representar as variáveis (independente e dependente) é muito comum, porém, alguns autores apontam para a relevância de utilização de outras letras, além dessas para não fixar esse padrão como universal e estranhar (cognitivamente) o uso de outras letras. Oliveira (1997) e Rosa (2005), por exemplo, recomendam a utilização de letras quaisquer para representar as variáveis dependente e independente, sendo que “para Oliveira (1997), uma das causas de dificuldades na compreensão da noção de variável, pode ser o *uso fixo* da letra x para a variável independente, e y para a dependente” (ROSA, 2005, p. 66). Assim, concordando com esses autores, nas tarefas que proponho, as letras para representar as variáveis dependente e independente não se limitam a x e y.

Outro aspecto que merece destaque é forma como Imenes e Lellis (2010) caracterizam inicialmente uma função. Eles apresentam um exemplo com uma imagem que representa a retirada de água do rio por um equipamento, de tal forma que quando a ponta da barra de madeira desce x centímetros, a outra ponta sobe y centímetros. Após essa constatação de dependência entre as grandezas, o autor afirma que “o comprimento **y** depende do comprimento **x**, por isso, temos aqui uma função. Dizemos que **y** é função de **x**” (IMENES; LELLIS, 2010, p. 206). Segue a imagem utilizada pelo autor:

Figura 8 - Retirada de água no rio



Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 206.

Compreendo que a noção de função está relacionada diretamente à noção de dependência entre as variáveis, porém, apenas uma relação de dependência, sem que se especifique o tipo, não é suficiente para garantir que y seja uma função de x. Como se sabe, alguns tipos de dependência não representam função e isso pode ser motivo de confusão para o aluno que tenha internalizada a ideia de que “o comprimento **y** depende do comprimento

x, por isso, temos aqui uma função". Pensando nesse aspecto, o conjunto de tarefas que proponho indica o trabalho com diversas formas de correspondência (funcionais e não funcionais) entre elementos de dois conjuntos, incluindo uma tarefa específica em que se pede a identificação daquelas que "traduzem" a noção de função. Essa noção, de acordo com o projeto do conjunto de tarefas, seria objeto de discussão numa aula expositiva dialogada, anterior a essa tarefa específica. Observações críticas como essas, cabe reconhecer, são contribuições do próprio livro didático em estudo que as fez emergir em mim. Por outro lado, insisto na ideia de que não se deve perder de vista que essas mesmas observações não pretendem defender uma ideia "contra" outra. É importante lembrar que o que escrevo aqui não se caracteriza por uma análise crítica da obra do autor, mas sim uma tentativa de compilação das contribuições da obra em questão para as minhas reflexões a respeito da prática de planejar um conjunto de tarefas para a introdução da noção de função na Educação Básica. O autor evidentemente não tem que ter compromisso com os pressupostos e fundamentos que *escolhi* para nortear a construção das tarefas.

Percebi, com base nos estudos sobre o ensino de funções, que é comum afirmar que uma tabela, uma fórmula matemática ou um gráfico representam uma função. Isso é perfeitamente válido a partir de certo ponto do estudo das funções, mas é importante considerar que, dependendo do contexto de ensino em que se trabalha, tais afirmações podem causar confusão para o aluno que está aprendendo, uma vez que lhe será dito, em algum momento mais adiante, que uma função só fica caracterizada como tal se conhecermos o seu domínio, seu contradomínio e a lei que rege a associação de cada elemento do domínio a um único do contradomínio. É claro que após a construção de uma familiaridade robusta com as ideias fundamentais do conceito de função, não há necessidade de se ater sempre a uma linguagem formal, sendo até recomendada certa dose de flexibilidade, desde que fique claro o que está fundamentalmente em jogo, numa dada situação em discussão. Mas, se isso (a familiaridade robusta com o conceito) não está garantido, o professor pode estar criando obstáculos para o entendimento do aluno quando usa esse tipo de linguagem imprecisa. Oliveira (1997), por exemplo, verificou em sua pesquisa que

> alunos, em geral, confundem atributos do conceito com os exemplos de função, incluem a noção de continuidade a este conceito, definem função como uma equação, não compreendem funções dadas por mais de uma expressão algébrica, fazem confusão entre função constante e contínua, entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfico é suficiente para afirmar que estes representam uma função (OLIVEIRA, 1997, p. 125).

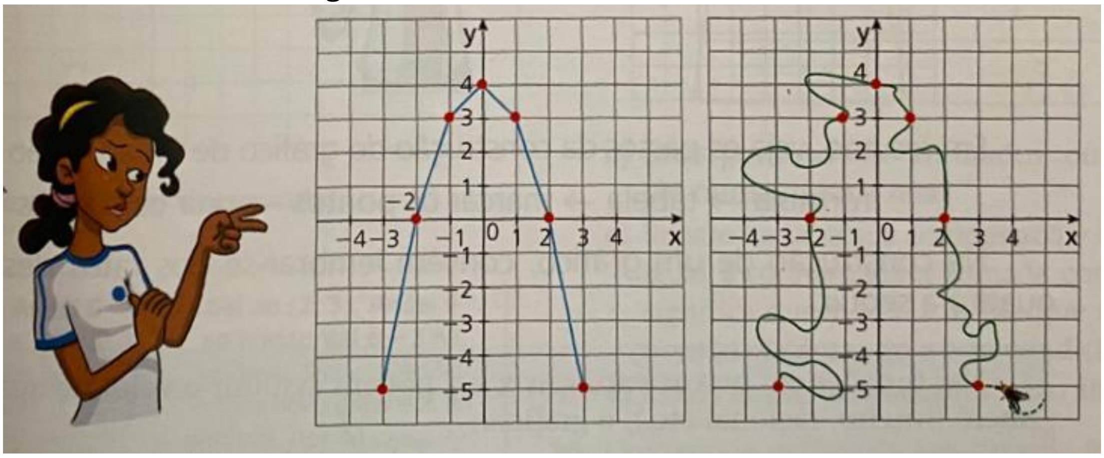
Assim, me chamou a atenção o fato de que Imenes e Lellis (2010, p. 207) apresentam uma tabela relacionando duas variáveis, de forma que os valores de uma dependem dos valores da outra, e afirmam que "temos aqui uma função, pois **P** depende de **n**". Os autores repetem essa frase (uma grandeza depende da outra, logo é uma função), apresentando a fórmula $d = 4{,}9t^2$, bem como em outras ocasiões no livro, como já foi mencionado anteriormente. Deste modo, mais uma vez, o estudo do livro do Imenes me fez refletir a respeito da ideia de que o uso recorrente de uma linguagem imprecisa pode, dependendo do estágio de aprendizagem em que se encontram os estudantes, levar a uma construção equivocada da noção de função, de acordo com o que relata Oliveira (1997).

No livro de Imenes e Lellis (2010), são propostas atividades envolvendo o preenchimento de valores em tabelas e a determinação da lei da função para certas sequências que seguem um padrão. Além disso, é solicitado aos alunos que representem as funções no plano cartesiano, partindo da ideia inicial abordada sobre representação de pontos e a ligação entre eles. Posteriormente são apresentados gráficos de funções, sendo estes utilizados para representar informações "próximas da realidade"[21]. Observei, no entanto, que não foram apresentadas relações (entre grandezas) que não expressam a ideia de função. Como comentado anteriormente, acho que fica mais difícil, para os alunos em geral, compreenderem o que é uma função se não têm contato com situações que não expressam a ideia de função. Pensando nisso, proponho nas tarefas a análise de situações nas quais as relações entre as variáveis sejam também do tipo não funcional, com o intuito expresso de evitar a internalização da ideia de que qualquer relação entre duas grandezas representa uma função.

Por fim, destaco a abordagem feita pelos autores no tópico "Gráfico: o retrato da função". Apresenta-se uma tabela que representa a correspondência entre alguns valores de x e y através da lei quadrática $y = -x^2 + 4$. Em seguida esses sete pontos são marcados no plano cartesiano e dois gráficos cartesianos são desenhados. A pergunta aos estudantes refere-se a qual dos gráficos é o correto. Segue a imagem:

[21] Quando utilizo a expressão "próximas da realidade" estou me referindo a atividades que são contextualizadas, ou seja, envolvem situações que podem estar relacionadas, em alguma medida, ao cotidiano dos alunos ou, mesmo não fazendo parte da realidade dos alunos, fazem sentido para eles, por serem facilmente reconhecíveis como potencialmente reais (ver nota à p. 51).

Figura 9 - Qual dos dois será o certo?



Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 213.

Destaquei essa imagem pois, o gráfico da esquerda (azul) já foi feito por mim, entendia que estava correto, e em minha prática docente já observei estudantes utilizando a régua para unir pontos do gráfico de uma função quadrática. Achei muito interessante esse tipo de abordagem, ao lado do gráfico da direita (verde) que simboliza o trajeto feito pela mosca, passando pelos pontos dados inicialmente, e que também não está correto. Então, a tarefa estimula o pensamento funcional dos estudantes, levando-os a verificar se os pontos de cada uma das linhas (azul e verde) são pontos cujas coordenadas satisfazem a fórmula dada inicialmente, o que não acontece. Então, sugere-se a inserção de muitos outros pontos, até que fica evidente que o gráfico dessa função é uma curva diferente de ambas as linhas desenhadas. Somente após essas reflexões é apresentado o gráfico correto para essa função.

Essa estratégia de trabalhar com gráfico de função me pareceu interessante porque, além de promover uma forma ativa de participação dos alunos (eles é que vão “descobrindo” que nenhum dos dois gráficos desenhados representa a função), funcionou para mim como uma alternativa interessante para aquilo que, até então, eu me imaginaria fazendo ao resolver esse tipo de questão: explicar aos alunos que o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola e que parábola não contém um segmento retilíneo. Observo ainda que a linha verde não poderia ser o gráfico de uma função quadrática porque não é gráfico de nenhuma função (para $x = -2$, por exemplo, existem seis valores correspondentes para y).

Em suma, posso dizer que esse livro de Imenes e Lellis me sugeriu importantes reflexões a respeito do trabalho com a introdução da noção de função na Educação básica. Por um lado, me abriu possibilidades interessantes (e, para mim, desconhecidas) de trabalhar certas questões relacionadas com o assunto. Por outro, igualmente interessante para meu crescimento profissional, colocou em questão algumas das visões que havia assimilado a partir de outros estudos e me levou a repensá-las (reafirmando-as ou adaptando-as) ao sentir que entravam em algum nível de conflito com a proposta dos autores, segundo a compreendi no estudo realizado. De um jeito ou de outro, entendo que foram reflexões ricas, no sentido de contribuição efetiva para meu desenvolvimento profissional.

4.2.2 Matemática - Paiva

Figura 10 - Capa do livro de Paiva (2015)

Fonte: (Matemática) de Paiva (2015).

O livro do primeiro ano de Ensino Médio de Paiva (2015), em linhas gerais, apresenta, no início de cada capítulo, recursos visuais e textuais que podem despertar o interesse do aluno. Todos os capítulos trazem *Exercícios propostos*, distribuídos ao longo do texto e, ao final de cada capítulo, uma seção de *Exercícios complementares*, que segundo o autor, são para fixação e revisão dos conteúdos. Algumas seções são apresentadas em todos os capítulos: *Mentes brilhantes*; *Criando problemas*; *Questões para reflexão*; *Pré-requisitos para o capítulo seguinte* e *Trabalhando em equipe*.

Na seção *Mentes brilhantes* são apresentados feitos de pessoas que revolucionaram a Matemática ou a Ciência em sua época. A seção *Criando problemas* incentiva a elaboração de problemas pelos próprios alunos. A seção *Questões para reflexão* estimula a argumentação dos alunos sobre os conteúdos. A seção *Pré-requisitos para o capítulo seguinte* é composta de exercícios para, segundo o autor, rever conceitos importantes para o desenvolvimento do capítulo seguinte. Por último, a seção *Trabalhando em equipe* propõe uma das competências exigidas pelo mundo moderno, segundo o autor, que é saber trabalhar em equipe.

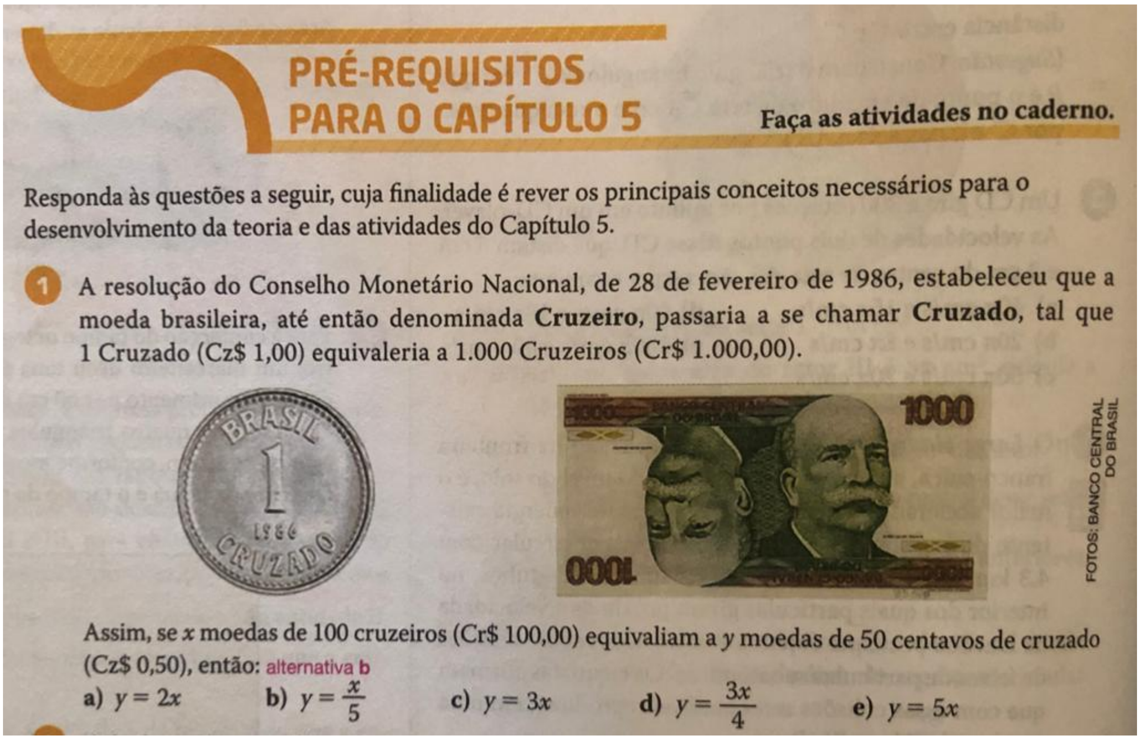
Logo no início do capítulo que trata da linguagem das funções, o autor diz o que é uma grandeza e estabelece relações de dependência entre grandezas, por exemplo, “o crescimento de uma planta depende do tempo (PAIVA, 2015, p. 122)”. Em seguida constrói uma tabela para mostrar uma relação entre volume e tempo numa determinada situação. No entanto, o autor comenta que a representação dessa relação por meio da tabela tem limitações (por mais que acrescentemos valores na tabela, sempre existirá valores a serem acrescentados) e, então, apresenta uma alternativa, que considera mais adequada para descrever a situação: a fórmula $v = 25t$. Essa foi, segundo entendi, a forma utilizada para introduzir a noção de função.

Sobre o conteúdo de função, esse livro traz, no capítulo 5, “A linguagem das funções”, os seguintes tópicos: 1 Sistema de coordenadas no dia a dia; 2 O conceito de função; 3 Formas de Representação de uma função; 4 Imagem de x pela função f; 5 Função real de variável real; 6 Zero (ou raiz) de uma função; 7 Variação de uma Função; 8 Funções inversas.

Observa-se que esse capítulo se propõe a trabalhar mais tópicos sobre o tema, quando comparado com o capítulo correspondente do livro de Imenes e Lellis (2010). A meu ver, essa diferença se dá pelo fato de que esse último se refere ao nono ano do Ensino Fundamental, em que está previsto apenas o trabalho de introdução da noção de função, enquanto que o livro de Paiva (2015) é referente ao primeiro ano do Ensino Médio e, além da introdução do conceito de função, trabalha especificamente alguns tipos de função, tais como, afins, quadráticas, modulares, exponenciais e logarítmicas (que são previstas para esse ano de ensino escolar).

Em sua obra, Paiva apresenta, ao final de cada capítulo, algumas atividades como pré-requisitos para o capítulo seguinte. Assim, no final do capítulo 4, encontrei algumas atividades que tratam da “linguagem das funções”.

Figura 11 - Pré-requisitos para o capítulo 5



PRÉ-REQUISITOS PARA O CAPÍTULO 5

Faça as atividades no caderno.

Responda às questões a seguir, cuja finalidade é rever os principais conceitos necessários para o desenvolvimento da teoria e das atividades do Capítulo 5.

1 A resolução do Conselho Monetário Nacional, de 28 de fevereiro de 1986, estabeleceu que a moeda brasileira, até então denominada **Cruzeiro**, passaria a se chamar **Cruzado**, tal que 1 Cruzado (Cz$ 1,00) equivaleria a 1.000 Cruzeiros (Cr$ 1.000,00).

Assim, se *x* moedas de 100 cruzeiros (Cr$ 100,00) equivaliam a *y* moedas de 50 centavos de cruzado (Cz$ 0,50), então: alternativa b

a) $y = 2x$ **b)** $y = \frac{x}{5}$ **c)** $y = 3x$ **d)** $y = \frac{3x}{4}$ **e)** $y = 5x$

Fonte: PAIVA, 2015, p. 114.

Resolvi a primeira atividade de várias formas, contudo, enfrentei dificuldades. No meu entendimento, a letra “e” seria a correta, então, confiei mais em minha resposta do que na resposta do autor, e fui conversar com meus orientadores. Em nossas conversas, verificamos que para cada alternativa de resposta seria possível um tipo “lógico” de raciocínio, sendo que cada erro possível de ser cometido pelos estudantes os levariam a uma resposta encontrada dentre as alternativas que o autor colocou para essa atividade, ou seja, as alternativas apresentadas não são puramente aleatórias. Então, verifiquei que estava equivocada em meu entendimento inicial e a resposta correta era realmente a correspondente à alternativa b.

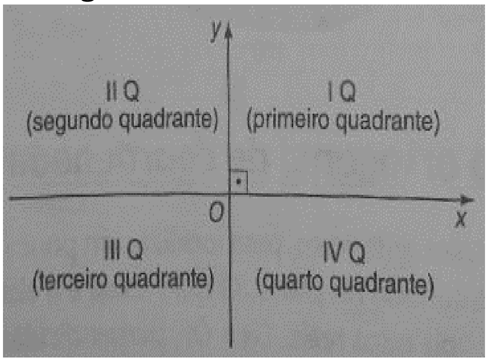
Na primeira tentativa de resolver essa atividade encontrei como resposta a letra a. Coloquei que 100x = 50y, então y = 2x. Porém observei que não poderia estabelecer essa relação, pois cada uma das x moedas vale 100 Cruzeiros, enquanto cada uma das y moedas vale 0,50 Cz. Então compreendi que não é correto estabelecer essa relação dada na alternativa a) pois os valores estão expressos em unidades diferentes.

Na segunda tentativa, estabeleci a relação: 1 Cz = 1000 Cr, então $\frac{1}{2}$ Cz = 500 Cr. Dez moedas de 100 cruzeiros seria 1000 Cr, que é equivalente a 1 Cz. Assim, 10 moedas de 100 cruzeiros corresponderiam a duas moedas de 0,50 Cz. Então, concluí que 2y = 10x, obtendo a letra e) como resposta e tive uma surpresa ao ver que, para o autor, a resposta correta não era essa. Levei essa dúvida para meus orientadores, e então verificamos que o livro está correto. O meu erro foi pensar que x está representando 100 Cruzeiros e y representa 0,50 Cz, quando x e y representam quantidade de moedas e não o valor de uma moeda. Então, realizei a tarefa de forma correta e encontrei a letra b como resposta. Refletir sobre essa experiência, me auxiliou a pensar em alguns aspectos importantes na resolução de problemas. Em primeiro lugar, pode ser interessante testar alguns valores para verificar se a resposta encontrada está realmente correta. Em segundo lugar, ler e reler o problema quantas vezes for necessário, fazendo simulações de dados, de modo a certificar-me de que entendi corretamente o enunciado. Por fim, escrever explicitamente o que cada uma das variáveis ou incógnitas envolvidas no problema representa para que, caso apareça dúvida sobre a correção da resposta, seja possível verificar mais facilmente se há coerência entre o que essas letras representam e as operações matemáticas feitas com elas para encontrar a resposta do problema. Além disso, refletir sobre essa experiência me ensinou a lidar melhor com possíveis erros dos alunos. Em suma, pude, de certa forma, alargar e aprofundar minha formação em relação a dois subdomínios do MKT: o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (antecipar e lidar melhor com os erros dos alunos) e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (no caso, referente à Resolução de Problemas).

Destaco ainda, nesse livro, a definição proposta nas figuras 6 e 7, a seguir. Após estudos em vários livros didáticos em busca de uma definição que caracterize o pertencimento de um ponto a cada um dos quatro quadrantes, acabei encontrando essa que considerei mais adequada, comparada às da maioria dos livros didáticos consultados. Já mencionei anteriormente a dúvida levantada por uma aluna em sala de aula e que me levou à busca de uma definição que esclarecesse satisfatoriamente essa questão. Segundo a maioria das definições um ponto com uma das coordenadas igual a zero pertenceria a mais de um quadrante, o que me parece provocar certa confusão para os alunos (como provocou a mim, quando a aluna fez a pergunta). A definição de Paiva esclarece a questão de um modo satisfatório, a meu ver, ao decidir que pontos pertencentes aos eixos não estão em nenhum dos quadrantes, ou seja, os quatro quadrantes não possuem interseção.

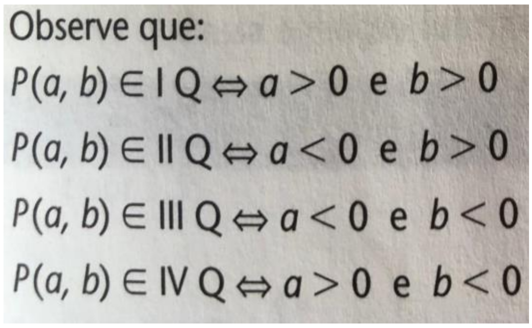
A classificação proposta pelo autor segue nas figuras 6 e 7, adiante.

Figura 12 - Plano cartesiano



Fonte: PAIVA, 2015, p. 120.

Figura 13 - Classificação de pontos



Observe que:

$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0$ e $b > 0$

$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0$ e $b > 0$

$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0$ e $b < 0$

$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0$ e $b < 0$

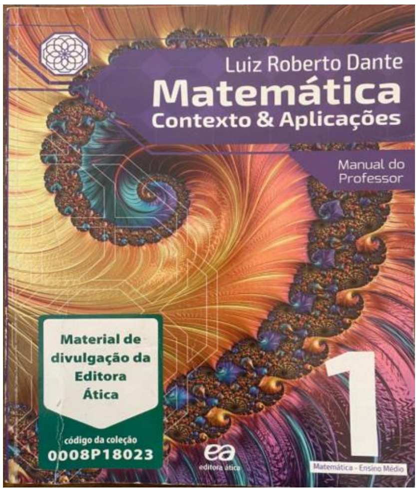
Fonte: PAIVA, 2015, p. 121.

Tal definição, repito, me pareceu mais adequada para esse estágio introdutório do trabalho com gráficos cartesianos. Com ela, os pontos A (2, 0), B (0, -5) e C (0,0) são classificados como pertencentes aos eixos, sendo, portanto, o ponto (0,0) pertencente aos dois eixos e não aos quatro quadrantes.

Essa opção, feita pela professora pesquisadora, de selecionar uma definição, dentre outras encontradas, levando em consideração questões didático-pedagógicas decorreu de reflexões a partir de uma experiência concreta em sala de aula (a questão posta por uma aluna) e do estudo dos livros didáticos realizado. Acredito que o tipo de conhecimento profissional que pude assimilar a partir dessas reflexões se enquadraria em alguns dos subdomínios do MKT, especialmente nos subdomínios "Conhecimento Comum do Conteúdo" e "Conhecimento Especializado do Conteúdo".

4.2.3 Matemática: Contexto & Aplicações - Dante

Figura 14 - Capa do livro de Dante (2016)



Fonte: (Matemática: Contexto & Aplicações) de Dante (2016).

O livro de Dante (2016) foi selecionado, principalmente, por ter contribuído significativamente para minha aprendizagem durante o processo de questionamento (e eventual confirmação ou não da pertinência das minhas questões) de algumas respostas a problemas e exercícios, apresentadas como corretas no livro. O processo como um todo proporcionou momentos de incômodo pessoal, que me fizeram refletir bastante sobre os conceitos matemáticos e o uso de certos termos relacionados ao conteúdo em estudo. A partir daí, verifiquei, com o auxílio de meus orientadores, que algumas dessas inquietações tinham fundamento e outras não. Com isso certamente compreendi melhor o conteúdo estudado, mas também mostrou uma mudança significativa de atitude em relação à antiga atitude de "obediência cega" ao que está escrito em livros e outras publicações sobre a Matemática Escolar (está tudo correto, os equívocos são sempre meus).

Em linhas gerais, esta obra apresenta uma quantidade significativa de atividades a serem realizadas em duplas ou grupos, que segundo o autor, tem o intuito de valorizar a iniciativa e a capacidade de decisão dos estudantes. Em todos os capítulos são apresentados quadros dispostos nas laterais das páginas denominados: "Para refletir", destacando conteúdos que os alunos provavelmente já estudaram em anos anteriores e devem ser relembrados ou relacionados com o assunto ali apresentado ou informações interessantes que ampliam o tema em estudo.

São apresentados também, em todos os capítulos, exercícios resolvidos, muitas vezes com mais de uma resolução seguindo estratégias diferentes. Indicam-se também algumas sugestões de leitura e são comentadas as relações entre a Matemática e a tecnologia, sendo que nessa seção são apresentadas atividades em que o recurso do computador é utilizado para auxiliar a manipulação e visualização de gráficos e tabelas.

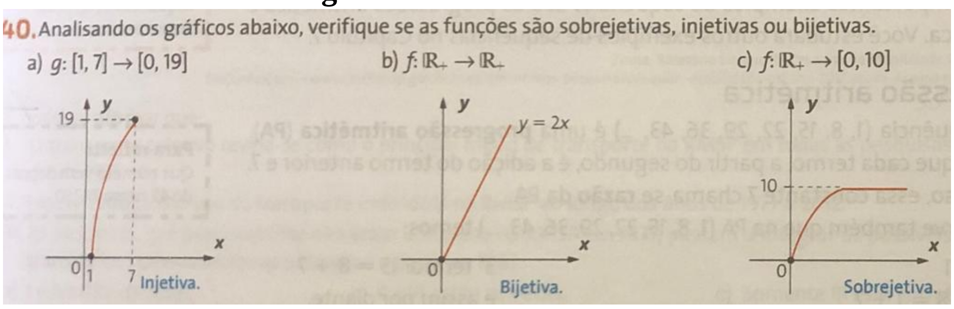
Sobre o conteúdo de funções, esse material traz, no capítulo 2, "Funções", os seguintes tópicos: Um pouco da história das funções; Explorando intuitivamente a noção de função; A noção de função por meio de conjuntos; Domínio, contradomínio e conjunto imagem; Estudo do domínio de uma função real; Coordenadas cartesianas; Gráfico de uma função; Função crescente e função decrescente: analisando gráficos; Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva; Função e sequências.

O autor inicia o estudo das funções apresentando a tabela de cordas como uma primeira representação, de forma intuitiva, destacando a noção de função presente na Antiguidade. Complementa observando que "de fato, qualquer tabela que relaciona os valores de duas grandezas variáveis é uma função" (DANTE, 2016, p. 41). Seguindo um roteiro histórico (muito abreviado) até chegar a uma definição de função, esse autor propõe algumas atividades para que os alunos indiquem, nas situações apresentadas, qual seria a variável dependente e a independente. O foco das atividades está relacionado à identificação das leis das funções. Em seguida, pautados na representação pelo diagrama de Venn, os estudantes devem indicar os exemplos que são e os que não são função e indicar o domínio e imagem daqueles que são. Ressalto aqui que essas atividades são apresentadas em uma linguagem matemática, com os termos técnicos, e os elementos dos conjuntos representados pelos diagramas são sempre números.

Posteriormente, é feita a definição dos quadrantes no plano cartesiano, propostas atividades envolvendo a representação de pontos no plano, e é apresentada a fórmula para o cálculo de distância entre dois pontos. Feito isso, são propostas atividades que envolvem a identificação de gráficos cartesianos que representam funções. Ressalto que nessas atividades não são indicados os conjuntos domínio e contradomínio, ao passo que em outras é informado que cada gráfico dado representa uma função e é solicitado aos estudantes que indiquem o domínio e o conjunto imagem de cada uma dessas funções. Apresenta-se também um exercício resolvido envolvendo função constante.

Em seguida, são trabalhadas as ideias de função injetora, sobrejetora e bijetora. Algumas respostas incorretas são apresentadas como corretas, o que me fez conferir meu entendimento atual do que seja função injetora, bijetora ou sobrejetora. A seguir, destaco as tarefas propostas, acompanhadas das reflexões que fiz a respeito da divergência entre algumas das respostas do livro e as minhas.

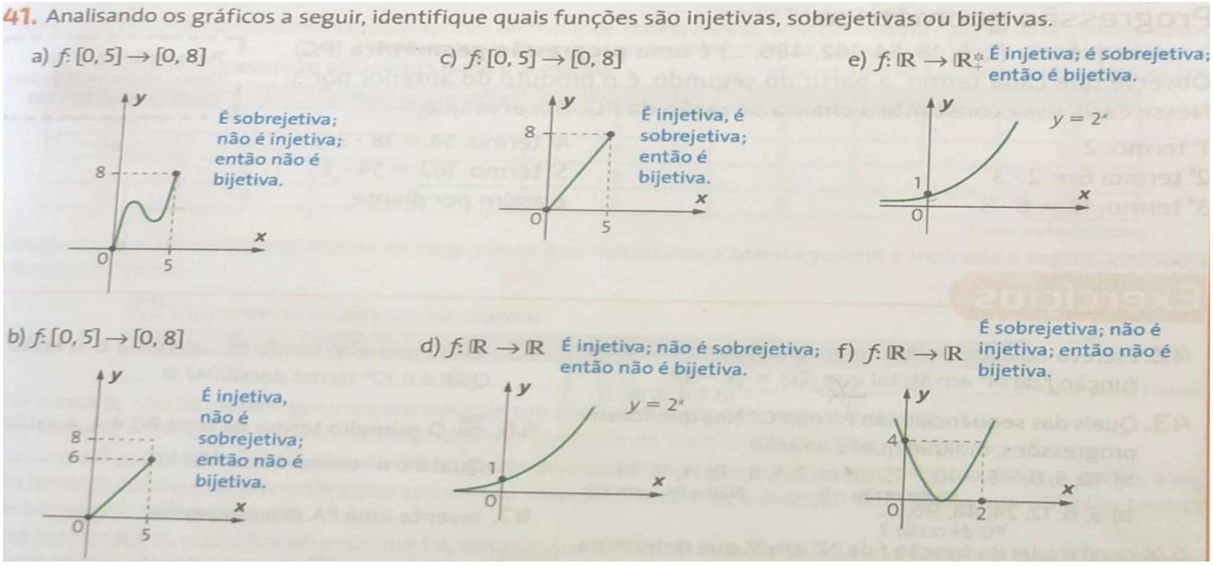
Figura 15 - Atividade nº 40



Fonte: DANTE, 2016, p. 65.

Na letra a) da atividade 40, dados os intervalos correspondentes ao domínio e contradomínio, cada elemento do contradomínio é imagem de apenas um elemento do domínio, logo é injetiva. Além disso, o conjunto contradomínio é igual ao conjunto imagem, logo essa função também é sobrejetora. Portanto, essa função pode ser classificada como bijetiva. Entretanto, não estou afirmando que há um erro na resposta do livro, pois é claro que uma função bijetiva é injetiva (embora não me pareça ser esse o espírito da resposta dada no livro). Mas, uma vez mais quero ressaltar que não se trata aqui de apontar falhas nos livros estudados, mas de mencionar ao tipo de reflexão a que me remeteram essas divergências. Neste caso acima, revi as definições de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, bem como conferi a leitura e interpretação do gráfico da função em tela, atentando para os respectivos domínios, contradomínios e imagens. O mesmo comentário se aplica à maioria das questões citadas a seguir.

Figura 16 - Atividade nº 41



Fonte: DANTE, 2016, p. 65.

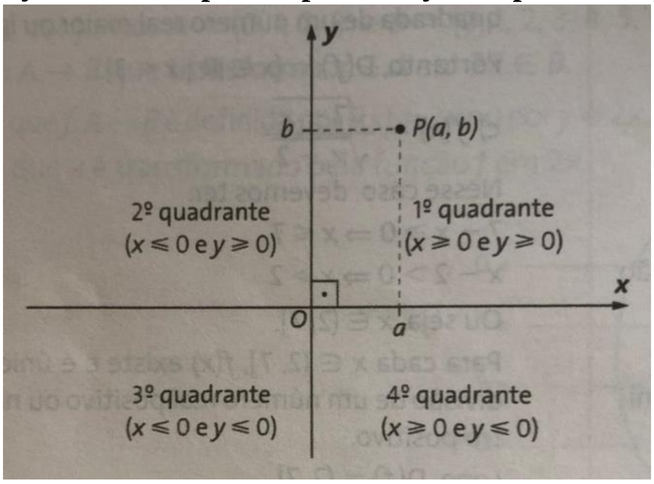
Nessa atividade 41, identifiquei um equívoco[22] na letra f. O autor aponta que essa função, definida nesse domínio e contradomínio, pode ser classificada como sobrejetiva. Contudo, em uma função sobrejetiva o conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio, e isso não acontece nessa situação. Existem elementos do conjunto contradomínio que não são imagem de nenhum elemento do domínio (todos os negativos). A resposta do autor estaria correta se o conjunto contradomínio estivesse limitado aos números reais não negativos.

O capítulo relacionado à introdução da noção de função se encerra com a discussão dessa questão da classificação das funções como sobrejetivas, injetivas ou bijetivas. Os demais capítulos irão abordar alguns tipos particulares de função: afim, modular e outras.

[22] Possivelmente uma falha na digitação e editoração do livro.

Dentre os dez livros que estudei, dois deles, que se referem ao nono ano do Ensino Fundamental, não abordam a localização de pontos nos quadrantes no plano cartesiano, de acordo com as coordenadas. Dos oito restantes, sete apresentaram uma definição semelhante à utilizada por Dante (2016):

Figura 17 - Definição de Dante para representação de pontos no plano cartesiano

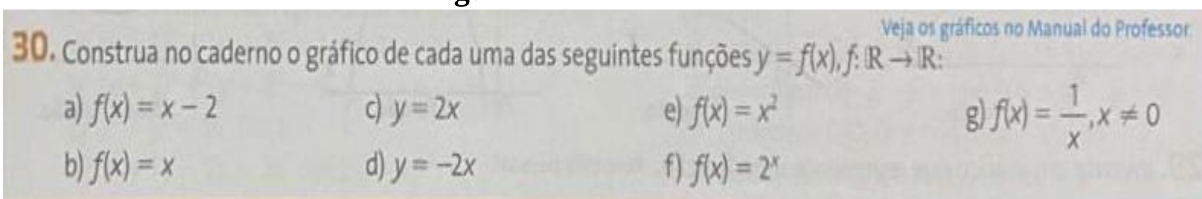


Fonte: DANTE, 2016, p. 52.

Essa questão já foi discutida quando comentamos o estudo do livro de Paiva (2015). Trago-a de volta aqui apenas para registrar a divergência entre as definições dos livros e confirmar a afirmação feita anteriormente de que a maioria dos livros didáticos recorre a essa definição e não à outra.

Ao estudar a introdução da noção de função no livro de Dante (2016), da mesma forma que fiz com os demais, realizei as atividades que estão propostas aos estudantes e procurei refletir sobre elas. Apresento a seguir alguns exemplos de atividades realizadas que proporcionaram momentos de aprendizagem para mim. O primeiro exemplo que apresento refere-se à seguinte atividade:

Figura 18 - Exercício 30



Veja os gráficos no Manual do Professor.

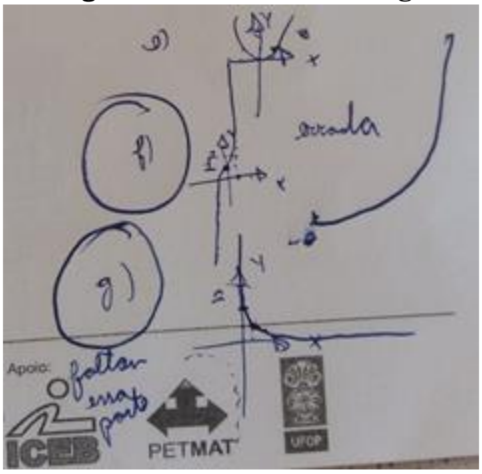
30. Construa no caderno o gráfico de cada uma das seguintes funções $y = f(x)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x - 2$
b) $f(x) = x$
c) $y = 2x$
d) $y = -2x$
e) $f(x) = x^2$
f) $f(x) = 2^x$
g) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

Fonte: DANTE, 2016, p. 56.

Esbocei corretamente os gráficos das funções representadas algebricamente nas letras “a”, “b”, “c”, “d” e “e”, porém, me equivoquei com as representações gráficas das funções expressas nas letras “f” e “g”.

Figura 19 - Letras “f” e “g”

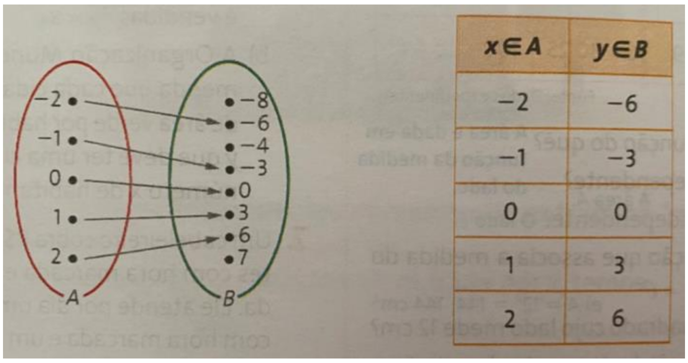


Fonte: Diário da professora pesquisadora.

Como mostra a imagem, realizei a construção do gráfico referente à função da letra “f” de maneira incorreta, pois quando x vai se tornado grande em valor absoluto, mas negativo, o valor da função vai ficando cada vez mais próximo de zero. Quanto ao gráfico da letra “g” estava também incorreto pois além de faltar a parte correspondente a x negativo, os valores de f(x) para x positivo ultrapassam o eixo das abcissas e, portanto, segundo o gráfico, 1/x poderia ser negativo para x positivo. Ambos os erros foram eventualmente discutidos com meus orientadores e corrigidos.

No estudo desse livro tive também uma dúvida, aparentemente simples: uma função representada pelo diagrama de Venn com 5 valores no domínio, alguns elementos sobram no contradomínio. Ai o gráfico dessa função seria só os pontos ou posso fazer ligações entre um ponto e outro, seguindo o mesmo padrão? Segue a imagem do livro que gerou essa dúvida:

Figura 20 - Diagrama de Venn e tabela



$x \in A$	$y \in B$
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

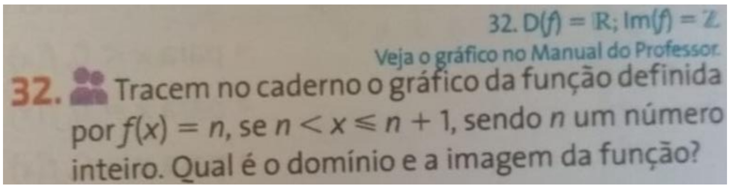
Fonte: DANTE, 2016, p. 48.

Meus orientadores esclareceram que tudo depende do domínio (além, claro, da lei da função). O gráfico existe “em cima dos pontos do domínio”, ou seja, se o domínio tem 5 elementos, então no gráfico só existem cinco pontos, não “ligados”. Essas nossas discussões permitiram que eu percebesse a importância de especificar domínio, contradomínio e lei ou regra de uma função e não apenas sua lei, ou o domínio. Compreendi que o gráfico está diretamente relacionado ao domínio da função (e à lei), ou seja, se o domínio é o conjunto dos números reais, o gráfico dessa função pode ser uma linha contínua (dependendo da lei), porém, se o domínio é um conjunto discreto, como o conjunto dos números naturais, então o gráfico da função vai ser representado por um conjunto discreto de pontos no plano, não por uma linha contínua.

Assim, propus-me pensar na seguinte situação: por exemplo tenho a função y=3x, sei que como função, de domínio em R, então eu poderia fazer uma reta para seu gráfico. Mas como não foi especificado qual é o domínio (suponha que tenham sido dados apenas alguns elementos), posso desenhar uma reta como gráfico dessa função? Ou tenho que colocar só os pontos do gráfico correspondentes aos valores dados de x? Em conversas com meus orientadores, ficou esclarecido que y=3x pode nem ser função, por exemplo se o domínio for o conjunto A= {1,2,3} e o contradomínio ser B {0, 4, 7, 9} uma vez que com essa lei e esses conjuntos domínio e contradomínio não são atendidos os critérios que caracterizam a correspondência como funcional.

Outro exemplo de reflexão interessante (para mim, claro) aconteceu ao sentir dificuldade para resolver a questão 32:

Figura 21 - Atividade 32



32. $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{Z}$
Veja o gráfico no Manual do Professor.

32. Tracem no caderno o gráfico da função definida por $f(x) = n$, se $n < x \leq n + 1$, sendo n um número inteiro. Qual é o domínio e a imagem da função?

Fonte: DANTE, 2016, p. 57.

Em meu diário, anotei:

> Estava construindo o gráfico, mas minha dificuldade foi com o x e com o n porque o f(x) está igual a n. Aí depois que eu consegui, dando valores pra n, encontrar aquela possibilidade maior, o x era o intervalo. Eu estava fazendo o contrário, dava um valor pro x e achava um n, isso me deixou confusa. Quando fiz o contrário, dei valores pra n e depois achei o intervalo de x que consegui fazer o gráfico. Essa foi a maior dificuldade que eu tive, fazer o gráfico. (Diário de estudos, 03/04/2020).

Com o auxílio de meus orientadores, percebi que o gráfico será formado por vários segmentos de reta horizontais de comprimento 1. Uma sugestão deles foi eu pensar vários números (reais) de 0 a 10 e encontrar as imagens correspondentes.

O estudo dos livros didáticos se, por um lado, evidenciou meu frágil Conhecimento Comum do Conteúdo de funções, por outro provocou reflexões que me fizeram avançar neste e em outros subdomínios do MKT. Frente às minhas dificuldades com o Conhecimento Comum do Conteúdo, meus orientadores sugeriram que tentasse definir, do meu jeito, sem preocupações com o cumprimento dos padrões de precisão, rigor e formalismo, as principais noções envolvidas no trabalho com funções, tais como: incógnita, variável, variável independente, variável dependente, função, domínio, contradomínio etc.

De fato, essa foi uma tarefa difícil para mim:

> Eu tô com uma dificuldade de assim, eu sei o que é uma variável, sei o que é uma incógnita, sei o que é uma variável independente e o que é uma variável dependente, mas eu tô com uma dificuldade de escrever assim uma definição de variável independente. Se eu colocar assim: é uma variável que não depende do valor que outra variável assume. Assim seria suficiente, se algum estudante perguntar por exemplo, professora, o que é uma variável independente? Assim é o suficiente pra eu explicar pro aluno? (Diário de estudos[23], 07/04/2020).

No prosseguimento dessa conversa, procurei dar um exemplo: b=2h+7 e comentei que, como b e h são variáveis, quando coloco valores para uma, a outra toma outros valores, observamos que o valor que a variável b irá assumir depende do valor que a variável h irá assumir, logo, b é a variável dependente e h é a variável independente. Minha dúvida era se se essa explicação seria adequada para meus alunos. Meus orientadores me chamaram a atenção para alguns aspectos como, por exemplo, a relação escolhida: b=2h + 7. Se entendo b como função de h, estaria tudo bem, porém, dado b, poderia ser calculado o h correspondente também. Ou seja, eu poderia trabalhar com essa mesma relação, considerando h como variável dependente e b como independente. Ou seja, tudo depende de qual função está sendo considerada (e, portanto, qual é o domínio e o contradomínio): a variável que toma valores no domínio é a independente, e a que toma valores no contradomínio é a dependente. Por isso é importante levar em conta a situação na qual a função está sendo de interesse, pois o contexto muitas vezes influencia a determinação do

[23] Incluí as transcrições de algumas conversas realizadas com meus orientadores em meu diário de estudos.

domínio e do contradomínio da função em questão. Num contexto puramente abstrato, pode não ficar claro qual variável é a dependente e qual a independente.

Essa foi uma nova perspectiva que passei a ter: a noção de dependência entre as variáveis depende da associação entre a variável e o domínio. Aqui destaco o quanto foram imprescindíveis as discussões de orientação que tive durante o desenvolvimento dessa pesquisa, pois apenas estudando materiais e outras fontes, possivelmente eu não teria desenvolvido sozinha, muitas das percepções que me fizeram avançar nos meus conhecimentos matemáticos para o ensino de funções. Tais percepções foram favorecidas pelas muitas discussões que mantivemos (eu e meus orientadores) ao longo de todo o processo.

Outro detalhe que para mim foi importante observar: a função constante $f(x) = 3$ é uma função, mas a "variável" dependente não varia, embora seja chamada de variável. É um caso extremo que não faz sentido chamar variável, contudo, ela é assim denominada por uma questão de normatização, para ficar como nos outros casos. Outro fato levado a essas discussões foi que uma mesma igualdade pode representar várias funções, para isso, basta que em uma o domínio seja R, por exemplo, e na outra seja N. Modificando o domínio, modifica-se a função (isso fica evidente nas representações pelos gráficos cartesianos).

Ressalto que foram várias as vezes em que, ao discutir essas "definições" com meus orientadores, fui percebendo aspectos em que elas deixavam a desejar e, portanto, precisavam de aprimoramento. Esse processo de reflexão sobre os principais conceitos relacionados ao tema foi muito rico, na medida em que possibilitou uma compreensão mais profunda de cada conceito, ainda que não tivesse como objetivo chegar a uma definição formalmente correta ou definitiva dele. Por outro lado, me fez ver também que ter as definições bem guardadas na memória não implica ter competência para ensiná-las, porque repetir, em sala de aula, uma definição matematicamente correta do objeto matemático em estudo está longe de ser suficiente para provocar a curiosidade positiva do aluno a respeito do objeto definido e uma compreensão operacionalmente relevante desse objeto. Fez-me compreender também, nesse sentido, que é preciso conhecer os elementos fundamentais da constituição dos conceitos (mais do que saber repeti-los numa definição formalmente correta) para ser capaz de trabalhar, em sala de aula, situações e exemplos variados em que os conceitos se apresentem, a fim de desencadear o interesse do aluno e eventualmente promover a produção de sentido e de significados para esses conceitos. Assim, essa tentativa de definir, para mim mesma, livre das amarras do formalismo e do rigor, algumas das principais noções envolvidas no estudo introdutório das funções, se mostrou uma oportunidade importante de reflexão sobre essas noções e de produção, em mim, de uma compreensão mais aprofundada deles.

Em síntese, as reflexões e os estudos dos livros didáticos, relatados anteriormente, contribuíram para o meu desenvolvimento profissional uma vez que foram reconstruídas minhas concepções sobre o conceito de função e outros conceitos associados. A partir desses estudos e reflexões, aprendi o que é uma relação funcional, aprendi também as noções de relação de dependência entre grandezas; compreendi que as relações entre números representadas pelo diagrama de Venn, quando funcionais, são representadas geometricamente no plano cartesiano por pontos, e antes não considerava essa representação geométrica como válida (possivelmente porque nunca tinha visto esse tipo de representação gráfica cartesiana para funções cujo domínio é composto por uma quantidade finita de números).

Além disso, os erros e acertos cometidos durante a resolução das atividades propostas nos livros estudados permitiram e/ou promoveram:

a) um aprofundamento da compreensão de noções como função injetora, sobrejetora e bijetora;

b) mais confiança nas minhas próprias resoluções e quando essas parecerem incorretas, apreendi a buscar a origem e a correção do erro;

c) a compreensão do quanto é importante considerar profundamente o raciocínio do aluno e não apenas verificar se o mesmo errou ou acertou uma questão;

d) o entendimento de que é nesse processo de compreender o raciocínio do aluno que tenho a possibilidade de identificar um tipo de ideia que, embora tenha lógica para ele (aluno), está incorreta do ponto de vista da aprendizagem matemática e precisa, de alguma maneira ser superada para que não venha se colocar como um obstáculo para aprendizagens futuras;

e) um avanço na minha capacidade de propor situações, fazer perguntas e sugerir reflexões que permitam ao aluno compreender a origem do seu erro e a sua eventual correção, em lugar de simplesmente dizer que está errado e ensinar o certo.

Certamente essas aprendizagens todas contribuíram para as adequações e aprimoramentos que tiveram lugar durante o processo de construção do conjunto de tarefas para a introdução da noção de função na Educação Básica, descrito no capítulo 3 desta dissertação. A seguir, na seção seguinte, faço uma análise geral desse processo.

4.3 O processo de construção do conjunto de tarefas

Após os estudos da literatura referente ao ensino e aprendizagem de funções, comecei a planejar o trabalho de introdução da noção de função para estudantes da Educação Básica. No dia 14/04/2020, registrei no diário de estudos minhas primeiras ideias para esse planejamento:

> São 4 aulas por semana para a turma, porém considerei duas devido às consequências do coronavírus, o calendário escolar vai ficar apertado e geralmente a secretaria de educação manda provas globais, prova de avaliação diagnóstica e devido às matrículas online neste ano, as turmas ainda não fecharam e as avaliações ainda não foram feitas.
> 2 aulas por semana
> 8 aulas por mês
> 24 aulas por 3 meses (1 bimestre). Acho ideal p/ o projeto p/ dar tempo de analisar os dados
> 48 aulas por seis meses (2 bimestres). Seria a situação ideal, mas acho que não deve dar.
>
> **Plano de Aula - Funções**
>
> **Objetivos:**
>
> Construção da noção de função;
> Reconhecer as diferentes formas de representar uma função;
> Construir as noções de domínio, contradomínio, imagem;
> Reconhecer as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras;
> Construir gráficos a partir da lei da função.
>
> (Diário de Estudos, 14/04/2020)

Paralelamente ao início do estudo da forma como alguns livros didáticos abordavam o tópico funções, comecei a pensar em como poderia ensinar funções na Educação Básica. Ao estudar um livro[24] bem antigo, me senti entusiasmada. Pude compreender melhor a noção de conjuntos e de produto cartesiano de conjuntos, que ia dar nas relações funcionais. A partir desse estudo, selecionei um conjunto de atividades (Apêndice A[25]) e com base nelas preparei um planejamento preliminar (Apêndice B[26]), acreditando que meus alunos também se sentiriam como eu, compreendendo noções de relação funcional entre conjuntos que até o momento eu não dominava.

Após finalizar esse primeiro planejamento, me senti muito contente e pensei que já tinha o conjunto ideal de tarefas para o trabalho de introdução da noção de função junto aos

---

[24] Matemática Moderna – DOMÊNICO; LAGO; ENS (1986).

[25] Essa é uma sequência de atividades extraídas de dois livros didáticos, sendo a maioria delas extraídas do material de (Domênico; Lago; Ens; 1986) e duas retiradas do material de (Iezzi et al.; 2016).

[26] Já esse planejamento preliminar relaciona tarefas de livro didático com alguns experimentos práticos envolvendo Matemática e Física, extraídos da dissertação de Rosa (2005).

meus alunos. Contudo, ao conversar com meus orientadores, percebi que havia vários aspectos que poderiam ser questionados pelos estudantes. O recorte a seguir, extraído do dia 21/04/2020 de meu diário de estudos, apresenta possíveis perguntas dos alunos e respostas que eu daria a eles. Para uma dessas perguntas, eu não teria uma resposta:

Perguntas com respostas

a) Professora, por que a gente estuda plano cartesiano? Para que isso serve?

O plano cartesiano como vimos anteriormente, foi inventado por René Descartes e serve para representar qualquer ponto geometricamente. Vamos estudar as funções, que geometricamente podem ser representadas por um conjunto de pontos ou em alguns casos por um único ponto. Então estudamos o plano cartesiano, para que você compreenda como localizar e inserir pontos nele, para que quando você for desenhar geometricamente as funções que vamos aprender, você vai ter uma ideia de como desenhá-la no plano cartesiano.

b) professora, eu achei que íamos estudar funções, mas você só fala de conjuntos e coisas que não entendo (domínio, contradomínio...)?

As funções podem ser representadas por um ponto ou um conjunto de pontos. Esses pontos são formados por pares ordenados P (x, y), tais que o x pertence a um conjunto e y pertence a um outro conjunto, então uma função é um tipo de relação entre dois conjuntos, mas uma relação com alguns critérios específicos. Por isso estudamos as relações entre os conjuntos e depois aprendemos a relação específica entre conjuntos que chamamos de função. Então temos as denominações de domínio, contradomínio e imagem.

c) porque preciso aprender isso?

É importante você aprender sobre as relações entre os conjuntos e que dentre essas relações possíveis, tem um tipo específico de relação que é denominado função. De forma prática, é possível percebermos que algumas coisas variam em função de outras. Por exemplo o preço que você vai pagar por um produto em uma loja específica vai depender da quantidade de produtos que você vai comprar. E essa relação entre o valor a ser pago e a quantidade de produtos que você for comprar é um exemplo prático de uma função. Com relação aos conceitos de domínio, contradomínio e imagem, é importante saber reconhecê-los pois são denominações específicas que foram atribuídas aos conjuntos envolvidos no caso das relações entre conjuntos que são funções.

d) porque as aulas de matemática são tão chatas? A gente só fica olhando para o quadro enquanto você fala ou então resolvendo lista de exercício...

Realmente às vezes as aulas não são muito divertidas, mas tento conversar em sala com você e seus colegas enquanto estou explicando a matéria no quadro e procuro interagir de mesa em mesa observando as atividades que vocês fazem e como fazem. Mas vou pensar em aulas diferenciadas para que elas se tornem mais divertidas (geogebra, experimentos, jogos)

e) essa matemática não serve para nada na vida da gente?

Claro que serve, a Matemática está muito relacionada com a nossa vida. Por exemplo as figuras geométricas, estão no formato do lençol da nossa cama, geralmente retangular, nas janelas, portas, no formato das flores, a simetria do nosso próprio corpo. No caso das funções, elas servem para muita coisa, como para auxiliarmos em uma visão futura. Por exemplo, se temos 10 dias para concluir uma produção de 15.000 blusas e temos nesta fábrica 50 costureiras e sabemos que em 10 dias uma costureira consegue produzir cerca de 50 blusas. Então 50 costureiras devem produzir, em 10 dias, 2.500 blusas, mas se precisamos de 15.000 blusas em 10 dias, precisamos aumentar o número de costureiras. Podemos representar essa situação como sendo que a quantidade de peças a serem produzidas nesses 10 dias está dependendo da quantidade de costureiras, ou seja está em função da quantidade de costureiras. Se chamarmos de c a quantidade de costureiras e f(c) a quantidade de peças, então podemos escrever que f(c) = 50c. Dessa forma podemos calcular quantas costureiras serão necessárias para produzirem em 10 dias 15 mil blusas e obtemos o valor de 300 costureiras. As funções também podem ser aplicadas na Biologia com o controle de bactérias que são reproduzidas em função do tempo. Na Física temos a distância variando em função do tempo no MRU (Movimento Retilíneo Uniforme).

f) não tem jeito de estudar funções de uma forma que a gente entenda?

g) as aulas não poderiam ser diferentes, mais animadas?
Claro, realmente aula expositiva e lista de atividade não é nada animador. Vou pensar em aulas mais animadas, com jogos, ou uso de computador/celular para utilizarmos o geogebra, ou experimentos práticos em sala, ou a combinação dessas sugestões.

(Diário de estudos, 21/04/2020).

Ao refletir sobre as perguntas e tentar respondê-las, percebi que embora essas atividades tenham contribuído para que eu compreendesse melhor a ideia de conjuntos e sua relação com o conceito de função, não seria a melhor forma de fazê-lo em sala de aula. Retomei novamente os estudos da literatura sobre o ensino e aprendizagem de funções, pois percebi que não os havia considerado, de fato, para selecionar esse conjunto de tarefas. Aqui destaco um trecho, com o qual me identifico, descrito e vivenciado por Oliveira (2015):

> Eu não estava preparada para isso, embora a proposta da escola se aproximasse da prática pedagógica privilegiada pelo Grupo de Sábado e pelas disciplinas da Faculdade de Educação da Unicamp. A proposta exigia de mim uma relação e uma prática matemática que eu não havia tido quando estudante do Ensino Fundamental e Médio. Ensinar de um modo diferente do que aprendi era um desafio para mim e me trazia insegurança. Procurei desenvolver práticas tradicionais e vivi um paradoxo: conheci as práticas matemáticas exploratório-investigativas, aprendi com elas, e valorizei-as ao participar do GdS, tendo, inclusive, feito uma pesquisa nessa perspectiva. Entretanto, na hora de desenvolver a minha identidade enquanto professora na escola, não conseguia legitimar esse modo de ensinar em minha prática docente. (OLIVEIRA, 2015, p. 130).

Assim como a autora, mesmo estando no Mestrado e com tantas ideias de práticas diferenciadas e tendo estudado a literatura pertinente a respeito do ensino e aprendizagem de funções, ainda estava ligada às experiências vividas como estudante e a ideias preconcebidas acerca do ensino de Matemática. Percebi que, embora concordasse com as ideias dos autores já estudados, no momento de selecionar essas atividades não me dei conta de que estava, mais uma vez, me apegando ao proposto pelo livro didático, sem pensar em como os alunos poderiam reagir à proposta. Ainda seguia "a receita" do livro didático de forma pouco crítica. Percebi também que as tarefas selecionadas eram abstratas e que possivelmente não despertariam o interesse e a compreensão dos estudantes.

Então, comecei a pensar em atividades que fossem mais interessantes e no dia 28/04/2020, durante o meu almoço, estava assistindo o jornal na televisão, que relatava os casos de morte por Covid-19 em Minas, e me veio a ideia de utilizar esse gráfico de alguma forma. Pensei em propor questões envolvendo a situação atual de pandemia associada a uma fonte de renda, também atual, que é o caso dos motoristas de aplicativos como a Uber, que não pararam nessa pandemia e pode ser uma fonte de renda alternativa para muitas pessoas. Essas "tarefas" que são, na verdade, resultado de reflexões que me ocorreram, estão no Apêndice C.

Porém, eram "tarefas" isoladas. Muitas ideias foram surgindo, mas não conseguia elaborar um conjunto de tarefas que fizesse sentido, do início ao fim, e tivessem um único objetivo, que deveria ser o de possibilitar situações que auxiliem a compreensão, pelos estudantes, da noção de função. Então, recorri a trabalhos já prontos, que tivessem um conjunto de tarefas já selecionadas para essa finalidade, e que estivessem adequados, pelo menos parcialmente, às minhas ideias (baseadas nos estudos feitos ao longo da pesquisa).

Foi aí que selecionei um novo conjunto de "problemas", sendo a maioria recortados de Souza (2016) e que estão no Apêndice D. Fiz pequenas modificações nos enunciados e em algumas alternativas de resposta e elaborei um "problema" (crescimento de uma criança em seus primeiros dois anos de vida). Considerei as recomendações da literatura estudada para estimular o contato dos alunos com relações de dependência que não são "bem comportadas", ou seja, que não possuem taxa de variação constante. Foi difícil esse processo de confiar em minha capacidade e em meus conhecimentos. Desse conjunto de tarefas selecionadas e apresentadas no Apêndice D, destaco uma a título de exemplo do processo vivenciado de refletir e modificar as tarefas já selecionadas inicialmente:

Atividade do táxi com reflexões e alterações

Figura 22 - Problema 4

Problema 4

O filho de Seu João passou mal e precisou ser levado ao hospital. Como Seu João não tem carro e a situação aparentava ser bem grave ele resolveu chamar um táxi. O táxi cobra pela corrida um preço fixo, chamado bandeirada, no valor de R$ 5,07 mais R$ 1,26 por quilômetro rodado.

a) Quanto Seu João pagará pela corrida se o hospital estiver à 2km de distância de sua casa?

b) Como você calculou quanto Seu João pagou pela corrida de 2km?

c) Se a corrida tivesse custado R$ 8,85, qual seria a distância entre a casa de Seu João e o hospital?

d) O valor que Seu João pagou pela corrida dependeu de alguma coisa? Justifique.

e) É possível calcular o valor da corrida para alguma outra distância diferente de 2km? Justifique.

f) É possível calcular o valor da corrida para qualquer que seja a distância percorrida? Justifique.

Fonte: (SOUZA, 2016, p. 88).

Adaptei essa questão colocando valores inteiros para a bandeirada e por quilômetro, para que os alunos consigam resolver essa atividade calculando o valor a ser pago com maior facilidade. As atividades seriam apresentadas aos alunos uma de cada vez.

O filho de Roberto passou mal e precisou ser levado ao hospital. Como Roberto não tem carro e a situação aparentava ser bem grave ele resolveu chamar um táxi. O táxi cobra pela corrida um preço fixo, chamado bandeirada, no valor de R$ 5,00, mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.

a) Quanto Roberto pagará pela corrida se o hospital estiver a 2 km de distância de sua casa?
Resposta esperada: R$ 7,40
Nessa primeira pergunta espero que os alunos calculem o valor a ser pago, sem apresentar dificuldades.

b) Como você calculou quanto Roberto pagou ao taxista pela corrida de 2 km?
Resposta esperada: 5 + 2x1,20 = 7,40
Apliquei essa atividade a um aluno de segundo ano do Ensino Médio, que já estudou na escola, e a resposta que ele deu foi 1,20x2. A partir da resposta desse aluno, entendo que pode acontecer de algum estudante fazer o mesmo, desconsiderando o valor da bandeirada, e calculando apenas o valor correspondente à distância de 2 km. Para tentar evitar esse erro, adaptei a pergunta acrescentando “ao taxista”. Talvez essa informação faça com que o aluno pense no valor total pago ao invés de calcular apenas o valor correspondente a distância percorrida.

c) Se a corrida tivesse custado R$ 8,60 qual seria a distância entre a casa de Roberto e o hospital?
Resposta esperada: 3 quilômetros

Para essa pergunta, não espero que os alunos apresentem dificuldades por ser um cálculo simples e estar dando continuidade ao cálculo da quilometragem anterior, que foi de 2 km.

f) O valor que Roberto pagou pela corrida dependeu de alguma coisa? Justifique.
Resposta esperada: sim, dependeu da distância percorrida.
Essa é a resposta esperada, porém pode ser que algum estudante responda que “dependeu do valor cobrado por quilômetro”. Como nas atividades anteriores os alunos precisaram multiplicar a quilometragem por 1,20, talvez isso faça com que entendam que o valor a ser pago pela corrida depende do valor cobrado por quilômetro ao invés de entender que depende da distância percorrida. Para evitar essa possibilidade, antes dessa pergunta apresento uma outra, que é a seguinte:

d) Se você precisasse chamar esse táxi para levar alguém ao médico, qual valor você iria pagar pela corrida?
Resposta esperada: Valores diferentes para cada aluno, dentro de certa faixa de distância da casa deles ao hospital.
Com essa atividade, os alunos provavelmente irão pesquisar a distância da casa deles até o hospital mais próximo. Talvez, essa questão possibilite ao aluno perceber que o valor a ser pago depende da distância a ser percorrida, evitando talvez a possibilidade levantada na letra “f” apresentada anteriormente.
Pensando na realidade dos alunos, acrescentei essa pergunta:

e) Se ao invés de ir de táxi você fosse de Uber, qual seria mais econômico?
Resposta esperada: Uber.
Discutir a respeito desse assunto com os alunos. Hoje em dia o aplicativo do Uber está sendo muito utilizado pelas pessoas. Além de ser rápido, geralmente é mais econômico do que táxi e dependendo do lugar e horário é mais econômico até que o transporte público.

g) É possível calcular o valor a ser pago para qualquer distância percorrida? Justifique.
Resposta esperada: Sim, pois basta multiplicar a distância percorrida por 1,20 e adicionar 5 ao resultado.
Essa questão foi adaptada para tentar fazer com que o aluno generalize uma forma de calcular o valor a ser pago para uma distância qualquer, mas se isso não acontecer, deixarei para uma próxima oportunidade.

h) Agora represente, na tabela abaixo, os cálculos feitos nas letras “a”, “c” e “d”, relacionando o valor a ser pago em função da distância percorrida.

Distância Percorrida (Km)	**Valor pago (R$)**

Resposta esperada:

Distância Percorrida (Km)	**Valor pago (R$)**
2	7,40
3	8,60
Pessoal	Pessoal

O objetivo dessa atividade é que os alunos representem na tabela as informações que foram dadas em linguagem natural para possivelmente associar que a tabela funciona como uma maneira de representar a situação descrita.

i) Você acha que podemos representar as informações das letras “a”, “c” e “d” de outras formas? Explique.

Resposta esperada: diagrama de Venn, f(x) = 5 + 1,20x e o desenho dos pontos representados na tabela. Se os alunos fizerem apenas algumas dessas representações, apresento a eles a que faltar. Suponho que eles não irão falar do diagrama de Venn. Após feita essa atividade vou conversar com os alunos que isso é uma função, que o conjunto de todos os valores que possam ser considerados para a distância percorrida é chamado de domínio da função. O conjunto dos valores correspondentes a cada elemento do domínio chamamos de imagem. E que só nos referimos aos termos domínio e imagem se essa relação for uma função. E como sabemos se é uma função? Dou um tempo rápido para eles pensarem e falo das regras para ser uma função: cada elemento do domínio tem uma única imagem correspondente. Ou seja, para cada distância percorrida temos um valor a ser pago.

Após as modificações, essa tarefa ficaria da seguinte forma:

O táxi

O filho de Roberto passou mal e precisou ser levado ao hospital. Como Roberto não tem carro e a situação aparentava ser bem grave ele resolveu chamar um táxi. O táxi cobra pela corrida um preço fixo, chamado bandeirada, no valor de R$ 5,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.

a) Quanto Roberto pagará pela corrida se o hospital estiver à 2 km de distância de sua casa?
b) Como você calculou quanto Roberto pagou ao taxista pela corrida de 2 km?
c) Se a corrida tivesse custado R$ 8,60 qual seria a distância entre a casa de Roberto e o hospital?
d) Se você precisasse chamar esse táxi para levar alguém ao médico, qual valor você iria pagar pela corrida?
e) Se ao invés de ir de táxi você fosse de Uber, qual seria mais econômico?
f) O valor que Roberto pagou pela corrida dependeu de alguma coisa? Justifique.
g) É possível calcular o valor a ser pago para qualquer distância percorrida? Justifique.
h) Agora represente as letras “a”, “c” e “d” na tabela a seguir, relacionando o valor a ser pago em função da distância percorrida.

Distância Percorrida (km)	**Valor pago (R$)**

i) Você acha que podemos representar as informações das letras “a”, “c” e “d” de outras formas? Explique.

Na letra f, meus orientadores me chamaram atenção para a formulação da pergunta: o tanto que a pessoa pagou dependeu de alguma coisa? Esse tipo de pergunta apresenta alguns problemas, pois pode depender de muitas coisas, por exemplo, do trânsito, do horário que a pessoa solicitou o Uber, depende de muitas coisas, que não é a dependência que eu espero que o aluno responda, pois tem muitos outros fatores envolvidos. Então, não é que eu deva colocar questões que induzam a resposta do aluno, mas propor questões e perguntas claras e precisas, tendo em conta que os alunos ainda não sabem o que é função, nem o que é importante de ser observado na relação apresentada e que inclusive, supostamente, ainda não conhecem (matematicamente) muitas formas de relação de dependência entre grandezas e a existência de diferentes tipos de dependências. Em suma, a crítica foi no sentido de que existem várias respostas que os alunos poderiam dar para essa letra f e que seriam corretas para essa pergunta, tal como está formulada. Mas muitas dessas respostas não interessam, do ponto de vista do objetivo da atividade.

Essa conversa me ajudou a compreender que devo deixar bem claro o que quero perguntar para o aluno, a pergunta deve ser clara, assim como ela deve ser bem orientada, evitando ao máximo possível deixar margem para mais de uma interpretação. Como o aluno ainda está aprendendo a reconhecer as ideias relevantes para a construção da noção de função, devo propor tarefas claras e o mais bem descritas possível para atingir meu objetivo de auxiliar a aprendizagem dos alunos.

Foi conversando com meus orientadores sobre essa questão do táxi, que percebi que me referia a essa tarefa como sendo uma função linear, porém, essa não é linear, pois temos que somar sempre a constante 5 ao produto 1,20x, ou seja, a bandeirada corresponde ao b da função afim y=ax + b.

Antes de adaptar outras tarefas, apliquei a um estudante de primeiro ano do Ensino Médio[27] essas que compõem o Apêndice D. Este estudante fez as tarefas em 06/05/2020. Apresento a seguir uma resposta desse estudante para uma das tarefas propostas:

f) Para Andressa conseguir distribuir os 10 chicletes que ela tem, ela depende de alguma coisa? Justifique. Resposta: *do tanto de pessoas para ela distribuir e a boa vontade*[28]

Quando o estudante se coloca no lugar de Andressa, ele é quem possui os chicletes, então para dividir com os colegas realmente depende, como Thiago disse, da quantidade de

[27] Esse estudante, aqui chamado de Thiago, se colocou à disposição durante o desenvolvimento da pesquisa para ajudar no que fosse necessário, e o fez em vários momentos.

[28] Optei por manter as respostas literalmente como foram escritas pelo estudante.

pessoas, da quantidade de chicletes, e também da boa vontade de quem distribui, pois poderia optar por não os dividir com ninguém.

Outro comentário dos meus orientadores foi no sentido de não esperar que o aluno represente a correspondência funcional pelo diagrama de Venn, uma vez que essa é uma representação mais técnica e ele ainda não foi exposto a ela, já que estão apenas iniciando o trabalho de compreender a noção de função. Então, uma opção seria deslocar uma parte dessa questão para o início do trabalho com funções e deixar a parte que envolve as representações mais técnicas e menos "naturais" para o final.

Em outro momento, propus a seguinte tarefa a uma aluna do Ensino Fundamental:

Tarefa 2

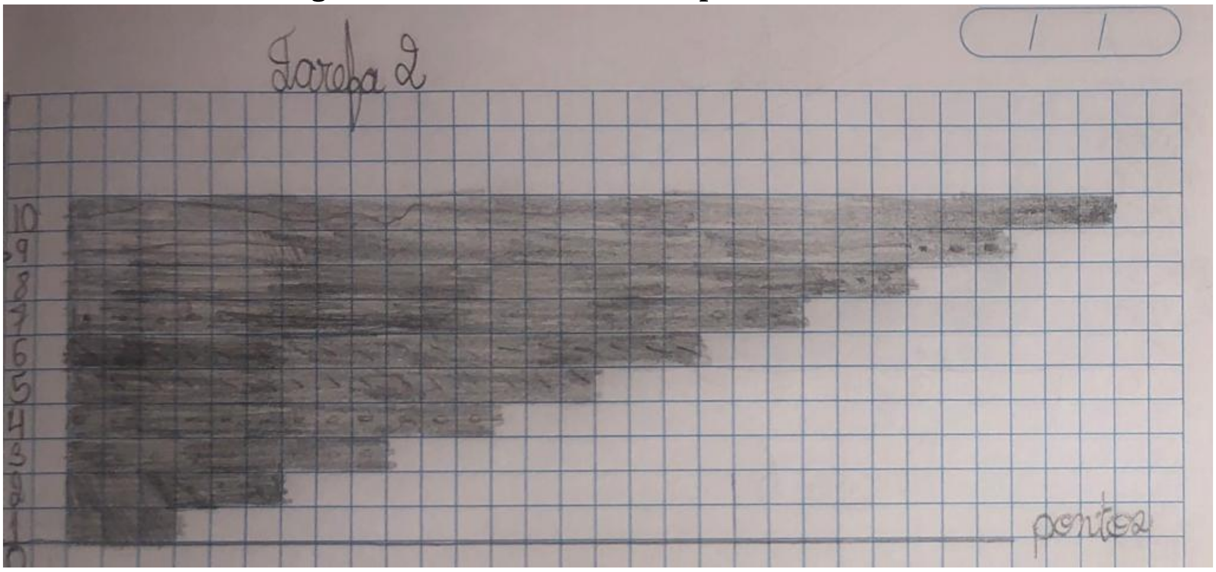
O time da sua turma está participando do campeonato de futebol na escola e cada gol feito vale 3 pontos.

a) Quantos pontos teria esse time se fizerem 2 gols? E se fizerem 4 gols? E se fizerem 10 gols, quantos pontos teriam?
b) Se o saldo fosse de 21 pontos, quantos gols esse time teria feito? E se o saldo fosse de 0 pontos, teriam feito quantos gols?
c) É possível esse time obter um saldo de 38 pontos? Explique.
d) Para não ter que ficar calculando o saldo de pontos desse time, construa um gráfico relacionando o saldo de pontos com base nos gols feitos por esse time para que, ao final do campeonato, você consiga saber a pontuação do time por meio do gráfico. (Faça o gráfico considerando o máximo de pontos que você acha que o time da sua sala pode fazer até o fim do campeonato).

Fonte: elaborada pela professora pesquisadora.

A resposta da aluna nessa tarefa me surpreendeu, pois ela responde: "com a ordem trocada". No eixo das abscissas deveria ser a quantidade de gols. Pensei no caso do gráfico seguinte, que se essa ordem fosse invertida, não seria uma função. Então fui conversar com meus orientadores e entendi que é isso mesmo, a variável independente é sempre representada no eixo das abcissas e a variável dependente é representada no eixo das ordenadas.

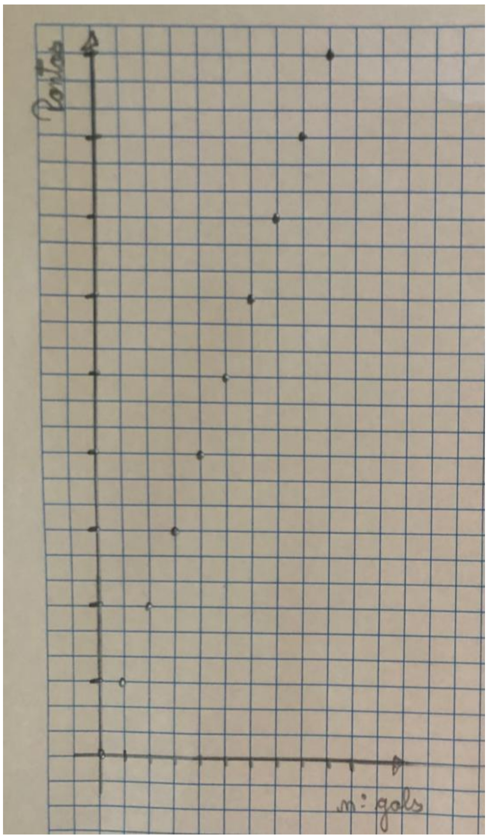
Figura 23 - Gráfico elaborado pela estudante



Fonte: dados da pesquisa.

Além disso, ela colocou o gráfico em barras, e eu esperava pontos da seguinte forma:

Figura 24 - Gráfico de pontos



Fonte: dados da pesquisa.

Ou seja, eu queria que a estudante construísse o gráfico cartesiano da função, sendo que eles ainda não sabem o que é uma função, muito menos como representá-la no plano cartesiano. Esse foi um erro meu. Além desses problemas, percebi que havia recomendações da literatura especializada que, sem avaliar a pertinência, acabei não contemplando nessa tarefa. A recomendação é no sentido de que as construções de gráficos no plano cartesiano sejam deixadas para um momento posterior, pois trata-se de uma representação mais complexa, que envolve o domínio de outras noções relativas à correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, além, claro, de maior familiaridade com a noção de função.

Foram identificados alguns problemas no enunciado também. Os campeonatos não acontecem dessa forma, os critérios de pontuação ficaram muito artificiais, por exemplo. Acabei decidindo por retirar essa questão. Uma sugestão de meus orientadores para substituir essa retirada foi a tarefa dos cubos, que está no conjunto atual de tarefas que construí, com algumas adaptações. Conversando mais a respeito das tarefas com os orientadores, percebi que desconsiderei certos aspectos importantes da construção da noção de função na escola e não planejei adequadamente o tempo necessário para os alunos assimilarem as ideias fundamentais envolvidas no trabalho inicial com funções, por exemplo. Enfim, as tarefas não estavam bem formuladas e tive que reformulá-las. O processo foi longo, de idas e vindas, tarefas foram pensadas para serem incluídas e acabaram retiradas, porque, por uma ou outra razão não atendiam a uma lógica global pensada para o conjunto de tarefas. Outras se encaixaram bem nessa lógica, mas precisaram de ajustes técnicos na sua formulação. Outras ainda tiveram que ser deslocadas para adiante, na ordem proposta, de modo a se ajustar à organização das tarefas na ordem de complexidade das ideias subjacentes.

Algumas tarefas foram criadas por mim, com a ajuda dos orientadores. A título de exemplo, apresento outro trecho do meu diário de planejamento, onde fiz anotações referentes a uma tarefa que escolhi para ser a primeira do conjunto.

A matemática é vista, pelo senso comum, como difícil, chata e que causa temor. Muitas vezes já ouvi dos alunos: Matemática é muito difícil! Mas pra que eu preciso saber disso? A matemática não serve pra nada mesmo! Então busquei elaborar uma atividade priorizando o ensino da matemática de forma contextualizada, tentando romper, assim, com o ensino da matemática pela matemática.

Zunino (1995) aponta que “se o trabalho matemático que se realiza nas escolas relaciona-se mais com a vida das crianças e dos adultos fora dela, seria possível que as crianças se interessem por ela e, positivamente, que a temam menos” (ZUNINO, 1995, p. 8).

Se começarmos a observar, o termo “função” está presente em várias situações do nosso dia a dia como por exemplo:

* Cheguei atrasada em **função** do trânsito!

* O valor a pagar por uma corrida de táxi é em **função** da distância percorrida.

* O tempo de viagem é em **função** da distância percorrida.
* O desconto do imposto de renda é em **função** do seu salário.
* A altura de uma criança é em **função** da sua idade.
* O salário de um vendedor é em **função** do volume de vendas que ele realiza.
* O valor a ser pago pela conta de água é em **função** do consumo no mês.

O estudo das funções visa a compreensão da noção de função, enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e também a capacidade de usar este conceito na resolução de problemas reais (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 116).

Pensando nisso, elaborei a questão a seguir, que contempla resolução de um problema que pode ser real e provoca o aluno a pensar na ideia de função como dependência entre variáveis (quantidade de gotas depende do peso) em uma situação do dia a dia (utilização da dipirona), sem relacionar esta, com a matemática nesse primeiro momento:

A figura mostra um medicamento muito utilizado em casos de dor ou febre. Leia a informação no quadrinho:

A quantidade de gotas que você deve tomar é em **função** do seu peso!

Fonte: imagem da internet

a) Nessa situação, qual é o significado da palavra “função”?
b) Dê outros três exemplos de situações em que o termo “função” seja utilizado com esse mesmo sentido.
c) Você acha que a situação apresentada e os exemplos que você colocou na letra “b” têm alguma relação com a matemática? Explique.

Essa foi uma tarefa construída e pensada para ser a primeira a ser apresentada aos estudantes. Quando a compartilhei com meus orientadores, conversamos bastante sobre ela. Uma coisa que eles destacaram foi a utilização do termo “função” nas frases citadas, que de certa forma, foi uma estratégia de introduzir o termo em situações do dia a dia, mas que não necessariamente expressam a ideia de função. Esse termo, inclusive, poderia ser substituído por “depende” nas frases em questão, pois uma função não é apenas uma relação de dependência, mas precisa atender a alguns critérios (que definem tal relação como funcional ou não).

Essa primeira tarefa e essas reflexões e diálogos com meus orientadores fizeram com que eu percebesse que forçar a utilização do termo função em uma frase não irá fazer com que o aluno compreenda esse conceito e nem o reconheça nessas situações do dia a dia, uma vez que, nos exemplos que dei, não são relações, necessariamente, funcionais, então essa atitude inicial poderia até confundir os estudantes, ao invés de contribuir para a aprendizagem deles sobre o tema. Então, essas reflexões fizeram com que eu repensasse a maneira de trabalhar o conceito de função. Além disso, conversamos sobre a ideia de que uma tarefa isolada pode ser difícil de ser avaliada em sua pertinência, então a sugestão deles foi que elaborasse um conjunto de tarefas de forma que obedecessem a uma lógica global de serem trabalhadas e também a uma ordem predeterminada, tentando identificar uma razão específica para a presença de cada uma delas no conjunto como um todo, bem como na ordem estabelecida.

Por outro lado, voltando à questão da dipirona, pensei também, levando em conta minhas experiências de sala de aula e os estudantes com quem trabalho diretamente, que essa atitude de colocar um medicamento no enunciado e propor uma dosagem para cada pessoa, considerando seu peso e idade, poderia incentivar os estudantes (normalmente adolescentes) a se auto medicarem, ou medicar um irmão mais novo. Assim, essa atividade poderia gerar problemas na escola, por se tratar de Educação Básica. Então optei por retirar essa ideia central da questão envolvendo medicamentos, podendo apresentar a relação de dependência envolvendo outras grandezas, como o valor a pagar em função do consumo de energia elétrica, consumo de água, tempo em minutos de chamadas telefônicas, dentre outras relações entre grandezas que evitem um possível problema com a família e com os próprios estudantes.

Dessa forma, elaborei várias sequências de tarefas, como por exemplo a sequência que está no Apêndice E, em que apresento a questão da dipirona. Além disso, selecionei algumas outras tarefas para compor o conjunto, que foi enviado aos meus orientadores, finalizado, em sua primeira versão, em 02/10/2020. Nessa versão, considerei que foram selecionadas todas as tarefas que caberiam no conjunto final, mas ainda se fez necessário organizar melhor as ideias e adequar as tarefas, de modo que o objetivo pudesse ser contemplado.

Assim, elaborei um novo conjunto de tarefas, dessa vez mais bem direcionado, a meu ver, contando com reflexões consistentes e justificativas para cada uma delas. Essa sequência está apresentada no Apêndice F, que foi concluído em 24/10/2020. Dentre todas as sequências que estão apresentadas nos Apêndices, selecionamos nove (9) para o conjunto final das tarefas. As demais tarefas (8) foram construídas por mim com o auxílio de meus orientadores. Esse conjunto de 17 tarefas, já descritas separadamente nesse estudo foi concluído em novembro de 2020.

Ressalto que inicialmente construí algumas tarefas, como a da dipirona apresentada acima, outras recortei dos materiais estudados, sendo que essas últimas, aos poucos foram sendo adaptadas ao público-alvo e ao que realmente acontece no Brasil. Por exemplo, algumas tarefas retiradas da brochura portuguesa trazia uma linguagem local, diferente das expressões utilizadas no Brasil. Outras adaptações estão relacionadas à atualização de valores, que não condiziam com a média de valores cobrados, em Minas, por exemplo, para a compra de salgados ou objetos. Também foram modificados os enunciados das tarefas pensando em torná-los mais próximos da realidade dos alunos e o mais claro e preciso possível.

Em síntese, as reflexões aqui descritas durante o processo de construção do conjunto de tarefas, além de terem contribuído para uma compreensão mais aprofundada do conteúdo a ser ensinado e das inúmeras questões didático-pedagógicas que envolvem o trabalho docente de introdução da noção de função na Educação Básica, também favoreceram meu desenvolvimento profissional em outro aspecto, que se relaciona à capacidade de criar ou adaptar tarefas para um determinado objetivo de ensino. Compreendi a importância de formular perguntas claras e de propor tarefas bem enunciadas para atingir o objetivo de auxiliar a aprendizagem dos alunos. Assim, me sinto mais preparada para planejar e selecionar tarefas para meus alunos, tendo em vista os objetivos almejados.

Llinares (2019), com base nas ideias de Even e Tirosh (2008), destaca que há bastante tempo se insiste na necessidade de os professores de Matemática levarem em consideração a forma como os alunos pensam matematicamente, para melhor planejar e conduzir suas aulas. Concordo com os autores e entendo que tal situação pode ser exemplificada quando nós, professores de Matemática, identificamos um raciocínio do aluno que não é o correto, mas que faz algum sentido para ele. Quando somos capazes de identificar essa forma de pensar e compreendemos por que ela ocorre, temos mais condições de propor tarefas substantivas e que efetivamente conduzem o aluno ao aprendizado. Noutra linha de ação didático-pedagógica, o professor tem mais condições também de, frente a um erro observado na realização de uma tarefa, desenvolver uma cuidadosa discussão com todos os alunos ou, em particular, com o aluno que cometeu o erro (e avaliando sempre a adequação do momento), de modo a favorecer a superação das ideias equivocadas que geraram a inconsistência ou o erro observado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *"Não haverá borboletas se a vida não passar por longas e silenciosas metamorfoses."*
> ***(Rubem Alves)***

Ao longo dos últimos dois anos, me dediquei de forma intensa a compreender melhor minha própria prática e isso envolveu perceber a distância existente entre a Matemática Acadêmica, que predomina na formação inicial, e a matemática da escola, que é aquela que o professor de Matemática é chamado a mobilizar cotidianamente.

Nesse processo, percebi que o desenvolvimento profissional de um professor de Matemática da escola está profundamente conectado ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos para o ensino. Assim, ao investigar um processo de reflexão sobre a minha própria prática de elaborar um conjunto de tarefas para introduzir a noção de função na Educação Básica, me debrucei sobre suas possíveis contribuições para o meu desenvolvimento profissional.

Uma resposta para esse questionamento está baseada na análise do processo vivido, de estudos sobre o ensino de funções (em materiais e livros didáticos que abordam o assunto) e de construção do conjunto de tarefas para o ensino desse conceito, bem como as reflexões que entremearam as etapas desse processo. Assim, a partir dessa, percebo que aprendi, dentre outras coisas:

- a considerar o raciocínio do meu aluno durante a resolução de uma tarefa (não deixando de notar as sutilezas que acontecem em sala de aula e que propiciam intervenções afim de contribuir para a aprendizagem dos estudantes, tendo por base seus conhecimentos matemáticos já consolidados, bem como seus aspectos cognitivos particulares);

- a me colocar na posição do aluno antes de propor tarefas a eles (essa atitude me levou a perceber a importância de tentar prever possíveis interpretações e erros dos alunos durante a resolução das tarefas propostas);

- que o livro didático não é uma "receita" a ser seguida e que é importante acreditar em (e desenvolver sempre) minha capacidade de planejar e criar aulas que possibilitem a aprendizagem dos alunos;

- a relevância de compreender melhor o conteúdo matemático, em uma perspectiva profissional, antes de planejar tarefas para propor aos estudantes (nessa busca, por compreensão do conteúdo de funções visando elaborar tarefas que auxiliem a aprendizagem dos estudantes sobre o tema, percebi a carência fundamental que tinha - e ainda tenho - de Conhecimentos Matemáticos para o Ensino);

- a planejar atividades (agora sei que as atividades não são simplesmente para ocupar os alunos em sala de aula, mas que elas devem ter uma finalidade, e devem ser discutidas em sala de aula, o que é diferente de apenas fazer a correção delas na lousa ou no caderno);

- que posso ensinar um mesmo conteúdo utilizando diferentes estratégias de ensino, considerando os diferentes públicos-alvo;

- que ensinar e aprender não se limitam aos momentos em sala de aula, tanto para o aluno, quanto para o professor. Enquanto professora, aprendo planejando, estudando, lecionando e escutando os alunos; assim como os estudantes podem aprender matemática em ambientes que não a sala de aula, por exemplo, ao fazer compras ou assistindo a um jogo de futebol.

O desenvolvimento desses novos conhecimentos me permitiu aprender a planejar o ensino de funções, transformando criticamente a forma como o fazia. A ideia de estudar e planejar as tarefas que proporei aos meus alunos ganhou novo significado e importância para mim, indo além da noção de organização do tempo e tópicos a ensinar, para envolver uma compreensão mais profunda do assunto a ensinar e como criar uma lógica para sua introdução. Creio que essa mudança de atitude é um forte indício de desenvolvimento profissional.

Outra faceta do meu desenvolvimento profissional está relacionada a uma compreensão mais profunda da importância da reflexão sobre a própria prática. Como Braga (2013, p. 42), considero que a investigação sobre a própria prática é “um processo fundamental de conhecimento sobre essa mesma prática e tem um grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que se envolvem com esse tipo de pesquisa”. Isso por que, dentre outras coisas, tal tipo de investigação pode contribuir para a identificação, compreensão e resolução de problemas emergentes dessa mesma prática, além de proporcionar o desenvolvimento profissional dos respectivos atores e, consequentemente, favorecer as organizações nas quais eles se inserem (PONTE, 2002).

A meu ver, pesquisar a própria prática, a fim de avaliá-la criticamente e de refletir acerca de problemas e dificuldades que dela emergem, poderia se tornar um hábito diário em nossa prática profissional docente, trazendo grandes benefícios para nós, enquanto profissionais, para nossa prática e, principalmente, para nossos alunos. Nessa direção, penso como Llinares (2019, p. 32)[29] que: “relacionar a prática de ensino de Matemática à resolução de problemas profissionais reforça a ideia de competência do professor”.

Entendo ainda, concordando com Ponte (2002, p. 3), que além do desenvolvimento profissional dos professores envolvidos, também as instituições educativas às quais eles pertencem podem se “beneficiar fortemente pelo facto dos seus membros se envolverem neste tipo de actividade, reformulando as suas formas de trabalho, a sua cultura institucional, o seu relacionamento com o exterior e até os seus próprios objetivos”.

Este estudo trouxe importantes contribuições para meu desenvolvimento profissional como professora de Matemática. Contudo, creio que ele vai um pouco além, ao lançar luz sobre o processo de aprendizagem profissional docente de professores de Matemática em início de carreira. A experiência aqui relatada e seus resultados podem, ainda, favorecer reflexões no âmbito dos cursos de Licenciatura em Matemática, destacando conhecimentos que demandam espaço e atenção no contexto atual. A meu ver, também é importante considerar que tanto o conjunto de tarefas para a introdução da noção de função, quanto a análise do processo de elaboração do mesmo aportam conhecimentos matemáticos para o ensino de funções, contribuindo para o desenvolvimento do campo, tanto acadêmica quanto socialmente.

A partir desta pesquisa, elaborei um Produto Educacional, no formato de um pequeno livro, voltado para formadores de professores, futuros professores e professores de Matemática, no qual apresento e comento o conjunto de tarefas elaborado para a introdução da noção de função na Educação Básica. Esse livro estará disponível na página do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) no link: www.ppgedmat.ufop.br.

[29] Original: relacionar la práctica de enseñar matemáticas con resolver problemas profesionales subraya la idea de la competencia del profesor.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática**. 3. ed. Renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Washington, v. 59, p. 389-407, 2008.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2010.

BRAGA, Nádia Helena. **Pesquisando a própria prática: narrativa de uma professora de matemática**. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, 2013, 181 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/matematica.pdf

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Regra Geral.

CLANDININ, D. Jean; CONNELLY, F. Michael. **Pesquisa narrativa: experiência e história em pesquisa qualitativa**. Uberlândia: EdUFU, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2010.

________. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ática, v. 4, 2012. (Projeto Teláris).

________. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2016.

DAVID, Maria Manuela; MOREIRA, Plínio Cavalcanti; TOMAZ, Vanessa Sena. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15 n.1 p.42-60, 2013. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11176/1/dissertacao_nanci_oli

DOMÊNICO, Luiz Carlos de; LAGO, Samuel Ramos; ENS, Waldemar. **Matemática moderna**. 8ª série. Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1986.

ESTIMA, Carlos Alberto Marques e Guirado, João César. **O Ensino das funções no Ensino Médio com materiais manipuláveis**. 2009. disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2171-8.pdf]

FERREIRA, Ana Cristina. **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo**. Tese de doutorado. São Paulo. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 368 p.

FERREIRA, Maria Cristina Costa. **Conhecimento Matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor**. Tese de doutorado. Belo Horizonte. Faculdade de Educação. Programa de pós-graduação em Educação: conhecimento e inclusão social, Universidade Federal de Minas Gerais, 2014, 184 p. Disponível em: http://hdl.handle.net/1843/BUOS-9PMKNE

FERREIRA, Miriam Criez Nobrega. **Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise do conhecimento matemático acerca do Pensamento Algébrico**. Dissertação de mestrado. Santo André. Programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e da Matemática. Universidade Federal do ABC, 2017, 148 p.

FLORES, Maria Assunção. **Algumas reflexões em torno da formação inicial de professores**. Educação, Porto Alegre, v. 33, n. 3, set./dez. 2010. p. 182-188.

GATTI, Bernardete Angelina. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação e Sociedade**, Campinas, vol. 31, n. 113, p. 1355-1379, out.-dez. 2010.

GODINO, J.D. Categorías de análisis de los conocimientos del professor de matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n. 20, p. 13-31, dez./2009.

GUIMARÃES, Luiz Fernando Gomes. **Ensinando para aprender – Aprendendo para viver**. Belo Horizonte: Literato, 2010. 200 p.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciências e aplicações**. São Paulo: Saraiva, v. 1, 9. ed. 2016.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, v. 4, 2010.

LEANDRO, Everaldo Gomes; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Estado do conhecimento sobre as pesquisas de professores sobre a própria prática (2001-2012): aspectos físicos, temáticos e motivacionais. **Revemop**, Ouro Preto, MG, v. 1, n. 1, p. 143-159, jan./abr. 2019.

LIMA, Claudia Neves do Monte Freitas de; NACARATO, Adair Mendes. Investigação da Própria Prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**. Belo Horizonte. v.25, n.02, p. 241-266, 2009.

LLINARES, Salvador. **Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes**. XV CIAEM-IACME, Medellín, Colombia, 2019.

MARQUES, Ana Paula. **O ENSINO DE FUNÇÕES NO 9º ANO: construindo significados para Função a partir de generalizações**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação. Belo Horizonte, 2019. 210 p.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n.6, p. 1017-1054, 2006.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar** – Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

OLIVEIRA, Thaís de. **Aprendizagem e constituição profissional de uma professora de matemática: um estudo de si**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin. Campinas, São Paulo, 2015.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997.

PAIVA, Manuel. **Matemática.** 3ª ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2015.

PONTE, João Pedro da. **Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática**. 1994.

______. Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), **Reflectir e investigar sobre a prática profissional** (pp. 5-28). Lisboa: APM, 2002.

______. **Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática.** Educar, Curitiba, n. 24, p. 37-66. Editora UFPR, 2004.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/7105.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um Perfil Conceitual de Equação: Desdobramentos para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, p. 55-71, 2013.

RODRIGUES, Carla Larissa Halum; BOLOGNEZI, Rosemeire Aparecida Leal. Sequência didática para introdução do conceito de função afim para o primeiro ano do Ensino Médio**. Ensino da Matemática em Debate** (ISSN: 2358-4122), São Paulo, v. 7, n. 3, p. 297-319, 2020.

ROSA, Marlusa Benedetti da. **A construção do conceito de função em atividades integradas entre a Matemática e a Física**. Dissertação (Mestrado em Ciências e atemática). Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2005, 291 p.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de Artigos Científicos. **BOLETIM GEPEM** (ISSN: 2176-2988), Nº 74 – jan. / jun. 2019, p. 127 – 143.

SANTANA, Gislaine. **O professor de matemática frente aos desafios dos anos iniciais da carreira**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016, 144 p.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Vol. 15, No. 2. Feb. 1986, p. 4-14. Disponível em: http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf

_________. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, 57, 1987, p. 1-22. Disponível em: https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar: matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, v. 1, 2013.

SOUZA, Rebeca Pereira de. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2016.

TALARICO, L. R. **Tessituras de um olhar sobre a própria prática pedagógica do professor de Matemática em sala de aula.** Florianópolis, 2020.

TEIXEIRA, Paula; PRECATADO, Adelina; ALBUQUERQUE, Carlos; ANTUNES, Conceição; NÁPOLES, Suzana. **FUNÇÕES**. MEC, 1997, 137 p. Disponível em: https://mat.absolutamente.net/joomla/images/recursos/documentos_curriculares/arquivo/brochura_sec_func10.pdf

VELOSO, Débora Solva. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática. 2012, 245 p.

ZUFFI, Edna Maura. **O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados**. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo 1999, 307 p.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores: ideias e práticas**. Lisboa: Educa-Professores. 1993.

_________. **Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno: possibilidades e contradições**. In: Barbosa, R. L. L. (Org.) Formação de educadores: desafios e perspectivas. São Paulo: UNESP, 35-55, 2003.

_________. **Uma análise crítica sobre a reflexão como conceito estruturante na formação docente**. In: Educ. Soc., Campinas, vol. 29, n. 103, p. 535-554, maio/ago. 2008.

APÊNDICE A - ATIVIDADES RECORTADAS DE LIVROS DIDÁTICOS

1 Indique o 1.º elemento e o 2.º elemento de cada par ordenado:

a) (3, 2)

1.º elemento: ......
2.º elemento: ......

b) (5, −1)

1.º elemento: ......
2.º elemento: ......

2 Forme conjuntos A × B de pares ordenados nos quais o 1.º número do par pertence a A e o 2.º número do par pertence a B, ou seja, efetue o produto cartesiano de A por B:

a) A = {4, 7, 6}
B = {0, 2}
A × B = {(4, 0), (4, 0) ......

b) A = {1, 6}
B = {8, 4, 0}
A × B = ...

c) A = {1, 2, 4}
B = {0, 5}
A × B = ...

d) A = {2, 3}
B = {1, 2, 8}
A × B = ...

e) A = {1, 3, 5}
B = {2, 4, 5}
A × B = ...

3 Dado o conjunto A = {2, 4}, forme o produto cartesiano A × A:

A × A = {(2, 2), (4, 4) ......

4 Sendo conhecido o conjunto B = {0, 1, 5}, forme o produto cartesiano B × B:

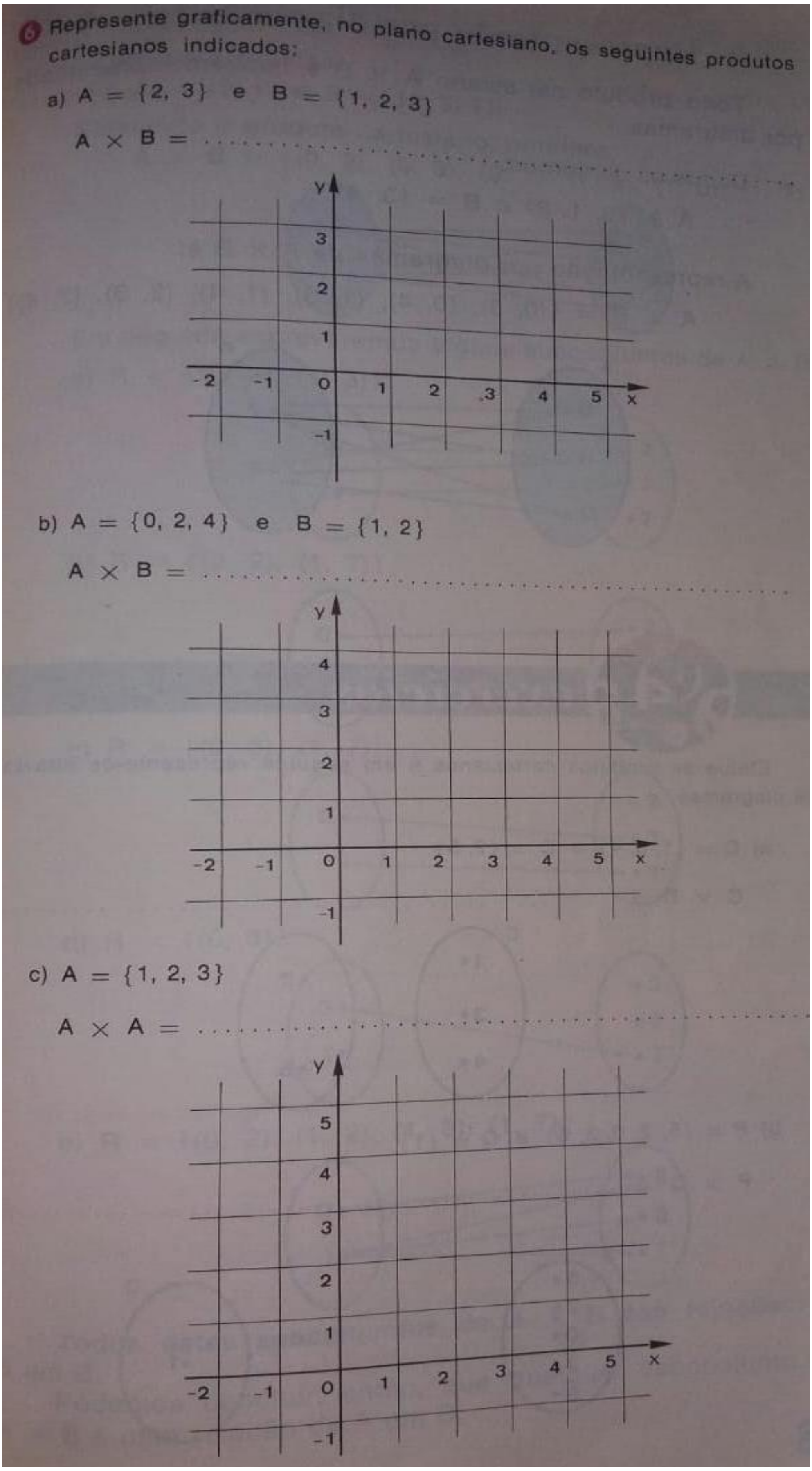
B × B = ...

5 Dados A = {1, 7} e B = {2, 3}, mostre que A × B ≠ B × A:

A × B = ...

B × A = ...

Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 76



6 Represente graficamente, no plano cartesiano, os seguintes produtos cartesianos indicados:

a) A = {2, 3} e B = {1, 2, 3}

A × B = ...

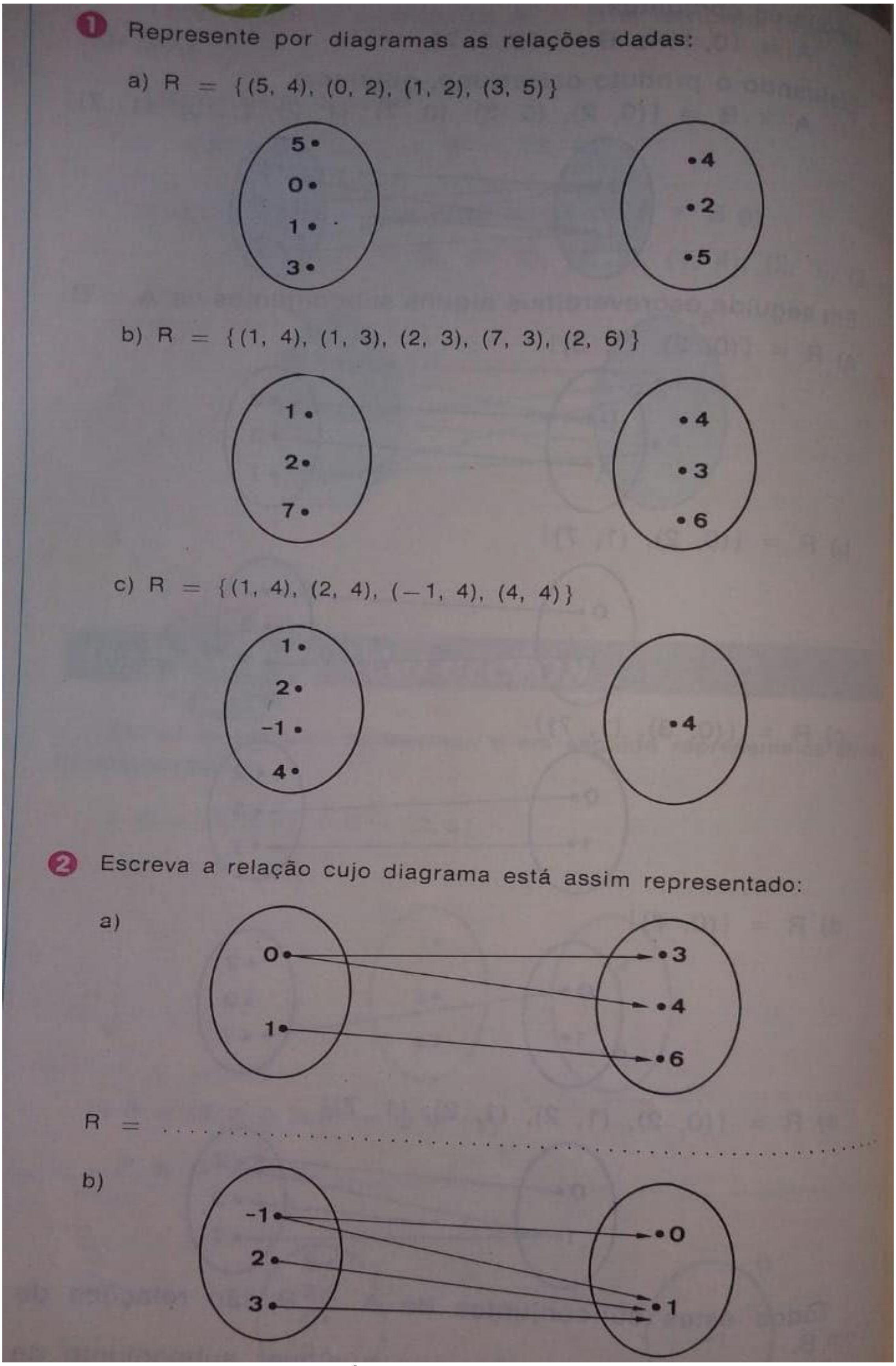
b) A = {0, 2, 4} e B = {1, 2}

A × B = ...

c) A = {1, 2, 3}

A × A = ...

Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 77



1 Represente por diagramas as relações dadas:

a) R = {(5, 4), (0, 2), (1, 2), (3, 5)}

b) R = {(1, 4), (1, 3), (2, 3), (7, 3), (2, 6)}

c) R = {(1, 4), (2, 4), (−1, 4), (4, 4)}

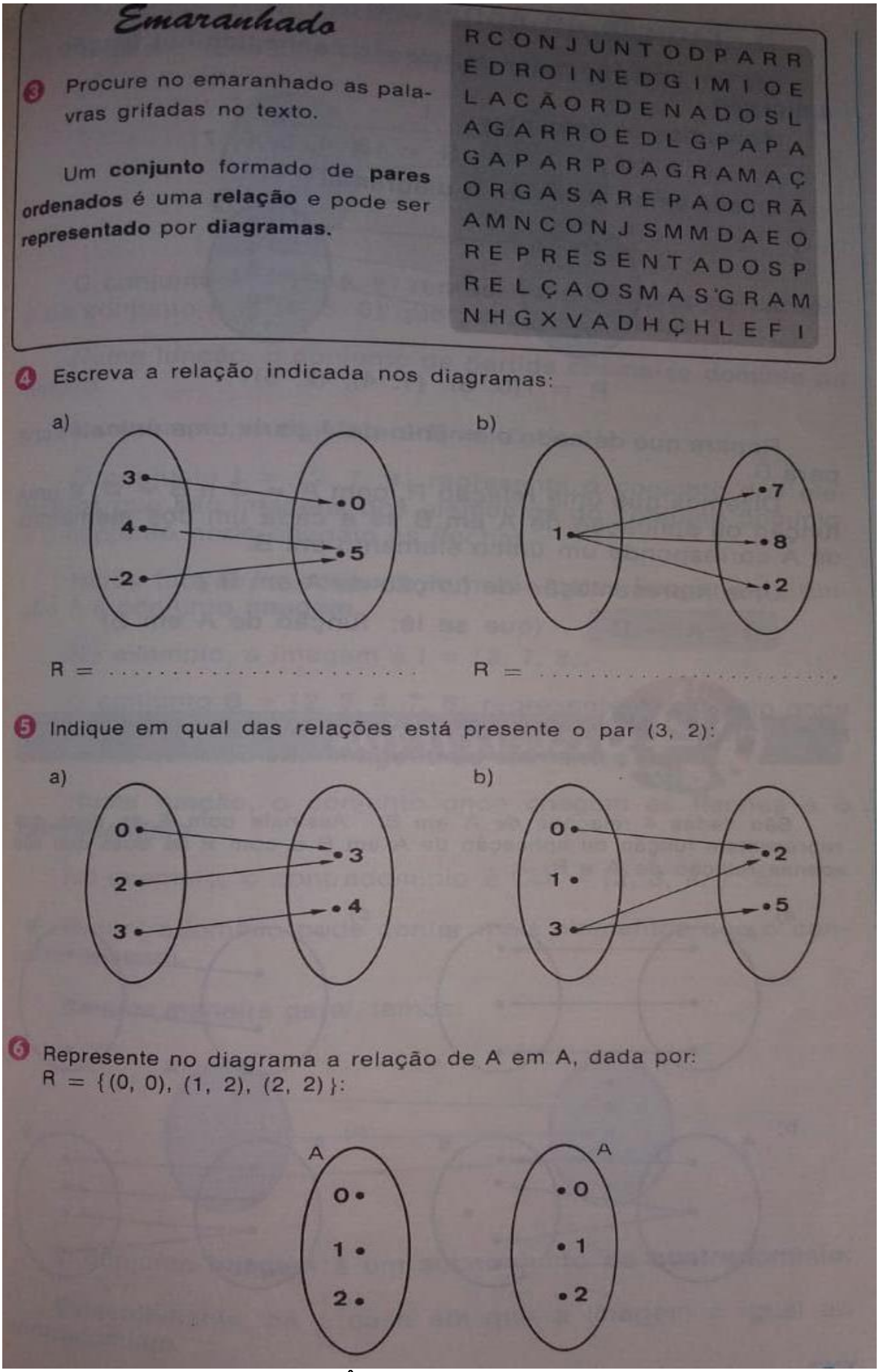
2 Escreva a relação cujo diagrama está assim representado:

a)

R = ...

b)

Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 80



Emaranhado

3. Procure no emaranhado as palavras grifadas no texto.

Um **conjunto** formado de **pares ordenados** é uma **relação** e pode ser **representado** por **diagramas.**

R C O N J U N T O D P A R R
E D R O I N E D G I M I O E
L A C Ã O R D E N A D O S L
A G A R R O E D L G P A P A
G A P A R P O A G R A M A Ç
O R G A S A R E P A O C R Ã
A M N C O N J S M M D A E O
R E P R E S E N T A D O S P
R E L Ç A O S M A S G R A M
N H G X V A D H Ç H L E F I

4. Escreva a relação indicada nos diagramas:

a)

R = ...

b)

R = ...

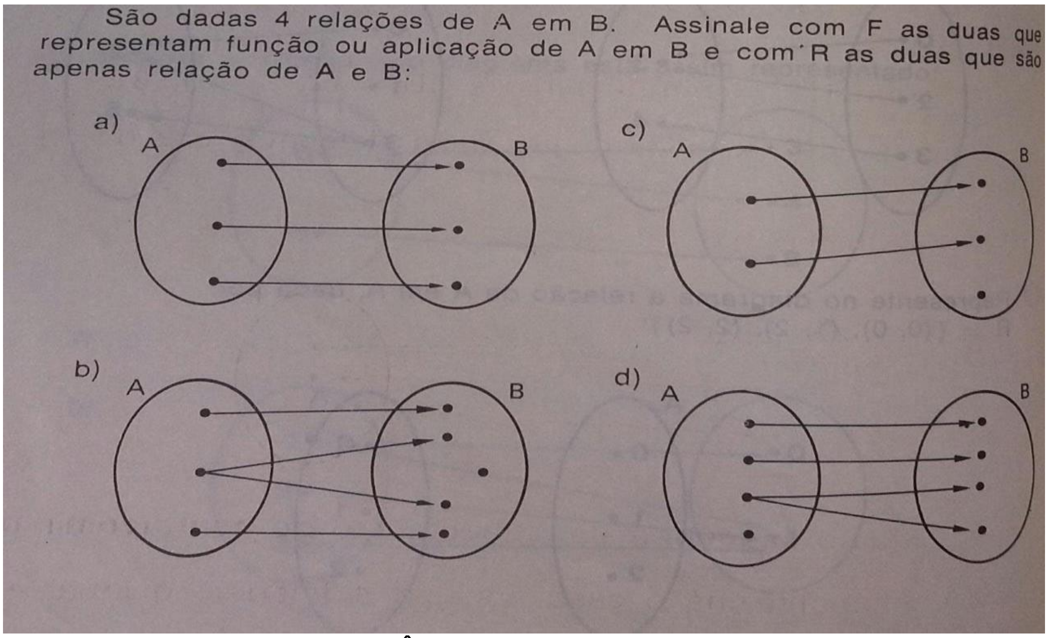
5. Indique em qual das relações está presente o par (3, 2):

a)

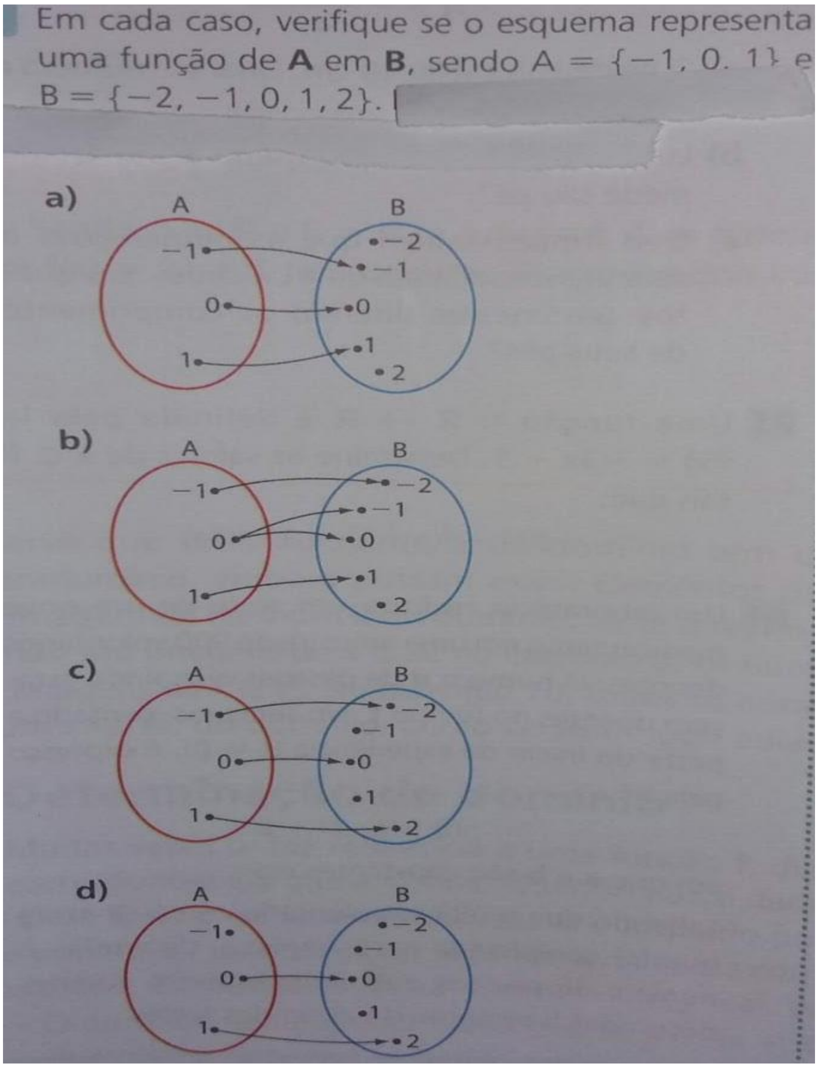
b)

6. Represente no diagrama a relação de A em A, dada por:
R = {(0, 0), (1, 2), (2, 2)}:

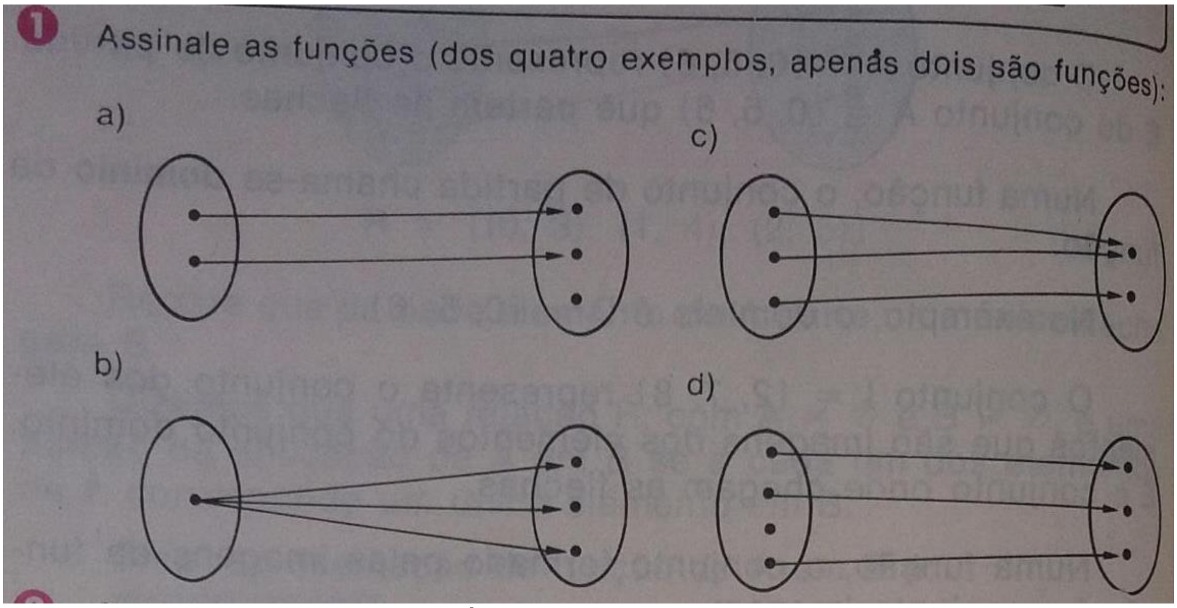
Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 81


São dadas 4 relações de A em B. Assinale com F as duas que representam função ou aplicação de A em B e com R as duas que são apenas relação de A e B:

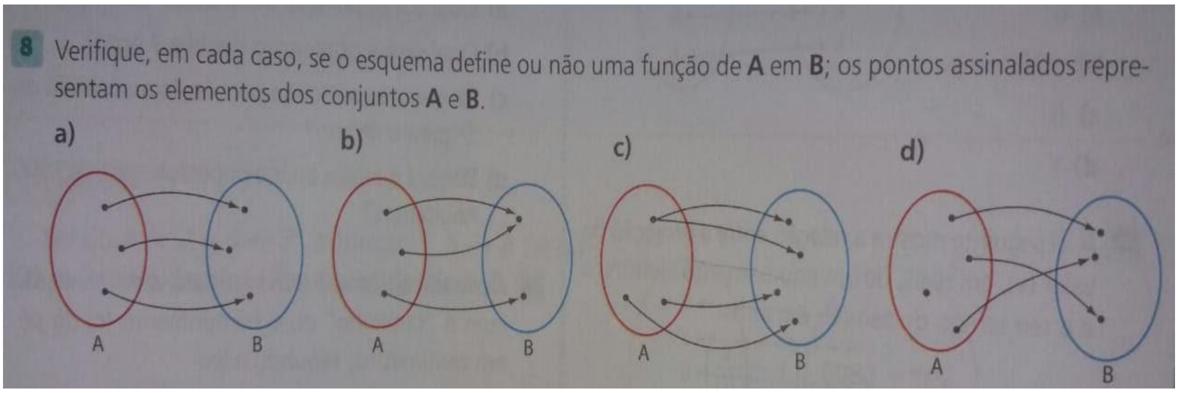
Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 82


Em cada caso, verifique se o esquema representa uma função de **A** em **B**, sendo A = {−1, 0. 1} e B = {−2, −1, 0, 1, 2}.

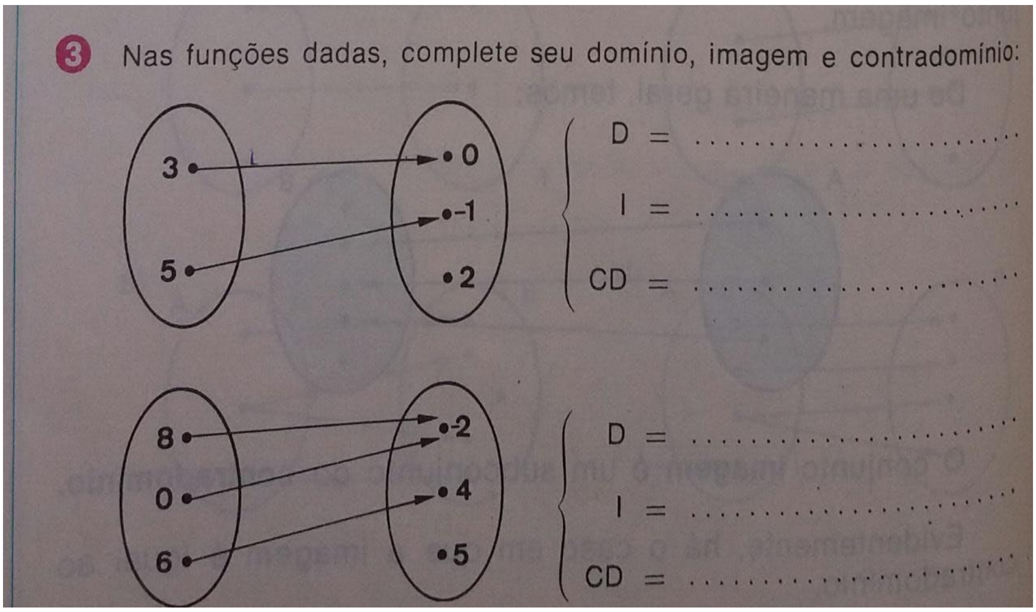
Fonte: IEZZI et al.; 2016; p. 45



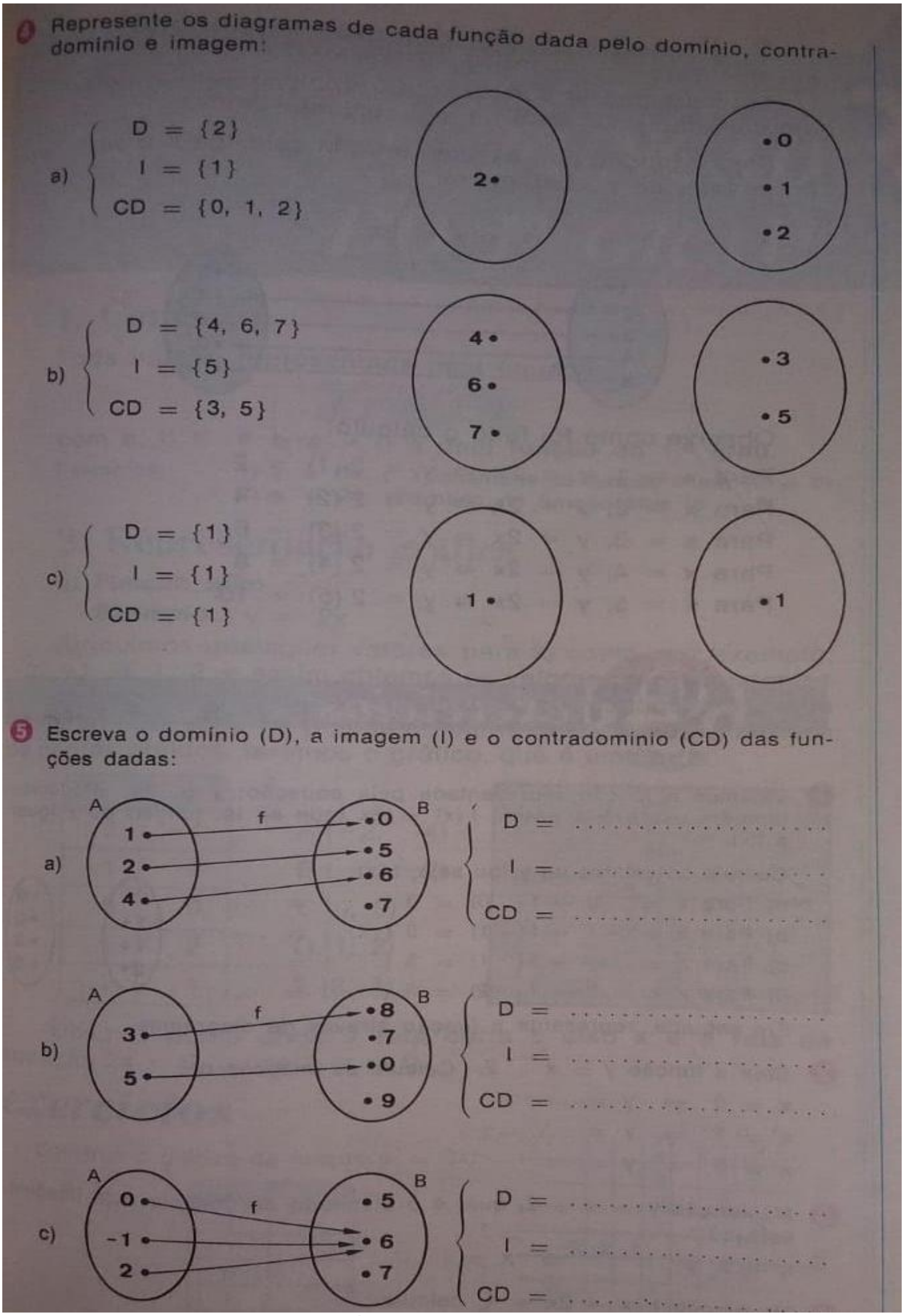
Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 84



Fonte: IEZZI et al.; 2016; p. 45



Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 84



4 Represente os diagramas de cada função dada pelo domínio, contra-domínio e imagem:

a) $\begin{cases} D = \{2\} \\ I = \{1\} \\ CD = \{0, 1, 2\} \end{cases}$

b) $\begin{cases} D = \{4, 6, 7\} \\ I = \{5\} \\ CD = \{3, 5\} \end{cases}$

c) $\begin{cases} D = \{1\} \\ I = \{1\} \\ CD = \{1\} \end{cases}$

5 Escreva o domínio (D), a imagem (I) e o contradomínio (CD) das funções dadas:

a) D = ...
I = ...
CD = ...

b) D = ...
I = ...
CD = ...

c) D = ...
I = ...
CD = ...

Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; 1986; p. 85

APÊNDICE B - PRIMEIRO PLANEJAMENTO CONSTRUÍDO

Seriam 4 aulas por semana para a turma, porém considerei três devido às consequências do coronavírus, o calendário escolar vai ficar apertado e geralmente a secretaria de educação manda provas globais, prova de avaliação diagnóstica e devido às matrículas online neste ano, as turmas ainda não fecharam e as avaliações ainda não foram feitas. Dessa forma, serão consideradas para a pesquisa 3 aulas por semana, 12 aulas por mês, 36 aulas por 3 meses (1 bimestre). Acho ideal para o projeto para dar tempo de analisar os dados, 72 aulas seriam por seis meses (2 bimestres), seria a situação ideal, mas acho que não deve dar devido ao tempo. Na pior das hipóteses, 30 aulas seja o real a ser utilizadas com aulas e atividades aqui preparadas pois as duas últimas semanas do bimestre são destinadas ao trabalho de recuperação bimestral com os alunos, então algumas aulas utilizamos para falar notas dos alunos, informar os que estão de recuperação e passar trabalho e avaliação para recuperação bimestral.

Pensei 3 aulas para cada assunto, sendo uma aula para explicação, uma para os alunos fazerem atividades/experimentos e outra aula para correção das atividades ou conversa sobre os experimentos, não necessariamente nessa ordem.

Para não perder tempo copiando as atividades, pensei em entregá-las impressas para os alunos ou que seja feita apenas as respostas das atividades do livro didático que eles têm.

Os alunos já fizeram algumas atividades que envolviam inserir e localizar pontos no plano cartesiano e de forma simplificada, relembramos os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

Plano de Aula - Funções

<u>Objetivos</u>:

Construção da noção de função;

Reconhecer as variáveis dependentes e independentes;

Reconhecer as diferentes formas de representar uma função;

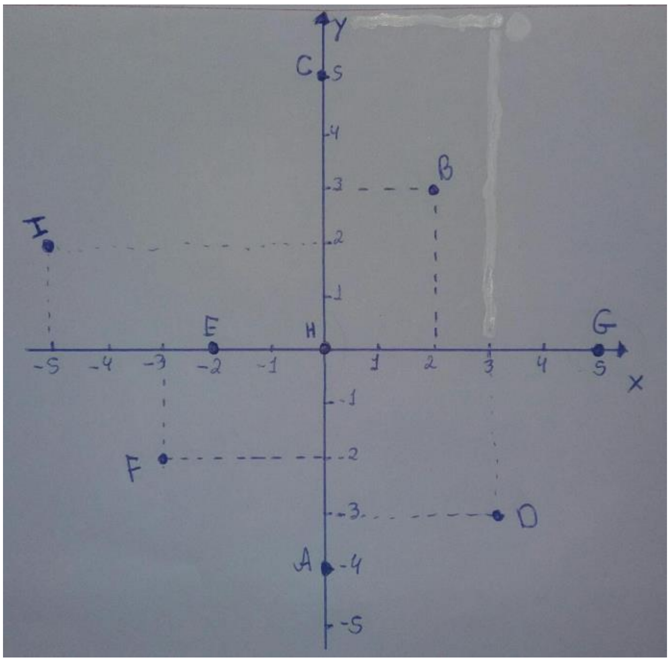
Construir as noções de domínio, contradomínio, imagem;

Construir gráficos a partir da lei da função.

Aulas 1, 2 e 3 (Para essas três primeiras aulas após a pandemia do coronavírus, pensei em explicar sobre a multiplicação de conjuntos, que tem como resultado vários pares ordenados e farão a representação desses pares no plano cartesiano).

Aula 1

Aula dialogada com os alunos e utilização do quadro. Pessoal, anteriormente vimos como representar e inserir pontos no plano cartesiano vocês se lembram? Vou representar geometricamente alguns pontos aqui no quadro e vocês me ajudam a escrever em linguagem matemática esses pontos. Ficarão assim representados no quadro:



Fonte: diário da professora pesquisadora

Após representar esses pontos no quadro, vou pedir aos alunos para me auxiliarem na representação matemática desses pontos, no caso: A (0, -4), B (2, 3), C (0, 5), D (3, -3), E (-2, 0), F (-3, -2), G (5, 0), H (0, 0), I (-5, 2). Escolhi esses pontos pois dessa forma, tenho pontos em todos os quadrantes, na origem e nos dois eixos, sendo que em cada eixo, tenho pontos em cima e embaixo, à direita e à esquerda da origem.

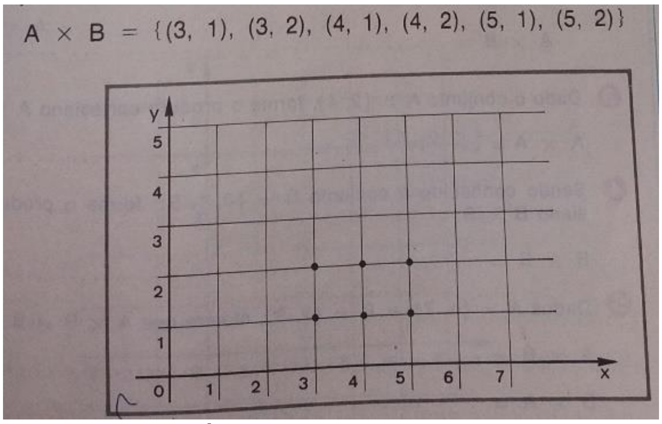
Agora, vocês me falem alguns pontos para desenharmos eles aqui no quadro. Penso em pedir uns 4 exemplos vindos dos alunos, de preferência com frações e números que não sejam do conjunto dos números naturais. Para cada exemplo, escrevo-o no quadro dando sequência nos pontos como J (x, y) e represento os pontos geometricamente no plano cartesiano.

Feito isso, se considerarmos todos os valores de x que representamos no quadro como o conjunto x e chamarmos de y o conjunto de todos os valores de y dos pontos, temos: X = {-5, -3, -2, 0, 2, 3, 5} e Y = {-4, -3, -2, 0, 2, 3, 5}. Pretendo instigar os alunos a falarem os valores dos elementos dos dois conjuntos. Observação: falta aqui nos dois conjuntos os elementos dos pontos que os alunos irão dar como exemplo.

Partindo dos pontos, conseguimos formar esses dois conjuntos. Agora vamos fazer algumas atividades que a partir do conjunto, chegamos nos pontos. Antes das atividades, vou dar uns exemplos de multiplicação de conjuntos. Se temos os conjuntos A = {3, 4, 5} e B = {1, 2} conseguimos obter alguns pontos ao multiplicar esses dois conjuntos. Podemos representar essa multiplicação da seguinte forma, se for A X B então todos os elementos de A serão os primeiros elementos do ponto que vamos obter e todos os elementos de B serão os segundos elementos do ponto, ou seja, todos os elementos de A serão "x" do ponto e todos os elementos de B serão o "y" do ponto. Vejam:

A X B = {(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)}

Se desenharmos geometricamente o resultado dessa multiplicação do conjunto A pelo conjunto B temos (Vou desenhar dessa forma no quadro ao mesmo tempo que converso com os alunos):



(DOMÊNICO, LAGO, ENS; p. 75)

Agora é a vez de vocês multiplicarem alguns conjuntos e encontrarem o resultado dessa multiplicação. Nesse momento vou entregar uma atividade impressa aos alunos.

Aula 2

Nessa aula, vou dar um tempo para que os alunos façam a atividade de 1 à 6 em sala para eu ver como estão fazendo e poder auxiliá-los nesse momento.

Aula 3

Nessa aula, farei a correção das atividades (1-6).

Fim da primeira semana ____

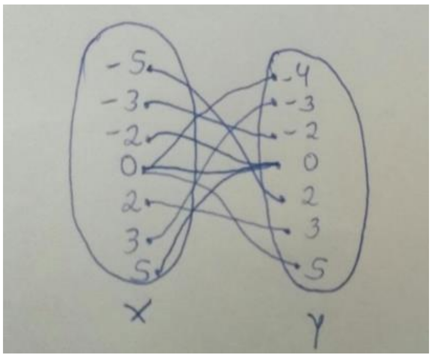
Aulas 4, 5 e 6 (Nessas aulas os alunos devem representar os resultados da multiplicação de conjuntos por meio de diagramas).

Aula 4

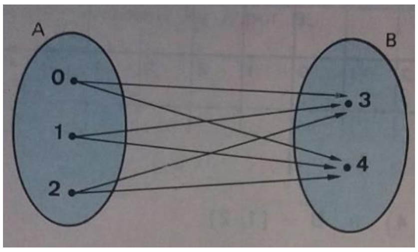
Lembram que nas últimas aulas fizemos a multiplicação de conjuntos que geram vários pontos. Vamos voltar no exemplo da primeira aula que eu coloquei vários pontos como exemplo e vamos escrever dois conjuntos sendo um X com os elementos x dos pontos e o outro conjunto vamos chamar de Y e nele vamos ter os elementos y dos pontos de A-I. Ficará da seguinte forma:

X= {-5, -3, -2, 0, 2, 3, 5}   Y= {-4, -3, -2, 0, 2, 3, 5}

Tem-se outra forma de representarmos um conjunto (Vou desenhar no quadro), ao mesmo tempo que eu desenhar a primeira bolinha, vou falar que chamamos esse conjunto de X, e coloco o X do lado de fora do conjunto, o mesmo faço com o conjunto y e depois coloco os elementos de cada conjunto dentro deles. Agora sabemos que esses dois conjuntos são pares ordenados, ou seja, representam pontos, então vamos relacionar esses pontos e para isso, vamos colocar umas bolinhas na frente dos números. O elemento -5, do conjunto x tem qual correspondente no conjunto Y? Muito bem, o elemento 2. E assim vou fazer com todos os elementos. Dessa forma, no início da aula eu representei alguns pontos geometricamente (mostrar no quadro), depois representamos esses pontos matematicamente (mostrar no quadro) e agora representamos os mesmos pontos por meio de conjuntos, representação na imagem:

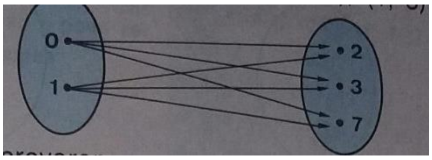


Então são várias as formas de representarmos um objeto matemático, como vimos com relação aos pontos. Vejam agora outro exemplo: Temos os conjuntos A = {0, 1, 2} e B = {3, 4}. Se multiplicarmos A por B temos: A X B = {(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}. Se formos representar por meio de diagramas esse produto teremos:



Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; p. 78.

Se por exemplo eu tiver essa relação:



Fonte: DOMÊNICO, LAGO, ENS; p. 79.

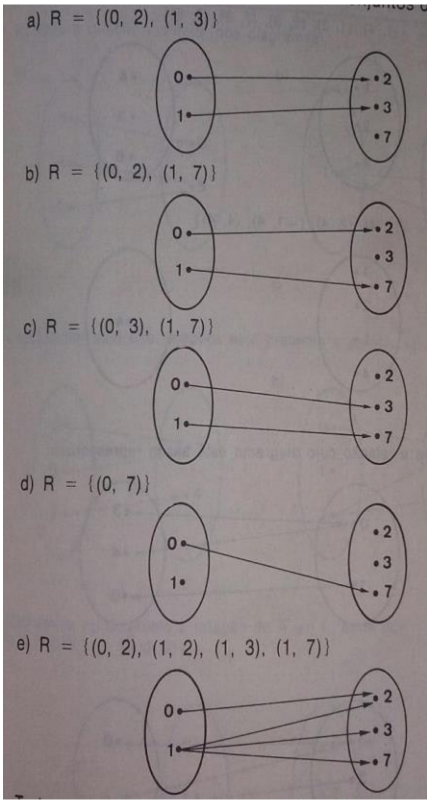
Quais os elementos do conjunto A? A = {0, 1}

Quais os elementos do conjunto B? B = {2, 3, 7}

Ao multiplicar A por B obtemos o diagrama acima, vamos escrever os pontos que temos nesse exemplo:

A X B = {(0, 2), (0, 3), (0, 7), (1, 2), (1, 3), (1, 7)}

Partindo desses dois conjuntos A e B, podemos estabelecer outras relações e obter outros subconjuntos de A X B:



(DOMÊNICO, LAGO, ENS; p. 79)

Agora vamos exercitar. Nesse momento vou entregar a atividade impressa aos alunos.

Aula 5 (Nessa aula, vou dar um tempo para que os alunos façam a atividade da aula anterior em sala para eu ver como estão fazendo e poder auxiliá-los nesse momento.

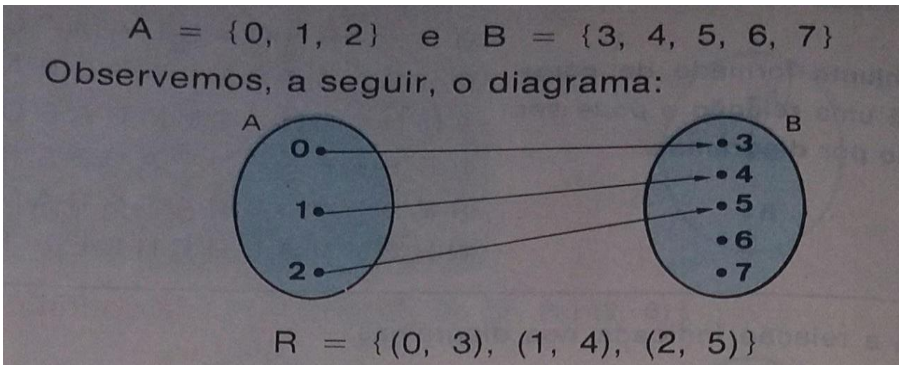
Aula 6 (Nessa aula, farei a correção das atividades.

Fim da segunda semana ____

Aulas 7, 8 e 9 (Apresentar que temos uma relação entre conjuntos específica que em matemática chamamos de função, que é quando todos os termos da primeira “bolinha” têm uma única flecha “tem que sair uma e somente uma flecha de cada elemento do primeiro conjunto”. Além disso, vou abordar as noções de domínio, imagem e contradomínio).

Aula 7

Vimos que existem muitas relações que podem ser estabelecidas entre dois conjuntos. Tem uma relação específica que chamamos em matemática de função, que é quando todos os elementos do primeiro conjunto têm um e somente um correspondente no segundo conjunto, ou seja, não pode sair de um mesmo elemento, duas ou mais setas, assim como não pode ter nem um elemento no primeiro conjunto que não tenha seu correspondente no segundo conjunto, mas podem sobrar elementos no segundo conjunto que não são correspondentes de nenhum elemento do primeiro conjunto. Exemplos de relações que são função:



(DOMÊNICO, LAGO, ENS; p. 82)

Dizemos que essa relação é uma função de A em B. Nesse momento seriam propostas quatro atividades. Vou acompanhar os alunos fazendo essa atividade em sala durante a aula para eu ver como estão fazendo e poder auxiliá-los nesse momento.

Aula 8 LEMBRAR OS ALUNOS PARA A POSSIBILIDADE DE CONSEGUIREM VELAS DIFERENTES PARA A PRÓXIMA AULA (Nessa aula, farei a correção das 4 atividades da aula anterior e após a correção, sem apagar o quadro, vou explicar as noções de domínio, contradomínio e imagem).

Achei relevante essa ordem, pois assim explico que o primeiro conjunto é chamado na linguagem matemática de domínio, o segundo de contradomínio e que os elementos que espelham os elementos do domínio são denominados imagem, vamos lembrar de um

espelho, ele reflete a nossa imagem, então todos os elementos que são correspondentes dos elementos do domínio, em matemática é denominado de conjunto imagem. Vamos observar que a imagem é um conjunto que está dentro do contradomínio, então pode acontecer de a imagem ser igual ao contradomínio, vamos procurar nessas três atividades, qual função em que o contradomínio é igual a imagem (muito bem, letras “a” e “b” do exercício 1 e a letra “c” do exercício 3). O conjunto domínio pode ser representado pela letra D, contradomínio por CD e imagem por Im. Em alguns casos o contradomínio é um conjunto com mais elementos que o conjunto imagem. Na última questão podemos observar essa situação em quais letras? (Muito bem, letras “a” e “c”). Vamos então escrever esses conjuntos:
Na letra a:
D = {-1, 0, 1}
CD = {-2, -1, 0, 1, 2}
Im = {-1, 0, 1}

Na letra c:
D = {-1, 0, 1}
CD = {-2, -1, 0, 1, 2}
Im = {-2, 0, 2}

Importante lembrar que essa denominação de domínio, contradomínio e imagem só são atribuídos para as relações que são função, se a relação não for uma função, então chamamos de conjunto A e B apenas, ou conjunto X e Y, ou conjunto J e T, seja qualquer letra, mas não sendo função, não teremos domínio, contradomínio e imagem.

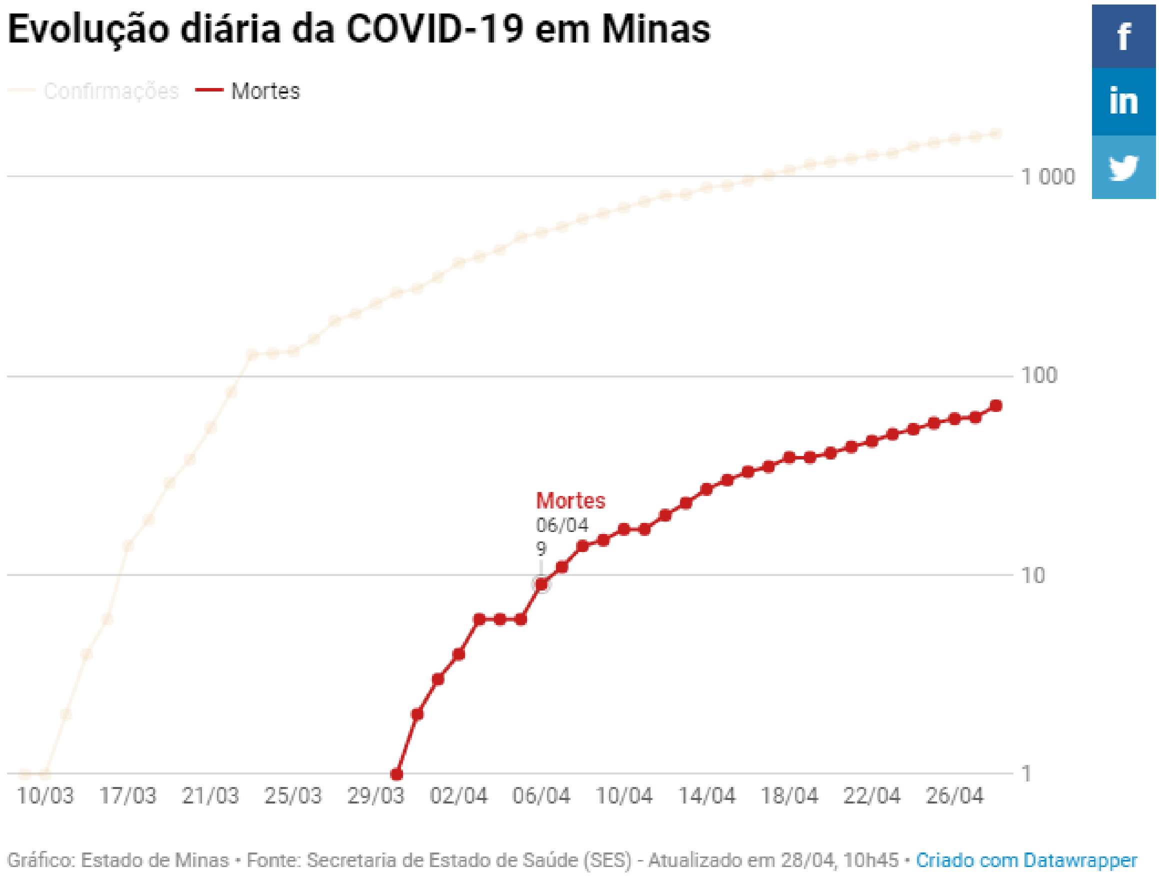
Aula 9 VOU RECOLHER AS VELAS NESSA AULA COM O NOME DELES NA VELA OU EM UM SAQUINHO E LEMBRÁ-LOS QUE FAREMOS O EXPERIMENTO NA PRÓXIMA AULA, ENTÃO QUEM NÃO TROUXE A VELA, LEMBRAR DE TRAZER NA PROXIMA AULA. Nessa aula vou entregar as três atividades que seguem aos alunos para eles fazerem em sala e eu poder acompanhar e fazer a correção no mesmo dia.

Aula 10 (Nessa aula vamos fazer o experimento da vela) A ideia principal é os alunos chegarem no termo geral.
Nessa aula vamos fazer uma atividade prática. Vamos formar duplas, caso tenha um número ímpar de alunos, podemos ter um trio, cada dupla terá uma vela com tamanhos diferentes (imagino). Vou levar algumas velas, caso alguma dupla tenha esquecido de levar. Optei pela dupla para que uma pessoa fique responsável por medir a vela e a outra irá cronometrar o tempo.
Penso que com os experimentos os alunos vão concretizar o entendimento anterior.
Experimento ou situação a fim de chegar na lei da função como outra forma de representar uma função (Explorar várias funções lineares, quadráticas e outras).
Variável dependente e independente.
Experimento para os alunos chegarem na lei da função e construírem o gráfico da função, discutir em sala que o gráfico é uma outra forma de representar uma função, talvez começar o gráfico pela linear.
No exemplo tal, que trabalhamos, vocês chegaram na função f(x)= 2x + 1 (por exemplo). Como era mesmo o gráfico dessa função?? Essa função em matemática, chamamos de função linear.

APÊNDICE C - REFLEXÕES SOBRE POSSÍVEIS TAREFAS ENVOLVENDO O CONTEXTO DE PANDEMIA E O TRABALHO COMO MOTORISTA DA UBER

Assunto da pandemia

Oi pessoal, tudo bem? Como foi esse período da pandemia pra vocês? Alguém sabe a situação da pandemia em Minas hoje? Vamos pesquisar na internet? Quem não tem celular, senta com o colega e vamos utilizar o wi fi da escola.



Fonte: <https://www.em.com.br/app/noticia/gerais/2020/04/03/interna_gerais,1135376/coronavirus-graficos-mapas-atualizados-a-situacao-agora.shtml>. Acesso 28/04/2020.

O gráfico representa uma função, mas não é uma variação constante. Dar mais exemplos (na brochura cita o crescimento de uma planta).

o pico ainda n aconteceu, mas está quase, está inclinando, sincronia entre as duas, chegando no pico para cair.
Dúvida minha: como chegar em uma função com base nesses dados?

O QUE CADA LINHA REPRESENTA?
SOBRE AS DADAS, ESCOLHE UMA E ME FALA OS INFECTADOS E OS MORTOS
AGORA EU ESCOLHO UMA DADA
O QUE VOCÊ OBSERVA COM RELAÇÃO ÀS DADAS E O NUMERO DE CASOS INFCTADOS E MORTOS?

Uma opção: Levar notebook e data show para a sala para todos visualizarem o mesmo gráfico ao mesmo tempo e depois:
Com base nesse gráfico que estão vendo, escrevam em uma folha de papel todas as informações que vocês estão observando no gráfico, vou dar uns 5 minutos pra vocês pensarem e vamos discutir sobre o gráfico.
Nesse tempo, os alunos vão observar o gráfico e registrar o que eles estão observando.
Depois vamos discutir juntos.
Qual foi o pico do número de casos confirmados?
A pandemia está aumentando ou diminuindo?

Dessa forma, após apresentar uma situação geral de como está o estado, optei por apresentar um problema "real" para a turma e auxiliar eles na resolução desse problema:

Assunto do Uber

Depois da pandemia causada pelo coronavírus, Bruna assim como muitos outros brasileiros, passaram e estão passando por dificuldades financeiras.
a) Será que vale a pena ela começar a trabalhar como motorista de aplicativo (Uber)?
b) O que é necessário para exercer essa profissão?
b) Como podemos calcular quanto ela vai receber e os gastos que ela vai ter após um mês de trabalho?
c) Ela ganha mais dinheiro com a quantidade de corridas ou pela distância percorrida?
d) Se houver engarrafamentos, será que o tempo da corrida vai aumentar? Modificando o tempo da corrida, isso interfere no valor que Bruna vai receber/gastar com essa corrida?
e) Construa uma tabela para representar essas informações e depois as represente em um gráfico.
ou
Depois da pandemia causada pelo coronavírus, muitas pessoas passaram e estão passando por dificuldades financeiras. Imagine que você é uma dessas pessoas e que você mora com seu/sua companheiro(a) e vocês tem 2 filhos pequenos, mas a única renda que entra em casa é a sua para manter as contas em dia e se alimentarem. Antes da pandemia, você já era habilitado para dirigir e comprou um carro. Você teve a ideia de trabalhar como motorista de aplicativo (Uber), mas não pode ter prejuízos, afinal o dinheiro está contado e você não tem mais renda pois foi demitido da empresa que você trabalhava. Será que vale a pena trabalhar dessa forma?

a) Como podemos calcular quanto ela vai receber e os gastos que ela vai ter após um mês de trabalho?
b) Ela ganha mais dinheiro com a quantidade de corridas ou pela distância percorrida?
c) Se houver engarrafamentos, será que o tempo da corrida vai aumentar? Modificando o tempo da corrida, isso interfere no valor que Bruna vai receber/gastar com essa corrida?
d) Construa uma tabela para representar essas informações e depois as represente em um gráfico.
e) A partir desses dados organizados na tabela e no gráfico, podemos verificar que Bruna teve o lucro ou prejuízo ao trabalhar de Uber? Explique.
f) Será que vale a pena ela começar a trabalhar como motorista de aplicativo (Uber)?

APÊNDICE D - PROBLEMAS ENVOLVENDO DEPENDÊNCIA ENTRE GRANDEZAS

Problema 1

Imagine-se nas seguintes situações e responda:
a) Você foi à lanchonete comprar salgado. Sabendo que ele custa R$ 3,50, quantos reais você gastou? Justifique.

b) Você foi ao shopping e gostou de umas blusas que estavam em promoção custando R$ 15,00 cada. Quantos reais você gastou na compra da(s) blusa(s)? Justifique.

c) Sabendo que a passagem de ônibus custa R$ 1,60, quantos reais você gasta, por mês, com a passagem? Justifique.

d) No campeonato de futebol da sua escola, cada gol feito vale 3 pontos. Qual foi o saldo de pontos feito pelo seu time ao final do campeonato?

e) Você fez uma prova com 20 questões de múltipla escolha valendo 0,5 pontos cada. Quantos pontos você obteve na prova?

Problema 2

Mário e Fernanda se casaram e pensando na economia resolveram ficar com o carro do Mário, um Ford Fiesta e vender o carro da Fernanda, um Fiat Palio. Como a família ainda é pequena eles concluíram que não precisam ficar com os dois carros.
a) O casal viajou sozinho para visitar um casal de amigos. Quantos lugares foram ocupados no carro do Mário, e quantos sobraram? Faça um desenho que mostre essa situação.
b) Já na casa dos amigos, os dois casais resolveram sair para fazer um lanche. Sabendo que todos saíram no carro do Mário, quantos lugares foram ocupados e quantos sobraram? Faça um desenho que mostre essa situação.
c) Anos depois, Mário e Fernanda tiveram dois filhos, Joaquim e Diogo. Na noite da formatura do Diogo, o mais velho, eles foram para a cerimônia com os pais, todos no mesmo carro, e no caminho passaram na casa da Maria, namorada dele. Quantos lugares foram ocupados e quantos sobraram? Faça um desenho que mostre essa situação.
d) Caso o Joaquim também tivesse namorada, ela também poderia ir de carro com eles? Justifique. Faça um desenho que mostre essa situação.
e) A quantidade de pessoas que podem ocupar o carro, é fixa ou variável?
f) A quantidade de lugares disponíveis e ocupados depende de alguma coisa?

Problema 3

Andressa foi à cantina da escola e comprou 10 chicletes para distribuir entre ela e suas 7 amigas.
a) Como pode ser feita essa distribuição se ela der pelo menos 1 chiclete a cada amiga? (Não há necessidade de indicar todas as distribuições possíveis.)
b) Dois amigos de Andressa viram que ela tinha chicletes e pediram a ela. Andressa teria chiclete para dar a estes dois amigos, além de dar às suas 7 amigas e de ficar com chiclete também? Justifique.
c) Se ao invés de dois amigos, três amigos de Andressa pedissem chiclete a ela, seria possível distribuir os chicletes com cada um deles, com suas 7 amigas e ainda sobrar pra ela?
d) Qual a quantidade máxima de pessoas que podem pedir chiclete para Andressa de forma que ela possa dar e ainda ficar com pelo menos 1 pra ela?

e) A quantidade de pessoas interessadas no chiclete é fixa ou variável? E a quantidade de chicletes pra cada pessoa?
f) Para Andressa conseguir distribuir os 10 chicletes que ela tem, ela depende de alguma coisa? Justifique.

Problema 4

O filho de Seu João passou mal e precisou ser levado ao hospital. Como Seu João não tem carro e a situação aparentava ser bem grave ele resolveu chamar um táxi. O táxi cobra pela corrida um preço fixo, chamado bandeirada, no valor de R$ 5,07 mais R$ 1,26 por quilômetro rodado.
a) Quanto Seu João pagará pela corrida se o hospital estiver à 2km de distância de sua casa?
b) Como você calculou quanto Seu João pagou pela corrida de 2km?
c) Se a corrida tivesse custado R$ 8,85, qual seria a distância entre a casa de Seu João e o hospital?
d) O valor que Seu João pagou pela corrida dependeu de alguma coisa? Justifique.
e) É possível calcular o valor da corrida para alguma outra distância diferente de 2km? Justifique.
f) É possível calcular o valor da corrida para qualquer que seja a distância percorrida? Justifique.

Problema 5

Rogério trabalha em uma empresa que entrega mercadorias que as pessoas compram pela internet e ganha R$ 1,50 por entrega feita. Ele precisa pagar uma conta no valor de R$ 85,00, que vence hoje, e ele só tem R$ 55,00 na carteira.
a) Quantas entregas Rogério precisa fazer para conseguir o dinheiro exato para pagar a conta hoje?
b) Quantos reais Rogério ganha no dia que ele consegue fazer 62 entregas?
c) O salário que Rogério ganha é uma quantia fixa? Justifique.
d) É possível calcular o salário de Rogério para qualquer que seja a quantidade de entregas feita no dia? Justifique?

Problema 6

Katharine passou por problemas familiares e de saúde o que resultou em ganho de peso. Ela está pesando, atualmente, 106kg e deseja voltar ao seu peso normal de 56kg. Para isso ela procurou o acompanhamento de um nutricionista que passou pra ela uma dieta alimentar que resulta em um emagrecimento de 200g por semana.
a) Quantos quilos Katharine perdeu nas 5 primeiras semanas de tratamento?
b) Em quantas semanas Katharine estará pesando 100 kg?
c) Quantos quilos Katharine precisará perder, no total, para atingir seu peso ideal? Quanto tempo levará?
d) Que relação existe entre o pesa que ela perde (em kg) e o tempo de tratamento (em semanas)?

Problema 7

A mãe de uma menina decidiu acompanhar o peso de sua filha durante dois anos e registrou essas informações na tabela:

Idade (meses)	Peso médio
0 meses	3,2 kg
1 mês	4,2 kg
2 meses	5,1 kg
3 meses	5,8 kg
4 meses	6,4 kg
5 meses	6,9 kg
6 meses	7,3 kg
7 meses	7,6 kg
8 meses	7,9 kg
9 meses	8,2 kg
10 meses	8,5 kg
11 meses	8,7 kg
12 meses	8,9 kg
13 meses	9,2 kg
14 meses	9,4 kg
15 meses	9,6 kg
16 meses	9,8 kg
17 meses	10,0 kg
18 meses	10,2 kg
19 meses	10,4 kg
20 meses	10,6 kg
21 meses	10,9 kg
22 meses	11,1 kg
23 meses	11,3 kg
24 meses	11,5 kg

a) O que você observa com relação ao mês de vida da menina e seu peso?
b) O peso dela varia de forma constante? Explique.

Agora o objetivo é voltar nas questões anteriores e falar se são ou não funções, se for, qual o domínio, contradomínio e imagem...

APÊNDICE E - CONJUNTO DE TAREFAS PRELIMINAR

Aprendizagens visadas	Tarefas
1. Compreender a noção de função enquanto relação de dependência entre variáveis	Todas as tarefas propostas possibilitam essa compreensão.
2. Compreender a noção de função como correspondência unívoca entre dois conjuntos	Máquina das perguntas
3. Identificar correspondências que são e que não são funções	Máquina das perguntas
4. Compreender que as funções tem diversos tipos de variação: Interpretando a variação numa situação representada por um gráfico; Interpretando a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde esta é crescente, decrescente ou constante.	Dipirona e conta de luz Tarifários e comparando tarifários Passeio a pé
5. Reconhecer funções representadas de diversas formas: Analisando uma função a partir das suas representações e representando algebricamente situações de proporcionalidade direta.	Combustíveis
6. Desenvolver a capacidade de ler e interpretar gráficos de funções: Associando um gráfico a uma situação apresentada em linguagem natural, em que existe variação. Selecionando os dados relevantes para a resolução do problema.	*Viagens e Distância a casa* *O tanque do agricultor p.128* A chamada telefônica
7. Ser capazes de passar a informação de uma representação para outra (De uma situação contextualizada para uma tabela e um gráfico)	Os ovos da quinta Conta de luz
8. Ser capazes de usar esse conceito na resolução de problemas reais Percebendo o poder das funções na descrição de situações da realidade.	Combustíveis O baile, dipirona, conta de luz
9. Dada a informação em descrições verbais, tabelas, gráficos, ou expressões algébricas, os alunos devem ser capazes de determinar imagens correspondentes a certos objetos e objetos correspondentes a certas imagens.	Máquina das perguntas Rita e Miguel

Pensei em começar a primeira aula com essa tarefa, considerando que envolve um assunto que pode estar relacionado com a vida do aluno, e por ser uma atividade que considero simples e que todos vão conseguir fazer.

Dipirona

Ricardo é enfermeiro e precisa medicar o paciente Pedro com "dipirona", porém ele não sabe quantas gotas deve dar para Pedro, então consultou a bula do medicamento onde encontrou as seguintes informações:

- Cada ml contém 20 gotas. Cada gota equivale a 25mg de dipirona monoidratada.

- Adultos e adolescentes acima de 15 anos: 20 a 40 gotas em administração única ou até o máximo de 40 gotas 4 vezes ao dia.

- Crianças menores de 3 meses de idade ou pesando menos de 5kg não devem ser tratadas com dipirona monoidratada.

As crianças devem receber dipirona monoidratada gotas conforme seu peso seguindo a orientação deste esquema:

Peso (média de idade)	Dose	Gotas
5 a 8kg (3 a 11 meses)	Dose única	2 a 5 gotas
	Dose máxima diária	20 (4 tomadas x 5 gotas)
9 a 15kg (1 a 3 anos)	Dose única	3 a 10 gotas
	Dose máxima diária	40 (4 tomadas x 10 gotas)
16 a 23kg (4 a 6 anos)	Dose única	5 a 15 gotas
	Dose máxima diária	60 (4 tomadas x 15 gotas)
24 a 30kg (7 a 9 anos)	Dose única	8 a 20 gotas
	Dose máxima diária	80 (4 tomadas x 20 gotas)
31 a 45kg (10 a 12 anos)	Dose única	10 a 30 gotas
	Dose máxima diária	120 (4 tomadas x 30 gotas)
46 a 53kg (13 a 14 anos)	Dose única	15 a 35 gotas
	Dose máxima diária	140 (4 tomadas x 35 gotas)

Fonte:
https://www.farmadelivery.com.br/media/upload/pdf/BULAS/NEOQUIMICA/dipirona-gotas-neo-quimica-bula.pdf

a) Ricardo deve dar quantas gotas desse remédio para Pedro?

b) Supondo que Pedro esteja pesando 27 kg e tenha 8 anos, quantas gotas ele deve tomar?

c) E se Pedro for um bebê de 4 meses, pesando 4,5 kg?

d) Se você fosse o paciente, quantas gotas Ricardo deveria te dar?

e) A dosagem desse medicamento depende de alguma coisa? Explique.

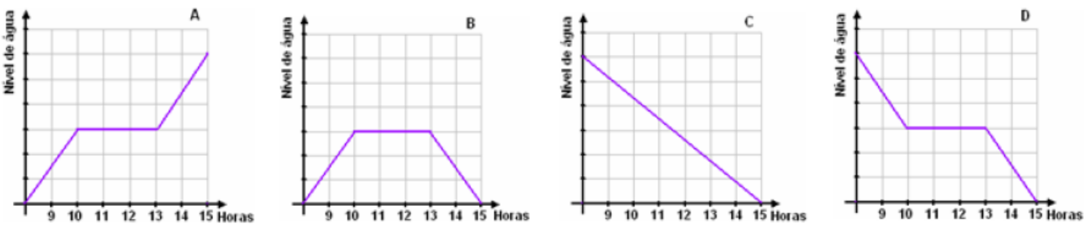
O tanque do agricultor

Inicio com a interpretação de um enunciado sendo representado em uma forma gráfica

Considera a seguinte situação:

Um agricultor estava a esvaziar um dos tanques da sua propriedade. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque.

Qual dos seguintes gráficos traduz a situação descrita?



A Distância a casa

Aqui pensei em colocar o aluno pra fazer a relação entre as situações e os gráficos

Faz corresponder a cada situação o gráfico que melhor se lhe ajusta. Todos os gráficos representam a distância a casa.

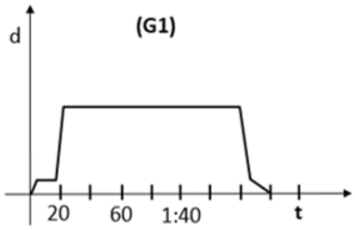
SITUAÇÕES

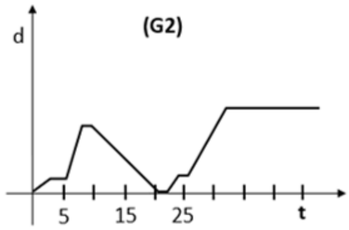
(S1) O António resolveu ir correr durante duas horas para se preparar para o corta-mato da escola. Saiu de casa e regressou para tomar banho.

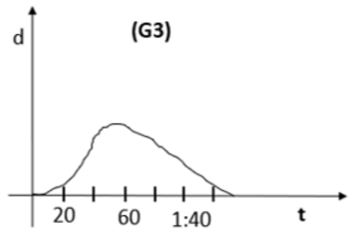
(S2) No dia seguinte o António voltou a ir treinar, mas desta vez para um circuito de atletismo. Saiu de casa, apanhou o autocarro até ao local onde iria treinar, correu durante duas horas e voltou a casa de autocarro.

(S3) No terceiro dia o António resolveu voltar a ir para o estádio de autocarro. A meio da viagem reparou que se tinha esquecido do equipamento para treinar. Saiu do autocarro, regresou a casa a pé, voltou a apanhar um autocarro e lá foi ele para o seu treino de duas horas.

GRÁFICOS







Passeio a pé

Essa atividade, sabendo que o estudante terá feito a anterior, agora é ele quem deve descrever uma situação pra cada gráfico, estimulando os alunos a interpretarem os gráficos relacionando esse com a imaginação deles, ou seja, ele vai criar a situação.

Observa os quatro gráficos que se seguem e, com base na informação que eles contêm, escreve uma história sobre os passeios a pé realizados por José e Mariana.

JOSÉ

Gráfico 1
Distância a casa vs Tempo

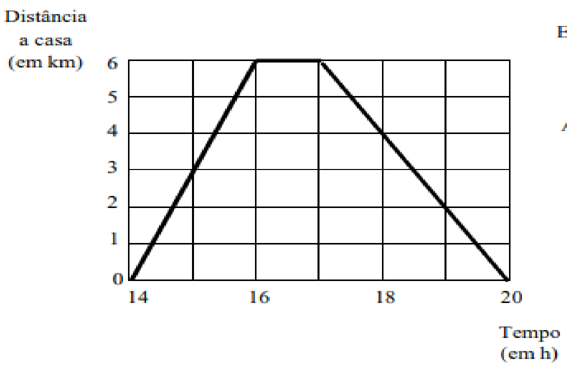
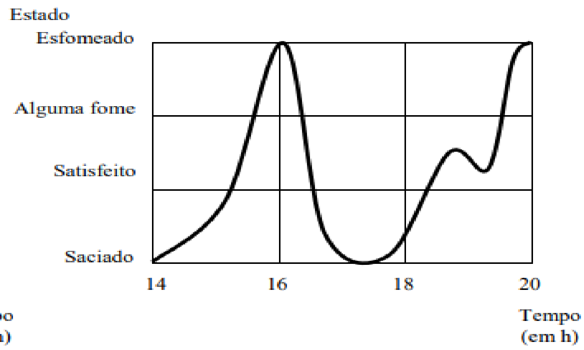


Gráfico 2
Fome vs Tempo



MARIANA

Gráfico 3
Distância a casa vs Tempo

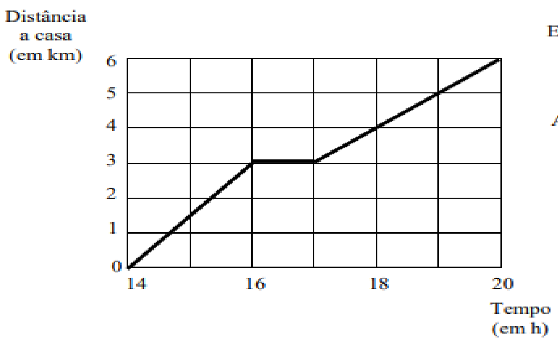
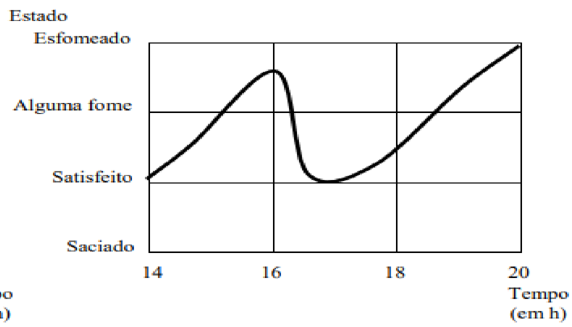
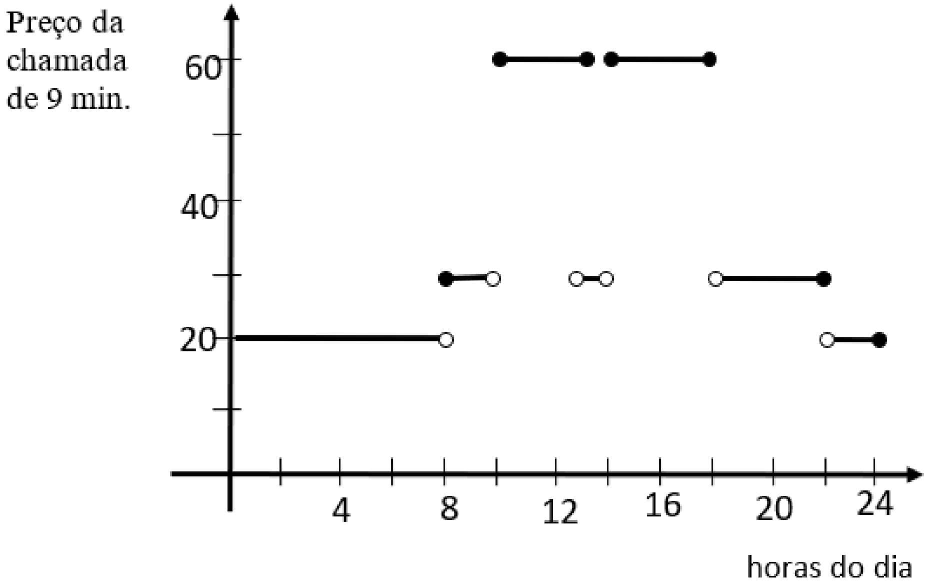


Gráfico 4
Fome vs Tempo



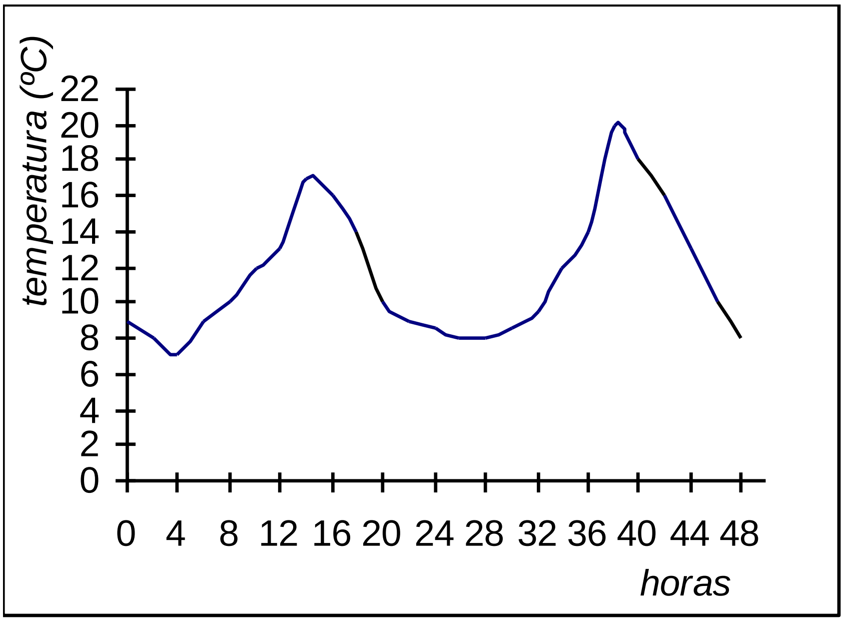
A chamada telefónica (Objetivo de observar a compreensão do gráfico por parte dos alunos)
O custo de uma chamada telefónica varia com a distância para onde se deseja telefonar e com as horas do dia a que essa ligação é feita. Suponhamos que o preço de cada impulso é de 20\$00 (preço do impulso de um posto público) e que o tempo que demora este telefonema é de 9 minutos.



O gráfico acima traduz o preço da chamada em função das horas do dia. Descreve a forma como posso calcular o preço da chamada de 9 minutos em função das horas do dia. Esta função é contínua?

Temperatura ambiente

No gráfico abaixo, estão registradas as temperaturas ambiente durante um período de 48 horas de dois dias de Outono.

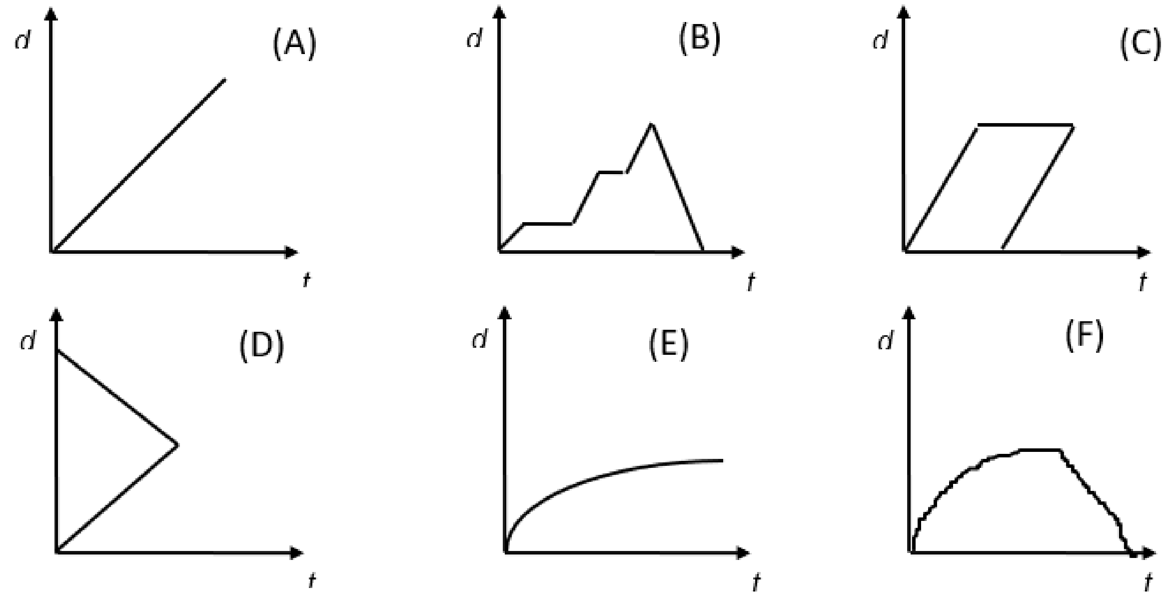


a) Identifique as variáveis dependente e independente da função representada no gráfico.
b) Identifique o domínio e o contradomínio.
c) A que horas se fez sentir a temperatura máxima em cada um dos dois dias? E a mínima?
d) Qual foi a temperatura máxima durante todo o período?

Viagens

Nessa atividade o aluno deve interpretar o enunciado e depois relacionar este com todos os gráficos e explicar se todos eles podem representar viagens.

Quais dos gráficos que se seguem podem representar viagens?
Em todos os gráficos d é a distância relativa a um ponto de partida e t o tempo? Fundamenta a tua resposta.



Os ovos da quinta

Agora é o aluno quem vai construir o gráfico.

Joana pretende arrumar os ovos que a sua mãe vai recolher na quinta, distribuindo-os por caixas que levam, no máximo, 6 ovos. A tabela que se segue representa o número de caixas que são necessárias em função do número de ovos recolhidos:

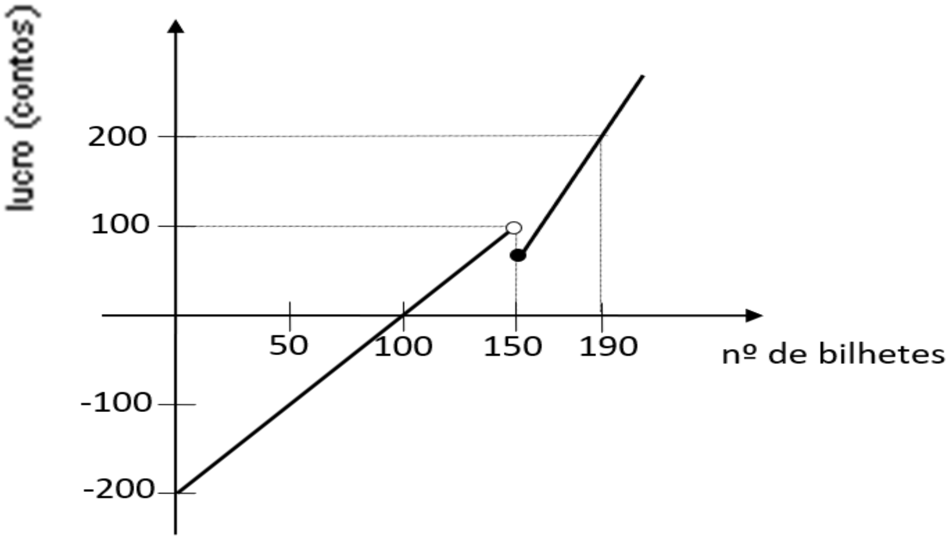
a) Ajuda Joana a preencher a tabela que se segue:

N.º de ovos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N.º de caixas																				

b) Constrói um gráfico que represente estes dados.

O baile

Os alunos do primeiro ano decidiram organizar um baile na escola.
A comissão constituída para o organizar, depois de várias investigações, apresentou aos colegas o seguinte gráfico:

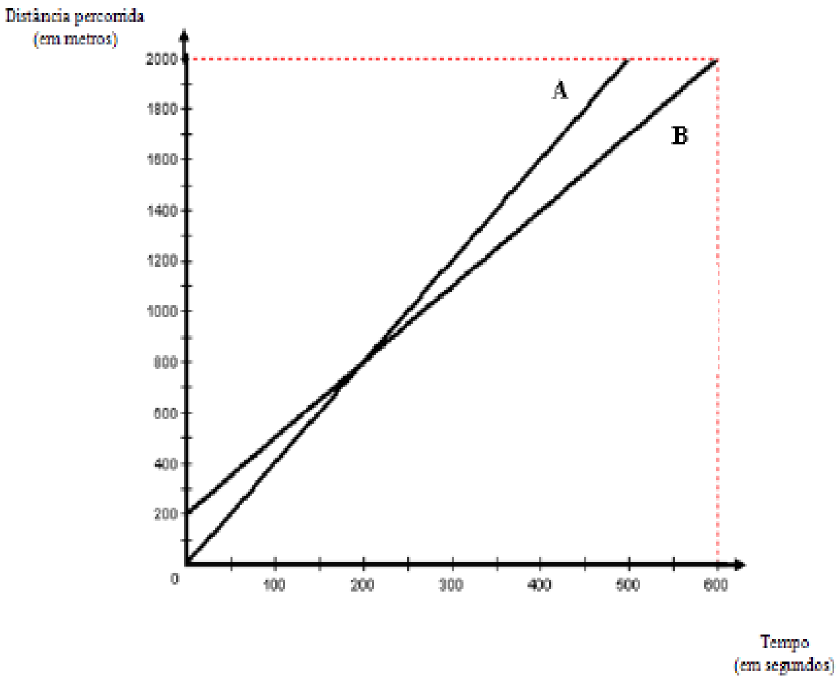


** Quantos bilhetes terão que vender para não terem prejuízo?*
** Os lucros do baile destinam-se à organização de uma viagem que está orçamentada em 200 contos. Qual o número mínimo de bilhetes que será necessário vender para cobrir o custo da viagem?*
** Qual é o prejuízo no caso de não se vender nenhum bilhete?*
** Qual é a situação mais vantajosa, vender 145 bilhetes ou 150? Que explicação podes encontrar para esta situação?*

Rita e Miguel
Sem citar explicitamente a noção de função, domínio e imagem, nessa atividade os alunos devem indicar a imagem correspondente de um objeto e o objeto correspondente de uma imagem.

Rita e Miguel resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo com 2000 metros. Para tornar a corrida mais justa, Miguel disse a Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer.

O gráfico abaixo mostra uma previsão sobre o modo como decorre a corrida, supondo que:



- Miguel percorre 4 metros por segundo;
- Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Observa o gráfico e responde às questões:

a) Achas que Miguel tem razão? Quem sai vencedor?

b) Que distância percorre Rita ao fim de 100 segundos?

c) Quanto tempo demora Rita a percorrer 1400 metros?

Fonte: (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 123)

Os objetivos dessa tarefa são possibilitar que os alunos:
- Utilizem a informação dada para resolver o problema proposto;
- Passem a informação, de uma representação para outra;
- Determinem imagens correspondentes a certos objetos;
- Determinem objetos correspondentes a certas imagens;

Tarifários

O aluno, sem a lei da função, construir o gráfico a partir das informações que ele colocou na tabela

1. No anúncio publicitário do tarifário “Mais segundos” da empresa de comunicações TELEM pode ler-se:

TELEM, COMUNICAÇÕES

Mais segundos

Tarifário nacional único

Para todas as redes — 0,32 cêntimos por segundo

Preço de todas as chamadas até 5 segundos (inclusive): 1,6 cêntimos. A taxação é realizada ao segundo, após os 5 segundos iniciais.

1.1. De acordo com a informação dada, indica quanto paga o consumidor por uma chamada cuja duração total é de:

a) 2 segundos;
b) 5 segundos;
c) 10 segundos;
d) 15 segundos;
e) 1 minuto.

1.2. Completa a tabela seguinte:

Duração da chamada (em segundos)	Preço da chamada (em cêntimos)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

1.3. Num referencial cartesiano representa graficamente este tarifário até aos 15 segundos.

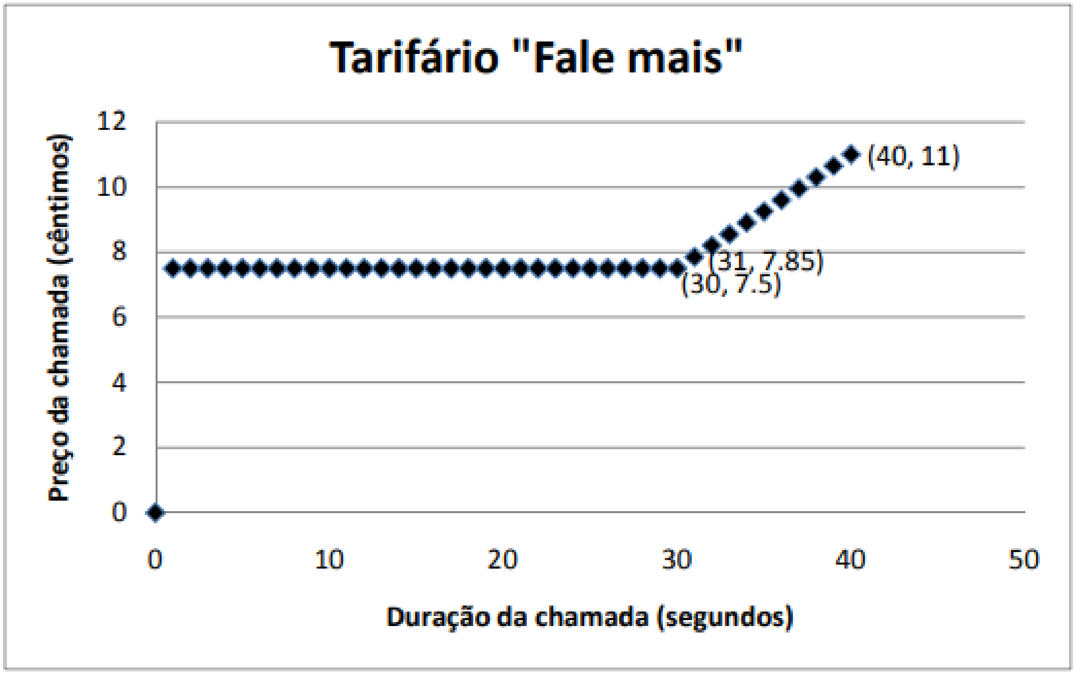
1.4. Indica porque motivo, nos primeiros 5 segundos, os pontos do gráfico estão contidos numa recta horizontal.

1.5. O que sucede aos pontos do gráfico a partir dos 5 segundos?

1.6. Quanto paga um consumidor que realize uma chamada com duração de 3 minutos e 47 segundos?

1.7. E quanto paga por uma chamada com duração de 3 minutos e 48 segundos?

Na figura está representada a relação entre o tempo de duração da chamada e o valor a pagar, num outro tarifário, “Fale mais”, também da TELEM.



2.1. A partir do gráfico responde às seguintes questões:

a) Quanto paga um consumidor por uma chamada de 31 segundos?

b) Existe alguma diferença no valor a pagar se se falar 10 ou 20 segundos?

c) E existe alguma diferença se se falar 30 ou 40 segundos?

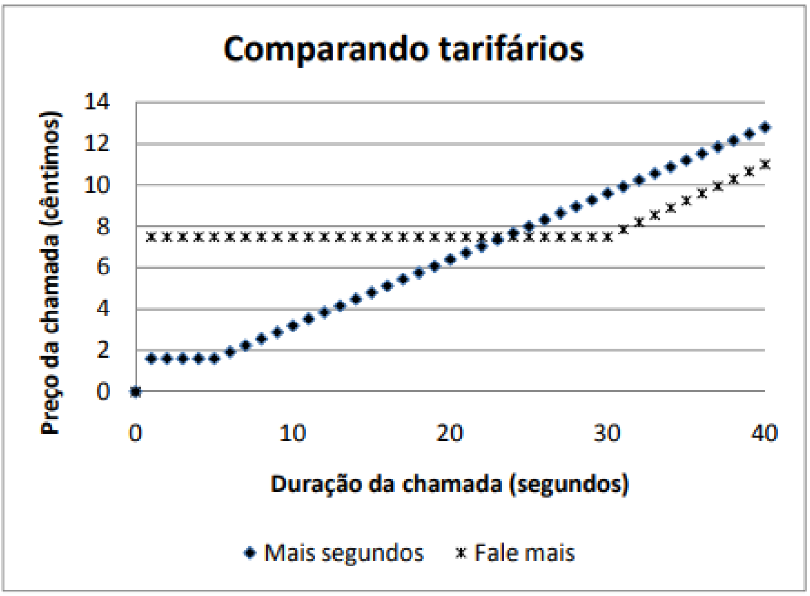
2.2. Completa a tabela que representa este tarifário:

x	0		30	31	37		60
y		7,5				12,75	

2.3. Indica o que acontece em chamadas com menos de 30 segundos, com 30 segundos e com mais de 30 segundos.

Comparando tarifários

1. Na figura está representada a relação entre o tempo de duração da chamada e o valor a pagar por essa chamada, nos dois tarifários da TELEM que estudaste na tarefa 2: "Mais segundos" e "Fale mais".



Tarifário "Mais segundos"

- Até 5 segundos (inclusive): 1,6 cêntimos.
- Por cada segundo adicional: 0,32 cêntimos

Tarifário "Fale Mais"

- Até 30 segundos (inclusive): 7,5 cêntimos.
- Por cada segundo adicional: 0,35 cêntimos.

1.1. Com base no gráfico, compara os dois tarifários e indica as diferenças que encontras. Assinala as vantagens que cada um deles pode ter para diferentes consumidores.

1.2. Completa, relativamente a cada tarifário, tabela com o preço das chamadas com o tempo de duração indicado:

Duração da chamada (em segundos)	Preço da chamada no tarifário "Mais segundos" (em cêntimos)	Preço da chamada no tarifário "Fale mais" (em cêntimos)
1		
5		
10		
23		
24		
25		
30		
60		
72		
90		
101		
110		

1.3. Qual a diferença no preço de uma chamada com duração de 30 segundos, nestes dois tarifários?

1.4. O Pedro pensa que no tarifário "Fale mais" o consumidor paga chamadas mais baratas que no tarifário "Mais segundos", se a sua chamada tiver uma duração superior ou igual a 24 segundos. Será verdade? Justifica a tua resposta.

1.5. Se o consumidor tiver um saldo de 50 cêntimos no telemóvel com qual dos tarifários pode falar durante mais tempo? Indica o tempo máximo (em minutos e segundos) em que fala em cada um.

Máquina de perguntas

No decorrer dessa atividade, penso em introduzir a noção de função pelo diagrama de Venn por considerar que fica mais visível, nessa representação, para explicar quando uma relação é função e quando não é função e depois disso, sendo uma função, temos os termos domínio, contra domínio e imagem. Além de variável dependente e independente, porém essas já foram citadas anteriormente em outras atividades.

Observação: Pretendo alterar essa atividade, colocando estados ao invés de países e suas capitais por considerar que talvez eles não conheçam as capitas de uma certa quantidade de países. Os comentários ao longo das atividades não serão apresentados aos alunos, eu quem vou discutir com eles.

O João pretende utilizar um novo programa no seu computador, a "Máquina das perguntas". O programa gera ecrãs semelhantes ao da figura 1.

Na caixa da esquerda, deve ser introduzido um elemento, por exemplo, o nome de um país. Na caixa da direita, o programa devolve um novo elemento, neste caso o nome da sua capital. Os temas vão variando.

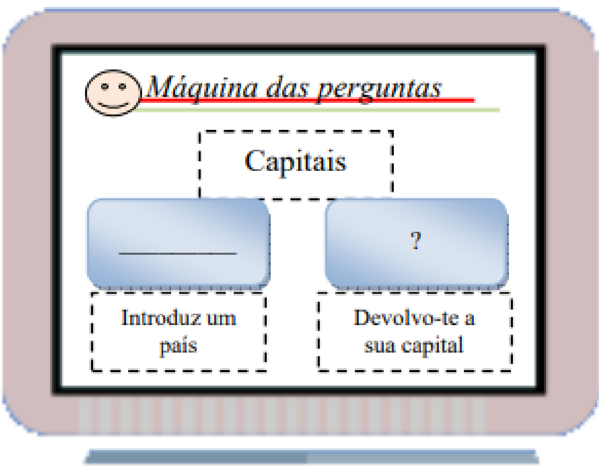


Figura 1

1. No tema "Capitais", o João introduziu "Eslovénia" e obteve o nome da sua capital, como se pode observar nas figuras 2 e 3:

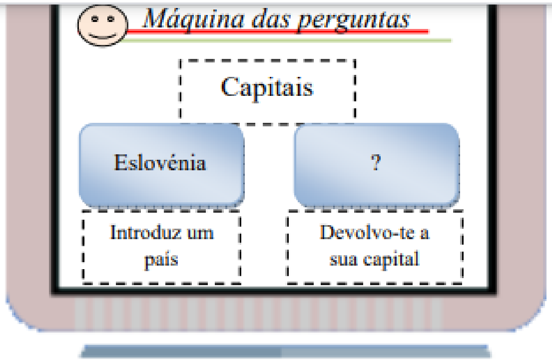


Figura 2

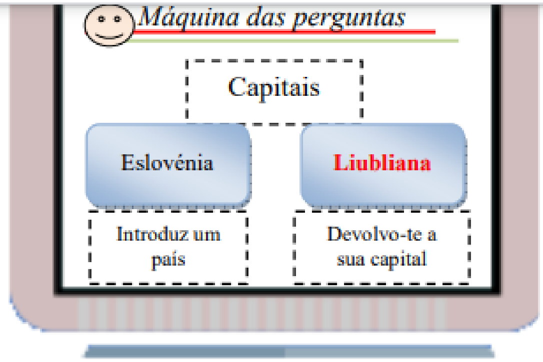
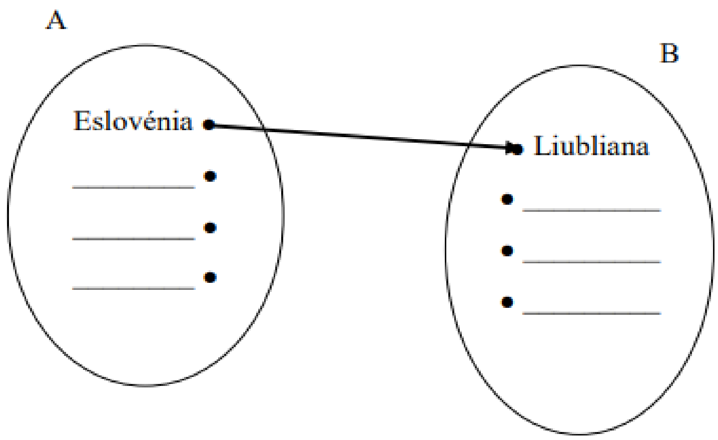


Figura 3

1.1. Sugere três países que o João pode introduzir neste tema e a resposta que o computador lhe devolve.

1.2. Com os países de 1.1 completa os espaços em branco. Estabelece a correspondência entre o conjunto de países A = {Eslovénia, __________, __________, __________} e o conjunto de cidades B = {Liubliana, __________, __________}, colocando as setas que associam os elementos correspondentes no seguinte *diagrama sagital.*



Nesta correspondência observa-se que:

- A cada elemento do conjunto A (país) corresponde um elemento do conjunto B (a cidade que é a sua capital);
- A cada elemento do conjunto A (país) corresponde apenas um elemento do conjunto B (a cidade que é a sua capital) isto é, essa capital é única.

Quando uma correspondência verifica estas duas condições diz-se que é uma *função*:

- Cada elemento do conjunto A designa-se por *objecto*;
- Cada elemento do conjunto B que corresponde a algum elemento do conjunto A designa-se por *imagem*;
- Ao conjunto de todos os objectos, dá-se o nome de *domínio da função* e representa-se por D;

D = {Eslovénia, __________, __________, __________}

- Ao conjunto de todas as imagens dá-se o nome de *contradomínio* e representa-se por D' ou CD;

CD = {Liubliana, __________, __________}

Uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento x do primeiro conjunto associa um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto (correspondência unívoca).

Figura 4

Figura 5

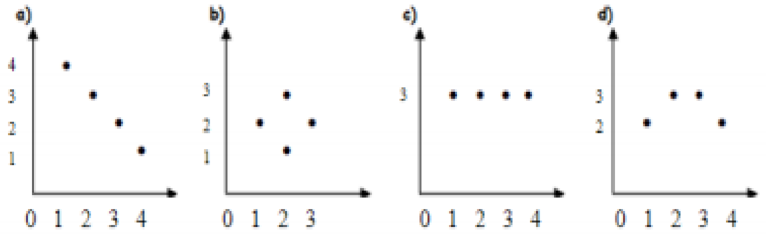
Figura 6

Figura 7

2.1. Para cada um dos temas apresentados, indica três elementos diferentes que o João pode introduzir e as respostas que esperas que o computador devolva. Representa, no teu caderno, cada uma das correspondências que obtiveste usando diagramas sagitais.

2.2. Indica quais destas correspondências são funções. Justifica a tua resposta.

3. Uma correspondência pode ser representada por um conjunto de pontos de um gráfico cartesiano – para cada ponto, a abcissa indica um objecto e a ordenada indica a respectiva imagem. Os gráficos que se seguem representam quatro correspondências:



3.1. Indica quais destas correspondências são funções e quais não o são. Justifica a tua resposta.

3.2. Para cada uma das funções que identificaste em 3.1 indica o domínio e o contradomínio.

4. Na tabela que se segue está representada uma correspondência $x \to y$ entre duas variáveis, em que cada uma delas assume seis valores. Esta correspondência é uma função.

x	2	4	6	9	12	15
$y = g(x)$	1	4,5	3	4,5	6	7,5

4.1. Indica o seu domínio e contradomínio.

4.2. Completa:

a) $g(4) =$ ____

b) $g($___$) = 6$

4.3. Nesta correspondência há dois objectos distintos que têm a mesma imagem. Indica quais são os objectos e a respectiva imagem.

4.4. Constrói um gráfico cartesiano que represente a função.

Lê atentamente a seguinte notícia:

Descida dos combustíveis

O preço de todos os combustíveis estará mais baixo dois cêntimos a partir da meia-noite de hoje, nos postos de abastecimento de combustível em todo o país, segundo avança a Agência Noticiosa Europeia.

Esta é a segunda baixa no preço dos combustíveis no espaço de uma semana, situação que se deve a uma tendência de descida das cotações internacionais do crude e dos produtos refinados.

No entanto, de acordo com indicações do mercado internacional, prevê-se uma inversão na tendência actual de descida, pelo que se espera uma subida dos preços dos produtos petrolíferos refinados durante as próximas semanas. Em contrapartida, prevê-se que o preço do GPL não sofra variações significativas. Este tipo de combustível tem sido cada vez mais procurado pelos consumidores, devido ao seu preço mais apelativo e às vantagens que traz para a preservação ambiental, sobretudo a redução da emissão de gases nocivos à camada de ozono.

Novos preços dos combustíveis nas bombas da Petro-PT:

Gasóleo: € 1, 39
Gasolina: € 1,52
Auto-Gás (GPL): € 0,66

Fonte: Jornal *Mais informação*
03/08/2008

De acordo com os dados da notícia da figura responde às seguintes questões:

1.1. Quanto paga um consumidor que abasteça o seu automóvel com 40 litros de GPL durante o dia 03/08/2008?

1.2. Quanto poupa o consumidor se abastecer o automóvel com 40 litros de GPL apenas no dia 04/08/2008?

1.3. Um consumidor abasteceu o seu automóvel com 38 litros de GPL e pagou 25,08 euros. Abasteceu antes ou depois da descida dos preços?

1.4. O valor a pagar depende do número de litros abastecidos de GPL. Existe uma relação de proporcionalidade directa entre estas duas variáveis. Indica as constantes de proporcionalidade relativas aos dias 03/08/2008 e 04/08/2008.

1.5. Escreve as expressões algébricas que definem as funções que relacionam o número de litros de GPL abastecidos com o preço a pagar por litro, antes e depois da descida.

2. Nos postos de abastecimento da Gás-PT, o GPL está em promoção. Sabendo que a expressão algébrica da função que relaciona $l(x)$ – custo total do abastecimento – e x – número de litros abastecidos – é $l(x)=0{,}61x$, responde às seguintes questões:

2.1. Qual é a constante de proporcionalidade? Que significado tem essa constante?

2.2. Relativamente a esta função, determina:

a) $l(35)$;

b) O valor de x para o qual $l(x)=128{,}71$.

2.3. No dia 4, um consumidor abasteceu o seu automóvel com GPL num posto da Petro-PT cujo preço por litro, como vimos na questão 1, era de 0,66 euros, e gastou 36,96 euros. Se tivesse abastecido num posto Gás-PT, quanto teria poupado?

3. Tal como se previa, ao longo do mês de Agosto de 2008 os preços dos combustíveis sofreram várias alterações. Os preços médios por litro praticados num posto de abastecimento da Combo-PT estão indicados na tabela seguinte:

Combustíveis	Preços médios por litro (08/2008)
Gasóleo	€ 1,37
Gasolina sem Chumbo 95	€ 1,51
GPL	€ 0,62

O gráfico da figura mostra o número de litros de cada um dos combustíveis vendidos neste posto da Combo-PT no mês de Agosto de 2008:

3.1. No total, quantos litros de combustível foram vendidos por este posto da Combo-PT em Agosto de 2008?

3.2. Determina quanto dinheiro recebeu este posto durante este mês pela venda de todo o combustível de que dispunha.

Conta de água ou luz (escolher uma delas)

Talvez como última atividade do plano de ensino, pedir os alunos para estar com a conta de água em mãos, observas umas quatro ou cinco contas, construir uma tabela relacionando o valor pago e o consumo. Colocar perguntas como: E se você não consumir nada, pagará algum valor?

No caso da conta de luz, tem uma relação que até certo consumo se paga um preço, e o valor vai aumentando com base no consumo.

Tentar fazer com que os alunos construam o gráfico de suas contas e por último, encontrar a lei da função para calcular o valor da conta em função do consumo.

Criar essa atividade.

APÊNDICE F - NOVO CONJUNTO DE TAREFAS

Para o primeiro momento, sugiro começar com um problema simples, com várias perguntas, para instigar a compreensão da relação de dependência entre as variáveis, valor a pagar e quantidade de salgados comprados, que está implícita nessa tarefa e será discutida explicitamente em outro momento. Ressalto que a variação nessa tarefa possui variação fixa. Os alunos devem representar as possíveis relações, além das que já estão nas perguntas, em uma tabela que será construída por eles.

<u>Tarefa 1</u>

Clarice foi à cantina da escola comprar salgado e pediu sua ajuda para calcular quanto ela vai pagar pela compra de salgado(s). Sabendo que a escola disponibiliza 200 salgados para venda e que o preço unitário é de R$ 1,50, ajude Clarice a calcular o valor a ser pago:

a) Na compra de um salgado:

b) Se ela comprar dois salgados:

c) E se ela não comprou nenhum salgado:

d) E na compra de três salgados:

e) E se ela comprar salgados para ela, pra você e para mais quatro amigos, sendo um salgado para cada um, quanto ela vai pagar na compra desses salgados?

f) É possível ela pagar R$ 11,00 comprando apenas salgados? Explique.

g) Para não ter que ficar calculando o valor que Clarice irá pagar na compra dos salgados, construa uma tabela para que ela possa consultar o valor a ser pago na compra de um, dois, três ou mais salgados: (Faça a tabela considerando o máximo de salgados que você acha que Clarice pode comprar em um dia).

Substituí, no enunciado, a ideia de que ele quem compraria os salgados, pensando que alguém poderia dizer: não vou comprar salgados pra ninguém, não vou comprar mais que um salgado por estou comprando para eu comer, não vou comprar para outros colegas, nem tenho colega, se ele quiser, ele que arrume dinheiro e compre para ele. A realidade dos meus alunos é essa, dinheiro não é fácil de se conseguir, então não vejo que eles pensariam em não comprar salgados para outras pessoas por egoísmo, mas sim pela realidade financeira da maioria.

Nas letras ‘a’, ‘b’, ‘c’, e ‘d’, o propósito é que os alunos calculem os respectivos valores, de forma sequenciada, para a compra dessa quantidade específica de salgados.

Na letra ‘e’ o propósito é fazer um salto, da compra de três salgados para a compra de 6 salgados para fazer um salto, ou seja, espero que eles calculem por exemplo 1,50 vezes 6, mas suponho que muitos alunos vão calcular para quatro e depois para cinco salgados, mas aqui já começo a estimular o cálculo direto de 6 salgados

Com a letra f, pretendo instigar os alunos a pensar que, no momento de representar a situação desse primeiro problema no gráfico, ele não pode fazer uma linha, deve fazer apenas pontos pois não faz sentido pagar por exemplo sete reais pois não é possível comprar sete salgados e meio por exemplo.

Com essa letra g, meu propósito é estabelecer uma quantidade limite, para que o domínio seja uma quantidade finita de elementos e dessa forma, quando for feita a construção do conceito de função, os alunos poderão descrever que essa relação representa uma função, e identificar todos os elementos do domínio, as respectivas imagens e os valores, que eu apresentar como possível imagem, será os valores que estarão no contra domínio, mas não são imagem pois eles, os alunos, estabeleceram uma quantidade finita de salgados por dia, então o domínio é apenas esses elementos que cada um tiver escolhido nessa alternativa.

Posteriormente, sugiro a tarefa 2, que assim como a primeira apresenta um problema simples para instigar a compreensão da relação de dependência entre as variáveis, quantidade de gols feitos e pontuação obtida, que está implícita nessa tarefa. Ressalto que a variação nessa tarefa também possui variação fixa. O diferencial dessa tarefa pela anterior é que agora os alunos devem representar as possíveis relações, além das que já estão nas perguntas, em um gráfico que será construído por eles.

Tarefa 2

O time da sua turma está participando do campeonato de futebol na escola e cada gol feito vale 3 pontos.

a) Quantos pontos teria esse time se fizerem 2 gols? E se fizerem 4 gols? E se fizerem 10 gols, quantos pontos teriam?
b) Se o saldo fosse de 21 pontos, quantos gols esse time teria feito? E se o saldo fosse de 0 pontos, teriam feito quantos gols?
c) É possível esse time obter um saldo de 38 pontos? Explique.
d) Para não ter que ficar calculando o saldo de pontos desse time, construa um gráfico relacionando o saldo de pontos com base nos gols feitos por esse time para que, ao final do campeonato, você consiga saber a pontuação do time por meio do gráfico. (Faça o gráfico considerando o máximo de pontos que você acha que o time da sua sala pode fazer até o fim do campeonato).

Essa atividade envolve uma quantidade maior de pontos no gráfico e assim como a anterior, os pontos desse gráfico não podem ser ligados pois não faz sentido para a situação proposta. Para a construção do gráfico, suponho que os alunos irão recorrer antes a uma tabela para facilitar a visualização dos pontos que devem ser representados no gráfico.

Agora o objetivo é propor uma tarefa que assim como as anteriores, apresente um problema descrito em linguagem natural para instigar a compreensão da relação de dependência entre as variáveis, número de ovos e número de caixas. Ressalto que essa atividade, diferente das anteriores, não possui variação fixa, ou seja, o gráfico não será estritamente crescente ou decrescente, mas sim uma junção de pontos contínuos e depois é dado um salto. Esse é um aspecto destacado por Ponte, Branco e Matos (2009) como importante.

Esses autores ressaltam que, muitas vezes, são apresentados aos alunos problemas que se enquadram em proporcionalidade direta ou inversa, ou seja, as funções variam, mas com um padrão fixo. Por exemplo a compra de um certo produto é R$ 2,00, então se uma pessoa comprar três desses produtos ela irá pagar R$ 6,00.

Outro exemplo muito comum é quando apresentamos que para um certo plano de telefone, é cobrada uma taxa fixa para liberação do plano e a pessoa tem 60 minutos para utilizar durante o mês e um valor de R$ 0,15 será cobrado por minuto após ultrapassar os 60 minutos.

Nesses exemplos podemos perceber que a variação é fixa. No entanto, Ponte, Branco e Matos (2009) apontam para a necessidade de apresentarmos aos alunos exemplos de situações com tipos de variações que não são fixas, como a medição, ao longo do tempo, do crescimento de uma planta, para que não criem uma ideia errada sobre variação, entendendo que todos os processos de mudança têm taxas de variação constantes. Pensando nisso, proponho a tarefa 3 que segue, ilustrando uma situação com uma variação que não é fixa.

Tarefa 3

Joana pretende arrumar os ovos que a sua mãe vai recolher na quinta-feira, distribuindo-os por caixas que levam, no máximo, 6 ovos. A tabela que se segue representa o número de caixas que são necessárias em função do número de ovos recolhidos:
a) Ajuda Joana a preencher a tabela que se segue:

Nº de Ovos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
Nº de caixas																				

O objetivo da construção da tabela e a visualização de que uma caixa comporta de 1 até 6 ovos e isso deve ser representado, posteriormente, no gráfico de tal forma que para um ovo, dois ovos, três ovos e assim sucessivamente até 6 ovos deve estarem associados à uma caixa. Então, pela primeira vez, eles estarão em contato com uma relação que envolve a noção de função constante, ao considerarmos o número de caixas como variável dependente da variável número de ovos.

b) Faz sentido, em uma caixa, termos três ovos e meio ou 7,4 ovos?
Essa pergunta tem o propósito de possibilitar a reflexão de que, no momento de representar as informações da tabela no gráfico, ainda temos apenas pontos sendo representados.

c) Constrói um gráfico que represente os dados da tabela.
Esse gráfico deve representar o número de caixas em função do número de ovos, porém o conceito de função ainda não foi explicitado, mas foi citado esse termo pela primeira vez no enunciado dessa tarefa. Geometricamente, será uma sequência de pontos, representando a ideia de continuidade e em seguida um salto seguido de pontos que representam novamente uma continuidade.

Agora que já foram trabalhadas situação com variação diferentes, representadas geometricamente por pontos, ou seja, o domínio é um conjunto finito de elementos, proponho a próxima tarefa para que os alunos construam a ideia de continuidade, ou seja, a representação geométrica da situação descrita em linguagem natural pode ser representada pela junção de infinitos pontos, logo será uma linha. Espera-se que os alunos cheguem a essa conclusão ao desenhar o gráfico.

<u>Tarefa 4</u>
O filho de Roberto passou mal e precisou ser levado ao hospital. Como Roberto não tem carro e a situação aparentava ser bem grave ele resolveu chamar um Uber. Considerando que o Uber cobra pela corrida um preço fixo, chamado bandeirada, no valor de R$ 3,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado:
Faz sentido ele pagar o valor de 12,30? E o valor de 42? Explique.
a) Quanto Roberto pagará pela corrida se o hospital estiver à 2 km de distância de sua casa?
b) Como você calculou quanto Roberto pagou ao motorista do Uber pela corrida de 2 km?
c) Se a corrida tivesse custado R$ 6,60 qual seria a distância entre a casa de Roberto e o hospital? E se tivesse custado R$ 9,00? E se tivesse custado R$ 9, 60?
d) Construa um gráfico que represente valores a serem pagos, em reais, para todas as distâncias percorridas, em quilômetros, possíveis.

Com essa atividade é possível, de forma intuitiva, estimular o aluno a representar em linguagem matemática, como ele calculou o valor a ser pago pela distância de dois quilômetros. Em seguida, ele faz o inverso. É dado o valor pago e o estudante deve informar qual a distância percorrida.

Em seguida, a construção do gráfico possibilita um espaço para discussão sobre a ligação dos pontos. Se os alunos não o fizerem, o professor deve questionar os estudantes. Você acha que representou bem essa situação? Podemos unir esses pontos? Explique porquê. O aluno representar apenas pontos é mais interessante nesse momento pois essas discussões mediadas pelo professor podem estimular os alunos a compreender que a "linha" é a união de infinitos pontos. Para isso, é relevante que antes de ligar os pontos, solicite que os alunos continuem representando pontos e mais pontos no gráfico, até que percebam que será formada uma linha.

Para que o aluno não associe função à uma fórmula ou à uma tabela, ele deve compreender o conceito de função como uma relação unívoca entre dois conjuntos que satisfaz certas condições, sendo que a lei da função e/ou uma tabela e/ou diagrama são apenas algumas das maneiras de representar tais relações.

Oliveira (1997) menciona em sua pesquisa que os professores citam exemplos inicialmente com as funções sendo representadas na forma algébrica e em tabelas. Posteriormente esses exemplos são relacionados aos seus respectivos gráficos. Rosa (2005) apresenta os resultados de algumas pesquisas que têm debatido o ensino e a aprendizagem de funções e ressaltou a pesquisa de Oliveira (1997), que

> ressalta a necessidade de uma mudança de metodologia por parte do professor durante o ensino de funções. Segundo ela essa metodologia deve oportunizar aos alunos uma reflexão sobre diversas situações onde aparece o tema função. Nesse sentido, aponta a necessidade de propor situações que partam do geométrico para o algébrico, apresentando, ainda, outras letras para denominar as variáveis dependente e independente, que não apenas x e y (ROSA, 2005, p. 67).

A autora ainda aponta que o mesmo acontece nos livros didáticos, sendo que raramente os exemplos são apresentados na ordem inversa e que quando isso ocorre, não é dada a devida importância às representações geométricas. Além disso,

> verificamos que os alunos, em geral, confundem atributos do conceito com os exemplos de função, incluem a noção de continuidade a este conceito, definem função como uma equação, não compreendem funções dadas por mais de uma expressão algébrica, fazem confusão entre função constante e contínua, entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfico é suficiente para afirmar que estes representam uma função (OLIVEIRA, 1997, p. 125).

Ponte, Branco e Matos (2009) orientam sobre a finalidade da utilização de tabelas, gráficos cartesianos e expressões algébricas no terceiro ciclo da seguinte forma: "as tabelas permitem representar funções em que o domínio tem um número significativo de elementos e os gráficos cartesianos e as expressões algébricas permitem representar funções cujo domínio é um conjunto infinito." (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 118).

Ponte, Branco e Matos (2009) apontam como principais representações do conceito de função:

> (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural; (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos; (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 117).

Sabendo que essas são as quatro formas principais que podemos utilizar para representar uma função, esses autores levantam a possibilidade de serem feitas combinações dessas representações, ou seja, elas podem ser usadas em conjunto, “sendo a informação relativa a uma dada função apresentada muitas vezes parcialmente numa representação e parcialmente noutras representações” (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 117).

Procurando considerar algumas dessas questões, proponho a tarefa 5 em que a partir de uma situação descrita num misto de linguagem natural e representação gráfica, os alunos devem, partindo do geométrico para o algébrico, determinar as “regras” que representam as duas “linhas” do gráfico apresentado na tarefa.

Ressalto que a variação na tarefa 5 não é fixa, como os autores sugerem. O diferencial dessa tarefa pelas anteriores é que agora os alunos devem representar as relações em um gráfico, que será construído por eles, mas agora será infinitos pontos em um intervalo, e por esse motivo, precisa ser representado por uma linha.

As tarefas 5, 6 e 7 tem o objetivo de que os alunos construam o gráfico contínuo, ou seja, com um intervalo composto por infinitos pontos, formando, dessa forma, uma linha.

<u>Tarefa 5</u>

Um agricultor estava a encher um tanque da sua propriedade com duas mangueiras abertas ao mesmo tempo. Esse tanque comporta 1500 litros de água. Sabendo que a cada hora esse tanque enche 300 litros, construa um gráfico que represente essa situação, relacionando o nível da água ao longo do tempo.

<u>Tarefa 6</u>

Um agricultor está com seu reservatório com a capacidade de 1500 litros de água completo e precisa esvaziar esse tanque. Sabendo que a vazão é de 150 litros de água por hora, represente em um gráfico essa situação, relacionando o nível da água ao longo do tempo.

<u>Tarefa 7</u>

Um agricultor estava a esvaziar um dos tanques da sua propriedade cuja capacidade é de 600 litros de água. Às 10 horas o tubo entupiu e o nível de água no tanque permaneceu inalterado durante 3 horas. Ao fim desse tempo, o agricultor conseguiu desentupir o tubo e esvaziar o resto do tanque. relacionando o nível da água ao longo do tempo. Construa um gráfico que traduz a situação descrita, relacionando o nível da água ao longo do tempo.

O diferencial dessa tarefa é possibilitar que o aluno perceba que o gráfico dessa função será uma linha contínua, decrescente em dois momentos e constante em outro.

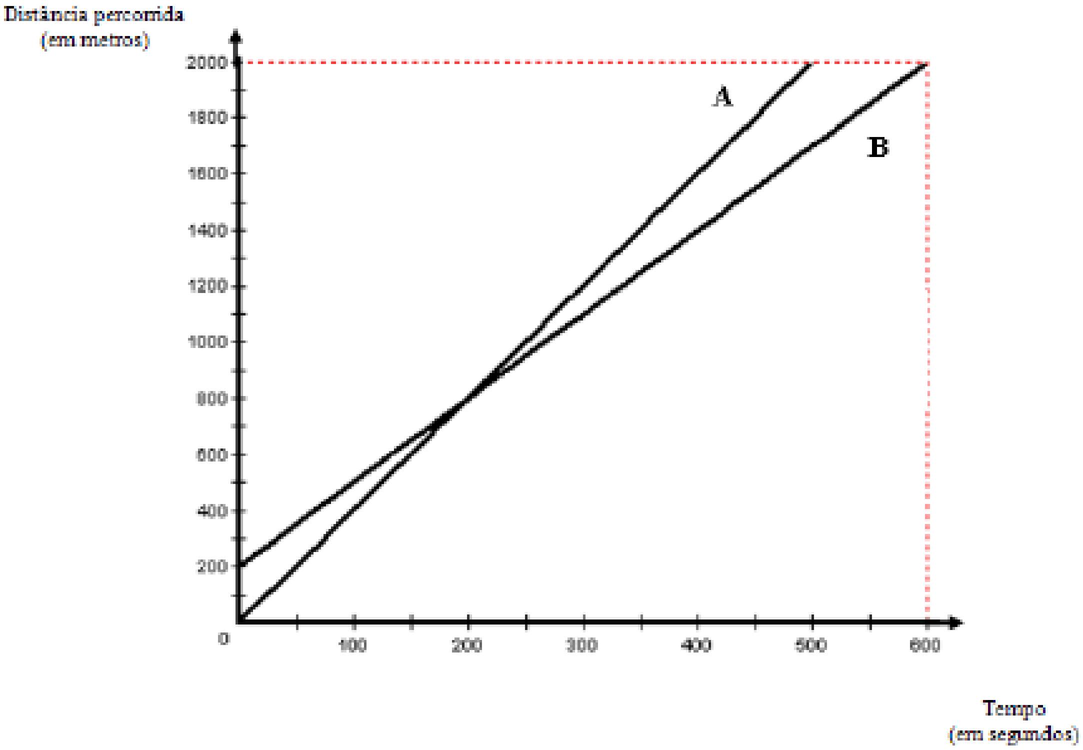
<u>Tarefa 8</u>

Rita e Miguel resolveram fazer uma corrida numa pista de atletismo com 2000 metros. Para tornar a corrida mais justa, Miguel disse a Rita que a deixaria partir alguns metros à sua frente, afirmando que, mesmo assim, conseguiria vencer. O gráfico abaixo mostra uma previsão sobre o modo como decorre a corrida, supondo que:

- Miguel percorre 4 metros por segundo;

- Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros.

Observe o gráfico e responda às questões:



Fonte: (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 123)

a) Achas que Miguel tem razão? Quem sai vencedor?
b) É possível criar uma regra para a trajetória percorrida por Miguel? Explique.
c) É possível criar uma regra para a trajetória percorrida por Rita? Explique.
d) Que distância Rita percorre ao fim de 100 segundos?
e) Quanto tempo demora Rita a percorrer 1400 metros?

A letra a exige interpretação do gráfico. Não foi dito que a linha A representa o percurso feito por Miguel e a linha B representa o percurso feito por Rita. Os alunos podem chegar a essa informação observando que a linha a tem início no ponto de 200 metros, correspondente a Rita, que iniciou alguns metros à frente de Miguel. A partir dessas interpretações, os alunos podem perceber o tempo que cada um gastou para fazer o percurso, bem como quem o fez em menos tempo e, dessa forma estarão utilizando a informação dada para resolver o problema proposto.

O objetivo principal dessa tarefa é que os alunos, antes de serem apresentados à noção de função, determinem a imagem correspondente de um objeto e o objeto correspondente de uma imagem. Para isso, será necessário que os mesmos passem a informação dada em um misto de linguagem natural e gráfica, para uma representação algébrica e/ou construam uma tabela para responder as letras c e d de forma exata e dessa forma, estarão construindo uma "regra" para calcular a distância percorrida em função do tempo para os dois corredores: Miguel e Rita.

Se eles responderem essa questão substituindo valores na tabela, o professor deve mediar uma discussão e propor aos alunos que construam a regra para representar o trajeto de Rita e outra regra para representar o trajeto de Miguel.

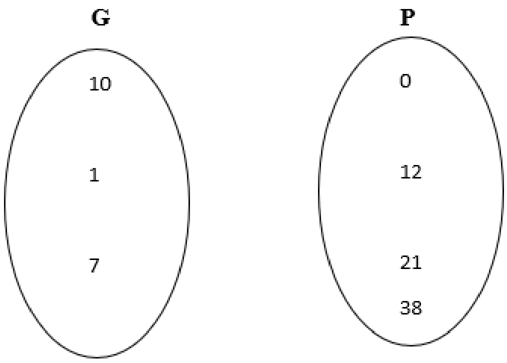
As atividades apresentadas até aqui possibilitam a compreensão das noções relação de dependência entre variáveis e várias formas sendo utilizadas para representar essas relações de dependência, como gráficos, tabelas, linguagem natural e algébrica. No entanto, a próxima tarefa tem o propósito de explicitar a noção de função aos alunos por meio da primeira tarefa que será retomada nesse momento. Agora o propósito é que, dada a situação em linguagem natural, os alunos devem associar esta ao gráfico e determinar a regra correspondente dessa situação escolhida, uma vez que autores apontam, como dito anteriormente, recomenda-se partir do geométrico para o algébrico.

Já tendo sido apresentado aos alunos relações crescentes, decrescentes e constantes, onde a variação é fixa, eles representaram essas relações, dadas em linguagem natural, em uma tabela e em um gráfico. Agora, com a tarefa 7, o objetivo é que eles contatem com uma variação que não é fixa e associem essa relação, apresentada em linguagem natural, com um dos gráficos apresentados na tarefa e percebam que uma tabela não seria capaz de passar a informação que podemos perceber observando o gráfico.

Tarefa 9

Na segunda tarefa você construiu um gráfico relacionando o saldo de pontos do time de sua sala com a quantidade de gols feitos certo? E cada gol feito valia 3 pontos!

a) O diagrama a seguir está representando, em partes, essa mesma situação. A primeira 'bolinha' que chamei de G representa os possíveis gols feitos pelo time da sua sala e a bolinha que chamei de P representa os valores correspondentes ao saldo de pontos do time. Termine de completar as duas bolinhas, com base no gráfico que você construiu e relacione a quantidade de gols com o respectivo valor do saldo de pontos desse time ligando os valores:



b) A quantidade de gols é fixa ou variável? Explique.

c) O saldo de pontos é fixo ou variável?

d) A quantidade de gols feitos depende do saldo de pontos ou o saldo de pontos depende da quantidade gols feitos? Explique.

Esse é um momento propício para discutir as noções de variável dependente e independente. Por exemplo: muito bem, tanto o saldo de pontos como a quantidade de gols feitos são variáveis. Porém como é o saldo de pontos que depende da quantidade de gols feitos, então o saldo de pontos é chamado em matemática de variável dependente. Já a quantidade de gols, que também varia, porém não depende do saldo de pontos, é chamado em matemática de variável independente.

Além disso, nesse momento é viável discutir sobre esses termos e não apenas dar nomes, ou seja: Muito bem!! A variável dependente é a pontuação obtida. Então quer dizer que a bolinha que representa a quantidade de gols feitos domina a bolinha de pontuação? Sim, ela tem de certa forma um domínio sobre os valores que vão estar na segunda bolinha.

Agora será retomado o primeiro problema e o estudante deve informar qual a variável dependente e independente da situação. Além disso, será nessa questão que o conceito de função será explicitado, a partir da construção do aluno, representando essa situação no diagrama de Venn, explicitando as noções de domínio, imagem e contradomínio.

Após aplicar essas sete tarefas, considero que as noções necessárias para a compreensão do conceito de função foram contempladas nas atividades, considerando a mediação nos momentos adequados pelo professor. Dessa forma, agora será retomada a primeira tarefa e por meio dela será apresentado o conceito de função

<u>Tarefa 10</u>

Na primeira tarefa você ajudou Clarice a calcular o valor pago para a compra de certa quantia de salgados certo? O preço de cada salgado era de R$ 1,50 e você criou uma tabela para Clarisse consultar o valor que deveria ser pago para várias possibilidades de compra.
a) Qual a variável independente dessa situação? E qual a variável dependente?
b) Represente essa situação no diagrama, como você fez na tarefa anterior.
c) Qual bolinha tem domínio sobre qual? Explique.

Feito o diagrama, cabe ao professor mediar a construção do conceito de função. Sugiro que após feitas essas atividades, o professor diga: Muito bem!! Observe que os valores dessa segunda bolinha dependem dos valores da primeira. Então a primeira domina a segunda certo? Em matemática, o conjunto de valores que está dominando, no caso os valores da primeira bolinha, chamamos em matemática de domínio. Vocês acham que esse nome faz sentido?

E qual será o nome da segunda bolinha? Chama-se contradomínio. Nesse conjunto estão os elementos que estão relacionados aos elementos do domínio, mas também pode ter elementos que não estão relacionados a ninguém, como o caso do número 11 e isso tem um nome específico. Os valores que são correspondentes dos elementos do domínio são reflexo do que tem na primeira bolinha certo? Reflexo lembra qual palavra? O espelho por exemplo, ele reflete a imagem que está na sua frente certo? Então, chamamos os elementos que estão relacionados aos elementos do domínio de imagem.

Em síntese: domínio e contradomínio. Para os elementos que estão dentro do domínio chamamos de objeto e os elementos que são reflexo dos elementos do domínio, chamamos de imagem. Isso em matemática chamamos de função. Para uma relação entre duas variáveis ser função, precisa atender dois critérios:

- Todos os elementos do domínio têm que ter uma imagem; (ou seja, não pode sobrar nenhum elemento no domínio sem correspondente no contra domínio).

- Cada objeto tem que ter apenas uma imagem (ou seja, só pode sair uma ligação de cada objeto).

Observação importante: Se a relação não atender a esses dois critérios, então não representa uma função, é uma relação qualquer, então a primeira bolinha é apenas um conjunto de valores qualquer, não pode ser chamado de domínio e a segunda bolinha a mesma coisa, não pode ser chamada de imagem. Esses termos só existem quando a relação é uma função.

Apresentado o conceito de função, as duas próximas tarefas serão para os alunos indicar se as relações são ou não funções. Se não for eles devem justificar e se for indicar o domínio e a imagem.

<u>Tarefa 11</u>

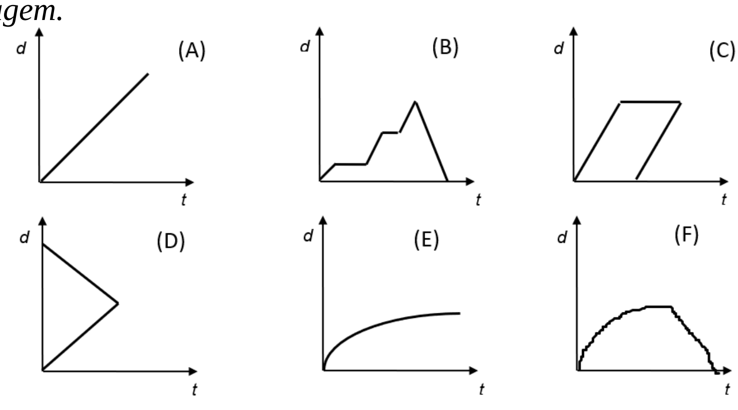
Agora proponho uma situação bem simples para eles representar no diagrama e dizer se é ou não função.
Andressa, no caminho da escola, comprou 10 chicletes para distribuir entre ela e suas 7 amigas.

a) Dois amigos de Andressa viram que ela tinha chicletes e pediram a ela. Andressa teria chiclete para dar a estes dois amigos, além de dar às suas 7 amigas e de ficar com chiclete também? Justifique.
b) Agora represente a situação anterior no diagrama de Venn e informe se essa relação é ou não uma função. Se for função, defina o domínio e a imagem. Se não for função, justifique.
c) Se ao invés de dois amigos, três amigos de Andressa pedissem chiclete a ela, seria possível distribuir os chicletes com cada um deles, com suas 7 amigas e ainda sobrar pra ela?
d) Agora represente a situação anterior no diagrama de Venn e informe se essa relação é ou não uma função. Se for função, defina o domínio e a imagem. Se não for função, justifique.

A tarefa a seguir se diferencia da anterior pois todas são funções, porém o número de elementos do domínio vai aumentando gradativamente e na letra “d” o domínio é o conjunto dos números reais, ou se eles usarem termos informais, podem dizer que o domínio é a reta toda, porém dentre o intervalo citado no problema.

Tarefa 12
Informe se cada uma das relações a seguir são funções. Se sim, indique os elementos do domínio e da imagem. Se não, explique porque não é função. Para isso, analise:
a) A tabela que você construiu na terceira tarefa: Joana pretende arrumar os ovos que a sua mãe vai recolher na quinta-feira, distribuindo-os por caixas que levam, no máximo, 6 ovos.
b) O gráfico que você construiu na quarta tarefa: O filho de Roberto passou mal e precisou ser levado ao hospital. Como Roberto não tem carro e a situação aparentava ser bem grave ele resolveu chamar um Uber. Considerando que o Uber cobra pela corrida um preço fixo, chamado bandeirada, no valor de R$ 3,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.
c) O gráfico da sétima tarefa (esvaziando o tanque quando esse ficou entupido)
d) A “regra” que você construiu na oitava tarefa, sobre a corrida de Rita e Miguel

Tarefa 13
Em todos os gráficos d é a distância relativa a um ponto de partida e t o tempo.
Quais dos gráficos que se seguem podem representar viagens? Explique.
Para cada gráfico, informe se é ou não uma função. Se não for, justifique. Se for, informe o domínio e a imagem.



Nessa atividade o aluno deve interpretar o enunciado e depois relacionar este com todos os gráficos e explicar se todos eles podem representar viagens. Nesse caso, apenas os gráficos (C) e (D) não podem representar viagem. Além disso, devem indicar quais gráficos são funções.