MODELANDO SOCIOCRITICAMENTE NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Sebastião Aparecido de Araújo
Frederico da Silva Reis

Modelando sociocriticamente no ensino de Equações Diferenciais para a Licenciatura em Matemática

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

EDITORA UFOP
Ouro Preto | 2020

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Educação Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Coordenação | Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti

MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira
Prof. Dr. André Augusto Deodato
Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes
Prof. Dr. Daniel Clark Orey
Prof. Dr. Douglas, da Silva Tinti
Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Profa. Dra. Marli Regina dos Santos
Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana
Prof. Dr. Milton Rosa

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

A663m Araújo, Sebastião Aparecido de .
Modelando sociocriticamente no ensino de equações diferenciais para a licenciatura em matemática. [manuscrito] / Sebastião Aparecido de Araújo. - 2020.
52 f.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.
Produção Científica (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Equações diferenciais - Estudo e ensino. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Licenciatura. I. Reis, Frederico da Silva. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 510:378

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

Expediente Técnico

Organização | Sebastião Aparecido de Araújo | Frederico da Silva Reis

Pesquisa e Redação | Sebastião Aparecido de Araújo

Revisão | Sebastião Aparecido de Araújo | Frederico da Silva Reis

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Ilustração | Sebastião Aparecido de Araújo

Ao Professor de Equações Diferenciais

Caro (a) colega Professor (a) de Equações Diferenciais Ordinárias,

Este produto educacional tem como objetivo auxiliar o professor em aplicações práticas de Modelagem. Para as etapas de Modelagem, seguimos os passos práticos com base no livro de Laudares *et al.* (2017). Acrescentamos 2 passos aos 8 estabelecidos no livro. Esses passos adicionais têm como objetivo auxiliar em uma discussão crítica. Caberá ao professor guiar os alunos para uma discussão significativa, não somente ao modelo construído, mas também às implicações das escolhas feitas, fazendo conexões com a realidade. Por isso, dedicamos uma seção para explicar um pouco sobre Modelagem e sobre o que seria essa "criticidade".

Os modelos aqui sugeridos foram propostos por Malthus e Verhulst no passado. No entanto, são temas e nos conectam com a realidade atual podendo levar os alunos a conjecturarem a temática sob uma ótica de criticidade. O linguajar é bem acessível a um aluno iniciante na disciplina de Equações Diferenciais. Os temas das atividades de Modelagem Matemática são:

1º Atividade: Crescimento Exponencial – Problema de variação populacional – Lei de Malthus.

2º Atividade: Análise do modelo de demanda e crescimento populacional – Lei de Malthus e Verhulst.

Desse modo, apresentamos uma sugestão de duas atividades de Modelagem Matemática, envolvendo Equações Diferenciais de 1ª ordem. Ambas as atividades são possíveis de serem administradas durante o semestre de estudo das Equações Diferenciais e podem trazer bons resultados para a aprendizagem desta disciplina. Como as Equações Diferenciais constituem-se de modelos que têm uma boa aproximação com os fenômenos naturais, é possível aplicá-las e obter indicativos importantes inclusive a despeito das possíveis dificuldades dos alunos estudantes de Licenciatura em Matemática.

Além disso, as atividades têm premissas que inserem os alunos nas aplicações das teorias estudadas na sala de aula e trazem consigo questões inerentes à cultura de nossa geração e de questões sociais atuais.

Apesar de não ser o foco aqui, recomendamos, na medida do possível, o uso de recursos tecnológicos com os alunos para a construção de gráficos, fazer simulações etc. Esta sugestão se dá na perspectiva que as tecnologias se tornaram uma realidade e não há como formar professores no século XXI sem capacitá-los para o uso tecnológico. Ferramentas tecnológicas, como por exemplo o GeoGebra, permitem um maior dinamismo e visualização na abordagem das EDO quanto ao seu comportamento nas soluções.

Como na Modelagem não existe um único caminho para construir o conhecimento matemático, acreditamos que as atividades por serem ministradas em grupo geram diálogos, interações e colaboração. Esses, são preceitos que a sociedade atual requer de cidadãos, para que possam viver em harmonia e estão em consonância com os pilares da educação. Assim, entendemos que as atividades podem conduzir a uma aprendizagem das Equações Diferenciais e ser um bom exercício para a criatividade e criticidade.

Por fim, deixamos uma sugestão de respostas. Não queremos, com isso, dizer que há apenas um caminho para se desenvolver a Modelagem, mas auxiliar em possíveis dificuldades técnicas que porventura possam surgir.

Prof. Ms. Sebastião Aparecido, de Araújo

Índice

1. Introdução: Um pouco sobre as Equações Diferenciais

Muitas das leis físicas e das Ciências Sociais envolvem taxas de variação, constituindo-se em derivadas. Muitas dessas leis podem ser modeladas e traduzidas em "modelos matemáticos" por meio das EDO de 1ª ordem, aplicados ao crescimento populacional, à datação por carbono, à Medicina, à Ecologia, para enumerar alguns exemplos.

Para exemplificar, um dos modelos de derivadas mais simples: $\frac{dy}{dx} = ky$ é capaz de expressar e descrever a taxa de crescimento proporcional ao tamanho de uma população (de pessoas, bactérias, etc.), desde que não estejam restritas a limitações. Esse "modelo matemático" aponta a cada instante de tempo a taxa de crescimento da população. Neste caso, o valor de k corresponde a uma constante de proporcionalidade, determinada de maneira experimental.

Nesse contexto, se a população é conhecida num momento inicial $y = y_0$, em um tempo inicial t = 0, então o "modelo matemático" geral para a população num tempo qualquer y (t), pode ser encontrado solucionando o problema inicial de valor inicial, da forma: $\frac{dy}{dt} = ky$, sendo $y(0) = y_0$.

Esses modelos de Equações Diferenciais também são chamados de modelos exponenciais e geralmente surgem de situações-problemas nas quais uma quantidade cresce ou decresce a uma taxa proporcional relativa ao valor atual, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Modelo de equação de crescimento-decaimento exponencial

Dizemos que uma quantidade y = y (t) tem um modelo de crescimento exponencial se ela cresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente, e dizemos que tem um modelo de decaimento exponencial se ela decresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade

presente. Assim, para um modelo de crescimento exponencial, a quantidade y (t) satisfaz a uma equação da forma: $\frac{dy}{dt} = ky \; com \; k > 0$. Para um modelo de decaimento exponencial, a quantidade y (t) satisfaz uma equação da forma $\frac{dy}{dt} = ky, com \; k < 0$. A constante k é chamada de constante de crescimento ou constante de decrescimento, conforme apropriado

Fonte: Dados do autor, adaptado de LAUDARES et al (2017).

Vale ressaltar que a EDO da forma $\frac{dy}{dx} = ky$, pode ser reescrita como: $\frac{dy}{dt} = ky$, com t em vez de x como variável independente. Para ilustrar como essas equações podem ser solucionadas, suponhamos que uma quantidade: $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial e que conheçamos o tamanho dela em algum momento atual. Assim teremos: $y = y_0$ quando $t = 0$. Desse modo a equação geral para $y(t)$ pode ser obtida solucionando $\frac{dy}{dt} = ky$, conforme Quadro 2.

Quadro 2 – Resolução da equação $\frac{dy}{dt} = ky$

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln|y| = kt + c_1 \text{ com } c_1 \in IR.$$
$$y = e^{kt + c_1} = e^{c_1}.e^{kt} = C.e^{kt} \; e \; C \in IR$$

Fonte: Dados do autor (2020)

Como a condição inicial implica em $y = y_0$ quando $t = 0$ podemos então escrever a solução geral para $y(t) = y_{0.}e^{kt}$. Vale ressaltar que para um modelo de crescimento $k > 0$ enquanto para um modelo de decrescimento $k < 0$. Lembrando que $k = \frac{dy/dt}{y}$ representa uma constante e por essa razão é dita taxa de crescimento relativo ou taxa de decaimento relativo.

2. Um olhar para a Modelagem Matemática na dimensão sociocrítica

Como afirma Miorin (2003, p. 2): "Vivemos numa realidade multidimensional, simultaneamente econômica, psicológica, mitológica, sociológica, mas estudamos estas dimensões separadamente, e não umas em relação com as outras".

Burak (1992), ciente de tais características da pós-modernidade, propõe uma concepção de Modelagem numa perspectiva da Educação Matemática que:

> [...] busca manter-se em estreita harmonia com a visão apresentada em que a Matemática, seu ensino/aprendizagem é considerado como uma prática social, em acordo com Miguel (2004) [...] na medida em que envolvem uma comunidade de estudantes, o desenvolvimento de um conjunto de ações que amplia o espaço de sala de aula, bem como se orienta por princípios que envolvem interesse e visão antropológica e a possibilidade da construção de conhecimentos matemáticos e interdisciplinares. É uma visão que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que podem se fazer presentes no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática (BURAK, 1992 p. 62).

Dentro dessa perspectiva de Educação Matemática, Burak (1992, p. 62) argumenta acerca da Modelagem sugerindo que ela deve "constituir-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Klüber (2004, p. 4) analisa a concepção de Modelagem nessa perspectiva e afirma que o fato dela se constituir em um conjunto de procedimentos, significa "algo unido, conjugado, contíguo de ações, caminhos a empreender com vista a um objetivo". Para ele, estabelecer um paralelo significa algo análogo a "fenômenos presentes no cotidiano, considerando aquilo que é percebido pelo indivíduo, neste caso, o estudante". Fazer predições, neste contexto, tem o sentido de "realizar um diagnóstico pelo estudante e que os favoreçam e os permitam a tomar decisão".

Para a prática da Modelagem nessa perspectiva, alguns passos são sugeridos por Burak (1992, 2004), a saber:

1) partir do interesse do grupo de pessoas envolvidas (no caso, os estudantes);

2) obter as informações e os dados no ambiente onde se localiza o interesse do grupo.

Segundo Burak e Klüber (2004), tais princípios:

> Buscam consolidar as ações a partir do interesse dos alunos envolvidos na atividade de Modelagem. Sob o ponto de vista socio-construtivista, seria que a razão para se fazer algo está em fazer algo. O interesse pela atividade está diretamente relacionado à motivação intrínseca e ganha força também no contexto que nutre tanto o interesse como a motivação (BURAK & KLUBER, 2004, p. 4).

Já na perspectiva de trabalhar a Modelagem como projeto de ensino da Matemática para a sala de aula, Burak (1998, 2004) sugere que seu desenvolvimento seja realizado em nas seguintes etapas, que serão detalhadas a seguir:

> 1) Escolha do tema;
> 2) Pesquisa exploratória;
> 3) Levantamento do problema;
> 4) Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático;
> 5) Análise crítica da solução do problema.

2.1. A escolha do tema

Deve partir de temas propostos pelos estudantes envolvidos no projeto de Modelagem que, segundo Burak (2004, p. 7), "além da visão antropológica, podem estar relacionados ao questionamento de relações sociais". Isso permite, por exemplo, que o tema não tenha uma ligação intrínseca com o grupo, mas esteja relacionado e presente nos meios de comunicação e seja um tema em evidência e atual. É possível abstrair, nesse contexto, a aproximação da investigação do problema de forma interdisciplinar da Matemática com a Sociologia, pois:

> O professor tem participação, levantando aspectos, contrapontos, solicitando argumentos, desafiando os estudantes a manifestarem suas opiniões, seus pontos de vista, de modo que se envolvam na discussão. [...] Estes encaminhamentos constituem-se em ponto de partida para o desenvolvimento da pesquisa exploratória (BURAK, 2004, p. 7).

2.2. A pesquisa exploratória

Nesta etapa, deve-se pesquisar várias dimensões que constituem a realidade do que está sendo investigado, tais como políticas sociais, econômicas, estruturais, dentre outras. Os dados coletados serão importantes para o levantamento do problema. Como forma de coleta de dados, pode-se utilizar de ferramentas tecnológicas na própria sala de aula, em laboratórios das escolas e universidades, na biblioteca ou até externos, como órgãos e instituições públicas, por exemplo. Como atualmente o acesso à Internet está presente em todos os ambientes, esse é um aspecto positivo que facilitará o trabalho dessa etapa.

Segundo Burak (2004, p. 8), esta etapa "ajuda a formar um comportamento mais atento, mais sensível, que são atributos importantes na formação de uma postura investigativa. Pode contribuir com aspectos de uma formação envolvendo valores, atitudes e espírito mais crítico, além de desenvolver a autonomia e um olhar mais atento para as situações pesquisadas".

2.3. O levantamento do problema

Esta etapa ocorre a partir dos dados coletados na etapa anterior e refere-se ao "por quê", agregando valores da Educação Matemática associada à Filosofia, cujos enfoques respaldam suas ações, relacionados ao conteúdo cognitivo dos estudantes.

Vale destacar que o trabalho de Modelagem nessa perspectiva permite ao grupo de estudantes aprender a formular perguntas e questões e a indagar o sentido das informações e dos conteúdos matemáticos apresentados no contexto estudado.

Assim, essa perspectiva da Modelagem traz alternativas aos casos hipotéticos dos livros e materiais didáticos, relativos às atividades matemáticas. Segundo Klüber (2016, pp. 42-43), a alternativa ocorre "a partir de uma ação dos próprios estudantes e o significado atribuído à ação de coleta de dados, de organização e elaboração de questões de investigação é de assimilação da realidade".

Na caracterização desta etapa, Burak (2004) propõe que o (s) levantamento (s) do (s) problema (s):

- Sejam elaborados a partir dos dados coletados na pesquisa exploratória;
- Estimulem a busca e a organização dos dados;
- Possuem, geralmente, caráter genérico, o que exige esforço e reflexão por parte dos alunos e do professor;
- Favorecem a compreensão de uma situação problema;

- Incentivam a participação ativa do aluno nas decisões e elaboração (BURAK, 2004, p. 9).

2.4. Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático

Este é o momento em que os conteúdos matemáticos, questionados como e onde usá-los, serão úteis no desenvolvimento do projeto inicial e oportunizando a construção do modelo matemático para a Modelagem. Aqui, o significado de "modelo matemático" será ampliado e não se restringe apenas aos conceitos e propriedades matemáticas e determinará quais "ferramentas matemáticas" (Geometria, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais, etc.) deveremos usar na solução.

Ao evidenciar então a necessidade de resolução, pode-se construir o modelo matemático necessário àquela situação problema, valendo-se, por exemplo, do Cálculo Diferencial e Integral e das Equações Diferenciais, dentre outros. Segundo Burak (2004, p. 10), "é nesse momento que que entendemos que se dá a relação mais forte entre o componente Matemática e o componente Psicologia da Educação Matemática, não esquecendo que essa relação foi subsidiada ao longo do processo, por outros componentes que ainda se fazem presentes, por estarmos trabalhando no contexto do tema escolhido".

2.5. Análise crítica da solução do problema

Considera-se que esta é a principal etapa da Modelagem em si, na perspectiva sociocrítica. Nela, estão embasados argumentos propostos na visão da Educação Matemática Crítica. Esta análise crítica da solução é o momento que culmina com o desenvolvimento do pensamento crítico e argumentação lógica dos conteúdos matemáticos usados na solução, bem como as formas que foram utilizadas no desenvolvimento das situações encontradas ao longo da solução do problema inicialmente proposto.

Segundo Burak e Klüber (2004), esta etapa é fundamental pois, numa visão mais ampla de ciência e cidadania, pode favorecer amplamente:

> A discussão de aspectos relacionados à Matemática, à Sociedade, à Cultura, à Economia e à Política. Além disso, pode-se perceber nesse momento, implicações para a forma de conceber a Modelagem no contexto da Educação Matemática, que leva em consideração uma natureza das Ciências Humanas e Sociais, que envolve mais do que a componente Matemática, mas enseja o momento para a discussão, levando em consideração os componentes sociais, psicológicos, antropológicos e históricos que, muitas vezes, são deixados de lado, quando se procura uma visão mais convergente para a Matemática (BURAK & KLUBER, 2004, p. 16).

Outro aspecto importante a destacar refere-se à possibilidade que implica a Interdisciplinaridade, cujas as discussões levam a momentos de interação da Matemática com outras áreas de conhecimento. Vale destacar também a inclusão das tecnologias digitais numa perspectiva atual das Metodologias Ativas, capazes de amenizar a exclusão digital que, por vezes, ocorre nos lares brasileiros. Levando-se em consideração os resultados obtidos e por meio de reflexões críticas, pode-se enriquecer e conduzir a discussões e debates interessantes, inerentes ao contexto social, cujos efeitos se fazem presentes nos aspectos culturais, políticos, econômicos e sociais.

Burak e Klüber (2004), contribuem uma vez mais sobre a Modelagem nesta perspectiva, afirmando que:

> No trabalho com a Modelagem, o papel do professor fica redefinido, pois este passa a ser o mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo; o problematizador, ao promover e articular situações decorrentes do processo; o orientador, no sentido dos possíveis encaminhamentos a serem adotados. Essas atitudes se diferenciam das atitudes do ensino usual, em que, na maioria das vezes, o professor é o centro do processo. O fato de compartilhar o processo de ensino denota uma nova postura do professor. Ele se torna um aprendiz juntamente com os estudantes, há um educador-educando e um educando –educador, conforme enuncia Freire" (BURAK & KLUBER, 2004, p. 17).

Assim, justificamos nossa escolha pela concepção de Modelagem na Educação Matemática, abordada numa dimensão sociocrítica como defendida por Burak e Klüber (2004), cujo cerne são processos de ensino e aprendizagem da Matemática:

> A Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática busca manter-se em estreita harmonia com a visão apresentada, em que a Matemática, seu ensino/aprendizagem é considerado como uma prática social. Isto, na medida em que envolvem uma comunidade de estudantes, o desenvolvimento de um conjunto de ações que amplia o espaço de sala de aula, bem como se orienta por princípios que envolvem: interesse e visão antropológica e a possibilidade da construção de conhecimentos matemáticos e interdisciplinares. Ou seja, uma visão que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que podem se fazer presentes no processo de ensino/aprendizagem da Matemática (BURAK & KLUBER, 2004, p. 3).

Observadores do contexto social atual, como cidadãos e professores do século XXI, a reflexão torna-se necessária em nossa vida e prática pedagógica. Aliar-se a livros, materiais didáticos e práticas que movimentam a educação a novos meios de produzir o conhecimento matemático é uma necessidade. Os estudantes atuais são delineados pelas características da pós-modernidade e devem vivenciar a realidade da interdisciplinaridade, de novas culturas e da Educação Inclusiva.

Essa integração com outras áreas do conhecimento é assim muito bem descrita por Machado (1995, p. 193): "A interdisciplinaridade é hoje uma palavra-chave para a organização escolar; pretende-se com isso uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas, através da fixação de um objeto comum do qual os objetos de cada uma delas constituem sub-objetos".

O ensino tradicional de Matemática, muitas vezes, resulta em estudantes que "não conseguem aprender" ou que revelam "não gostar de Matemática". Por outro lado, a Educação Matemática por meio de suas teorias sugere que o educador matemático, além de dominar os conhecimentos matemáticos, precisa implementar metodologias ativas e alternativas que abordem novas competências capazes de construir o conhecimento matemático através de problematizações, com atitudes críticas e autonomia.

Como aqui evidenciado, a Modelagem torna-se uma alternativa viável e, por meio dela, é possível evidenciar que o professor tem um novo papel de mediador do conhecimento matemático, numa visão diferente da forma tradicional. Outro fato relevante da Modelagem é a questão da socialização, que é uma das principais funções da escola e pode ser favorecida pelo trabalho em grupo, permitindo que os estudantes se relacionem entre si e adquiram outras formas de interação, conforme argumenta Delval (2001).

Assim, consideramos adotar a Modelagem na dimensão sociocrítica, justificando sua potencialidade como projeto alternativo ao ensino da Matemática, uma vez que aborda em seus aspectos vitais, temas atuais sugestionados pela Educação Matemática, apresentados à luz da construção, fundamentação e desenvolvimento de conceitos matemáticos contextualizados com situações diversas, integrados a outras áreas de conhecimento e favorecidos pela socialização do trabalho em grupo, contribuindo para a quebra do paradigma do currículo linear conforme argumenta D'Ambrósio (2012).

Por fim, recorremos a Paulo Freire (2004), cujas ideias se enquadram perfeitamente nas considerações da Modelagem na dimensão sociocrítica, numa situação segundo ele de "educação problematizadora":

> Não há um educador do educando ou um educando do educador. Há sim um educador-educando e um educando-educador. Ambos constituem em sujeitos do processo de ensino e de aprendizagem, são sujeitos históricos e reais, no sentido de estarem no mundo enfrentando problemas que muitas vezes extrapolam o âmbito escolar, os problemas da vida (FREIRE, 2004).

3. Atividades de Modelagem Matemática para disciplinas de EDO

Apresentação:

Essas atividades de Modelagem devem ser feitas em grupo. Lembramos que o objetivo principal não é verificar "a" solução matemática correta ou somente técnicas de resolução de Equações Diferenciais!

O objetivo é averiguar como se dá a linha de raciocínio de cada grupo ao resolver o problema em questão. Dessa forma, é natural, além de esperado, que as respostas de cada grupo sejam *diferentes* e podem ser até mesmo bem diferentes!

As respostas serão melhores quanto mais claras e objetivas forem. Não se limitem nas respostas. Fiquem à vontade para usar meios disponíveis, sejam físicos ou eletrônicos, para consultarem ao realizar a atividade, tais quais livros, apostilas, internet, dentre outros!

Mantenham uma boa comunicação com cada um do grupo. Como sugestão, podem também criar um grupo no Watts App para possíveis discussões virtuais sobre as respostas dadas!

3.1. Problema 1: crescimento exponencial

Problema de Variação Populacional – Lei de Malthus

Problema de valor de Contorno – PVC e Problema de Valor Inicial – PVI

(Extraído e adaptado de Laudares et al (2017))

ENUNCIADO:

DADOS:

(i) Uma população se desenvolve proporcionalmente à população atual, segundo a lei de Malthus;

(ii) Sabemos que a população inicial é de 5000 habitantes e, 10 anos depois, é 8000.

QUESTÕES:

(iii) Determine a população em qualquer tempo;

(iv) Determine os modelos de equações da população;

(v) Analise a variação da população;

(vi) Esboce os gráficos do modelo;

(vii) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações.

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO

Passo 1:

1.1). Identifique as variáveis para a solução do problema.

1.2) A variação da população, segundo a Lei de Malthus pode ser expressa matematicamente pela equação (1): $\frac{dP}{dt} = k.P \ \ com \ k \ > 0$

Passo 2:

Descreva as condições inicial e de contorno dadas no problema.

Passo 3:

Determine a população em qualquer tempo, encontrando outra equação (2), exponencial, a partir da equação (1).

Passo 4:

Por meio dos modelos das equações da população encontradas, determine:

a) Velocidade da variação da população em função do tempo pela equação (1);

b) Velocidade de crescimento da população em função do tempo pela equação (2);

c) Variação da população em função do tempo.

Passo 5:

Analise o crescimento da população por meio do modelo matemático proposto.

Passo 6:

Esboce os gráficos do desenvolvimento da população.

Passo 7:

7.1) Como suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado, responda:

a) Por que o gráfico da equação (1) é uma reta?

b) Por que o gráfico da equação (1) é crescente?

c) Por que o gráfico da equação (1) é positivo?

d) Do desenvolvendo da equação (1) surge uma outra equação (2), exponencial. Analise o gráfico dessa equação quanto à natureza da derivada;

e) Verifique que a equação do gráfico da equação (2) é crescente exponencialmente. Por quê?

f) Verifique que para um tempo crescente, a população será sempre crescente e não há limite. Por quê?

7.2) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto comparando os gráficos e as equações.

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Malthus.

3.2. Sugestão de Resolução do problema 1

Passo 1:

1.1) Identifique as variáveis para a solução do problema.

Na identificação das variáveis teremos:

P – como variação da população e sendo a variável dependente;

t – como variação do tempo e sendo a variável independente;

k – como a constante de proporcionalidade e $k > 0$

Assim, a variação da população (P), segundo a lei de Malthus, poderá ser expressa matematicamente como sendo: $\frac{dP}{dt} = k\,P$ na qual: $k > 0$ tendo em vista que ela é diretamente proporcional à população inicial, atendendo ao passo 1.2. Convém ressaltar que se: $k > 0$ teremos crescimento, enquanto se: $k < 0$ teremos decrescimento.

Passo 2:

Descreva as condições inicial e de contorno dadas no problema.

Entendemos que no tempo inicial t = 0 anos teremos P = 5.000 habitantes e no tempo t = 10 anos, teremos P = 8.000 habitantes.

Passo 3:

Determine a população em qualquer tempo, encontrando outra equação (2), exponencial, a partir da equação (1).

Para a determinação da população a qualquer tempo, vamos encontrar outra equação exponencial a partir da equação inicial. Podemos encontra-la conforme cálculos do Quadro 3.

Quadro 3 – Encontrando a Equação exponencial

$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow \frac{dP}{P} = kdt.$ Podemos usar integrais e teremos:
$\int \frac{dP}{P} = \int kdt \Rightarrow \ln\lvert P\rvert = kt + c_1 \Rightarrow P = e^{kt + c_1} = e^{c_1}.e^{kt} \rightarrow$
$P(t) = C.e^{kt} \rightarrow P(t) = C.e^{kt}$ (Lembre-se que P> 0).

Fonte: Dados do Autor (2020)

Vale relembrar aqui algumas dicas matemáticas, úteis na solução:

Propriedades das Integrais e dos logaritmos:

$$I) \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\text{II}) \log_b a = x \leftrightarrow a^x = b$$

Basta agora aplicar as condições iniciais e de contorno já descritas anteriormente para determinar a equação que determina a população a qualquer tempo, conforme Quadro 4.

Quadro 4 – Encontrando a Equação para resolução do fenômeno

I) se $t = 0 \rightarrow P = 5.000$ e então teremos:

$5.000 = C.e^{kt} \rightarrow 5.000 = C.e^0 \rightarrow C = 5.000$

$\rightarrow P = 5.000e^{kt}$

II) se t = 10 anos $\rightarrow$ P = 8.000 e então teremos;

$8.000 = 5.000\, e^{10k} \rightarrow e^{10k} = \frac{8.000}{5.000} = \frac{8}{5}$

Aplicando logaritmos, teremos: $\ln(e^{10k}) = \ln\left(\frac{8}{5}\right)$

$10k\,.\ln e = \ln(8) - \ln(5) \rightarrow 10k \sim 0,47 \rightarrow k \sim 0,047$

III) por fim: $P = 5.000e^{0,047t}$

Esta será a equação capaz de determinar a população a qualquer tempo.

Lembrete importante:

1) $\ln(x)^n = n\ln(x)$

2) $\ln\left(\frac{m}{n}\right) = \ln(m) - \ln(n)$

Fonte: Dados do autor (2020)

Passo 4:

Por meio dos modelos das equações da população encontradas, determine:

a) Velocidade da variação da população em função do tempo pela equação (1);

É imediato que:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = k\,P \;\Rightarrow\; \frac{dP}{dt} = 0{,}047\,P}$$

b) Velocidade de crescimento da população em função do tempo pela equação (2);

É imediato que se derivarmos a equação da população dada por: $P(t) = 5.000e^{0{,}047t}$ teremos a equação solicitada para a velocidade de crescimento da população em função do tempo. Essa operação está efetuada no Quadro 5.

Recordando da derivada:

$$D_x\,[k.e^u] = K.u.e^u$$

Quadro 5 – Equação da Velocidade de crescimento da população

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = (5.000).(0{,}047).e^{0{,}047t} \;\Rightarrow\; \frac{dP}{dt} = 235\,e^{0{,}047t}}$$

Fonte: Dados do autor (2020)

c) Variação da população em função do tempo.

Também é imediato que: $P(t) = 5.000e^{0{,}047t}$ já encontrada anteriormente.

Passo 5:

Analise o crescimento da população por meio do modelo matemático proposto.

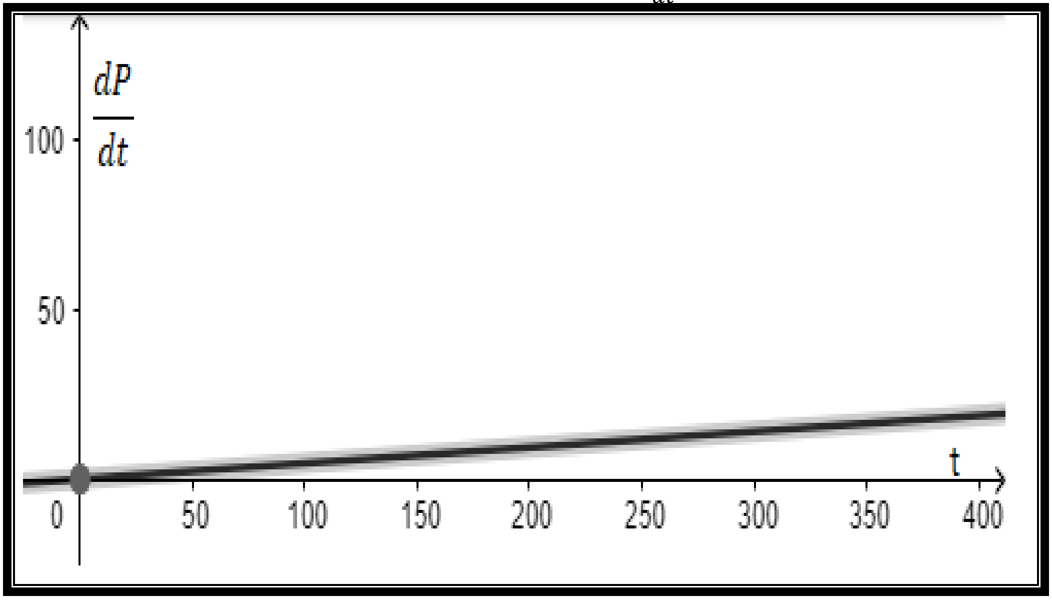
Como sugestão de análise, analisar o porquê de o crescimento ocorrer de forma exponencial e crescente de acordo com a lei de Malthus. Existe alguma relação desta equação com o estudo de funções exponenciais? E com o estudo de limites envolvendo o infinito? O modelo de equação é ideal para o estudo de uma população? Justifique sua resposta.

Passo 6:

Esboce os gráficos do desenvolvimento da população.

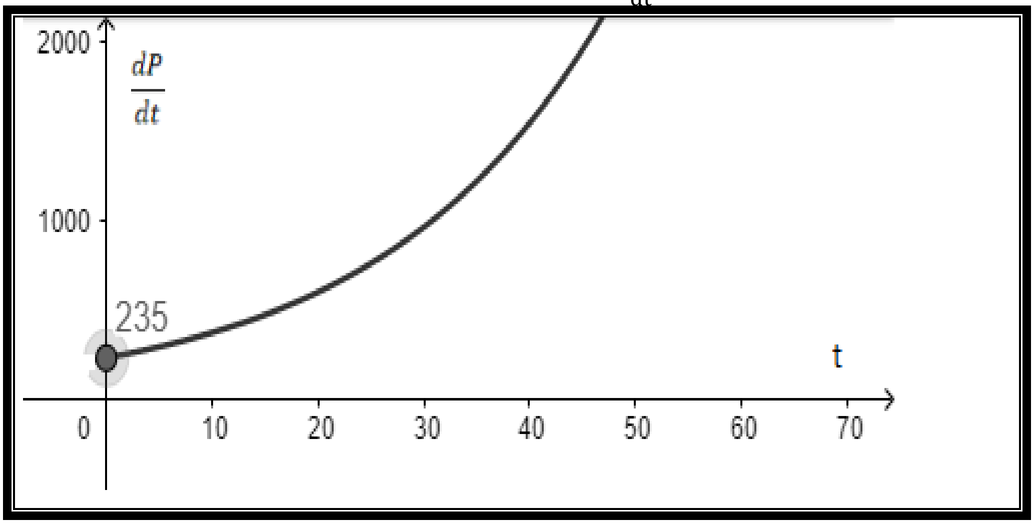
Sugerimos para o traçado dos gráficos a utilização da ferramenta GeoGebra. Vale lembrar que este software pode ser baixado a partir do *download* do site https://www.GeoGebra.org/download?lang=pt e trata-se de uma ferramenta capaz de auxiliar o professor de Matemática sob vários aspectos. A ferramenta possibilita explorar os conceitos matemáticos para o traçado de gráficos e auxilia no entendimento de propriedades relacionadas ao crescimento, concavidade (se for o caso), pontos de interseção com os eixos, as raízes ou zeros de suas equações (se houver), seus números críticos (se existir), dentre outros. Este espera-se ser um momento de compreensão e aprendizagem quanto aos conhecimentos matemáticos na formação do estudante de Matemática e em particular de Equações Diferenciais. Os Quadro 6, Quadro 7 e 8 trazem os gráficos solicitados no passo 6.

Quadro 6 – Gráfico da Equação: $\frac{dP}{dt} = 0{,}047\,P$



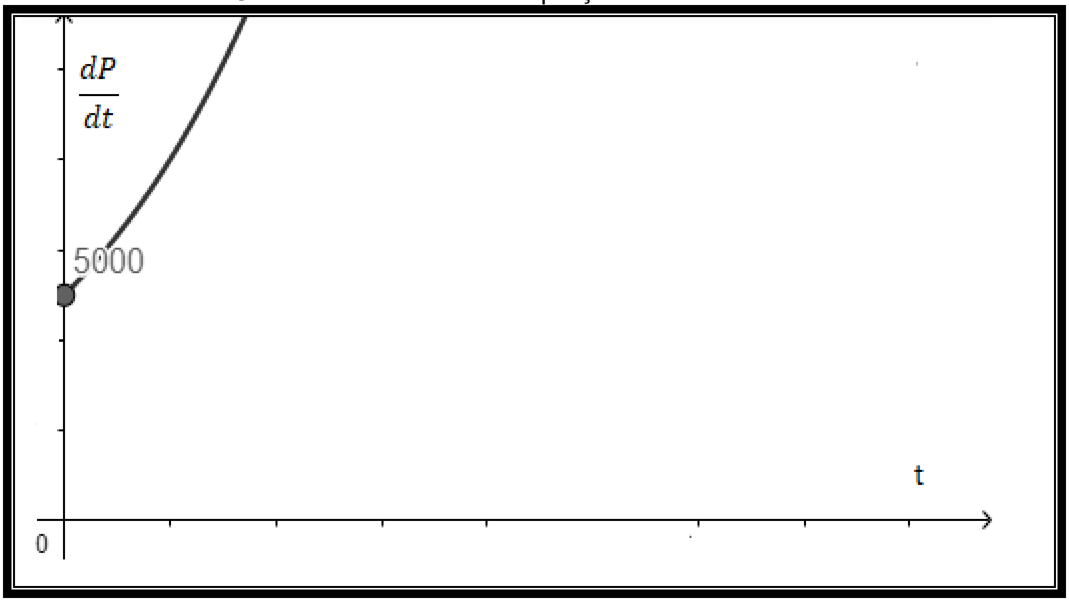
Fonte: Dados do autor (2020)

Quadro 7 – Gráfico da Equação: $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = 235\,\mathrm{e}^{0{,}047\mathrm{t}}$



Fonte: Dados do autor (2020)

Quadro 8 – Gráfico da Equação: $P = 5.000e^{0,047t}$



Fonte: Dados do autor (2020).

Passo 7:

7.1) como suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado, responda:

a) Por que o gráfico da equação (1) é uma reta?

b) b) Por que o gráfico da equação (1) é crescente?

c) c) Por que o gráfico da equação (1) é positivo?

d) Do desenvolvendo da equação (1) surge uma outra equação (2), exponencial. Analise o gráfico dessa equação quanto à natureza da derivada;

e) Verifique que a equação do gráfico da equação (2) é crescente exponencialmente. Por quê?

f) Verifique que para um tempo crescente, a população será sempre crescente e não há limite. Por quê?

Estes passos dão compreensão acerca do fenômeno populacional por meio da análise de seus gráficos e espera-se que possam ser analisados a partir das compreensões dos conceitos matemáticos que envolvem funções e as propriedades de derivadas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Um momento importante das atividades para se observar na prática como os conceitos matemáticos são importantes na análise de situações-problema envolvendo questões do cotidiano.

Questões importantes para lembrarmos:

I) Qual é o entendimento para k> 0 e/ou k < 0 nas Equações encontradas?

II) O que significará para a curva $\frac{dP}{dt} > 0$?
E $\frac{dP^2}{dt^2} > 0$?

7.2) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto comparando os gráficos e as equações.

Este poderá ser um momento ao qual o aluno perceberá os conceitos matemáticos associados ao estudo do fenômeno estudado. Portanto, as respostas poderão vir associada à questão de o porquê a lei de Malthus considerar um crescimento exponencial da população. Lembrando que a lei de Malthus foi pensada ao final do século XVIII, em plena revolução industrial e num momento diferente do momento atual na forma de organizar as questões sociais, culturais e políticas.

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Malthus.

Este pode ser considerado como o ápice das atividades de Modelagem na perspectiva sociocrítica. Espera-se que neste momento, os alunos tragam informações relacionando o tema população com questões da Matemática que sirvam de reflexões tais como: A lei matemática proposta por Malthus faria sentido ser adotada para projeções da população atual? Por quê? O que difere nas formas de organização da sociedade do tempo da proposta da lei de Malthus relacionado-se com os dias atuais? O que podemos extrair como pontos positivos e negativos da lei de Malthus?

A história, de uma forma geral, traz nuances das características de culturas de gerações passadas. Existem fatores comuns entre aquela geração (da época da revolução industrial) e a de hoje? Com relação às questões populacionais as taxas de natalidade, de mortalidade são fatores considerados na lei de Malthus? A lei de Malthus considerava fatores sociais como saúde, educação, segurança pública, dentre outros em sua elaboração?

Outro ponto que pode ser explorado refere-se ao fato que a lei de Malthus considerava um crescimento ilimitado da população, não considerando fatores atuais como concentração populacional em áreas urbanas, desigualdade de distribuição de renda, fatores de gêneros e de constituições familiares, bem como de produção de alimentos.

3.3 Problema 2: análise do modelo de demanda e crescimento populacional

Lei de Malthus – Lei de Verhulst

Problema de Valor Inicial – PVI

(Extraído e adaptado de Laudares et al (2017))

ENUNCIADO:

DADOS:

(i) Leis de Demanda e Crescimento Populacional

Lei de Malthus: A Lei de Malthus é que a taxa instantânea de variação de uma população P é proporcional à população presente no instante t considerado, isto é, $\frac{dP}{dt} = kP$, cuja solução é da forma: $P = C.e^{kt}$ conforme visto no Problema 1.

Lei de Verhulst: Observando a Lei de Malthus e sua equação modelo, que admite um crescimento ilimitado (exponencial) para a população e, ainda, manipulando dados estatísticos da época, Verhulst percebeu que uma população, na vida real, não cresce de forma ilimitada. Ele constatou que, em situações normais, as regiões habitáveis (cidades, estados e países) tendem a sofrer o efeito da concentração populacional e, então, ele assumiu que "a taxa relativa de crescimento de uma população decresce linearmente, considerando a evolução da população no tempo". Isso correspondeu a assumir k, na equação de Malthus, como uma função linear decrescente. Significa considerar k como um fator de redução do crescimento ilimitado da população, provocado, na vida real, pela escassez e disputa por recursos naturais. Portanto, o modelo logístico para a Lei de Verhulst é: $\frac{dP}{dt} = (a - bP)P$

(ii) Num instante inicial t = 0, a população é dada por $P = P_0$.

QUESTÕES:

(iii) Determine a função P = P(t), solução analítica da Equação Diferencial de Verhulst;

(iv) Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst;

(v) Esboce os gráficos do modelo de Verhulst;

(vi) Descreva num pequeno texto os modelos de Malthus e Verhulst comparando os gráficos e as equações.

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO:

Passo 1:

1.1) Identifique as variáveis para a solução do problema;

1.2) Expresse matematicamente a Lei de Malthus;

1.3) Expresse matematicamente a Lei de Verhulst.

Passo 2:

Descreva a condição inicial dada no problema.

Passo 3:

Determine o modelo de Verhulst, que é uma Equação Diferencial de 1ª ordem resolvida pelo método da separação de variáveis.

Passo 4:

Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst.

Passo 5:

Esboce o gráfico do modelo de Verhulst.

Passo 6:

A partir do seu entendimento do comportamento da demanda e crescimento populacional, escreva um texto comparando os gráficos e as duas Leis: de Malthus e de Verhulst.

Passo 7:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Verhulst.

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir de leis matemáticas e outros instrumentos estatísticos utilizados no Brasil.

3.4 Sugestão de Resolução do problema 2

Passo 1:

1.1) Identifique as variáveis para a solução do problema;

Na identificação das variáveis, teremos:

P é a variação da população e constitui-se na variável dependente;

t é a variação do tempo e constitui-se na variável independete;

$\frac{dP}{dt}$ é a velocidade instantânea, constitui-se na derivada e se presta ao cálculo da velocidade de crescimento da população (P);

k é a constante de proporcionalidade

1.2). Expresse matematicamente a Lei de Malthus;

A lei de Malthus é expressa por meio da equação matemática:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP \;\Rightarrow\; P(t) = C.e^{kt} \;\Rightarrow P(t) = P_0.e^{kt}}$$

1.3). Expresse matematicamente a Lei de Verhulst.

A lei de Verhulst é expressa por meio da equação matemática:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = (a - bP)P, na\ qual\ a \in IR, b \in IR\ com\ a > 0\ e\ b > 0}$$

Passo 2:

Descreva a condição inicial dada no problema.

No início do estudo do problema teremos:

$$\boxed{t = 0 \;\Rightarrow\; P = (P_0)}$$

Passo 3:

Determine o modelo de Verhulst, que é uma Equação Diferencial de 1ª ordem do tipo separação de variáveis.

Traremos a resolução desse passo por meio dos quadros 9, 10 e 11.

Quadro 9 – Decompondo a equação em frações parciais

$\frac{dP}{dt} = (a - bP)\,.P \;\rightarrow\; \frac{dP}{(a-bP).P} = dt$
$\frac{1}{(a-bP).P} = \frac{A}{(a-bP)} + \frac{B}{P} = \frac{A.P+B.(a-bP)}{(a-bP).P}$ Daí teremos:
$A.P + B.(a - bP) = 1, válidos\ para\ P \geq 0$
$Se\ P = 0 \;\rightarrow A.0 + B.(a - 0) = 1 \;\rightarrow B = \frac{1}{a}$
$Se\ P = \frac{a}{b} \;\rightarrow A.\left(\frac{a}{b}\right) + B.\left[a - b.\left(\frac{a}{b}\right)\right] = 1 \;\rightarrow A.\left(\frac{a}{b}\right) + B.(0) = 1 \;\rightarrow A = \frac{b}{a}$
E então: $\frac{dP}{(a-bP).P} = \frac{b}{a.(a-b.P)}dP + \frac{1}{a.P}\,dP = dt$

Fonte: Dados do autor (2020).

Quadro 10 – Integrando as frações parciais

$I)\ \int \frac{1}{aP}\, dP = \frac{1}{a} . \int \frac{dP}{P} = \frac{1}{a} . \ln|P| + c_1$

$II)\ \int \frac{b\, dP}{a.(a-bP)} = \left(\frac{b}{a}\right) . \int \frac{dP}{a-bP}$ Considerando: $u = a - b.P$ teremos:

$\left(\frac{b}{a}\right) . \int \frac{(-\,du)}{b.u} = \left(\frac{b}{a}\right) . \left(-\frac{1}{b}\right) . \int \frac{du}{u} = \left(-\frac{1}{a}\right) . \ln|a - b.P| + c_2$

Isso fazendo a substituição:

$a - b.P = u \rightarrow -b.dP = du \rightarrow dP = \left(-\frac{du}{b}\right)$

III) $\int dt = t + c$

Assim virá: $\int \frac{b}{a.(a-b.P)} dP + \int \frac{1}{a.P}\, dP = \int dt$ O que nos levará a:

$\frac{1}{a} \ln|P| - \left(\frac{1}{a}\right) . \ln|a - b.P| = t + c_3$

Fonte: Dados do autor (2020).

Quadro 11 – Simplificando as expressões

$\left(\frac{1}{a}\right) . [\ln|P| - \ln|a - b.P|] = t + c \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right) . \ln\left[\frac{|P|}{|a-b.P|}\right] = t + c$

$\ln\left[\frac{|P|}{|a-b.P|}\right] = a.(t + c) \rightarrow \left[\frac{|P|}{|a-b.P|}\right] = e^{a.(t+c)} = e^{at}.e^{a.c} = e^{at}.K$

Assim: $|P| = |a - b.P|e^{at}.K$

Podemos retirar os módulos, pois somente nos interessa $\frac{dP}{dt} > 0$ e ainda: $0 < P_0 < P$ Na qual, P_0 representa a população inicial. Assim,

$P = (a - b.P).k.e^{at}$

Na condição inicial, se t = 0, teremos então: $P = P_0$ e por consequência vem:

$P_0 = (a - b.P_0).k.e^0 = (a - b.P_0).k \Rightarrow k = \frac{P_0}{(a-b.P_0)}$

Substituindo o valor de K em P vem,

$P = (a - b.P).\left(\frac{P_0}{a-b.P_0}\right).e^{at}$ O que resulta em:

$P = \frac{a.P_0 - b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} - \frac{b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$ O que nos levará a:

$P + \frac{b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$

$$\frac{P.[(a-b.P_0).e^{-at}]+b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$$

$$P.\left[\frac{(a-b.P_0).e^{-at}+b.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}\right] = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$$

$$P = \frac{a.P_0.[(a-b.P_0).e^{-at}]}{[(a-b.P_0).e^{-at}+b.P_0].(a-b.P_0).e^{-at}}$$ E por fim:

$$P = \frac{a.P_0}{b.P_0+(a-b.P_0).\,e^{-at}} \Rightarrow P(t) = \frac{a.P_0}{b.P_0+(a-b.P_0).\,e^{-at}}$$

Fonte: Dados do autor, adaptado de Laudares et all (2017).

Ressaltamos que outras sugestões de solução podem ser encontradas em outros livros de EDO. Sugerimos, dentre eles, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno de Boyce & Prima, 2010, 9ª ed. p. 60-63.

Passo 4:

Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst.

Como sugestão, deixamos algumas análises que devem ser feitas para o traçado do esboço da curva do modelo de Verhulst.

Vale lembrar que:

É sempre importante verificar o domínio de uma função para o traçado do gráfico. Aqui o domínio será o conjunto dos números reais positivos.

I) O ponto inicial do traçado deverá ser o ponto tomado pelas coordenadas de t = 0, quando P assume o valor de P_0 Assim teremos $(0,\ P_0)$

II) À medida que o tempo (t) aumenta, P (t) assume os valores: $P_\infty = \frac{a}{b}$ que é chamado de população limite (suporte e/ou de saturação). Podemos dizer que $P_\infty = \frac{a}{b}$ é o valor assintótico da população, para uma população inicial na qual $P_0 > 0$.

Assim, percebemos que se: $0 < P_o < P_\infty$ a população P (t) cresce, tendendo para P_∞ e o gráfico de P (t) estará entre as retas de: $P = 0 \; e \; P = P_\infty$ A seguir traremos os cálculos de $P_\infty = \frac{a}{b}$ no Quadro 12 tomando como base a condição de t aumentar ao longo de um longo tempo. Assim, se $t \rightarrow \infty$ teremos: $P = \frac{a}{b}$.

Quadro 12 – Cálculo da assíntota horizontal

$$\lim_{t\to\infty}[P(t)] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{a.P_0}{b.P_0 + (a-b.P_0)\,.\,e^{-at}}\right] =$$

$$\frac{\lim_{t\to\infty}(a.P_0)}{\lim_{t\to\infty}[b.P_0 + (a-b.P_0)\,.\,e^{-at}]} = \frac{\lim_{t\to\infty}(a.P_0)}{\lim_{t\to\infty}(b.P_0) + \lim_{t\to\infty}\left((a-b.P_0)\,.\,e^{-at}\right)} =$$

$$\frac{(a.P_0)}{(b.P_0)+0} = \frac{a}{b}$$

Fonte: Dados do autor (2020)

Este limite matemático encontrado é chamado de população limite e é um conceito trazido do Cálculo Diferencial e Integral numa diretriz para traçados de gráficos que envolve os conceitos de assíntotas. Se $\lim_{t\to\infty}[P(t)] = \frac{a}{b}$, então a reta $y = \frac{a}{b}$ será uma assíntota horizontal. Entendemos aqui que $P_0 > 0$ e a população inicial é menor que P, quando o tempo tender a infinito, ou seja P_∞. Assim, a população futura definida no modelo como P (t) cresce, tendendo para P_∞ e a curvatura do gráfico de P(t) estará limitada entre as retas de P = 0 e de P = P_∞. Literaturas definem essa curva como tomando a forma de um “S”, denominada como curva Logística, conforme define Laudares, et all (2017, p. 123).

III) O gráfico terá um ponto de inflexão importante, tendo em vista que nele há uma mudança de comportamento na variação da população. Antes desse ponto, a concavidade está voltada para cima e de forma crescente. Após esse ponto, a concavidade está voltada para baixo, atendendo o objetivo proposto pela lei de Verhulst. Isso significa que continua crescendo, mas, para valores que tendem à população limite: $P_\infty = \frac{a}{b}$

Vale lembrar que esse ponto de inflexão acontece em $\left(t, \frac{P_\infty}{2}\right)$ conforme mostram os cálculos do quadro Quadro 13.

Quadro 13 - Cálculos do ponto de inflexão (I)

$$\frac{dP}{dt} = (a - bP).P \quad \rightarrow \quad \frac{d^2P}{dt^2} = (a - bP).1 \; + \; (-b).P = a - 2bP$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow a - 2bP = 0 \quad \Rightarrow P = \frac{a}{2b}$$ (Ordenada do ponto I)

Assim o ponto de inflexão será:

$$I = (t, P(t)) = \left(t, \frac{a}{2b}\right)$$

Fonte: Dados do autor (2020).

Compreendemos assim que a população cresce tendo sua derivada positiva até atingir o ponto de inflexão I e tendo sua concavidade voltada para cima, conforme diretrizes e propriedades do Cálculo Diferencial e Integral. Atingindo esse ponto, a população tenderá a crescer de forma mais lenta e tenderá a ser aproximar da linha assintótica determinada por $P_\infty = \frac{a}{b}$.

Passo 5:

Esboce o gráfico do modelo de Verhulst

A seguir algumas dicas para o traçado de gráficos em geral e o esboço do gráfico da lei de Verhulst definida por $\frac{dP}{dt} = (a - bP).P$ conforme quadro Quadro 14.

Algumas dicas para o traçado do gráfico:

I) Lembrar do domínio Real e positivo;

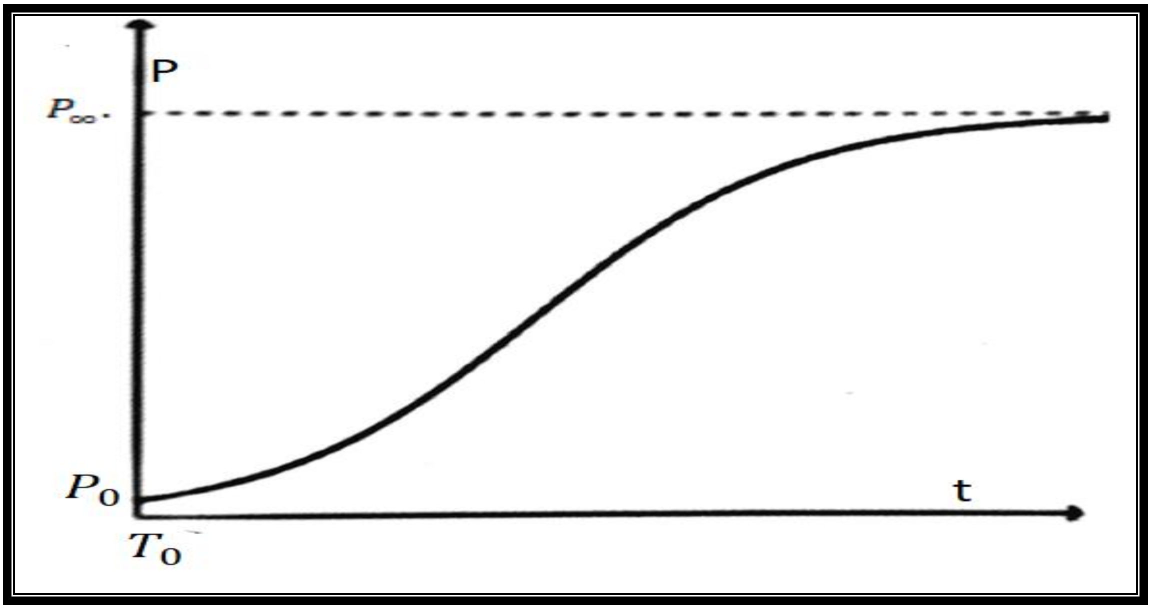
II). Atribuir os valores de: (T_0, P_0);

III). Traçar a assintótica definida por $P_\infty = \frac{a}{b}$;

IV). Efetuar o cálculo para o ponto de Inflexão;

V) Lembrar da concavidade voltada para cima até o ponto de Inflexão e voltada para baixo após o ponto de inflexão.

Quadro 14 - Gráfico da lei de Verlshulst



Fonte: Adaptado de Laudares 2017

Passo 6:

A partir do seu entendimento do comportamento da demanda e crescimento populacional, escreva um texto comparando os gráficos e as duas Leis: de Malthus e de Verhulst.

Nesta etapa de resolução espera-se que os alunos encontrem pontos comuns e não comuns entre as duas leis matemáticas. É possível explorar por meio das duas leis várias propriedades matemáticas envolvendo as derivadas inerente ao traçado de gráficos: Números críticos e extremos locais, crescimento e decrescimento da curva, continuidade, interceptos, ponto de inflexão, concavidade, dentre outros.

Assim, entre outras questões, também deve-se considerar que as atividades podem ressignificar conhecimentos matemáticos em questionamentos e observações tais como: por que a lei de Verhulst considera a constante k = (a – bP)? Qual a influência deste fator nas duas leis? O que representa a assíntota horizontal $P_\infty = \frac{a}{b}$ na lei de Verhulst? O que representa nessa lei de Verulst, o ponto de Inflexão? É possível acontecer um $P_0 > P_\infty$ na lei de Verhulst? Explique sua resposta.

Na análise gráfica, observa-se um ponto de inflexão e a concavidade da curva para cima até atingi-lo. Por que isso ocorre? Os gráficos das equações das leis de Malthus e de Verhulst possuem números críticos e extremos locais?

Passo 7:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Verhulst.

Assim como na avaliação crítica da lei de Malthus, os alunos devem trazer informações a partir de pesquisas sobre o que é a lei de Verhulst. Ela foi proposta em quais perspectivas? Ela é viável para projeção do cálculo populacional para nossa geração do século XXI? Por quê?

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir de leis matemáticas e outros instrumentos estatísticos utilizados no Brasil.

Esta etapa do trabalho pode inserir o estudante de Equações Diferenciais na compreensão de que a Matemática tem o poder de emancipar as pessoas no exercício pleno da cidadania. A temática proposta para o projeto de Modelagem na perspectiva scociocrítica compreendendo a questão populacional tem essa capacidade, mesmo que num primeiro momento aconteça de forma implícita.

Sua perspectiva traz em seu contexto, aspectos sobre a cultura de gerações passadas e de nossa também, todas associadas às questões sociais. Assim, um "simples modelo matemático", cuja resolução se dá por meio das Equações Diferenciais traz nuances de criticidade que podem ser amplamente explorados nas atividades.

Dessa forma, pode-se esperar conjecturas tais como essas que sugestionamos a seguir, entre outras tantas que podem ser levantadas individualmente ou pelo grupo de trabalho. Se é fato que a taxa de natalidade brasileira atual é menor, analisadas sob vários aspectos, estão aí indícios de vários aspectos sociais e políticos. Como exemplo: Por que o número de filhos, por mulher na idade fértil, nas décadas passadas correspondia a um número maior que atualmente, de acordo com dados estatísticos trazidos pelos Censos populacionais do IBGE?

A educação – e em especial a Matemática, não deve constituir-se somente em uma ferramenta que prepara as pessoas para a vida futura no tocante à área profissional e servir para instrumentalizá-las. Essa é uma preocupação, trazida por Araújo e Barbosa (2007, p. 29): "A educação não pode ser discutida apenas em termos de preparação para a educação futura ou para o mercado de trabalho.

Escolarização também significa preparação para a cidadania e participação na vida social e política".

Desse modo, as leis matemáticas e outros instrumentos estatísticos do Brasil não são somente números e também se prestam a trazer cidadania para o espaço escolar contribuindo para a formação de cidadãos mais questionadores e que exercem melhor seus direitos e deveres perante a sociedade.

Essas nuances sobre a questão dos números da população brasileira podem ainda trazer questionamentos do tipo: por que os números mostram que as gerações atuais pagam cada vez mais impostos? Quais números, importantes para a população brasileira, estão expressos implicitamente na nossa constituição federal promulgada em 1988? Por que são necessários os debates sobre os números que trazem à tona temáticas atuais como a questão das reformas da previdência, trabalhista e tributária? Uma outra questão acerca do número atribuído ao valor do salário mínimo e o pagamento de impostos: pessoas de classes econômicas diferentes pagam impostos igualmente?

Questionamentos assim evidenciam que a Matemática está inserida na sociedade e é por meio dela que se estabelecem as diretrizes para tomadas de decisões importantes para a sociedade. Conhecimentos matemáticos não podem servir somente para nos capacitar a "fazer contas" e dar o resultado final, ou para trabalharmos no comércio e/ou nas instituições financeiras. Calculadoras e outros equipamentos eletrônicos podem fazer essas operações para nós, restando-nos a interpretação do que podemos fazer com os números trazidos pelas tecnologias.

Essas são algumas sugestões que as leis matemáticas inseridas nas estatísticas populacionais podem trazer e auxiliar o professor de Equações Diferenciais a entender melhor nossa cultura e sociedade atual e assim nos tornarmos cidadãos mais conscientes e críticos e por meio dessa condição escolhermos melhor nossos governantes.

Ainda pode-se esperar conjecturas acerca de questionamentos tais como: Segundo as leis de Malthus, de Verhulst e outros modelos matemáticos, qual relação os números nos mostram entre o crescimento da população e outros fatores externos? As leis matemáticas podem indicar a possibilidade de uma melhor distribuição da riqueza e por consequência na diminuição das desigualdades sociais? Por que um percentual muito pequeno da população brasileira concentra a maior parte da riqueza nacional equivalendo ao que a maior parte da população menos favorecida tem acesso? Como as leis matemáticas de projeção populacional podem contribuir para o quanto devemos ter de produção de alimentos, de forma que todos tenham acesso?

Outros vários fatores podem estar nas entrelinhas das estatísticas populacionais trazidas na contagem populacional: Como elas podem contribuir para os investimentos em saúde pública (vacinas, por exemplo)? Ou ainda para outros fatores como urbanização, saneamento básico e investimentos de alternativas para exploração do meio ambiente visando a preservação da natureza e garantia da continuação de extração de insumos básicos de sobrevivência humana.

Esses são fatores, dentre outros, que devem ser levados em consideração no momento de resolução de atividades como essa, expressas na forma de leis matemáticas e resolvidas por meio das Equações Diferenciais. Assim, trazemos essas sugestões de análises críticas e entendemos que a Matemática pode nos emancipar. Como professores de Matemática nos cabe o questionamento: qual e de que maneira a Matemática pode contribuir para a sociocriticidade?

Vale lembrar que não basta falarmos de criticidade sem nos atentar para uma educação de qualidade para todos os brasileiros. Ela, sem dúvida, será o instrumento que poderá auxiliar no combate às desigualdades sociais, a partir do momento que oportunizar uma aprendizagem de qualidade. Ela gera cidadania, é capaz de transformar vidas e é por meio dela que se tem a possibilidade do desenvolvimento pleno da sociedade. E é nesse contexto que se encontra a Matemática, uma lente com a capacidade de solucionar situações problemas e trazer entendimento para a sociedade dos seus inúmeros contextos. Assim é que podemos dizer que educação tem um compromisso com a esperança.

Referências

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 17-32, 2007.

ARAÚJO, J. L.; MARTINS, D. A. A oficina de modelagem #ocupaICEX: empoderamento por meio da matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** v.6. n. 12, p. 109-129, 2017.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R.C. **Equacees Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Trad. Iorio, V. M. 9ª ed. LTC, Rio de janeiro, 2010. p. 60-69.

BURAK, D. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino/aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

____________. **A Modelagem matemática e a sala de aula.** In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004. Anais... Londrina: UEL, s.n., 2004. 1 CD ROM.

BURAK, D.; KLUBER, T. E, et all: **Modelagem Matemática. Perspectivas, experiências, reflexões e teorizações.** 2ª edição revista e ampliada. Ponta Grossa, Editora UEPG, 2016.

BURAK, D.; KLUBER, T. E. **Considerações sobre a Modelagem Matemática em uma perspectiva de Educação Matemática**. Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004. Anais ... Londrina: UEL, s.n., 2004. 1 CD ROM.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre Educação Matemática**. Campinas: UNICAMP, 1986.

______________. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2014.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2004.

KLUBER, T. E.; BURAK, D. Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

______________________ . Sobre a pesquisa qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 862-882, 2012.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F.; REIS, J. P. C.; FURLETTI, S. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace**: Análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas Atividades com softwares livres. 1a. ed. Belo Horizonte: Artesã, 2017. v. 1. 319 p.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MMP**. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2008.

MIORIM, M. A. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 2003.