Sebastião Aparecido de Araújo

UTILIZANDO A DIMENSÃO SOCIOCRÍTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ouro Preto – MG

2020

Sebastião Aparecido de Araújo

UTILIZANDO A DIMENSÃO SOCIOCRÍTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Frederico da Silva Reis.

Ouro Preto – MG

2020

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

A663u Araújo, Sebastião Aparecido de.
Utilizando a dimensão sociocrítica da modelagem matemática no ensino de equações diferenciais para o curso de licenciatura em matemática. [manuscrito] / Sebastião Aparecido de Araújo. - 2020.
198 f.

Orientador: Prof. Dr. Frederico da Silva Reis Reis.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Equações diferenciais - Estudo e ensino. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Licenciatura. I. Reis, Frederico da Silva Reis. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 510:378

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
DEPARTAMENTO DE EDUCACAO MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sebastião Aparecido de Araújo

Utilizando a dimensão sociocrítica da Modelagem Matemática no ensino de Equações Diferenciais para o curso de Licenciatura em Matemática

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática

Membros da Banca examinadora

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. João Bosco Laudares (Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais)
Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana (Universidade Federal de Ouro Preto)
Prof. Dr. Wenderson Marques Ferreira (Universidade Federal de Ouro Preto)

Versão Final
Aprovada em 04 de dezembro de 2020

De acordo
Professor Orientador
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis (UFOP)

Documento assinado eletronicamente por **Frederico da Silva Reis**, **PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 04/12/2020, às 18:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 , informando o código verificador **0111851** e o código CRC **76B0BE4A**.

Referência: Caso responda este documento, indicar expressamente o Processo nº 23109.009415/2020-98 SEI nº 0111851

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: - www.ufop.br

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda”.

Paulo Freire

Dedico este trabalho à minha mãe,
Ana Soares Teixeira de Araújo (in memoriam),
por sempre se orgulhar de minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, nosso senhor e criador, que permitiu mais essa conquista guardando-me dos perigos nas viagens, inspirando-me e estando comigo em cada momento vivido nesta etapa do conhecimento

Aos meus pais, João e Ana (In memoriam), pela vida e seus ensinamentos. Em especial à minha mãe, dentre outros ensinamentos, por aquele dia que não me deixou desistir de frequentar a escola ainda com 7 anos de idade. Muito obrigado!

À minha esposa e meus filhos pelo incentivo, compreensão e carinho.

Ao professor e orientador Dr. Frederico da Silva Reis e em especial ao meu amigo Fred, que em sua sabedoria apoiou-me no projeto de pesquisa por meio de suas orientações desde o primeiro dia do mestrado e pelo acolhimento em Ouro Preto. Obrigado também por suas belas reflexões diárias. Muito obrigado por tudo!

À professora Marger pelo acolhimento em Ouro Preto, por ter aceitado o convite para a banca e por todas suas contribuições nos seminários e na dissertação.

Ao professor Wenderson pelas contribuições e sugestões para a pesquisa e por fazer parte da banca de defesa pública da dissertação.

Ao professor João Bosco Laudares por ter aceitado o convite de fazer parte da banca, por suas contribuições na dissertação e ainda contribuir com atividades para a nossa pesquisa. Muito obrigado!

A todos os professores do programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, incentivadores e que contribuíram diretamente para nossa formação docente.

A todos os meus colegas e companheiros da turma do mestrado. Cada um trouxe sua contribuição e nessa pesquisa tem um pouco de cada um de vocês! Em particular agradeço à Marina, ao Samuel e ao Leonardo pelos nossos trabalhos em grupo e resenhas ao longo do curso.

Ao meu saudoso professor Júlio César que me iniciou no mundo da Matemática ainda na educação básica. Obrigado Julinho pelo seu incentivo.

Aos meus amigos, professor Walter Sérvulo e professora Neuza Cechetti que me incentivaram desde sempre a participar da seleção do Mestrado.

Ao meu amigo professor Sérgio Renato pelo incentivo e companhia nas viagens para Ouro Preto.

Em especial aos meus queridos alunos do curso de Licenciatura em Matemática pela dedicação e empenho nessa pesquisa. Muito obrigado a cada um de vocês!

À Rede Doctum de Ensino – Unidade de Ipatinga, pela oportunidade de desenvolver a pesquisa.

Resumo

O presente trabalho apresenta uma pesquisa que visa identificar e analisar as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática. O referencial bibliográfico contempla diferentes abordagens teóricas de Modelagem Matemática, convergindo para a perspectiva sociocrítica adotada, além de investigações realizadas com foco nos processos de ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais. A pesquisa, de natureza qualitativa, delineou-se a partir da elaboração, desenvolvimento e avaliação de atividades de Modelagem Matemática relacionadas ao crescimento populacional. Os participantes foram estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade particular localizada no interior de Minas Gerais, matriculados na disciplina Equações Diferenciais, ministrada por ensino remoto devido à pandemia mundial de 2020. Os resultados apontam que as atividades de Modelagem Matemática realizadas por meio do ensino remoto e de forma colaborativa, contribuíram para uma ressignificação de conceitos e aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias e para o desenvolvimento da criticidade nos futuros professores de Matemática, especialmente em relação a questões como cidadania, desigualdade social e ainda o papel / função social da própria Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática Sociocrítica. Ensino de Equações Diferenciais. Licenciatura em Matemática. Educação Matemática no Ensino Superior

Abstract

The present work presents a research that aims to identify and analyze the possible contributions of Mathematical Modeling activities in a sociocritical perspective for the learning of Differential Equations in the Mathematics Degree course. The bibliographic reference includes different theoretical approaches to Mathematical Modeling, converging to the adopted sociocritical perspective, in addition to investigations carried out focusing on the teaching and learning processes of Differential Equations. The research, of qualitative nature, was outlined from the elaboration, development and evaluation of Mathematical Modeling activities related to the population growth. The participants were students of a Mathematics Degree course at a private college located in the interior of Minas Gerais, enrolled in the Differential Equations discipline, taught by remote education due to the world pandemic of 2020. The results indicate that the Mathematical Modeling activities carried out by through remote teaching and in a collaborative way, contributed to a reframing of concepts and applications of Ordinary Differential Equations and to the development of criticality in future mathematics teachers, especially in relation to issues such as citizenship, social inequality and the role / social function of mathematics itself.

Keywords: Sociocritical Mathematical Modeling. Teaching Differential Equations. Degree in Mathematics. Mathematics Education in Higher Education

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

EaD – Educação à Distância

EDO – Equações Diferenciais Ordinárias

EMC – Educação Matemática Crítica

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

GPS – Sistema de Posicionamento Global

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

ICMI – International Committee of Mathematical Instruction

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional Brasileira

MEC – Ministério da Educação e Cultura

MMM – Movimento da Matemática Moderna

OEA – Organização dos Estados Americanos

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNAD – Pesquisa Nacional por Amostragem de Domicílios

PROUNI – Programa Universidade Para Todos

PUC – Pontifícia Universidade Católica

PVI – Problema de Valor Inicial

SUS – Sistema único de saúde

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto

UFRS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UNESCO – Organização das Nações Unidas para Educação, Ciências e Cultura

UNESP – Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita”

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação

SUMÁRIO

Capítulo 1

UMA INTRODUÇÃO À PESQUISA

> “Dessa forma, consideramos, inicialmente, o porquê de se ensinar Matemática? E o porquê de se ensinar mediado pela Modelagem? Entendemos que a concepção de ‘homem’ que se pretende formar para enfrentar os desafios do século XXI é uma questão que tem a ver com a forma de se ensinar e com o que se ambiciona com isso” Dionísio Burak & Rosália Aragão.

1.1. Um breve histórico discente e docente

> O professor que acredita que o aluno aprende Matemática através da memorização de fatos, regras ou princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva de exercícios [...] terá uma prática diferenciada daquele que entende que o aluno aprende construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problema e problematizações do saber matemático (FIORENTINI, 1994, p. 1).

Os motivos que me levaram à realização desta investigação iniciaram nas experiências vividas como aluno, ainda na escolarização básica e tornaram-se evidentes no exercício da docência, logo após o término do curso de graduação em Licenciatura de Matemática, concluído em Caratinga – MG, no ano de 1999. As inquietações e angústias em descobrir uma alternativa à prática docente tradicional de ensinar e aprender Matemática por meios da memorização e de regras despertaram meu interesse pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática.

A vida é feita de escolhas e influenciada em sua trajetória por fatos e pessoas. Meus pais, apesar de ágrafos, ensinaram-me a contar, a enumerar e a lidar com situações em que a Matemática estava presente de forma tácita, antes mesmo de frequentar a escola e, aprender a ler e ainda sem a técnica acadêmica, entendia e realizava algumas operações matemáticas básicas. Em particular, meu professor de Matemática do Ensino Fundamental foi aquele que fortemente marcou minha formação discente e, por sua influência, descobri o poder transformador que a educação exerce na vida das pessoas. Nessa direção, a Matemática influenciou-me com seu papel de ciência milenar e exata que desenvolve o raciocínio lógico, a lógica dedutiva e organizada, possibilitando-me abstrair caminhos alternativos na busca de novos conhecimentos e da sobrevivência.

Assim, presenciei e aprendi a Matemática ensinada na década de 1970 na escola primária e secundária, chamada de Matemática Moderna (MM). Era abstrata, sistematizada e bem estruturada. Imaturo, não sabia como explicá-la e aplicá-la ao meu mundo real e repetia as operações do conhecimento matemático aprendidas com o professor. Para exemplificar, lembro-me de aprender a extrair a raiz quadrada de dois na 6ª série, atual 7º ano do Ensino Fundamental e ainda a operar com os números inteiros negativos: se a $< b$, com a, b $\in$ $N,$ então $a - b < 0$. Entendia o significado de a $< b,$ o fato de o resultado obtido ser um número negativo, reproduzia o resultado obtido, mas não o associava a um fato real de meu cotidiano ou a uma aplicação significativa do número encontrado. O que era, de fato, um número negativo? Que quantidade ele expressava? O que representava o resultado obtido na operação "raiz quadrada de dois"? Como relacionar aqueles resultados das operações matemáticas a um fato real do meu cotidiano?

Não entendia o que fazer com os resultados obtidos da resolução dos exercícios vindos dos livros didáticos de Matemática, mas acreditava no seu poder de persuasão e precisão, e a justificativa do estruturalismo lógico era suficiente, conforme dizia meu professor de Matemática. Bastava conhecer a "Matemática pela Matemática" e preocupar-se com alguma aplicação ali, naquele contexto, era algo impensado. Era fascinante aprender Matemática, apesar de grande parte de meus colegas apresentarem grandes dificuldades em realizar as manipulações algébricas e operações básicas para se chegar ao resultado, que deveriam ser repetidos à maneira como o professor havia ensinado. Ao final do ano letivo, vários estudantes ficavam retidos e, por vezes, mais de um ano na mesma série, em virtude de não terem aprendido a "manipular" as operações matemáticas, seus conceitos e teoremas e, com isso, muitos deles desistiam e evadiam da escola.

Tendo em vista a dificuldade de meus colegas e com o incentivo do meu professor de Matemática, comecei a auxiliar meus colegas de classe e de outras séries mais avançadas também, ainda quando cursava a 6ª série (hoje, 7º ano do Ensino Fundamental). Nasceu ali, naquele contexto, a escolha em ser professor de Matemática!

A escolarização seguiu seu curso até a graduação em Licenciatura em Ciências e Matemática, seguindo no mesmo ritmo: o conhecimento matemático sendo construído, ancorado em conhecimentos teóricos, demonstrações de teoremas usando outros conceitos já conhecidos e bem fundamentados. As teorias aprendidas e seus resultados justificavam-se em si mesmos nos objetivos gerais e específicos do curso de graduação. Nessa etapa de formação, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral[1] passou a ser minha disciplina favorita. No entanto, percebi muitos colegas desenvolvendo métodos mnemônicos e passos de resolução para essa disciplina e, ao final da resolução, não entendendo os resultados obtidos e o porquê da resolução. Minha angústia pela resolução de limites, derivadas e integrais associados a extensas listas de exercícios teóricos permanecia, tal qual a matematização aprendida lá na escolarização básica. Adiante, a análise de regiões delimitadas nos planos IR^2 e IR^3, as equações matemáticas que as demarcam, o domínio das funções eram as dificuldades de grande parte de meus colegas no cálculo de áreas e volumes envolvendo as integrais. A ementa era extensa e deveria ser vencida ao final da etapa, de acordo com a fala do professor. Àquela altura do curso, ele não poderia "voltar o conteúdo" e relembrar conhecimentos básicos que faziam parte de etapas anteriores, apesar de serem dúvidas da grande maioria dos alunos.

Logo após o término do ciclo da graduação, fiz concurso público para as Escolas Estaduais de Minas Gerais, fui aprovado e assumi um cargo de professor do Ensino Médio. Minha angústia foi ainda maior. Além das dificuldades dos alunos em efetuar operações básicas de Matemática, lidava também com o desinteresse pela Matemática, com questionamentos sobre sua aplicabilidade prática, a necessidade de se estudar alguns conteúdos como conjuntos, funções, logaritmos, trigonometria, por exemplo, e onde e de que maneira iriam utilizar aqueles conhecimentos em suas escolhas profissionais. Participei também de um processo seletivo para professor na Escola Técnica JK da cidade de Ipatinga – MG, uma escola privada, assumindo o cargo de professor para turmas de Ensino Médio.

A situação na escola privada era similar à escola pública. Indagava para mim mesmo: como poderia o aluno não entender o que o professor explicara uma, duas ou mais vezes? Onde estaria a falha na "transmissão" do conhecimento matemático? (Temos a compreensão que conhecimento não se transmite. Essa era uma angústia vivida no início da carreira, antes de ter

[1] Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Ordinárias serão aqui descritos como CDI e EDO, respectivamente, assim como descreveremos Educação Matemática Crítica como EMC e Modelagem Matemática como Modelagem, no intuito de evitar repetições desnecessárias.

acesso às literaturas e conhecimentos didáticos atuais vinculados à Educação Matemática que sugere a construção do conhecimento). Por que os alunos tinham dificuldades no entendimento dos conceitos matemáticos? Por que os estudantes questionavam a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos estudados?

Motivado, então, por tais indagações, ingressei em um curso de Pós-Graduação que possuía na matriz curricular além de alguns conteúdos matemáticos, tópicos de Didática e de Educação Matemática, aos quais não tive acesso na graduação. Dentre os conteúdos matemáticos, o CDI foi trabalhado de uma forma diferente da graduação. A professora apresentou-nos um projeto que havia feito com seus alunos de graduação para o cálculo de áreas, utilizando as integrais. No projeto, os alunos trabalharam, por seu próprio interesse, a Modelagem[2]. Percebi que havia alternativas para trabalhar a Matemática, seus conceitos e fundamentações, associando metodologias diferenciadas, capazes de colocar o aluno na corresponsabilidade de sua aprendizagem, permitindo-lhe construir o conhecimento matemático conectado a outras áreas do conhecimento, melhorando sua compreensão, interpretação, tornando-o capaz de formular e solucionar problemas do mundo real. Uma dessas alternativas poderia ser a Modelagem e surge, naquele momento, o *insight* para uma pesquisa no Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Knijnik (1998, p. 133) relata de forma crítica que "Nas aulas de Matemática, aprende-se uma concepção muito particular do que conta como Matemática, do que significa lidar com a Matemática, do que é ensinar e aprender Matemática". Tal pensamento contempla minhas angústias e, dessa forma, a teoria da Educação Matemática pode contribuir para a reflexão sobre os processos de ensino/aprendizagem, tornando o aluno corresponsável e o professor, mediador do conhecimento matemático.

Presentemente, atuando como professor de Ensino Superior lecionando CDI e EDO nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil nas Faculdades Doctum de Ipatinga – MG, percebo que grande parte dos estudantes não compreende as teorias do Cálculo e das EDO e como podem ser usadas nos contextos socioculturais, e, muito menos como podem

[2] A Modelagem traz, em sua essência, as premissas das metodologias ativas, capazes de colocar o estudante como corresponsável pelo aprendizado e tornando-o autônomo e além disso auxiliando o professor a tornar-se mediador do conhecimento se contrapondo ao ensino tradicional que além disso auxiliam o professor como centro do processo ensino/aprendizagem.

auxiliar na criticidade para o ambiente sócio-político de nosso cotidiano. Diante disso, boa parte dos alunos ficam restritos a algebrizar as teorias e não desenvolvem os sensos de análise, compreensão e criticidade necessárias no exercício da cidadania.

Pelo exposto, minhas angústias e motivações para esta pesquisa advém de experiências vividas como aluno e da prática em sala de aula enquanto professor. Então, concordo com Fiorentini (1994), que se preocupa com um ambiente possibilitador da aprendizagem pautada na construção do conhecimento matemático a partir de conceitos e ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações e problematizações vividas pelo estudante no seu cotidiano. O que completa Perez (2005): "Somos levados a sonhar com uma nova educação, que vise a criar novos ambientes e que proporcione mudanças em posturas e formação continuada de professores de Matemática, com características de pesquisadores em seu ambiente de trabalho".

A importância do professor, o investimento em novas metodologias e a reflexão de seu novo papel na sociedade, também são apontadas por D'Ambrósio (2014):

> Não há dúvida quanto à importância do professor no processo educativo. [Se] o professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimentos está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e na crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa (D'AMBROSIO, 2014, p. 73).

Coaduno com D'Ambrósio e, certamente, percebo que é preciso buscar mudanças na prática docente, criar alternativas ao ensino tradicional pautado na memorização e "bancarizado", parafraseando Paulo Freire. Nessa perspectiva estão as metodologias ativas, trazendo alternativas. Moran (2015) sugere criticamente acerca desta realidade e argumenta que:

> A educação formal está num impasse diante de tantas mudanças na sociedade: como evoluir para tornar-se relevante e conseguir que todos aprendam de forma competente a conhecer, a construir seus projetos de vida e a conviver com os demais. Os processos de organizar o currículo, as metodologias, os tempos e os espaços escolares precisam ser revistos (MORAN, 2015, p. 15).

O autor (p.16), sugere ainda que a escola padronizada nos moldes do século passado, que ensina e avalia a todos da mesma maneira, tende a ignorar que o conhecimento deve ser baseado em competências cognitivas pessoais e também sociais. Tal caminho exige pró-atividade, colaboração, uma visão empreendedora e, com tudo isso, fazer do professor um pesquisador.

Concluo ousando dizer que uma possibilidade real para tornar o estudante de Cálculo autônomo e corresponsável a partir de novos princípios metodológicos poderá ser a Modelagem. E, em sintonia com esse pensamento, dentro das metodologias ativas, várias investigações com objetos de pesquisa no Campo da Educação Matemática produzem uma literatura exposta em artigos, dissertações, teses e livros. E entre elas, enfatizando a construção do conhecimento pelo aluno está a temática Modelagem.

Nesse contexto, Burak (1992) explica que a Modelagem "constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o [o aluno] a fazer predições e a tomar decisões".

Além disso, no cenário do processo de construção de conhecimento, estão inseridas outras dimensões como "aprender a aprender", "aprender a fazer", "aprender a ser" e "aprender a conviver", que segundo Jacques Delors e colaboradores são os pilares da educação (UNESCO, 1996).

Então, diante das reflexões e do histórico apresentados proponho a presente pesquisa.

1.2. Aportes sobre o Ensino/aprendizagem de Cálculo / Equações Diferenciais

> Após uma ampliação, organização e crítica realizada durante a Idade Média Islâmica e Europeia, a matemática legada pelos gregos transformou-se a partir do final do século XVIII, no instrumental do Cálculo Diferencial, desenvolvido inicialmente por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, criando o que poderíamos chamar de as bases do pensamento moderno. Muitos historiadores consideram a matemática, espinha dorsal da civilização moderna (D'AMBROSIO pref. BASSANEZI, 2009, p. 11).

Devido a nosso foco de investigação, buscamos conhecer o cenário atual do ensino do CDI e, particularmente, das EDO no Ensino Superior. Cada vez mais, são realizadas pesquisas relacionadas ao ensino de CDI, tanto no cenário nacional como no internacional. Contemplando uma busca no banco de teses e dissertações da Capes, utilizando-se Modelagem Matemática na dimensão sociocrítica para o ensino de CDI / Equações Diferenciais, não encontramos trabalhos de pesquisa versando sobre o assunto, o que reforça a importância desta pesquisa. Salientamos, no entanto, que junto ao programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) há várias pesquisas que nos levam para a teoria e não para a reflexão sobre o ensino de CDI e EDO como propomos em nossa pesquisa.

Grande parte das pesquisas encontradas versando sobre o ensino do CDI advém da linha de pesquisa Educação Matemática no Ensino Superior e se justificam pela sua importância nos diversos campos de conhecimento. Para Iglori (2009), tais pesquisas “se justificam tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes, quanto por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática” (IGLORI, 2009).

Referenciando-nos em um pouco de sua história (EVES, 2004), o CDI foi desenvolvido por muitos matemáticos ao longo dos últimos três séculos, mas sua sistematização ocorreu no século XVII por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, que o descobriram independentemente, sendo sua descoberta, então, atribuída a ambos. O conceito de limite separa a Matemática elementar do CDI, que se torna necessário para a investigação de vários fenômenos que a álgebra ou a trigonometria não conseguem resolver. Há que se considerar que conceitos de derivadas e integrais são estabelecidos por processos de limites.

De acordo com Boyer (1992), o CDI foi desenvolvido como instrumento para investigar problemas que envolviam movimento. Até então, estudar objetos que se moviam a velocidades constantes e ao longo de trajetórias retilíneas ou circulares seria possível com conhecimentos de álgebra ou trigonometria. No entanto, se a velocidade variasse ou se a trajetória fosse irregular, tornar-se-ia necessário o CDI. E embora tenha sido desenvolvido para solucionar problemas da Física, sua versatilidade o conduziu para os mais diversos campos de estudo e, dentre eles, as Equações Diferenciais.

Vale citar aplicações sobre o comportamento de partículas atômicas, estimativa do crescimento de um tumor na terapia radioativa, previsão de resultados econômicos, análise de vibrações num sistema mecânico, mensuração de variações instantâneas em correntes elétricas e muitas outras. Também se incluem investigações sobre a taxa de crescimento em funções matemáticas, predição de resultados de uma reação química, resolução de problemas envolvendo máximos e mínimos, também aplicáveis na Física envolvendo, como, por exemplo lançamentos de foguetes, ou na Economia em problemas de customização.

Além disso, o CDI é indispensável no cálculo de áreas e volumes de sólidos por meio das integrais, e, assim como as EDO, tornou-se uma disciplina indispensável nas diversas áreas das ciências exatas como na Física, Química, Medicina, Economia, Engenharia, dentre outros e assume papel importante na formação de diversos profissionais.

São inúmeras as suas aplicações nos dias de hoje e muitas outras que podem surgir na abordagem de problemas com os quais a sociedade se deparar no futuro. Para Lachini (2001):

> O Cálculo Diferencial e Integral, um ramo da matemática, tem como objetivo o estudo do movimento e da variação. Considerado como a linguagem por excelência do paradigma científico e como instrumento indispensável de pensamento para quase todas as áreas do conhecimento, desde sua consolidação, no final do século XVII com Newton e Lebniz. É colocado como disciplina básica e obrigatória em diversos cursos de graduação da área de ciências exatas, onde um dos objetivos principais é estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do cálculo como regras e procedimentos na resolução de situações concretas (LACHINI, 2001, p. 147).

No entanto, para solucionar situações-problemas com o auxílio do CDI e ou das EDO, é necessário que tenhamos um pensamento matemático organizado como citam alguns pesquisadores tais quais Lachini (2001), Iglori (2009) e Nasser (2009). Essa habilidade de organização em nossos pensamentos torna-se necessária então, não somente no Ensino Superior, mas também na escolarização básica, como enuncia Lachini (2001, p. 147): “É preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e o numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados, explique o significado de suas respostas”.

Na docência do CDI e das EDO, percebemos que muitos alunos chegam na universidade sem o pensamento organizado sugerido pelos pesquisadores para solucionar situações-problemas, o que gera dificuldades no ensino e na aprendizagem destas disciplinas. Ainda mais, como aponta Rezende (2003), uma consequência disso são os altos índices de reprovação e de evasão nos cursos em que tais disciplinas são ministradas.

O desempenho insatisfatório dos alunos em CDI e também em EDO pode ser atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica e tem sido motivo de investigações. Para Rezende (2003), “as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo”.

Similarmente a esse pensamento, Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos e constatou as dificuldades mencionadas por Rezende, sugerindo "desenvolver estratégias de ensino apropriadas, de acordo com os estilos de aprendizagem dos alunos, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos".

Ao ser admitido nos cursos de graduação como Engenharia, Matemática, Ciências da Computação, dentre outros, o estudante se depara com as disciplinas de CDI e de EDO, na maioria das vezes ministrada em 4 a 6 aulas semanais, com duração de 50 minutos. Este primeiro contato requer que principalmente o professor de Cálculo recorra a estudos de pré-requisitos como o estudo de funções, por exemplo, visando a aprendizagem da disciplina, pois corresponde uma fundamentação para o entendimento dos conceitos de limites e, posteriormente, das derivadas e integrais e das EDO.

Contudo, apesar das estratégias implementadas como cursos de Pré-Cálculo, atividades de monitoria e cursos de Matemática Básica, nossa experiência tem mostrado que tem sido uma solução apenas minimizadora para os problemas do ensino e da aprendizagem do CDI e, consequentemente, de EDO. Novas pesquisas e utilização de novas metodologias para o seu ensino são necessárias.

O ensino tradicional de CDI e de EDO, com base em teoria, atividades e avaliações, utilizando somente "quadro e giz" pode ser motivo de reflexão. Pesquisas voltadas para o ensino/aprendizagem do CDI, de maneira geral, apontam tendências da Educação Matemática como alternativa à prática docente. Uma saída poderá ser aplicação de teorias das metodologias ativas, inserindo as Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação – TICE, a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, a Metodologia Híbrida, dentre outras, como alternativas ao método tradicional de ensino praticado.

Neste contexto, vale considerar a Metodologia Híbrida[3] "no sentido de mesclado combinando espaços, tempos, atividade, metodologias e públicos. Esse processo, com mobilidade e a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo (LEANDRO, 2008, p. 2).

[3] Vindo da expressão da língua inglesa "blended learning", representa os processos de ensino e aprendizagem que conciliam o ensino presencial e o ensino virtual proporcionado pelas Tecnologias Digitais.

1.3. A Modelagem Matemática nos processos de ensino e aprendizagem

Um dos objetivos da Educação Matemática é formar cidadãos aptos para o convívio em sociedade, respeitando as diferenças, agindo de forma crítica e reflexiva diante de seu ambiente e cotidiano. Relacionada a essa forma de pensamento e vinculada à Educação Matemática, está a Modelagem, que trabalha a interdisciplinaridade, tornando o aluno construtor e corresponsável de seu conhecimento num ambiente de seu mundo real, indo além dos casos hipotéticos dos livros didáticos. Nesse ambiente, ele pode usar de seus conhecimentos tácitos, desenvolver outras habilidades, entrar em contato com outros conceitos para desenvolver e solucionar as situações-problemas, e isso pode despertar seu interesse pela Matemática e potencializar a aprendizagem do CDI e das EDO. Esta é uma perspectiva trazida por pesquisadores e educadores matemáticos, dentre eles D'Ambrósio (2014).

Nesse sentido, Biembengut (2004) explica que a Modelagem é, ao mesmo tempo, "estratégia e metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática, sendo fortemente defendida nos mais diversos países como método de ensino da Matemática e em todos os níveis de ensino".

Burak (2005) considera que, no Brasil, o trabalho com a Modelagem, enquanto alternativa ao ensino tradicional, "teve início na década de 1980, na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Campus de Rio Claro, SP".

Entretanto, segundo a Dra. Marger da Conceição Ventura Viana (professora do PPGEDMAT / UFOP), a Modelagem no ensino de Matemática foi mencionada e utilizada pela primeira vez no Brasil, pelo Dr. Aristides Camargos Barreto, professor da PUC- RJ, já falecido.

Aristides C. Barreto tomou conhecimento sobre modelagem matemática quando cursou Engenharia na década de 1960. A ideia de usar a modelagem em Educação Matemática começou na metade dos anos de 1970, na PUC-Rio ao passar atuar como professor nesta Instituição. Na PUC-Rio, Barreto sempre procurava utilizar-se de modelos como estratégia de ensino nas disciplinas de Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral. Em 1976, realizou a primeira experiência pedagógica com 212 alunos de um Curso de Engenharia. Conjuntamente com os alunos, elaborou vários modelos em áreas específicas como Lingüística, Ecologia, Biologia, dentre outras.

Essas experiências realizadas levaram-no a crer que a modelagem no ensino tornava os estudantes mais motivados e interessados, descartando a constante e inquietante pergunta 'para que serve isto? ' Diante das teorias, ele estimulava a criatividade e o espírito crítico. A partir de 1989, Barreto passou a interpretar e produzir textos literários em prosa e verso, com ênfase em letras de música. Muitos desses trabalhos ele divulgou por meio de artigos (em revistas e anais de congressos) e de eventos. Nesse ínterim, a convite do professor D' Ambrosio, faz palestra na UNICAMP, momento em que Bassanezi teve o primeiro contato com o tema e o termo modelagem matemática.

Muito embora não se denominava de modelos matemáticos, os módulos apresentavam esta abordagem. Em 1972 D'Ambrosio retorna ao Brasil para atuar na UNICAMP. Com o apoio da UNESCO e da OEA, D'Ambrósio tem a oportunidade de implantar propostas de educação matemática no Brasil semelhantes às que ocorriam em alguns países da Europa e Estados Unidos. Dentre as propostas implantadas nesse período, destacam-se duas: a produção de materiais de apoio didático na forma de módulos e a criação do 1o Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática na UNICAMP. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos, todos voltados ao Ensino Fundamental. O mestrado, projeto da OEA, teve 4 turmas, com ingressos nos anos de 1975, 1976, 1977 e 1978. Cada turma tinha em média 32 alunos. A maioria dos mestrandos era professores de Instituições de Educação Superior de diversos estados brasileiros e países das Américas do Sul e Central. O Curso tinha mais ou menos o modelo proposto na Universidade de Roskilde na Dinamarca, isto é, um modelo interdisciplinar, não linear. O modelo adotado nesse Mestrado deu origem a trabalhos em Modelagem e Etnomatemática.

Neste contexto, D'Ambrósio ouve falar de um professor da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ, Aristides Camargo Barreto, matemático e que está interessado em modelos dinâmicos integrados a música. Assim, Barreto vem a UNICAMP para uma palestra que contribuiu para aumentar a motivação de Rodney Carlos Bassanezi, em particular.

Para Burak (2005), o trabalho com a Modelagem iniciou-se com um grupo de professores, especialmente, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos do Instituto de Matemática da Universidade de Campinas – UNICAMP, que difundiram seus trabalhos na forma de livros, artigos, palestras e orientações de trabalhos de conclusão de Mestrado e Doutorado. Sua inserção na Educação Matemática tem levado a comunidade acadêmica desse campo a repensar o ensino da Matemática para um ensino direcionado à sua aplicação prática, vividos num ambiente natural (BURAK, 2005).

Buscando significados para os termos “modelo”, “modelar”, “Modelagem”, encontramos sua origem no latim *modellum*, diminutivo de *modus* que pode significar medida em geral, o que pode nos levar a um entendimento diferente da caracterização do dicionário etimológico de Cunha (1989) como sendo uma “representação de alguma coisa”, como ressalta Almeida (2012, p. 13). Para Ferreira (2008), a palavra modelar tem o significado de “fazer o modelo ou molde de uma peça”. Entretanto, no contexto da Educação Matemática, utilizaremos as expressões: “criação de modelos”, “modelar”, “modelos matemáticos”, “Modelagem” ou outras similares, no sentido de: “para representar algo”, na concepção de Almeida (2012).

Nesse sentido, a Modelagem poderá ser entendida como um processo dinâmico utilizado para obter e validar um modelo ou situação inicial de um problema. Também pode ser concebida como uma metodologia ativa, cujo objetivo é estudar uma situação-problema da realidade e pode conduzir o professor/pesquisador a abstrair, induzir e possibilitar realização de estudos de uma problematização inicial e, como resultado, poderá obter uma representação gráfica, escrita, com códigos e signos matemáticos caracterizando assim o modelo matemático. (ARAÚJO, 2007, 2017; BARBOSA, 2001, 2004; BASSANEZI, 2009; BIEMBENGUT, 2004, 2009; BURAK, 1992, 1998, 2000, 2004, 2010)

O processo de Modelagem poderá nos levar a uma Matemática por excelência, como afirmado por D’Ambrósio (2009):

> As origens e ideias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. [...] A partir das teorias pode-se trabalhar outros fatos e fenômenos propostos pela realidade, elaborando modelos do mundo real. Mais ou menos precisos, esses modelos, devidamente calibrados e convalidados, permitem entender e explicar, com diferentes graus de precisão e detalhamento, esses fatos e fenômenos. Modelagem é, portanto, matemática por excelência (D’AMBROSIO pref. BASSANEZI, 2009, p. 11).

Assim compreendida, a Modelagem é, “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam” (ALMEIDA, 2012, p. 13).

Compreendemos então, que essa concepção de Modelagem, de representar, explicar e fazer presentes situações diversas do mundo real que queremos analisar usando a Matemática, implica em dizer que criamos um modelo matemático, cujo processo é expresso por meio de linguagens e estruturas matemáticas capazes de descrever e explicar o fenômeno trazido pela realidade da situação-problema

De fato, encontramos muitas concepções de Modelagem que serão discutidas posteriormente na dissertação. Somente para destacar algumas, Biembengut (2009) concebe a Modelagem como um "processo que envolve a obtenção de um modelo", enquanto para Burak e Klüber (2008), "poderá se ter uma orientação cognitivista[4], construtivista[5], aprendizagem significativa[6] e sociointeracionista"[7].

Já na concepção de Caldeira (2004), a Modelagem Matemática, constitui-se em "um sistema de aprendizagem", diferindo de Barbosa (2001), para quem "Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade".

Por outro lado, Bassanezi (2009) concebe a Modelagem como um "processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos", consistindo ainda na "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos". Por fim, para Araújo (2009), "a Modelagem Matemática orientada pela Educação Matemática Crítica tem, como um de seus objetivos, possibilitar aos alunos uma atuação crítica na busca de soluções para problemas da realidade, por meio da matemática, discutindo questões políticas, econômicas e ambientais".

Nesta pesquisa, utilizaremos alguns desses autores (já aqui citados) e outros (citados no Capítulo 3) que nortearão a concepção da Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica.

1.4. Apresentando nossa pesquisa

Do exposto até aqui, nossa pesquisa está delineada da seguinte forma:

1.4.1. Questão de Investigação

---

[4] Cognitivista relaciona-se ao cognitivo ou ainda a uma abordagem teórica para a compreensão ou processo de conhecer.

[5] Tese que defende o papel ativo do sujeito na criação e modificação de suas representações do objeto do conhecimento.

[6] Refere-se à aprendizagem significativa aquela que exige uma compreensão de significados, relacionando-se às experiências anteriores e já vivenciadas, permitindo a formulação de julgamento e emancipação.

[7] Refere-se àquilo que proporciona uma aprendizagem participativa, colaborativa e desafiadora, inserindo o aprendiz num ambiente que facilite sua interação com outros indivíduos.

Quais são as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática?

Tal questão de investigação se enquadra no tema de pesquisa Modelagem Matemática no Ensino Superior, desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto – Linha de Pesquisa 2: Processos de Ensino e de Aprendizagem de Matemática.

1.4.2. Objetivo Geral

Identificar e analisar as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática.

1.4.3. Objetivos específicos

- Referenciar a Modelagem Matemática e o Ensino de Equações Diferenciais, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, em busca de um recorte das experiências de realização de Projetos de Modelagem Matemática no Ensino de Equações Diferenciais;

- Elaborar, desenvolver e avaliar atividades de Modelagem Matemática abordando conceitos e propriedades de EDO de 1ª ordem, desenvolvidos numa perspectiva sociocrítica com alunos de Licenciatura em Matemática;

- Apresentar um conjunto de Atividades de Modelagem Matemática, sob a forma de Produto Educacional do Mestrado Profissional em Educação Matemática, que possa contribuir para a prática docente de professores de Equações Diferenciais.

1.5. Metodologia de Pesquisa

A metodologia previu a realização de uma Pesquisa Teórico-bibliográfica analisando livros, artigos publicados em congressos e em revistas da área de Educação Matemática, teses e dissertações do banco de dados da CAPES, relacionados à Educação Matemática no Ensino Superior, com foco na Modelagem Matemática e no Ensino de CDI e EDO.

Tal Pesquisa Teórico-bibliográfica, compreendendo os estudos teóricos realizados nas diversas disciplinas cursadas no Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP e os levantamentos bibliográficos, constitui-se na fundamentação para os capítulos de revisão de literatura de nossa dissertação.

A metodologia também previu a realização de uma Pesquisa de Campo com alunos de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina Equações Diferenciais das Faculdades Doctum de Ipatinga – MG, a partir da elaboração, desenvolvimento e avaliação de atividades de Modelagem desenvolvidos numa perspectiva sociocrítica.

Tal Pesquisa de Campo foi realizada no 1º semestre de 2020, de acordo com as seguintes tarefas cumpridas:

- Elaboração de atividades de Modelagem Matemática relacionados a aplicações de Equações Diferenciais;

- Desenvolvimento das atividades construídas de Modelagem Matemática com alunos de Licenciatura em Matemática;

- Avaliação de todo o processo, a partir de um Questionário de Avaliação das Atividades.

1.6. Estrutura da Dissertação

Após este Capítulo 1, no qual apresentamos um pouco da nossa trajetória discente e docente e as principais motivações para a realização de nossa pesquisa, partimos para o Capítulo 2, no qual apresentamos uma revisão teórico-bibliográfica a partir de alguns trabalhos relacionados à Educação Matemática no Ensino Superior, buscando destacar os processos de ensino e de aprendizagem de CDI, com foco no Ensino de EDO.

Continuando nosso referencial teórico-bibliográfico, no Capítulo 3 discutimos a Modelagem, apresentando e comparando algumas concepções de autores consagrados, buscando um recorte para a perspectiva sociocrítica da Modelagem com destaque para os trabalhos de Burak.

No Capítulo 4, apresentamos nossa pesquisa em seu contexto, bem como um detalhamento da metodologia e dos instrumentos de pesquisa que já foram descritos, porém sucintamente.

Já no Capítulo 5, descrevemos e analisamos os dados obtidos a partir dos instrumentos de pesquisa que utilizamos.

Nas Considerações finais, buscamos apresentar um conjunto de respostas à questão de investigação, proporcionado pela presente pesquisa, ousando tecer algumas recomendações aos professores de EDO.

Capítulo 2

OLHARES SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA PERSPECTIVA DA MODELAGEM

> De que maneira a aprendizagem da Matemática pode contribuir para o desenvolvimento da cidadania? (SKOVSMOSE, 2006, p. 19)

Neste capítulo, pretendemos apresentar um recorte do ensino de CDI e de EDO. Abordaremos alguns aspectos do ensino e da aprendizagem, bem como dificuldades e considerações acerca dos artefatos e possíveis recursos utilizados para suportar tais processos, por meio das premissas da Educação Matemática.

Atualmente, existem múltiplas discussões acerca dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, em quaisquer níveis de ensino, apreciadas pela Educação Matemática. Enquanto Campo Científico, a Educação Matemática tem se preocupado com o ensino da Matemática e com questões como: de que forma a aprendizagem da Matemática pode apoiar o desenvolvimento da cidadania? Como o indivíduo pode ser empoderando pela Matemática? Questões estas, podem ser trazidas na perspectiva da Educação Matemática Crítica (EMC), conforme argumenta Araújo (2007) e contempladas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer interferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores e trabalhar cooperativamente (PCN, 1999, p. 40).

É assim que Burak (2016, p. 133) destaca ser necessário um "ensino que possibilite aos estudantes, análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias". De fato, a Educação deve contribuir para a formação de cidadãos críticos, capazes de resolver problemas e de tomar decisões próprias. Para que isso ocorra, no entanto, é necessário criar mecanismos para que os alunos não evadam das escolas e que se invista em outras tendências pedagógicas e outros métodos de ensino, inclusive às tecnologias virtuais.

Assim, investindo em novas metodologias é possível fazer da Matemática uma ferramenta importante para o processo de comunicação, de resolução de problemas, de tomadas de decisão, capazes de compreender a vida e criticar os processos sociais, empreendendo mudanças, respeitando individualidades, as culturas locais e empoderando as pessoas pela Educação.

2.1. Olhares advindos dos constructos da Matemática

"A Matemática, cujas primeiras manifestações surgiram ainda no período Paleolítico, ligada diretamente às necessidades práticas impostas pelo contexto social, passou por muitos movimentos qualitativamente diferentes durante o seu longo desenvolvimento" (MIORIM, 2001, p. 1)

Tais argumentos remetem-nos à importância da Matemática, que auxilia no progresso da humanidade e contribui para resolução de "problemas da realidade". Observamos que, desde os primórdios, a Matemática participa ativamente da vida das pessoas, mesmo que estas não percebam sua importância no contexto social e político.

Por outro lado, Miorim (2001), enumera outras facetas da Matemática, referenciando-a como ciência nobre, porém, excludente para a classe social menos favorecida. Evidencia que desde seu surgimento, o acesso à aprendizagem era privilégio de poucos. Esta autora também cita a proposta platônica que enfatiza que o ensino da Matemática reforçava o seu "valor formativo, não para uma necessidade de aplicação prática, mas pelo seu poder de desenvolver o pensamento humano e seu raciocínio":

> Desde o momento em que a Matemática começou a tomar forma como uma área de conhecimento, já estava associada a uma classe privilegiada, já era considerada uma Ciência nobre, desligada dos ofícios, das atividades manuais. (...) Embora sua proposta a considerasse importante para o desenvolvimento de todos os indivíduos, em seus níveis mais elevados destinava-se apenas a alguns poucos privilegiados, os "melhores de espírito", os "mais talentosos". (MIORIM, 2010, pp. 1- 2)

Acerca do Platonismo, Machado (1997), pondera que “a ideia fundamental do Platonismo é que as entidades verdadeiramente reais, as formas ou ideias, eram os modelos ideais dos objetos do mundo físico ou das situações ideais as quais o homem deveria esforçar por atingir” (MACHADO,1997, p. 19).

Passados “alguns anos”, outras tendências do ensino da Matemática em todos os seus níveis de ensino – do básico ao superior – embasadas nas “Escolas Filosóficas da Matemática”, contribuíram para as fundamentações, propriedades e compreensão da Matemática:

> No que se refere às tendências da Matemática, e de maneira bastante simplista, podemos inicialmente classificar atividades ligadas ao ensino de Matemática em quatro principais grupos denominados de “quatro ismos”: o Logicismo, que surgiu na Inglaterra; o Intuicionismo, que teve origem na Holanda; o Formalismo, surgido na Alemanha e o Hipoteticismo, que também surgiu na Inglaterra (MEYER et al, 2011, p. 19).

Há que se considerar nos nossos dias, a presença de características de tais grupos, como argumenta D’Ambrósio (2014), classificando o “currículo escolar como cartesiano e tradicional”:

> [Ainda hoje] o ensino da Matemática é baseado nos componentes objetivos de uma sociedade conservadora. [...] Também do ponto de vista cognitivo, obviamente, a Matemática, é uma ciência de cognição respondendo aos interesses dominantes da sociedade. [Desde os tempos antigos], defendia-se uma educação baseada numa estratificação de indivíduos em faixa etárias e em “níveis de desenvolvimento intelectual”, ignorando totalmente as experiências e expectativas de cada indivíduo incorporadas à sua história individual e coletiva (D’AMBRÓSIO, 2014, p. 8).

Contudo, a Matemática é estudada em todas as escolas do mundo afora, tendo o seu ensino sido diversificado. É uma ciência, justificada como ferramenta indispensável para várias áreas de conhecimento, dentre elas: a Física, as Engenharias, a Medicina, as Áreas Biológicas e Econômicas. É útil para contar os versos das poesias e as métricas dos versos de um poema, além de “servir ao desenvolvimento do computador moderno”, conforme argumenta Singh (2012, p. 167). Porém, continua sendo um “estigma”:

> A Matemática é considerada estigma, ou seja, ao mesmo tempo em que boa parte da sociedade tem medo da Matemática que nós criamos, [...] a maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras

> Ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos (MEYER et al 2011, p. 24).

Assim, alguns apontamentos podem nos fazer entender como a humanidade passou do "aprender a contar" a acessar a Internet. Além de ser operação básica nos bancos, nas tapeçarias e nas lojas, é exercida por agricultores, pescadores e caixas de supermercados que, muitas vezes, não estão acostumados a pensar em como usam a Matemática. Parafraseando Skovsmose (2007, p. 48), "a Matemática está em todo lugar"!

Em particular, podemos enxergar o CDI como o elo entre a Matemática elementar e a Matemática avançada, enquanto as EDO são fundamentais nos projetos de Engenharia, na construção de aviões e foguetes espaciais, nas projeções de crescimento populacional em comparação com a geração de empregos e em relação com a Economia e a produção de alimentos. Por isso, o CDI e as EDO têm inúmeras aplicações e alguns de seus aspectos históricos e didáticos serão apresentados a seguir.

2.2. Alguns olhares sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Considerado como um dos principais conteúdos matemáticos do Ensino Superior, o CDI é de suma importância no desenvolvimento dos mais diversos segmentos da sociedade por meio das ciências e tecnologias atuais. No passado, cujo significado advém do latim *"calx",* que tem o significado de pedra, no contexto de "fazer contas por meio de seixos", foi aperfeiçoado por Newton e Leibniz no século XVII. Porém:

> No contexto histórico, vários matemáticos famosos, dentre eles Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler utilizavam conceitos de CDI para a solução de situações-problemas , mesmo sem existir em seus tempos a construção lógica estruturada como temos hoje desta disciplina. [...] geralmente se diz que o Cálculo foi inventado por Newton e Leibniz no século XVII, mas isso não é inteiramente verdadeiro. Sua ideia central, (de infinitésimos) recua à época dos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (cerca de 290-212 a. C), teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limites para calcular a área e o volume de várias formas planas e sólidas (MAOR 2003, p. 61).

Outros pesquisadores relatam que os babilônios já utilizavam tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas. As primeiras aproximações do número Π ("pi"), pelos gregos, há aproximadamente dois séculos antes de Cristo, também são evidências do Cálculo:

> Ninguém no mundo antigo iguala-se a Arquimedes, quanto à invenção e à demonstração ao lidar com problemas relacionados ao Cálculo. No entanto, o teorema geral mais antigo em Cálculo não se deve a Arquimedes, mas a matemáticos gregos que viveram provavelmente, meia dúzia de séculos mais tarde (BOYER, 1992, p. 7).

Nos dias atuais, em todo o mundo, diversos cursos universitários possuem o CDI em seus currículos justificados pela “sua grande aplicabilidade, desempenhando papel importante como linguagem na representação de fenômenos e como instrumento para a resolução de problemas” (CATAPANI, 2001, p. 48).

Lachini (2001, p. 147) destaca que o ensino/aprendizagem de Cálculo pretende cumprir dois objetivos e um deles é “habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade”. O outro objetivo, segundo ele, seria “orientar o aluno para que ele adquira compreensão e capacidade de aplicação prática dos conceitos e definições, estando atento para não o tornar mero receituário”.

O primeiro objetivo destacado por Lachini (2001) é explorar os conceitos do CDI, associando-os a vários conceitos matemáticos numa abordagem de diversos conteúdos matemáticos que, por vezes, não são explorados em outras ocasiões do ensino. Nessa perspectiva, esses conteúdos podem conduzir os alunos a entenderem o significado geométrico e numérico inserido no contexto, antes sem significados aparentes e possuindo papel fundamental e importante na sua formação intelectual.

São inúmeras as aplicações que possibilitam um estudo atraente e motivador das disciplinas de CDI para os alunos. Barbosa (2004) ainda adverte: “o Cálculo pelo Cálculo, sem aplicação e contextualização, fica centrado em uma pedagogia rotineira, tradicional, em que muitos docentes estão acostumados” (BARBOSA, 2004, p. 11).

A respeito de seu estudo e representações, o CDI é apontado como “ferramenta teórica para análise e compreensão dos processos e fenômenos onde ocorrem movimentos e variações que obedecem a determinados padrões de comportamento. Estuda as propriedades das curvas associadas aos processos infinitesimais envolvendo continuidade, derivação e integração”. (RÊGO, 2000, p. 20).

Ainda cabe destacar que diversos autores (STEWART, 2006; HUGHES-HALLETT et al, 2005; RÊGO, 2000; ANTON et al, 2007) destacam aplicabilidades capazes de auxiliar com seus conceitos e técnicas na resolução de “situações-problemas ” tais quais: determinação de máximos e mínimos de funções, cálculo de áreas e volumes, Modelagem de crescimento populacional, além da Modelagem contemplando situações das mais diversas. Estas aplicações são capazes de ajudarem a solucionar problemas, inclusive não matemáticos.

Contudo, o CDI se constitui em disciplinas no Ensino Superior que, em geral, apresentam altos índices de reprovação e evasão por parte dos estudantes brasileiros, em especial, nos cursos de Engenharia e de Ciências Exatas, além dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Na perspectiva da Educação Matemática no Ensino Superior, em diversos cursos de licenciatura, como a licenciatura em Matemática, pesquisas destacam o “fato indiscutível que é alto o percentual de estudantes do nível superior cujo desempenho na aprendizagem da Matemática, em especial de Cálculo, tem deixado muito a desejar” (IGLORI, 2009, p. 12).

Rezende (2003), em investigação para sua pesquisa de Doutorado, traz dados alarmantes sobre a alta taxa de reprovação de alunos do CDI. De forma similar, Campos (2012) também em sua pesquisa de Doutorado, retrata essa realidade quando um professor de Cálculo relata que alunos de um curso de Engenharia ficavam retidos até 8 (oito) semestres seguidos nas disciplinas de CDI.

Destacamos, ainda, que Olímpio Júnior (2006), em sua pesquisa de Doutorado, investigou o tema envolvendo o ensino desta disciplina em outros países e constatou o seguinte:

> Uma pesquisa natural que poderia surgir é a seguinte: Seria este fenômeno encontrado apenas nos domínios das universidades brasileiras? A resposta encontrada é não e, pelo menos no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Cálculo, o fenômeno transcende os limites nacionais e os dias atuais e tem motivado as mais variadas reações na comunidade acadêmica (OLÍMPIO JÚNIOR, 2006 p. 2).

Dessa forma, constata-se que os problemas inerentes aos processos de ensino/aprendizagem do CDI não são exclusivos das universidades brasileiras, nem dos nossos dias atuais e se assemelham com os fatos históricos apresentados por outros pesquisadores, relatando o ensino da Matemática ao longo dos tempos.

Em nossa prática docente em CDI, observamos que a maioria dos alunos “algebrizam[8]” os problemas propostos pelos livros didáticos. Porém, quando solicitados a opinar criticamente

---

[8] Algebrizar aqui no sentido de solucionar os problemas por meio de fórmulas algébricas.

acerca dos resultados encontrados, têm dificuldades para apresentar e analisar o resultado obtido, o que pode nos levar a intuir que o "aprendizado" ocorreu de forma a não compreender os conceitos matemáticos ali inseridos e, por vezes, as soluções foram elaboradas por meio de passos e repetições.

Nasser (2009) também contempla registros semelhantes e argumenta acerca das dificuldades dos estudantes em utilizar a Matemática como ferramenta para solucionar "problemas reais": "Parece que os alunos chegam à universidade com preguiça de raciocinar e que foram acostumados apenas a aplicar algoritmos e fórmulas decoradas, sem saberem o que estão fazendo e por que adotam determinado procedimento" (NASSER, 2009, p. 47).

Burak et al (2016, p. 5) nos dá a chave do problema apontado por Nasser (2009), quando conclama aos professores no Ensino Fundamental "que ensinem aos seus alunos não somente conteúdos matemáticos puros, mas também valores, concepções e crenças sobre a Matemática". Ilustra ainda o fato de os problemas serem apresentados aos alunos na escola "[muitas vezes] sem considerar os problemas da vida real". Sua preocupação dimensiona o ensino da Matemática que dá pouca atenção às dimensões histórico/culturais e afetivas. Conclui seu pensamento sobre esse modo de ensinar Matemática, enfatizando os resultados obtidos pelos estudantes nas avaliações escolares e nos testes nacionais e internacionais de Matemática, indicando que eles obtêm pouco sucesso, tendo em vista as dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Na dimensão apresentada por Nasser (2009) e Burak (2016), os alunos chegam à Universidade e apresentam dificuldades significativas em Cálculo e, posteriormente, em disciplinas como Álgebra Linear e Equações Diferenciais, tendo em vista as lacunas da "Matemática Básica" que deveria ter sido trabalhada a partir de conceitos, propriedades e aplicações já no Ensino Básico.

Outras questões relacionadas às dificuldades encontradas pelos estudantes podem ser atribuídas à

> Pouca dedicação de estudo diário e à predominância da falta de contextualização e interdisciplinaridade, sendo o conhecimento matemático explanado em aulas expositivas em sala de aula, "fixado" por meio de exercícios resolvidos, muitas das vezes, de forma não contextualizada (BARBOSA, 2004).

De fato, Barbosa (2004) retrata essa realidade em sua Dissertação de Mestrado, enumerando algumas características da aprendizagem de Cálculo, apontadas por estudantes, nas respostas dadas aos questionários de sua pesquisa:

> 1) Os alunos estudavam poucas horas diárias;
> 2) Havia a predominância da resolução de exercícios de forma não contextualizada;
> 3) Cultura dos estudantes em acreditarem que os conteúdos matemáticos são aprendidos na resolução e na memorização de exercícios;
> 4) Na compreensão do conteúdo, o que predomina são as leituras das definições várias vezes e a consulta a livros didáticos;
> 5) Têm preferências por aulas expositivas e não percebem a utilização prática dos conteúdos estudados;
> 6) O aprendizado se concretiza obtendo boas notas nas provas, significando a compreensão daquilo que o professor transmitiu (BARBOSA, 2004, p. 12).

Desses apontamentos, inferimos que os estudantes, numa boa parte das vezes, são acostumados desde o Ensino Básico com metodologias inadequadas para o ensino da Matemática. Tais culturas culminam nas dificuldades de aprendizagem de Cálculo, conforme alerta Burak (2016), o que chama atenção para a necessidade de dimensionar os aspectos históricos e culturais na Educação Básica.

Barbosa (2004) sobre a formação do professor de Matemática e, em particular, do professor de CDI, sugere que:

> O professor que ensina Cálculo Diferencial e Integral está preso às metodologias e práticas experimentadas no curso de formação, geralmente centrado em paradigmas conservadores. [...] apesar de não ser o único fator, o sistema didático utilizado na disciplina é um dos fatores responsáveis pela não aprovação em Cálculo (BARBOSA, 2004, p. 41).

É dessa forma que Barbosa (2004) explica sobre o desempenho do professor que ensina Cálculo Diferencial e Integral, preso a metodologias e práticas centradas em paradigmas conservadores, isto é, o sistema didático é um dos fatores que conduzem às reprovações. Vale lembrar que a formação do aluno também é centrada nessa perspectiva, visto que cada vez que tentamos fazer algo diferente, nos deparamos com essa realidade.

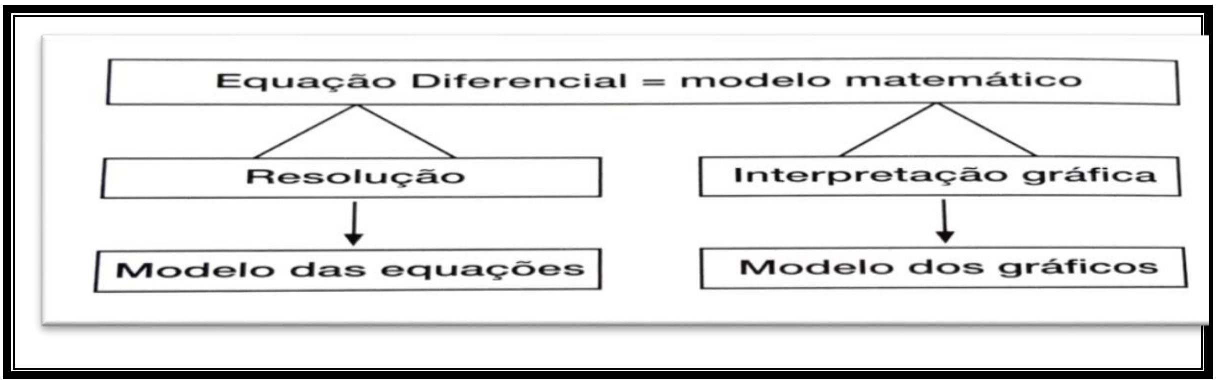
Assim, esta pesquisa também pode contribuir para a formação do professor que ensina disciplinas relacionadas ao CDI.

2.3. Um olhar inicial sobre as Equações Diferenciais Ordinárias

As EDO constituem-se em um importante instrumento matemático e estão associadas intrinsecamente ao CDI. São essenciais na investigação de fenômenos físicos e na resolução de situações-problema envolvendo Física, Química, Engenharias, dentre outros. Sua importância pode ser entendida a partir da possibilidade de suas expressões corresponderem a "modelos matemáticos" que têm uma boa aproximação com a realidade, permitindo assim estudar comportamentos e fenômenos físicos ou naturais tais como: circuitos elétricos, leis de resfriamento ou aquecimento, leis de vibração, modelos de crescimento e decaimento exponencial, dentre outros. Assim, "o trabalho com Equações Diferenciais transcende a Matemática e tem sua utilidade em vários domínios tecnológicos" (LAUDARES et al, 2017, p. 28).

Para Laudares et al (2017), as Equações Diferenciais e os modelos derivados podem ser representadas pelo diagrama a seguir:

Figura 1 – Diagrama de representação de uma EDO



Fonte: LAUDARES et al (2017, p. 28).

Vale lembrar que uma EDO é composta de uma função desconhecida e uma diferencial (ou derivada). De maneira analítica, diversos autores a abordam da seguinte maneira:

1) Função: $y = f(x)$
2) Derivada: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$
3) Diferencial: $dy = f'(x)dx$

Como exemplo de EDO, temos: $\frac{dy}{dx} - 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; dy = 3dx$ Assim, podemos ter escritas na forma de derivadas e diferenciais, respectivamente. O exemplo dado é uma Equação

Diferencial de 1ª ordem, tendo em vista que a derivada envolvida é de 1ª ordem. A ordem de uma Equação Diferencial é dada pela maior ordem de sua derivada.

Quanto ao grau de uma Equação Diferencial, corresponderá ao expoente da derivada de maior ordem. Como exemplos, temos:

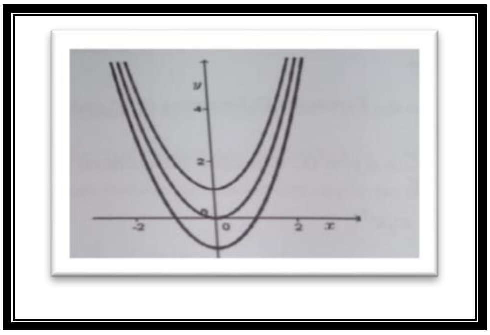
1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3 = 0$ Equação Diferencial de 1ª ordem e de grau 2.
2) $y'' - x.(y')^3 = 0$ Equação Diferencial de 1ª ordem e de grau 3.

Uma EDO será linear se a variável dependente e suas derivadas forem do primeiro grau e em um mesmo termo não deve haver produtos e divisão da variável dependente por suas derivadas, ou seja, os coeficientes e o termo independente não podem depender da variável dependente. Como exemplos podemos enumerar:

1) $xy'' + 7y' + x^3y = Cos\,(x)$ Note que é uma equação Linear.
2) $y'' + y^3 = x$ Note que é uma equação não linear (y elevado ao cubo).

Como solução analítica, uma EDO terá uma função como a solução. Como exemplo clássico: $y = x^2 + c$ em que c é uma constate real, é solução da EDO: $y' - 2x = 0$, tendo em vista que derivando a função dada, obteremos a EDO que, como consequência, é satisfeita. Vale ressaltar que a função solução possui uma constante arbitrária (c) que poderá assumir qualquer valor real, por isso é dita solução geral. Caso atribuamos valores à constante arbitrária (c), passaremos à condição de solução particular da EDO, conforme Figura 2.

Figura 2 – Representação gráfica de uma EDO



Fonte: LAUDARES et al (2017, p. 29).

Na figura anterior, estão representadas as soluções particulares para c = 0, c = 1 e c = –1 de: $y' - 2x = 0$.

2.3.1. Trazendo uma solução para Equação Diferencial Linear de 1ª ordem

A solução analítica e geral para as EDO do tipo: $y' - 2x = 0$ conforme exemplificada anteriormente é imediata. Obtém-se a solução geral por meio de integração, o que nos conduz a $\frac{dy}{dx} = 2x,\ dy = 2x\,dx,\ \int dy = \int 2xdx\ \ e\ \ y = x^2 + c$ em que c ∈ IR, ditas soluções de EDO do tipo separáveis.

Laudares (2017, p. 39), conceitua as EDO separáveis como "equações que permitem trabalhar com uma variável em cada membro da equação, que é uma igualdade, e integrar independentemente". Genericamente, a define assim:

$$\boxed{f(x)dx = g(y)dy}$$

De forma similar, Boyce (2010) mostra que a equação geral de primeira ordem é dada por $\frac{dy}{dx}$ = f (x, y) e podem ser solucionadas por meio de integração direta, podendo ser escritas também na forma: $M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$ se M só depende de x e N só depende de y. Ainda segundo o autor "tais equações são ditas separáveis porque se forem escritas na forma diferencial M (x) dx + N (y) dy = 0, então, se você quiser, as parcelas envolvendo cada variável podem ser colocadas em lados opostos do sinal de igualdade".

Porém, é frequente a ocorrência de EDO de primeira ordem do tipo: $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$ cuja obtenção de solução não é possível apenas integrando. Essas equações são úteis para estudar fenômenos naturais, uma vez que envolvem taxas de variação e suas soluções podem aproximar o resultado obtido do esperado com precisão e boa aproximação com a realidade.

Para solucionar essa equação será feita a multiplicação de seus termos por uma função escolhida, de modo que a nova equação obtida seja facilmente integrável. Na sequência, veremos que a função: $u(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ é uma função adequada para se alcançar o objetivo posteriormente citado. Vale lembrar que os cálculos a seguir são sugestões do livro Equações Diferenciais, Terceira Ed., dos autores Zill e Cullen (2007, p. 60-78).

Assim, seja a EDO linear dada por: $\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$ na qual P e Q são funções contínuas, desde que y ≠ 0.

Quadro 1 – Resolução de uma EDO Linear

$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$ O que equivale a:

$\frac{dy}{dx} = Q(x) - P(x).y \Rightarrow dy = dx\,(Q(x) - P(x))$

$dy + dx\big(P(x).y - Q(x)\big) = 0$ Multiplicando ambos os termos por u(x), vem:

$u(x).dy + u(x).[P(x).y - Q(x)].dx = 0$

Esta será uma EDO exata, se:

$\frac{\partial}{\partial x}\,u(x) = \frac{\partial}{\partial y}\,u(x).[P(x).y - Q(x)]$ Ou seja,

$\frac{\partial u}{\partial x} = u\,.P(x)$ E assim, podemos determinar u (x):

$\frac{du}{u} = P(x)dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int P(x)dx \Rightarrow \ln|u| = \int P(x)dx$ O que equivale a:

$u(x) = e^{\int P(x)dx}$ Chamado de fator integrante para a EDO linear.

Mesmo que Q(x) seja nulo, ainda assim a EDO será exata e assim, podemos escrever:

$dy.e^{\int P(x)dx} + P(x).y.e^{\int P(x)dx} = Q(x).e^{\int P(x)dx}$ O que equivale a escrevê-la da forma:

$D_x\big[y.e^{\int P(x)dx}\big] = Q(x).e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \int D_x\big[y.e^{\int P(x)dx}\big] = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}$ E então:

$y.e^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx} \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}.\big[\int Q(x).e^{\int P(x)dx}\big] + c$ com: $c \in IR$ e essa será a solução da EDO linear, desde que as funções sejam integráveis.

Fonte: Adaptado de Zill e Cullen (2007)

Para os objetivos de nosso trabalho, as justificativas anteriores são suficientes, mas claramente outros métodos e formas de abordagem de EDO fazem-se necessários para equações mais complexas que aquelas de primeira ordem com coeficientes contínuos. Mais informações sobre EDO e métodos de resolução podem ser vistas em livros tais como: Equações Diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace, Laudares et all (2017), Equações Diferenciais Zill e Cullen, (2007) e Equações Diferenciais Elementares e Problemas de valores de contorno, Boyce (2010).

2.4. Modelando com Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem

Muitas das leis físicas e das Ciências Sociais envolvem taxas de variação, constituindo-se em derivadas. Muitas dessas leis podem ser modeladas e traduzidas em "modelos matemáticos" por meio das EDO de 1ª ordem, aplicados ao crescimento populacional, à datação por carbono, à Medicina, à Ecologia, para enumerar alguns exemplos.

Para exemplificar, um dos modelos de derivadas mais simples: $\frac{dy}{dx} = ky$ é capaz de expressar e descrever a taxa de crescimento proporcional ao tamanho de uma população (de pessoas, bactérias, etc.), desde que não estejam restritas a limitações. Esse "modelo matemático" aponta a cada instante de tempo a taxa de crescimento da população. Neste caso, o valor de k corresponde a uma constante de proporcionalidade, determinada de maneira experimental.

Nesse contexto, se a população é conhecida num momento inicial $y = y_0$, em um tempo inicial t = 0, então o "modelo matemático" geral para a população num tempo qualquer y (t), pode ser encontrado solucionando o problema inicial de valor inicial, da forma: $\frac{dy}{dt} = ky$, sendo $y(0) = y_0$.

Esses modelos de Equações Diferenciais também são chamados de modelos exponenciais e geralmente surgem de situações-problemas nas quais uma quantidade cresce ou decresce a uma taxa proporcional relativa ao valor atual, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Modelo de equação de crescimento-decaimento exponencial

Dizemos que uma quantidade y = y (t) tem um modelo de crescimento exponencial se ela cresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente, e dizemos que tem um modelo de decaimento exponencial se ela decresce a uma taxa que é proporcional ao tamanho da quantidade presente. Assim, para um modelo de crescimento exponencial, a quantidade y (t) satisfaz a uma equação da forma: $\frac{dy}{dt} = ky \; com \; k > 0$. Para um modelo de decaimento exponencial, a quantidade y (t) satisfaz uma equação da forma $\frac{dy}{dt} = ky, com \; k < 0$. A constante k é chamada de constante de crescimento ou constante de decrescimento, conforme apropriado.

Fonte: Adaptado de LAUDARES et al (2017).

Vale ressaltar que a EDO da forma $\frac{dy}{dx} = ky$, pode ser reescrita como: $\frac{dy}{dt} = ky$, com t em vez de x como variável independente. Para ilustrar como essas equações podem ser solucionadas, suponhamos que uma quantidade: $y = y(t)$ tenha um modelo de crescimento exponencial e que conheçamos o tamanho dela em algum momento atual. Assim teremos: $y = y_0$ quando $t = 0$. Desse modo a equação geral para $y(t)$ pode ser obtida solucionando $\frac{dy}{dt} = ky$:

Quadro 3 – Solução da equação Y(t):

$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = kt + c_1$ com $c_1 \in IR.$
$y = e^{kt + c_1} = e^{c_1}.e^{kt} = C.e^{kt}\ e\ C \in IR$

Fonte: Dados do autor (2020)

Como a condição inicial implica em $y = y_0$ quando $t = 0$ podemos então escrever a solução geral para $y(t) = y_{0.}e^{kt}$. Vale ressaltar que para um modelo de crescimento $k > 0$ enquanto para um modelo de decrescimento $k < 0$. Lembrando que $k = \frac{dy/dt}{y}$ representa uma constante e por essa razão é dita taxa de crescimento relativo ou taxa de decaimento relativo.

2.5. Alguns olhares para o ensino de Equações Diferenciais

Existem, ainda, poucas pesquisas sobre o ensino de EDO no âmbito da Educação Matemática no Ensino Superior no Brasil. Algumas delas sinalizam que, tradicionalmente, o estudo de EDO tem uma abordagem mais algébrica, deixando de lado sua potencialidade para modelar fenômenos, conforme descreveremos adiante. Mediante esses apontamentos e a partir de nossa experiência docente com EDO, podemos tecer algumas reflexões sobre o processo de Modelagem como uma ferramenta para a construção de conceitos matemáticos e suas aplicações nas disciplinas de EDO.

Observamos que grande parte dos estudantes manipulam algebricamente suas soluções, mas não sabem identificar aplicações para suas soluções. Assim, seu foco parece ficar restrito à aplicação das regras de solução, sem que sejam utilizados alguns conceitos matemáticos e sendo possível observar que eles não se preocupam em significar os resultados obtidos, em semelhança com os problemas de aprendizagem de CDI. De uma forma geral, as pesquisas existentes e o exercício da docência superior mostram que os professores dão as fórmulas prontas, mas isso não ajuda na aprendizagem e, então, os alunos fazem os cálculos e encerram a solução.

Em sua Tese de Doutorado, Oliveira (2013) realizou um levantamento bibliográfico junto ao banco da Capes, entre os anos 2000 a 2011, com intuito de perceber dificuldades dos estudantes na aprendizagem de EDO, apontando possibilidades ou alternativas para seu ensino.

Segundo Oliveira (2013):

> De modo geral, as pesquisas levantadas ressaltaram que o ensino das Equações Diferenciais vem acontecendo de modo a concentrar uma maior atenção nas soluções analíticas a partir de manipulações algébricas de resolução e, nesse processo, relataram dificuldades de aprendizagem dos alunos referentes à matemática básica, à aplicação dos conceitos de derivada e integral e à interpretação de taxas de variação instantânea. Ressaltam, ainda, que o próprio enfoque que vem sendo dado ao conteúdo não propicia a compreensão do mesmo, o que pode acarretar aos alunos dificuldade em conceber o que é uma Equação Diferencial e, por conseguinte, sua aplicação em problemas contextualizados que exijam interpretação. Alguns trabalhos expressam a dificuldade que os estudantes têm para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico (OLIVEIRA, 2013, p. 21).

Oliveira (2013) relata ter inventariado um total de 16 trabalhos, sendo 5 artigos, 6 dissertações e 5 teses e, segundo a pesquisadora, a grande maioria deles sugere como possibilidade para o ensino de EDO, “o enfoque qualitativo do assunto, de forma contextualizada, a partir de situações-problema e por meio da utilização de recursos computacionais” (OLIVEIRA, 2013, p. 1).

Acerca dessa contextualização, ainda que na perspectiva do ensino de CDI, Barbosa (2004) avalia que:

> A contextualização do saber é uma ferramenta indispensável para a questão da transposição didática[9] (didática das matemáticas), pois implica recorrer a contextos que tenham significado para o aluno, envolvendo-o não só intelectualmente, mas também afetivamente, sendo assim uma estratégia fundamental para construção de significados. Sabemos que a falta de sentido da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral origina-se, em parte, das dificuldades decorrentes dessa transposição. O aluno só compreende os vínculos do conteúdo estudado quando fica compreensível para ele essa passagem. Contextualizar no ensino de Cálculo, vincularia os conhecimentos

[9] Transposição didática, aqui usada por Barbosa (2004), refere-se à relação existente entre processo de ensino/aprendizagem e a contextualização do conhecimento por meio de sua experiência cotidiana e o significado para aquilo que é aprendido.

> aos lugares onde foram criados e onde são aplicados, isto é, incorporar vivências concretas ao que vai se aprender e incorporando o aprendizado a novas vivências (BARBOSA, 2004, p. 41).

Nessa perspectiva, destacam-se as pesquisas de Alves (2008), Barros Filho (2012) e Buéri (2019) que, a seguir, passamos a detalhar. Ressaltamos que todas elas são Dissertações de Mestrado norteadas pelos princípios da Educação Matemática abordando metodologias aplicadas aos processos de ensino/aprendizagem de EDO.

2.5.1. A pesquisa de Murilo Barros Alves (2008)

A pesquisa de Alves (2008) postulou uma associação entre o estudo das EDO e as taxas de variação – derivadas – como meio de resolução de problemas baseados em fenômenos físicos. Utilizou a metodologia de Resolução de Problemas com ideias da Modelagem Matemática e experimentou o uso da ferramenta tecnológica computacional *Maple.*

Apresentou inicialmente conceitos históricos de estudos do CDI trazidos e abordados por matemáticos como Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Dedekind (1831-1916), Cauchy (1789-1857), dentre outros. Associou essas abordagens ao estudo das EDO e às taxas de variação (derivadas), por meio de autores e pesquisadores tais como Maor (2006), Stewart (2001) e Stochiero (2007). Dentre o repertório de sua pesquisa, trouxe métodos de resoluções analíticas e geométricas para as EDO, além de guias de aulas de Equações Diferenciais de autoria dos Profs. Drs. João Bosco Laudares e Dimas Filipe de Miranda (2007). Para o pesquisador:

> A forma de se estudar Equações Diferenciais tem sido baseada principalmente na leitura de textos e resoluções de exercícios. Tenho trabalhado há vários anos com disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e, principalmente, com as Equações Diferenciais, e neste período de trabalho um questionamento tem sido feito: Porque o estudante passa pela disciplina de Equações Diferenciais e não consegue correlacionar este estudo com as outras etapas do estudo de Cálculo? (ALVES, 2008, p. 11).

Em virtude de sua inquietação, da vontade de mudar sua prática e de mostrar a relevância das EDO para a formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática, o pesquisador vislumbrou mudanças na abordagem metodológica do ensino das EDO. Destacou os princípios envolvendo conceitos de Resolução de Problemas e de Modelagem nos trabalhos de diversos pesquisadores (BASSANEZI, 2002; LAUDARES & MIRANDA, 2007; OTTE, 1993; POLYA, 1994; PONTE, 2003; POZO, 1998; REIS, 2001, dentre outros) e, por meio deles, constatou que: "Uma estratégia de motivação e envolvimento dos estudantes de cursos de Ciências se faz pela inserção da Matemática com interdisciplinaridade e pela contextualização, através da formulação e resolução de problemas e, especialmente, na iniciação à Modelagem" (ALVES, 2008, p. 28).

Para a metodologia, o pesquisador utilizou a pesquisa qualitativa empirista com a elaboração de atividades investigativas pela iniciação da Modelagem e aplicação de um questionário. As atividades foram realizadas durante o ano de 2007, inicialmente com 30 estudantes e terminadas com 26 estudantes, divididos em dupla. Os participantes da pesquisa eram do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Maranhão – UEMA – Campus de Imperatriz.

Segundo Alves (2008, p. 55), "foram ministradas três atividades investigativas, para iniciá-los na aquisição de competências de formular, resolver problemas e modelar, de acordo com a metodologia de Ponte (2000): modelar por intuição e aplicar os conhecimentos adquiridos em Ciências e Cálculo".

Alves (2008, p. 55) complementa sua ideia inicial argumentando que a expectativa foi que "o estudante se empenhasse na aplicação, análise e no desenvolvimento contínuo dos seus conhecimentos em ciências, procurando de forma distinta descrever o fenômeno sem a preocupação com o algebrismo[10] e a algoritmização das formas de resolução de EDO".

As atividades de estudo foram os fenômenos físicos: I) Resfriamento ou aquecimento de um corpo; II) Crescimento Populacional; III) Determinação da equação matemática e resolução da Equação Diferencial aplicando as condições iniciais e de contorno dadas para determinar as constantes de integração, nos fenômenos I e II.

Após a resolução dos problemas propostos, houve um outro momento de resolução dos mesmos no laboratório de informática, "para discutir as possibilidades de aproveitamento das ferramentas computacionais para o ensino/aprendizagem de conteúdos matemáticos. Essa ferramenta proporciona ao estudante a possibilidade de realizar experimentações a partir de um fenômeno a ser estudado" (ALVES, 2008, p. 67).

---

[10] Algebrismo e algoritmização inseridos aqui no sentido de soluções por meio de fórmulas e regras.

Na coleta de dados, o investigador usou a observação, com anotações dos momentos de aplicação das atividades destacando as dificuldades dos participantes da pesquisa ocorridas nas atividades do primeiro e segundo fenômenos e ponderou que:

> Os estudantes também apresentaram dificuldade de trabalhar, num primeiro momento, sem a necessidade de desenvolvimento de nenhum tipo de cálculo, mas com a construção do pensamento matemático sobre o fenômeno ora estudado. A busca por uma fórmula matemática para a resolução do problema também ficou evidenciada nessa etapa. As duplas conseguiram relatar que o corpo irá esfriar com o passar do tempo quando colocado no ambiente preparado; no entanto, quando a questão é a identificação das grandezas presentes na experiência, apresentaram um índice próximo do apresentado na etapa anterior, isto é, 69% conseguiram descrevê-las.[...] No estudo do crescimento populacional, a metodologia foi mantida. Os estudantes apresentaram dificuldades similares às apresentadas na primeira etapa. Na “socialização” das respostas dos estudantes, procurou-se realizar os mesmos questionamentos para facilitar o confronto das respostas (ALVES, 2008, p. 72).

O investigador, em pauta, observou ainda que para o 2º fenômeno, referente ao crescimento populacional, os estudantes “tiveram menos problemas com a construção do gráfico, porém o fator mais relevante foi a dificuldade apresentada quanto à criação do modelo matemático com o uso do conceito diferencial, também pelo motivo da aplicação do conceito de taxa de variação aprendido pelos estudantes” (ALVES, 2008, p. 76).

Ainda como conclusão de suas observações e da aplicação do questionário, observou que as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes nas resoluções de problemas envolvendo fenômenos físicos, com aplicação das EDO, apresentaram-se: a interpretação do texto, a elaboração e análise gráfica, a correlação da Matemática com os fenômenos físicos, a determinação do “modelo matemático” para estudar o fenômeno e a determinação de suas variáveis.

Alves (2008) concluiu sua pesquisa inferindo que o processo de Modelagem por meio de atividades investigativas apresentou um resultado satisfatório na ressignificação do conceito de taxa de variação para o estudante de Cálculo e contribuiu na aprendizagem das EDO.

2.5.2. A pesquisa de Aníbal Barros Filho (2012)

A pesquisa de Barros Filho (2012) intentou diagnosticar indícios de como a resolução de problemas com a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa do ensino das EDO e nas aplicações em situações-problemas das Ciências, utilizando da ferramenta computacional *Maple.*

Embasado em Javorini (2007), utilizou a abordagem qualitativa no ensino das EDO por meio das informações geométricas construídas a partir do auxílio das tecnologias. O pesquisador desenvolveu sua pesquisa guiado pelas premissas e perspectivas da Educação Matemática e inventariou trabalhos investigando os processos de ensino/aprendizagem e metodologias alternativas utilizadas no ensino das EDO com o intuito de identificar a presença das características norteadas por esse campo de pesquisas.

Em alguns trabalhos analisados (DULLIUS, 2009; JAVORONI, 2007; HABRE, 2000; HABRE, 2003; RASMUSSEN, 2001), o pesquisador identificou questões inerentes às metodologias aplicadas ao ensino das Equações Diferenciais, constatando por meio deles que: "A metodologia predominante aplicada ao ensino de EDO potencializa o enfoque algébrico (sobre o gráfico e numérico) com ênfase nos métodos e técnicas de resolução analítica das EDO, o que pode não ser suficiente para um aprendizado significativo" (BARROS FILHO, 2012, p. 58).

Na análise do trabalho dos pesquisadores Moreno e Azcárate (2003), na qual um dos objetivos era identificar, dentre outros, o nível de coerência e suas influências sobre a prática docente e avaliar a consistência e o grau de solidificação das crenças e concepções de cada professor, de um grupo de seis professores universitários, Barros Filho, pondera que:

> Conclusões parciais dos autores apontam para uma metodologia dominante no âmbito universitário, baseada nas aulas tradicionais, em que o professor ocupa o papel central. A maioria dos professores pesquisados está convencida da adequação dos conteúdos ensinados e, que levando em consideração o nível de conhecimentos de seus alunos, adaptações no currículo incidem diretamente na diminuição dos conteúdos teóricos ministrados e na substituição das demonstrações pelas justificativas. Adotam uma prática, essencialmente instrumentalista, com ênfase nas técnicas de resolução de EDs (EDO) com resolução de certos problemas por meio de modelagem (BARROS FILHO, 2012, p. 59).

Barros Filho (2008, p. 59) relata ainda que, para Moreno e Azcárate (2003), a manutenção dos métodos de ensino tradicional frente às novas tecnologias e metodologias de ensino se deve a várias razões:

1) Forte crença dos professores no baixo nível dos alunos, o que consideram inoperante qualquer enfoque que coloque o estudante em situação de pensar e raciocinar além do básico;
2) Concepção formalista da matemática, e em particular das EDO que supervaloriza o tratamento analítico (algébrico) frente ao tratamento numérico e gráfico;
3) O medo da perda dos conteúdos específicos que alguns professores consideram "matemática real" frente a conteúdos e técnicas de matemática aplicada, que não são considerados matemática pura tradicional "de toda vida";
4) Os professores dedicam mais tempo a atividades profissionais mais valorizadas institucionalmente do que para a preparação da matéria que atualmente eles conhecem e dominam;
5) Os professores têm consciência da necessidade de reciclarem e dedicarem mais tempo em preparação de suas atividades de sala de aula.

O pesquisador ainda citou a pesquisa de Rasmussen (2001) que realizou um estudo que visava encontrar novos rumos para auxiliar os estudantes a pensar de um modo mais interpretativo e reforçar suas capacidades de análise gráfica e numérica das EDO. Como conclusão desse trabalho, envolvendo as dificuldades no ensino das EDO, Rasmussen (2001) argumentou que, quando os estudantes pensam em função, eles associam a uma equação ou a uma regra e não a um gráfico. Assim, as representações gráficas não significam a mesma ideia matemática para alguns estudantes do que para a comunidade matemática. A alteração necessária na conceituação de soluções numéricas, quando se resolve equações algébricas e na conceituação de soluções como funções, quando se resolvem EDO, representa uma mudança no paradigma para estudantes, trazendo dificuldades de entendimento e, consequentemente para a aprendizagem.

Barros Filho (2012, p. 30) também entende que "os processos de ensino/aprendizagem sofrem influência direta da organização didática dos livros textos de Equações Diferenciais". Assim, realizou investigação de observações em livros didáticos envolvendo CDI e EDO, constatando que os aspectos analíticos estão fortemente presentes na maioria deles, não trazendo, entretanto, uma contextualização interdisciplinar.

Como metodologia de pesquisa, buscou suporte teórico na Teoria da Equilibração de Piaget (1975), na qual o sujeito constrói o seu conhecimento na interação tanto com o meio físico como social e na Teoria Sócio Interacionista de Vygotsky (1978), que compartilha uma visão construtivista assentada na ideia de que a única aprendizagem significativa é por meio da interação entre sujeito, o objeto e outros sujeitos. Além disso, o pesquisador optou, em função da característica de sua pesquisa, por um estudo qualitativo, sendo as atividades desenvolvidas e ministradas em sala de aula onde o professor/pesquisador esteve em contato direto com os sujeitos da pesquisa.

O trabalho de campo foi desenvolvido com estudantes do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Goiás – Campus Jataí, no 2º semestre de 2011, onde o pesquisador lecionava à época da pesquisa. Inicialmente, 14 estudantes participaram das atividades, mas por motivos pessoais, 2 desistiram das atividades e assim, 12 cumpriram totalmente as tarefas propostas.

Na coleta de dados, utilizou registros de dados por meio de “caderneta de campo”, Worksheets[11] dos estudantes com as resoluções das atividades, vídeos gerados pelo *software* CAMTASIA[12] com as gravações das ações dos estudantes no decorrer da realização das atividades e questionários inicial e final.

Como considerações e resultados, constatou por meio da revisão de literatura realizada, que poucos trabalhos, à época de sua pesquisa, utilizavam as TIC nos processos de ensino/aprendizagem das EDO. Além disso, no início de sua pesquisa, percebeu que os estudantes associavam as EDO a um processo puramente algébrico; então, buscou conceitua-las de forma diferente, procurando dar sentido para as soluções, à medida em que se desenrolaram as atividades aplicadas.

Assim, após a conclusão e análise das atividades planejadas metodologicamente, o pesquisador concluiu que:

> Os estudantes encontraram dificuldades por não estarem acostumados com uma proposta que exige atitude ativa, que gera trabalho contínuo durante todas as atividades. O trabalho com o software Maple exigiu dos mesmos, habilidades que nunca haviam sido exploradas em outras disciplinas da área de exatas (BARROS FILHO, 2012, p. 161-162).

2.5.3. A pesquisa de Jonathan Wéverton Silva Buéri (2019)

[11] Planilhas eletrônicas.
[12] Software de criação de vídeos.

A pesquisa de Buéri (2019) pretendeu analisar de que maneira a metodologia de estudo de fenômenos físicos com EDO de 1ª ordem em cursos de Engenharia, com a utilização da técnica de pesquisa de grupo controle, pode contribuir para o ensino/aprendizagem das EDO.

Dentre os objetivos específicos, um deles tinha o propósito de realizar um levantamento bibliográfico de obras relacionadas às EDO e selecionar livros textos que trouxessem atividades que contemplassem a metodologia a investigar. Esse objetivo foi realizado analisando quatro livros textos de diferentes autores com a intenção de verificar: diversificação de abordagens, utilização de estímulos problemas com situações reais, exposição leves de teoremas, exploração de recursos gráficos, ilustrações e tabelas, diversificação de exercícios e recursos tecnológicos. Nas análises, o pesquisador verificou que, dentre as bibliografias verificadas, um livro de EDO utilizava abordagens cujas atividades atendiam à metodologia que ele pretendia utilizar.

Buéri (2019) justificou sua pesquisa com uma revisão de literatura embasada em livros textos, artigos, dissertações e teses recentes (ALVES, 2008; ANTÔNIO SILVA, 2011; BASSANEZI, 2011; DAMBRÓSIO, 2012; LAUDARES, 2017; ONUCHIC & ALLEVATO, 2005, PÓLYA, 1995; POZO, 2008; VAZ, 2010, dentre outros). Trouxe como escopo da sua fundamentação teórica a Resolução de Problemas pautada na perspectiva da Educação Matemática. Alinhando as expectativas de sua pesquisa a perspectivas como a de Frota (2009):

> A motivação do aluno, por exemplo, é um fator que contribui para a aprendizagem, compreendendo as expectativas de desempenho que o aluno tem, fundamentadas em um auto avaliação das próprias capacidades e na avaliação dos colegas, professores, familiares, bem como na importância ou valor que atribui à tarefa, ou seja, o valor da meta (FROTA, 2009, p.61).

Para o seu referencial teórico, utilizou o autor Laudares (2017), conceituando as atividades de EDO e dando aplicação aos problemas e fenômenos físicos levantados na questão de investigação.

Além disso, Buéri (2019) conceituou e trouxe quadros comparativos envolvendo a compreensão das Equações Diferenciais quando o seu ensino é realizado de forma tradicional, por meio de exercícios, e quando é permeado com a metodologia ativa e alternativa, envolvendo resolução de problemas. No quadro abaixo (BUÉRI, 2019, p. 30), compara a diferenciação entre atividades envolvendo exercícios e resolução de problemas com base em Laudares et al (2017):

Figura 3 – Quadro comparativo entre exercícios e problemas

Exercício	Problema
Procedimentos automáticos	Processo de reflexão
Habilidade mecânica de repetição	Tomada de decisões
Treinamento e modelo	Situação nova e aberta
Há uma forma padronizada	Existência de contexto

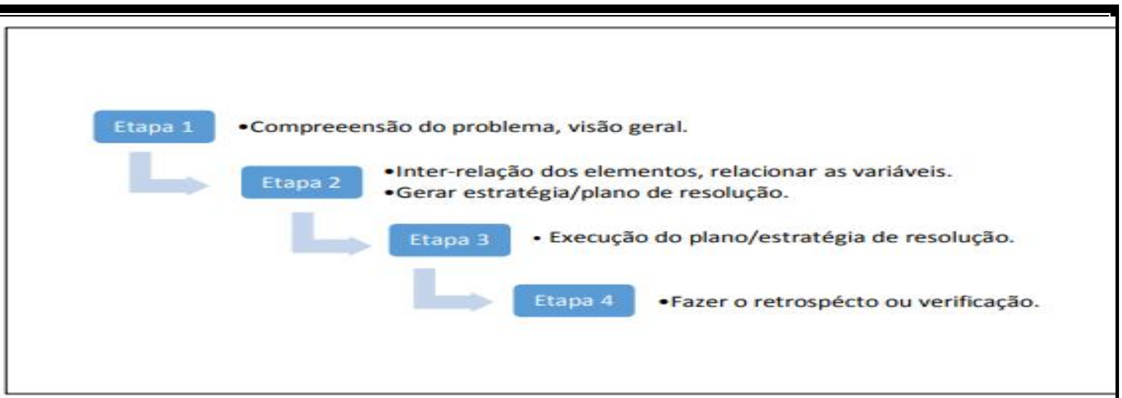
Resolver uma Equação Diferencial	**Resolver um problema geométrico ou de fenômeno físico**

Fonte: Adaptado de Laudares, et. al., (2017, p.95).

Fonte: Buéri (2019)

Em outro quadro, Buéri (2018, p. 31) destacou o esquema gráfico proposto para a resolução de problemas por Pólya (1995):

Figura 4 – Quadro com esquema para resolução de problemas



Fonte: Adaptado de Pólya, (1995, p. 2).

Fonte: Buéri (2019)

Buéri trouxe ainda a citação de Pozo (2008), destacando a reflexão e tomadas de decisões importantes pelos estudantes:

> Uma situação somente pode ser concebida como um problema, na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos (POZO, 2008, p. 16).

Como ferramenta metodológica, Buéri (2019) utilizou a pesquisa qualitativa, desenvolvendo 8 atividades para solucionar um problema físico de decaimento exponencial, estruturadas por passos, para 155 alunos dos cursos de Engenharias Civil, Elétrica, Mecânica e Química da PUC Minas de Belo Horizonte – MG. Participou da pesquisa como pesquisador, aplicando as atividades em turmas de três professores diferentes e utilizou o a técnica de grupos de controle, aplicando a mesma atividade em 2 grupos de estudantes com distintas metodologias. Para um dos grupos, aplicou a metodologia proposta na pesquisa e, para outro, a metodologia tradicional, comparando os resultados, posteriormente.

No primeiro grupo, aplicou a metodologia modelando o fenômeno e interpretando-o por meio de gráficos, enquanto no segundo grupo, utilizou o método tradicional de ensino com a resolução da atividade sem a interpretação dos dados. Observou a utilização dos "pensamentos matemáticos" em ambos os grupos, mas destacou que "o primeiro grupo teve um melhor desempenho, utilizando os passos de interpretação dos modelos matemáticos. Isso evidenciou que a 'metodologia de passos com análise de modelos' contribuiu para um aprendizado mais significativo que o método tradicional" (BUÉRI, 2019, p. 100).

Em suas conclusões, o pesquisador considerou que o método de ensino de Equações Diferenciais pela interpretação de modelos empregando o método da pesquisa atingiu os objetivos esperados. Entretanto:

> Conclui-se que, apesar do desempenho do grupo 1 ter sido mais significativo[13] que do grupo 2, os estudantes demonstraram ter dificuldades durante a resolução das equações definidoras dos modelos e, principalmente, na elaboração e interpretação dos gráficos. Pode-se inferir que esta abordagem inovadora de estudo da aplicação de EDO, trouxe as dificuldades apresentadas pois, exigiu uma análise interpretativa crítica que os estudantes não são levados a fazer num tratamento apenas de resolução das EDO (BUÉRI, 2019, p. 101).

[13] Significativo no sentido do grupo 1 ter uma melhor compreensão para a elaboração das Equações modeladoras para o fenômeno estudado.

Outra constatação que Buéri (2019) considerou importante é que o método de ensino de EDO pela interpretação de modelos empregados no livro base da pesquisa contribuiu para o processo de aprendizagem de resolução de problemas com EDO. Para Buéri (2019), a obra de Laudares et al (2017) contempla as ideias da metodologia aplicada com uma abordagem de ensino voltada para a significação matemática, a contextualização na exploração de ferramentas gráficas e a diversificação de exemplos em suas atividades. Esses são fatores importantes que podem contribuir para a construção do conhecimento matemático de uma forma com significados.

Uma breve síntese das 3(três) dissertações consideram que o ensino de EDO não pode ser reduzido nas resoluções, estritamente algébrica das mesmas, mas é fundamental buscar o que é rico na concepção da EDO: interpretação de modelos de fenômenos com introdução da modelagem. A abordagem das dissertações mostra a evolução da Modelagem e um aprofundamento reflexivo e crítico, que vem ao encontro dos objetivos da pesquisa ora apresentada nesta dissertação.

2.6. Algumas considerações sobre o ensino/aprendizagem de Equações Diferenciais

Percebe-se uma certa sintonia entre as diversas literaturas pesquisadas e citadas nesta revisão teórica. Muito já se sabe sobre o pensamento e a comunicação algébrica, mas precisamos levar esse conhecimento matemático para a sala de aula do Ensino Superior e, para tanto, é preciso descobrir caminhos para sua efetivação, passando por metodologias ativas e alternativas.

Para que isso aconteça de fato, é necessário que, além das construções teóricas, o professor/pesquisador coloque "a mão na massa" e compreenda que o seu laboratório deve ser a sala de aula. É lá que o professor tem sua atuação e, portanto, deve dar foco e olhar à aprendizagem dos estudantes, respeitando sua história de vida.

Parafraseando Garnica (2001, p. 6): "Não há homem e mundo, mas homem no mundo, o que nos leva a considerar a Educação Matemática em seu aspecto global como área teórico-prática".

Considerando esta perspectiva, é necessário entender a necessidade de tirar o foco do ensino e convergi-lo para a aprendizagem. Numa aula de Matemática, para que haja aprendizagem é preciso não ter somente a Matemática como ponto central, mas também colocar como pano de fundo outros aspectos ligados à criatividade e criticidade, numa condição de interdisciplinaridade. Agindo assim, nós, professores de Matemática, estaremos trabalhando um processo de ensino/aprendizagem e nos tornando, de fato, educadores matemáticos.

Detalharemos a seguir, a proposta de Modelagem Matemática que poderá ser uma maneira interessante para construir o conhecimento matemático inserido nas EDO e além disso auxiliando na resolução de fenômenos naturais com criticidade e criatividade.

Capítulo 3

OLHARES SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA SOCIOCRÍTICA

> Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção. Quem ensina aprende ao ensinar, quem aprende ensina ao aprender (PAULO FREIRE, 1987, p. 33).

Antes de discutirmos acerca da Modelagem, discorreremos sobre alguns aspectos importantes da Educação Matemática, norteadores para a Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica, base teórica de nossa pesquisa.

3.1. Olhares advindos dos constructos da Educação Matemática

A epígrafe deste capítulo nos remete a uma concepção disruptiva e inovadora, tratando-se da arte de ensinar e aprender, arte que pode ser concebida com o significado de compreender os conceitos de forma coerente, estabelecer relações entre suas representações e de saber aplicá-los em situações diversas, sejam ou não do cotidiano.

Pode-se traçar um paralelo entre o pensamento filosófico de Paulo Freire e a teoria da Educação Matemática, cuja perspectiva não carrega a premissa de partir de uma outra Matemática, mas sim de significá-la didaticamente. Em geral, a Educação Matemática preocupa-se, além do ensino da Matemática, com a maneira como ela influencia o nosso ambiente social, cultural, tecnológico e político. Nessa perspectiva, Burak e Klüber (2004) sugerem que:

> No ato de ensinar Matemática, faz-se necessário considerar os componentes indicados no modelo, para que se possa oportunizar uma aprendizagem mais efetiva por meio de um ensino mais consciente e crítico pelo professor, em relação ao complexo ato de ensinar, especificamente, Matemática (BURAK & KLÜBER, 2004, p. 35).

Entretanto, essa preocupação não se fez presente desde o surgimento da Matemática e sua instituição como conteúdo de ensino nas escolas mundo afora. Estudos apontam que universidades europeias, ao final do século XIX, repensaram aspectos inerentes aos processos de ensino/aprendizagem da Matemática, bem como o currículo escolar e a formação dos professores.

Em particular, "Universidades da Prússia[14] começaram uma reforma da Educação Superior, onde esperava-se que o professor universitário, além de ensinar, realizasse pesquisa e se preocupasse com a forma desse ensino" (KILPATRICK, 1992, p.2, tradução nossa).

Um dos passos mais importantes da Educação Matemática foi dado pelo matemático alemão Félix Klein (1845 – 1925) que, em 1908, publicou a obra denominada "Matemática Elementar de um ponto de vista avançado", discutindo questões relacionadas à Didática da Matemática. Klein participou da criação da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM / IMUK) de 1908, em Roma. Com isso, surgiram as primeiras ideias da Educação Matemática (D'AMBRÓSIO, 2004).

"Este foi um marco de consolidação da Educação Matemática como uma subárea da Matemática e da Educação" e "sua orientação levava a uma Matemática com vistas a aplicações" (D'AMBRÓSIO, 2014, p. 49).

Em 1915, foi criado a Mathematical Association of America (MAA) e em 1916 a American Educational Research Association (AERA) correspondente, no Brasil, â ANPED. E, em 1920 no Congresso Internacional de Matemáticos (IMUK), a International Mathematics Union (IMU). Neste mesmo ano foi criado o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), equivalente no Brasil â SBEM. D'Ambrósio (2014) relata que:

> No Brasil, com a criação das Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras de São Paulo em 1933 e logo a seguir a Universidade do Distrito Federal, transformada em Universidade Brasil em 1937, inicia-se a formação dos primeiros pesquisadores modernos de Matemática no Brasil. Além da criação do Conselho Nacional de Pesquisas em 1955 e seu Instituto de Matemática Pura e Aplicada/Impa e a realização de Colóquios Brasileiros de Matemática a partir de 1957, em Poços de Caldas (D'AMBRÓSIO, 2014, p. 51-52).

[14] Região situada na baía de Gdansk na Polônia.

Nos Estados Unidos, em 1951, na Universidade de Ilinois, Max Beberman dá início à reforma do ensino de Matemática com o University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM).

Após as duas guerras mundiais, em 1952, o ICMI foi restaurado como uma comissão da International Mathematics Union (IMU). E na Stanford University, Edward G. Begle (orientador de doutorado de Max Beberman), cria o School Mathematics Study Group (SMSG).

Em 1958, na França, a Organização Europeia de Cooperação Econômica (OCEE) reuniu representantes de 20 países e em 1959 realizou o Seminário de Royaumont, quando foram tratadas as linhas centrais da Reforma e políticas de implementação de reforma no ensino da Matemática.

Em 1960, o International Committee of Mathematical Instruction (ICMI), realiza uma reunião em Arhus na Dinamarca. E em 1961, em Bogotá - Colômbia, objetivando a reforma do ensino de Matemática na América, a I Conferência Interamericana de Educação Matemática - I CIAEM, quando é fundado o Comitê Interamericano de Educação Matemática (CIAEM) pelo ICMI. Tudo apoiado pela UNESCO, OEA, Fundação Ford, Fundação Rockefeller, Fundação Nacional de Ciências dos Estados Unidos, e outros. O grande matemático Marshall Harvey Stone foi presidente do CIAEM desde sua fundação até 1972. Os pesquisadores brasileiros Ubiratan D'Ambrósio e Salet Biembengut foram presidentes do CIAEM. Essas conferências foram realizadas no Brasil em Campinas, SP, em Blumenau, SC e em Recife, PE.

Viana (2004), citando o professor Santaló (1979), ex-presidente do CIAEM, explicou que a reforma do ensino de Matemática pode ser considerada em três períodos:

> 1º período: da Conferência de Royaumont, em 1959, ao Congresso de Lyon, em 1969, quando predominou a preocupação com os conteúdos. 2º período: do Congresso de Lyon ao Congresso de Exeter, em 1972, em que a atenção foi direcionada para aplicações. 3º período: do Congresso de Exeter a Karlsrue, em 1976, à época em que este artigo foi escrito, ou seja, 1979, período em que se deu ênfase à Didática, o que, na verdade, acontece até nos dias atuais (VIANA, 2004, p. 30).

Rumo à consolidação, vários movimentos ocorreram na trajetória da Matemática até os dias atuais. Cabendo destaque, na década de 1960, ao movimento internacional do ensino de Matemática, denominado Movimento da Matemática Moderna (MMM) que também ocorreu no Brasil, mas de forma reduzida, segundo Viana (2004).

Muitos outros congressos foram realizados. E havia outros grupos em diversos países cujas ideias não eram idênticas. Esse MMM proporcionou grandes mudanças ocorridas no ensino da Matemática, inclusive o Brasil. Viana (2004) explica o MMM da seguinte forma:

> Nas décadas de 30 e 40, em Nancy (França), o grupo Bourbaki[15] buscou a unificação da Matemática em estruturas gigantescas, a algébrica e a topológica, unidas pela estrutura de espaço vetorial. Os EUA contribuíram com o financiamento da reforma [...], Mas a atualização do currículo de Matemática começou realmente a ser feita em 1952, pela Comissão de Matemática Escolar da Universidade de Illinois, presidida pelo professor Max Beberman. [...] Mas as propostas dos grupos francês, belga e americano não eram uniformes. Dienes, por exemplo, enfatizou o uso de material concreto e transformações em planos finitos e estruturas algébricas (VIANA, 2004, p. 30).

Segundo D'Ambrósio (2014, p. 49), "esta fase representa o início da moderna Educação Matemática"

Seguindo sua trajetória, a Educação Matemática torna-se um Campo Científico, consolida-se com pesquisas no mundo inteiro, preocupada com o ensino da Matemática e em encontrar novas maneiras de ensinar e aprender Matemática.

Nesse contexto, surge o desafio de sugerir novas propostas ao currículo, adaptando os métodos de ensino às novas demandas da sociedade, bem como torná-la acessível a todos. Segundo Skovsmose (2010, p. 5): "No movimento da Educação Matemática, está embasado o princípio de que todos podem produzir Matemática nas suas diferentes expressões".

Skovsmose (2007) também argumenta a respeito do movimento provocado pelo seminário Royaunmont:

> A Educação Matemática faz maravilhas. O que aconteceu na França em 1959, no seminário Royaunmont, organizado e financiado pela *Organization for European Economic Co-operation and Developement* (OEEC), mais tarde *Organization for Economic Co-operation and development* (OECD), está bem documentado. A iniciativa foi provocada pelo "choque do *Sputinik*", e a hipótese era simplesmente de que as ligações entre Matemática e a melhoria

[15] Integrado por Jean Alexandre Eugene Dieudonné (1906-1992), André Weil e outros matemáticos importantes. Na conferência de Royaumont Diedonné proferiu a célebre frase "Abaixo Euclides", significando que os métodos de ensino da Geometria, baseados nos Elementos de Euclides não correspondiam à evolução da Matemática (D'AMBRÓSIO, 2004). Mas, Omar Catunda disse: no Brasil pelo menos Euclides. Certamente prevendo o "abandono da geometria", pois segundo Viana (2004), durante o MMM não ensinaram nem Geometria das transformações, nem a Euclidiana (VIANA, 2004).

> tecnológica da sociedade solicitavam que algo radical devesse ser feito para melhorar a Educação Matemática (SKOVSMOSE, 2007, p. 28).

Os contextos descritos nas pesquisas encontradas apontam e sugerem aos educadores matemáticos atuais, grande responsabilidade na formação escolar dos estudantes. Com o propósito de buscar alternativas, a Educação Matemática vislumbra caminhos alternativos que humanizem o ensino da Matemática em seus diversos níveis de ensino:

> A Educação Matemática surge a partir de fatos determinantes com a preocupação de matemáticos e professores de Matemática em melhorar a qualidade da socialização das ideias matemáticas. É uma área de conhecimento oriunda das ciências sociais e humanas e que estuda o ensino/aprendizagem da Matemática (FIORENTINI & LORENZATO, 2006, p. 6).

Dessa forma, Fiorentini & Lorenzato, (2006) em sintonia com Kilpatrick, (1992) enumeram três razões determinantes para o surgimento da Educação Matemática enquanto campo profissional e científico, sugerindo mudanças nos processos de ensino/aprendizagem da Matemática:

1) Preocupação atribuída de matemáticos e professores de Matemática a respeito da qualidade do ensino e socialização da Matemática;
2) Atribuir às Universidades Europeias, ainda no século XIX e início do século XX, preocupadas em promover uma melhor formação aos professores secundaristas;
3) Estudos experimentais de psicólogos Europeus e Americanos de como as crianças aprendem a Matemática.

Dentro desse campo profissional e científico da Educação Matemática, buscaremos agora, uma reflexão acerca da Educação Matemática Crítica, que preconiza uma perspectiva de diálogo, inclusão e equidade, destacando a Matemática como uma ciência capaz de auxiliar no pensamento e na inclusão social.

3.2. Um olhar inicial sobre a Educação Matemática Crítica

Ultimamente, a Educação Matemática Crítica[16] (EMC) vem sendo fortemente discutida por vários educadores matemáticos. Dentre eles, destaca-se Ole Skovsmose, professor/pesquisador da UNESP – Rio Claro. Adepta da EMC e com publicações relevantes, Araújo (2017) defende que a EMC:

> Não é um subcampo da Educação Matemática, nem um conjunto de métodos pedagógicos que devem ser aplicados em práticas escolares de Matemática, mas sim, que ela se constitui como manifestações de preocupações relativas à natureza crítica e às incertezas da Educação Matemática. Dentre as preocupações apontadas por Skovsmose, citamos o *foreground*[17] dos estudantes, cenários para investigação, concepções críticas de Matemática, reflexões e Matemática, além de diálogo, inclusão, equidade, diferença, diversidade, racismo, Matemática para a justiça social (ARAÚJO, 2017, p. 112).

Araújo (2017, p. 109) preocupa-se com as concepções críticas da Matemática, incluindo a ideia de "Matemática em ação". Para ela, há a necessidade de "problematizar o papel da Matemática na sociedade, em geral, e nas escolas, como instituições pertencentes a essa Sociedade. Olhar para a Matemática pressupõe uma concepção crítica dessa Ciência, ao passo que uma Educação Matemática dos estudantes em que tais questões estão em relevo diz respeito à matemacia[18]".

Acerca de qual Matemática ensinar, Araújo (2017) preocupa-se com o "como" e "o que" ela representa na sociedade, em uma sequência de indagações que demandam muita reflexão:

> Como a Matemática se faz presente em nosso dia a dia? O que as pessoas pensam sobre essa ciência? A Matemática é importante para o funcionamento tecnológico da sociedade? Como a Matemática contribui para a tomada de decisões? Ao fazer tais questionamentos estamos voltando nossa crítica para a Matemática em ação na sociedade. Podemos, da mesma forma, voltar a crítica para a própria Matemática. Quando falamos "Matemática", estamos nos referindo a uma mesma coisa? Do que trata a Matemática? (ARAÚJO, 2017, p. 113).

---

[16] Crítica deriva da palavra grega *Krimei*n, referindo-se a separar, julgar e decidir.

[17] O conceito de *foreground* se refere a como uma pessoa vê seu futuro. Esse conceito tem sido discutido em uma perspectiva social para entender os motivos que levam estudantes a aprender.

[18] Matemacia no sentido de saber lidar com noções matemáticas, saber aplicar tais noções em diferentes contextos e assim ser capaz de refletir sobre essas aplicações. Essa é uma proposta de Skovsmose que será discutida com maior aprofundamento na fundamentação de Educação Matemática Crítica a seguir.

De forma similar, D’Ambrósio (2014, pp. 12-13), sugere que “há, efetivamente, moralidade associada ao conhecimento e em particular ao conhecimento matemático. A Educação, em especial, a Educação Matemática bem como o próprio fazer matemático pode ajudar a construir uma humanidade ancorada em respeito, solidariedade e cooperação”.

Assim, a EMC investiga o currículo escolar, as metodologias e processos pedagógicos, de forma que exista uma maior comunicação entre os estudantes de Matemática e novas aplicações ao “mundo real” e a sociedade. Se o educador matemático inclui em suas aulas reflexões que levem ao desenvolvimento dessas perspectivas postas pela EMC, implementar-se-á a matemacia citada por Araújo (2017), assim abordada por Skovsmose (2011):

> A matemacia pode ser discutida em termos de habilidade de entender e operar com noções, algoritmos e procedimentos matemáticos; ela pode ser discutida em termos de habilidades de aplicar todas essas noções e procedimentos em uma variedade de situações; e ela pode ser discutida em termos de habilidades de refletir sobre todas essas aplicações (SKOVSMOSE, 2011 p. 83).

Entretanto, podemos nos manter na perspectiva crítica e, ainda assim, conceber a Educação Matemática como uma ciência humana e social, sobre o que argumentaremos mais detalhadamente a seguir.

3.3. Olhares sobre a Educação Matemática numa perspectiva humana e social

Na perspectiva da EMC, Burak e Klüber (2008) também concebem a Educação Matemática como sendo “uma ciência humana e social”, similarmente a Godino (2010), ao dimensionar a Educação Matemática como “um sistema social, heterogêneo e complexo” no qual é necessário distinguir ao menos três componentes:

1) A ação prática e reflexiva sobre os processos de ensino/aprendizagem da Matemática;

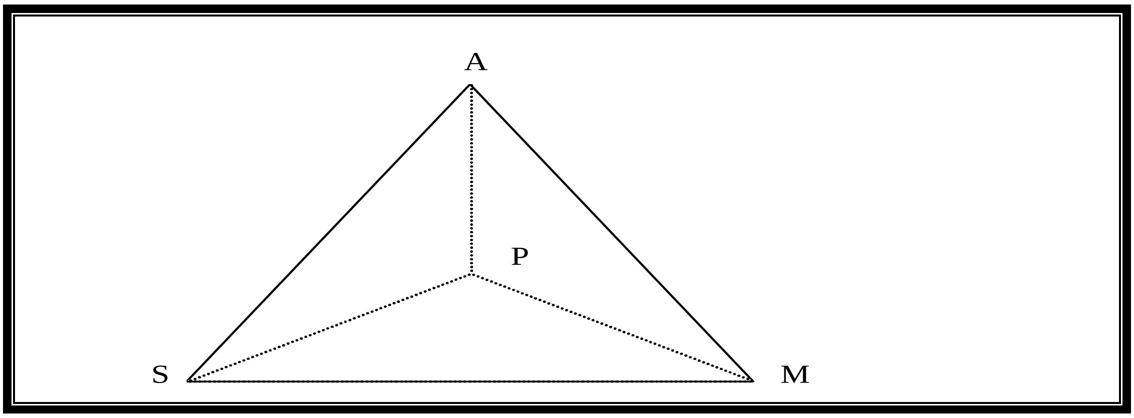
2) A tecnologia didática, que se propõe a desenvolver materiais e recursos usando os conhecimentos científicos disponíveis;

3) A investigação científica, que trata de compreender o funcionamento do ensino/aprendizagem da Matemática em seu conjunto, assim como aqueles dos sistemas didáticos específicos (professor, estudantes e conhecimento matemático).

Essas premissas da EMC harmonizam o conhecimento matemático às relações humanas, tornando-o capaz de cooperar e buscar transformações sociais, culturais, econômicas, políticas e tecnológica. Para Burak (2008, p. 15), "por assumir esse estatuto epistemológico[19] que não é o das Ciências Exatas e Naturais, a Educação Matemática é reconfigurada de forma complexa, para dar conta dos problemas referentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática".

Burak e Klüber (2008) partem da contribuição de Higginson (1989 a, apud Rius, p.30), que representa a Educação Matemática por meio de um tetraedro regular composto de quatro faces: Matemática (M), Sociologia (S), Filosofia (A) e a Psicologia (P), compreendendo as perspectivas "Como? Por quê? Para quem? O quê? ", como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Tetraedro de Higginson



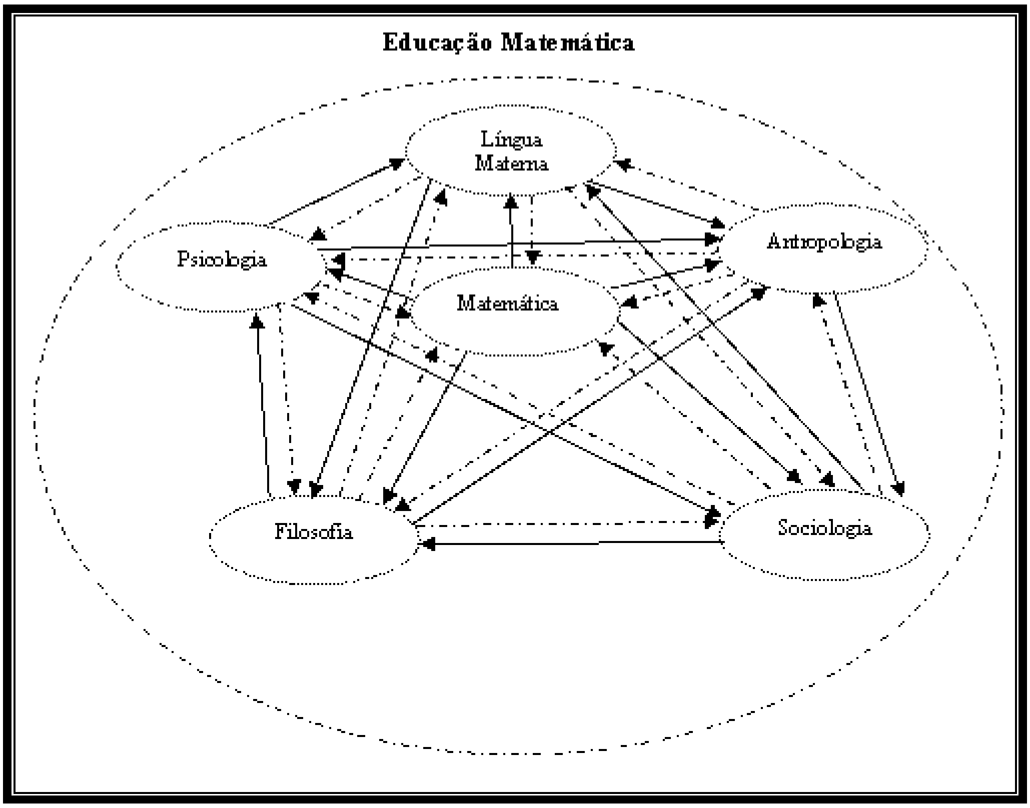
Fonte: Burak e Klüber (2008, p. p. 13)

Burak e Klüber (2008) propõem, então, um novo "olhar" sobre esse campo de conhecimento, ampliando e sintetizando sua compreensão, buscando interagir com outras áreas de conhecimento e, de certa forma, "superando o modelo euclidiano representado pelo tetraedro, que poderia ser dividido em partes e que, de certa forma, mutilava o trabalho com a própria Matemática" (BURAK & KLUBER, 2008, p. 14). Esse novo modelo está representado na Figura 6.

Sob essa perspectiva, Burak e Klüber (2008, p. 14) enfatizam a necessidade da interdisciplinaridade e multidisciplinaridade entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento: "Faz-se necessário considerar os componentes indicados no modelo, para que se possa oportunizar uma aprendizagem mais efetiva por meio de um ensino mais consciente e crítico pelo professor, em relação ao complexo ato de ensinar, especificamente, Matemática".

[19] Estatuto Epistemológico referindo-se ao ramo da filosofia que se ocupa do conhecimento científico. É o estudo crítico dos princípios, hipóteses e resultados das ciências com a finalidade de fundamentar logicamente o conhecimento.

Figura 6 – Modelo proposto por Burak e Klüber



Fonte: Burak e Klüber (2008, p. 14)

Observa-se que este modelo é mais complexo e nele estão presentes fatores que vão além de "o que, como, por que e para quem ensinar". Outras questões envolvendo seus costumes, seus mitos e valores tais como: origens, evolução, características culturais, raciais, fisiológicas, costumes sociais, crenças, línguas maternas, dentre outros, são consideradas nos processos de ensino/aprendizagem. Isso redundará numa reflexão sobre a sociedade e seu comportamento, levando-se em conta a condição humana. Inserir a Matemática nessa diversidade cultural irá envolvê-la e integrá-la a outras disciplinas e, assim, ao refletir sobre a solução de um problema, que pode não ser matemático, pode-se contemplar a transversalidade.

Não temos, no presente trabalho, a intenção de aprofundarmos discussões acerca de concepções filosóficas. Mas, tais argumentos servem para nos posicionarmos e dar um sentido na tomada de decisões acerca das perspectivas apresentadas. Essa concepção proposta por Burak e Klüber (2008) nos conduz a definirmos caminhos para nossa prática educativa:

> Vê e vive ali para que possa dar conta do lugar. (Esse é o método da Antropologia). Isso significa dizer: Vivencie todos os aspectos de um processo

> sob os vários aspectos permitidos pelo objeto, busque compreender e experenciar maneiras distintas de tratar o objeto, busque significados para as ações desenvolvidas, considere os conhecimentos dos sujeitos envolvidos no processo (BURAK & KLUBER, 2008, p. 16).

Não há como conceber o nosso dia a dia sem a presença da Matemática. Daí a importância de preocupar-se com o seu ensino/aprendizagem, enfrentando o desafio de buscar instrumentos para que ela se torne presente nas tomadas de decisão dos estudantes, não somente nas salas de aula, mas, contemplando suas tomadas de decisões pessoais.

Skovsmose (2010) sugere que a sala de aula deve ser um espaço dinâmico e concebido de forma democrática, com a participação ativa do professor e dos estudantes, e constituir-se num lugar de diálogo e interação constantes. Nessa perspectiva, devemos nos preocupar "com a maneira como a Matemática, em geral, influencia nosso ambiente cultural, tecnológico e político e com as finalidades para as quais a competência matemática deve servir" (SKOVSMOSE, 2010, p. 18).

Neste contexto, escolhemos a Modelagem Matemática, que não visa somente identificar como nossos estudantes sabem e entendem os conceitos matemáticos e, em especial nesta pesquisa, os conceitos das Equações Diferenciais. Freire nos propôs a literacia, já D'Ambrósio a materacia, similar ao termo matemacia de Skovsmose. Assim, somos destinados a descrever competências indo além do saber ler, escrever e calcular. Nese mesmo contexto, a Modelagem Matemática é posta no intuito de equilibrar a abordagem analítica e as aplicações dos "problemas reais", sugerindo uma alternativa ao paradigma do "ensino tradicional".

Dessa forma, a partir de agora, propomos a discussão sobre Modelagem Matemática, justificada pelas hipóteses, sugestões e argumentos apresentados e mediante as premissas da Educação Matemática, concebendo-a como uma metodologia que "coloca-se como alternativa metodológica que traz para a sala de aula os problemas da vida real e da cultura dos alunos, para dialogarem com conhecimento universal, lógico e válido em todos os tempos e lugares da Matemática" (BURAK et al, 2016, p. 5).

3.4. Múltiplos olhares sobre a Modelagem Matemática

As premissas da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática se entrelaçam em suas concepções e, por meio delas, pensam o ensino/aprendizagem da Matemática como processos, num sentido mais amplo, propondo que professores e alunos sejam corresponsáveis e parceiros na missão do ensinar e aprender Matemática, numa perspectiva que se contrapõe àquela da transmissão pelo professor e recepção pelo aluno, conforme referenciado na "concepção bancária" de Freire.

A presente pesquisa contempla a Modelagem numa dimensão sociocrítica na perspectiva da Educação Matemática. Tais premissas estão embasadas na concepção de Dionísio Burak e em sintonia com pensamentos de inclusão, socialização e criticidade que podem proporcionar uma grande modificação nos processos de ensino/aprendizagem da Matemática.

Portanto, por meio das literaturas disponíveis, buscaremos apresentar algumas concepções de Modelagem, com destaque para aquelas concebidas na perspectiva da EMC. Dessa forma, pretendemos deixar claro o que estamos entendendo por Modelagem numa perspectiva sociocrítica.

3.4.1. Um olhar para as relações entre Modelagem Matemática e filosofias

No cenário brasileiro, a pesquisadora Jussara de Loiola Araújo[20], dentre outras contribuições, nos traz de forma sintetizada esclarecimentos acerca do entendimento de Modelagem. Em suas publicações esclarece-nos sobre suas diferentes perspectivas e por meio das filosofias platônicas e formalistas nos apresenta a conceituação do termo "Modelagem".

A respeito das diferenças entre suas concepções, Barbosa e Araújo (2007) argumentam que:

> As diferenças se apresentam à medida que se define qual é o objetivo de resolver tal problema, qual é a realidade na qual o problema está inserido, como a matemática é concebida e se relaciona com essa realidade. [...] A hipótese é que na caracterização do, ou no entendimento que se dá ao "problema da realidade", que vão estabelecendo as diferentes perspectivas de Modelagem Matemática e acontece de forma atrelada àquela da Matemática, ou seja, o "problema da realidade" pode ser concebido como tal, levando-se em conta o que se entende por "Matemática" e as possibilidades da influência exercida pelo contexto educacional (BARBOSA &ARAÚJO, 2007, p. 18).

[20] Pesquisadora e Educadora Matemática, docente da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG.

Araújo (2007) utiliza das “filosofias absolutistas da Matemática” para argumentar acerca da relação existente entre a Matemática e realidade. Para ela, o Platonismo e o Formalismo trazem conceitos que ajudam a explicar essas diferenças na formulação de conceitos de Modelagem:

> As formas são independentes da percepção, podem ser precisamente definidas e são absolutamente permanentes. O que vemos, vivemos e percebemos no mundo são representações (imperfeitas) de formas que preexistem independentemente do homem, do tempo e do espaço. [...] O mundo das formas era diferente do mundo da percepção sensorial e, portanto, ele não poderia ser alcançado por meio dos sentidos, mas sim por meio da razão (ARAÚJO, 2007, p. 19).

Abstraem-se da filosofia de Platão alguns paralelos que relacionam a Matemática e a realidade. Korner (1968, pp. 17-18), traduzido por Araújo (2007, p. 20), esclarece que nessa relação, “a Matemática pura descreve as formas matemáticas e as relações entre elas. A Matemática aplicada descreve objetos empíricos e suas relações, na medida em que eles se aproximam (ou participam nas) formas matemáticas e suas relações”.

Assim, Modelagem pode ser entendida como a Matemática “aplicada” como forma de descrever a realidade:

> Uma compreensão da Modelagem Matemática, nesse sentido, seria então uma forma de descrever a realidade por meio da Matemática. Assim, diante de um “problema da realidade”, os objetos que o constituem e suas relações se aproximariam de formas matemáticas e suas relações. A partir das verdades estabelecidas no mundo das formas entre esses últimos, poderíamos descrever a situação no “problema da realidade” (sensorial), tudo isso por meio da razão (ARAÚJO, 2007, p. 20-21).

Valendo-se da filosofia do Formalismo, busca-se estabelecer uma base segura à Matemática, com Kant[21] sendo um de seus principais mentores:

> Para Kant, as proposições matemáticas são caracterizadas como meios de descrição de dois dados perceptivos: o tempo e o espaço. E sua estrutura é algo encontrado na percepção depois de abstraídos os conceitos empíricos. O papel da lógica na Matemática seria fornecer os princípios segundo os quais os teoremas se seguem aos axiomas e, dessa forma, os teoremas não são, em si, princípios da lógica (ARAUJO, 2007 p. 21 apud KORNER 1968).

[21] Filósofo Prussiano (1724 – 1804).

David Hilbert[22], um dos principais representantes do Formalismo, enumera que "a ideia básica do formalismo é partir de objetos concretos perceptíveis e, por meio da lógica, construir o corpo de conhecimento da Matemática". Isso, elaborado em dois princípios, que segundo Korner (1968) e traduzido por Araújo (2007, p. 21) propõem que: A Matemática inclui descrições de objetos concretos e construções; A incorporação de elementos ideais a uma teoria requer a demonstração do novo sistema constituído.

Das premissas de Hilbert, vem o princípio da lógica matemática aplicada a uma proposição[23]. Outro formalista convicto era H. B. Curry[24]. Korner (1968), afirma que Curry considerava a Matemática como a "Ciência dos sistemas formais" e "possui um fio capaz de conduzir através dos labirintos das proposições de Hilbert o sistema formal – e nada mais – como seu conteúdo". Segundo Araújo (2007, p. 22) "é a partir daí que surge a metáfora de acordo com a qual segundo o formalismo, a Matemática é um jogo formal com regras fixas e cujos elementos não têm significados".

A identificação do formalismo nas aulas de Matemática pode ser evidente quando o professor de Matemática parte de uma intuição, ou seja, de um fato cotidiano familiar e conhecido e por meio dele busca o raciocínio matemático para formalizar a solução do problema envolvido. Garnica (2001) utiliza do Formalismo para argumentar que a "Educação Matemática é uma área de conhecimento teórico-prático e devemos considerar os contextos de sua prática para compreender como a natureza da Matemática se apresenta ali".

Entretanto, Araújo (2007) alerta-nos que:

> Não faz sentido somente afirmar se uma assertiva é falsa ou verdadeira por si somente, tendo em vista que sua afirmação se baseia logicamente em teoremas e axiomas. Perceber que o formalismo vê a Matemática como um corpo separado da realidade física, mas que pode ser aplicado à realidade ou nela utilizada (ARAÚJO, 2007, p. 22).

Araújo (2007) conclui seu pensamento acerca das correntes filosóficas, afirmando que a compreensão da Modelagem Matemática segundo o Platonismo "seria como uma forma de

---

[22] Matemático Alemão (1862-1943) e professor da Universidade de *Gottingen* da Alemanha.
[23] Proposição é um termo usado em lógica matemática para descrever o conteúdo de asserções e se assenta em dois princípios fundamentais: princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído. Esses princípios podem ser entendidos como: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo e ainda qualquer proposição é verdadeira ou é falsa, não podendo ser nada mais do que isso.
[24] Matemático Americano (1900-1982) e influenciado por Hilbert, dito "formalista estrito".

descrever a realidade por meio da Matemática", enquanto para o formalismo, a Modelagem Matemática "consistiria em utilizar alguma teoria formal matemática já existente para resolver um problema da realidade, ou em construir alguma teoria para tal, caso necessário" (ARAÚJO & BARBOSA 2007, p. 30).

3.4.2. Um olhar para a Modelagem Matemática como tendência da Educação Matemática

Pesquisas na área da Educação Matemática, incluindo o banco de teses e dissertações da Capes trazem diferentes perspectivas de Modelagem difundida no cenário nacional (ARAÚJO, 2007, 2017; BARBOSA,2001, 2004,2007; BIEMBENGUT, 2004, 2009; BURAK, 1998,2004,2008,2010; CALDEIRA, 2011; KLUBER, 2009, MEYER, 2011) e internacionalmente por (KAISER, et al, 2006), na perspectiva da Educação Matemática. Elas evidenciam como característica comum a proposição de soluções para problemas não matemáticos do cotidiano por meio das teorias e conceitos da Matemática e convergem para atividades trabalhadas em grupo, por pressuporem resultados diferenciados caso as atividades fossem desenvolvidas individualmente, do ponto de vista pedagógico.

Araújo (2017) propõe a Modelagem "como tendência da Educação Matemática [...] e visa a realização de atividades, em contextos educacionais, nas quais os alunos são convidados a buscar soluções para problemas da realidade por meio da Matemática".

Meyer et al (2011), por sua vez, destaca algumas concepções sobre Modelagem, a partir de alguns de seus pesquisadores:

> Biembengut (2009) pressupõe que "a Modelagem é uma tendência em Educação Matemática que tem sido amplamente difundida nos últimos anos". Diniz (2007) a associa às Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's). Klüber (2009) à Etnomatemática e Malheiros (2008) à Pedagogia de Projetos. [...]. Ela está no cenário educacional brasileiro há algumas décadas e passou também a fazer parte dos documentos oficiais do MEC como uma alternativa ao processo de ensino/aprendizagem (MEYER et al, 2011, p. 77).

Dentre as perspectivas encontradas nas pesquisas em Educação Matemática dos pesquisadores acima citados, destacam-se alguns objetivos comuns da Modelagem:

1) Compreender os processos de ensino/aprendizagem da Matemática;

2) Para desenvolver habilidades quanto ao formular e resolver situações-problemas, bem como manusear tecnologias e inclusão tecnológicas;
3) Para compreender o mundo de maneira crítica, entendendo o "papel social e cultural" da Matemática.

Burak (2016, p. 30) destaca além desses objetivos, o fato de que a Modelagem pode potencializar a criatividade e criticidade do professor de Matemática.

Já Barbosa (2001, 2004) enumera 5 (cinco) aspectos positivos quanto à sua inserção nos processos de ensino/aprendizagem da Matemática:

1) Motivação;
2) Facilitação da aprendizagem;
3) Preparação para utilizar a Matemática em diferentes áreas;
4) Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração;
5) Compreensão do papel sociocultural da Matemática.

Também no sentido de enumerar contribuições para o ensino/aprendizagem da Matemática, Biembengut (2004) aponta que a Modelagem pode:

1) Integrar a Matemática com outras áreas do conhecimento;
2) Promover interesse pela Matemática frente à sua aplicabilidade;
3) Melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos;
4) Estimular a criatividade na formulação e resolução de problemas;
5) Aprimorar a habilidade no manuseio das tecnologias (calculadoras e computadores
6) Capacitar os alunos a trabalharem em equipe;
7) Orientar para a realização de investigação.

Esses "objetivos esperados" da Modelagem indicam que ela pode contemplar todos os níveis de ensino/aprendizagem da Matemática: da Educação Básica ao Ensino Superior, bem como Pós-Graduandos e pesquisadores da área de Educação Matemática. Mais que isso, pode ser um "fio condutor" capaz de conduzir energias necessárias para aprimorar e gerar conhecimentos além da Matemática, de maneira interdisciplinar. Biembengut e Hein (2004) consideram essa possibilidade e ponderam que:

> A Modelagem Matemática está sendo fortemente defendida nos mais diversos países como método de ensino da Matemática, podendo ser aplicada em todos os níveis de escolaridade, já que permite ao aluno não somente aprender a Matemática de forma aplicada a outras áreas de conhecimento, mas também

> melhorar a capacidade para ler, interpretar, formular e solucionar situações-problemas (BIEMBENGUT & HEIN, 2004, p. 2, tradução nossa).

No cenário internacional, Kaiser et al (2011, p. 83) coadunam com tal ideia ao afirmarem que "as questões relacionadas às competências da Modelagem, que pode ser entendida como a habilidade de, através de um processo de Modelagem, resolver um problema ou entender ou uma situação dentro de determinado domínio, podem ser abordadas em experiências na Educação Básica, superior e, especificamente, no contexto da formação de professores de Matemática".

Entretanto, ainda que se considerem todas as possíveis contribuições e possibilidades de utilização da Modelagem nos processos de ensino/aprendizagem de Matemática, faz-se necessário discutir os desafios que se apresentam no uso da Modelagem em sala de aula.

3.4.3. Um olhar para os desafios da Modelagem na sala de aula de Matemática

Se, por um lado, Biembengut (2004) enumerou várias contribuições para a inserção da Modelagem na sala de aula de Matemática, a mesma pesquisadora alerta: "Apesar das condições favoráveis, alguns fatores como o tempo de convivência de professores e alunos com o ensino tradicional tem dificultado a implementação da Modelagem" (BIEMBENGUT & HEIN, 2004, p. 17, tradução nossa).

O ambiente escolar tradicional[25], permeado ou não por ferramentas computacionais, tal como vislumbrado, pode, por vezes, condicionar a aprendizagem da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) preconizam que:

> A Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios da sala de aula (BRASIL, 1998, p. 27).

Não é tarefa fácil buscar alternativas e propostas que se adequem ao que se pede para a sala de aula. Por outro lado, as constantes mudanças sociais nos cobram cada vez mais conhecimentos, criatividade e criticidade em todos os setores da sociedade. Como não poderia

[25] Caracteriza-se. de modo geral, como ensino tradicional aquele que tem o professor como elemento central na sala de aula e nele é centrado o processo de ensino, não incentivando os estudantes a assumirem uma postura de corresponsabilidade por sua aprendizagem.

ser diferente, novas tendências de ensino exercem efeitos na área educacional e requerem dos professores uma nova postura frente às necessidades apontadas. Em particular, no que se refere à Educação Matemática, não basta ao professor ter o conhecimento: é preciso desenvolver a capacidade de "socializar" o conhecimento. É nesse sentido que a Modelagem poderá ser uma possibilidade para os alunos perceberem a importância da Matemática, transformando as aulas de Matemática em descobertas e tornando-as mais prazerosas. Nessa direção:

> Em meio às contínuas transformações, não basta ter conhecimento específico sobre um assunto e exercer sua mera transmissão. É fundamental, a cada dia, obter novos conhecimentos e habilidades na aplicação e socialização deles. Com esse pretexto, a Modelagem vem sendo muito defendida como método de ensino nas aulas de Matemática (BIEMBENGUT & HEIN, 2004, p. 3).

Em defesa de sua proposta de Modelagem como projeto para as aulas de Matemática, os pesquisadores argumentam que "os alunos podem eleger o tema de seu interesse e propor as questões de investigação, cabendo ao professor a orientação de elaboração do projeto. Nesta situação, o aluno passa a ser corresponsável pela sua aprendizagem, despertando ainda seu sentido crítico e criativo" (BIEMBENGUT & HEIN, 2004, p. 4).

O ato de "modelar" advém de alguma inquietude, de "problemas da realidade" e raramente de situações individuais. Geralmente, buscam-se soluções que afetam um grupo de realidade similar: "Envolve um fenômeno ou situação problema e se caracteriza em um conjunto de símbolos e relações matemáticas representando de alguma maneira o fenômeno em questão. Esse modelo, não só permite obter uma solução particular, mas também pode servir de suporte para outras aplicações ou teorias" (BIEMBENGUT, 1999, p. 20).

Para a pesquisadora, trabalhar um projeto de Modelagem em sala de aula envolve uma série de procedimentos, a saber:

1) Eleição do tema e conhecimento da situação problema;
2) Delimitação do problema e familiarização com o tema que será modelado;
3) Referencial teórico e formulação do problema;
4) Hipóteses e formulação de um modelo matemático;
5) Desenvolvimento e resolução do problema a partir do modelo matemático;
6) Aplicação, interpretação da solução e validação do modelo;
7) Avaliação.

Biembengut e Hein (1999, p. 12-13) enfatizam ainda que: “A elaboração de um modelo matemático requer, por parte do modelador, conhecimentos tanto matemáticos como não matemáticos, além de uma boa dose de intuição e criatividade para interpretar o contexto e discernir quais são as variáveis envolvidas”.

Segundo Biembengut e Hein (2004), envolvida com a Modelagem em sala de aula desde 1986, a proposta metodológica serve como alternativa ao ensino da Matemática em todos os níveis de escolaridade, do secundário ao bacharelado e licenciatura. Para implementá-la, a pesquisadora sugere que o professor deve atuar em duas abordagens:

1) Desenvolver os conteúdos do currículo a partir de modelos matemáticos aplicados a diversas áreas do conhecimento;
2) Orientar aos alunos para que investiguem as situações-problemas, segundo um trabalho de Modelagem.

Para desenvolver o projeto, Biembengut (2004) sugere também que o professor eleja um tema de alguma área de conhecimento que possa interessar aos alunos e elabore um modelo matemático, adaptando-o ao ensino da Matemática. Esse processo envolve as seguintes etapas:

1) Exposição do tema: começar o projeto fazendo uma breve explicação sobre o assunto aos alunos, instigando-os para que formulem perguntas sobre o tema abordado.
2) Delimitação do problema: selecionar uma ou mais perguntas que permitam desenvolver o conteúdo programado. Caso seja possível e ou conveniente, poderá propor aos alunos que façam uma investigação sobre o assunto por meio bibliográfico ou entrevista a algum especialista no assunto;
3) Formulação do problema: propor o problema, construir hipóteses, propor equações e organizar os dados de maneira que o conteúdo matemático requeira a solução;
4) Desenvolvimento do projeto: apresentar o conteúdo programático (conceitos, definições, propriedades, etc.) e estabelecer uma conexão com a pergunta que gerou o processo de investigação
5) Apresentação de exemplos análogos: apresentar exemplos análogos, ampliando o leque de aplicações, evitando que o conteúdo se restrinja ao tema do problema levantado. Além disso, estimular o uso de tecnologias tais como calculadoras e computadores;
6) Formulação de um modelo matemático e resolução do problema a partir do modelo proposto: propor aos alunos regressarem ao problema que gerou o processo e sua resolução;
7) Interpretação da solução e validação do modelo matemático: ao finalizar esta etapa, é importante que o aluno avalie o resultado. Isso

> permite ao aluno uma melhor compreensão e discernimento dos resultados obtidos.

Segundo Biembengut (2004, p. 16), a Modelagem enquanto projeto para a sala de aula, assim como toda proposta pedagógica, "tem boas vantagens e também apresenta algumas dificuldades que podem ser remediadas". Dos pontos positivos, destaca uma melhor aprendizagem, motivação e evolução no entendimento de propriedades matemáticas que favorecem ao aluno atuar no desenvolvimento do projeto e não só receber informações do professor, aprendendo assim a investigar e validar o processo de ensino/aprendizagem. Ao professor, permite estar mais atento às dificuldades dos alunos, tomando conhecimento dos trabalhos de forma gradual, em especial, no momento que orienta os alunos, além de modificar seus critérios e instrumentos de avaliação.

Quanto às dificuldades, Biembengut (2004, p.17) destaca a falta de vivência com essa metodologia dos alunos e, em especial, dos professores em seus momentos de formação: "Na formação de professores, raras vezes se dá uma orientação de Modelagem e como utilizar esse procedimento no ensino formal". A pesquisadora destaca ainda que:

> 1) Há resistência à Modelagem por professores de Matemática que não tiveram contato com essa metodologia e/ou com a Educação Matemática;
> 2) A Modelagem requer um maior empenho nos estudos, na investigação e na interpretação do contexto, em comparação com o ensino tradicional;
> 3) Há poucos trabalhos acadêmicos e de investigação envolvendo projetos com Modelagem aos quais o professor possa ter fácil acesso.

3.5. Novos olhares sobre a Modelagem no contexto da Educação Matemática Crítica

A partir dos múltiplos olhares sobre a Modelagem trazidos até aqui, intentamos agora retomar nosso foco na perspectiva da Educação Matemática Crítica (EMC).

Araújo (2002, 2007, 2009, 2012, 2017) apoia seus trabalhos sobre Modelagem em conceitos da EMC, tendo como um de seus objetivos "possibilitar aos alunos uma atuação crítica na busca de soluções para problemas da realidade, por meio da Matemática, discutindo questões políticas, econômicas e ambientais" (ARAÚJO, 2009; 2012, p. 18).

Surgida na década de 1980, a EMC preocupa-se com aspectos políticos e contorna questões democráticas, não estando preocupada somente com maneiras mais eficientes de ensinar Matemática, mas "como e de que maneira a aprendizagem da Matemática pode contribuir para o desenvolvimento da cidadania" (SKOVSMOSE, 2006, p. 19).

Skovsmose (2010, p. 11) sintetiza a ideia da aprendizagem de Matemática, associando a ela a comunicação e o diálogo. "As qualidades da comunicação na sala de aula influenciam as qualidades da aprendizagem de Matemática". E acrescenta: "Certas qualidades de comunicação, que tentamos expressar em termos de diálogo, favorecem certas qualidades de aprendizagem da Matemática, a que nós nos referimos como aprendizagem crítica da Matemática, manifestada na competência da materacia[26]" (SKOVSMOSE, 2010, p. 19).

Embasado nessa concepção de EMC, Skovsmose (2001) destaca que o ponto chave desse processo está fora dos muros da escola e relaciona-se diretamente aos interesses do aluno, além de possuírem uma relação próxima com situações ou problemas existentes em seu contexto social. (SKOVSMOSE, 2001, p. 17). Afirma ainda que para ser crítica, "a educação deve reagir às contradições sociais". (p. 101).

Propondo uma discussão teórica sobre a Modelagem numa concepção de Educação Matemática Crítica, Meyer et al (2001) associam o trabalho da pesquisadora Araújo (2007) às ideias de Skovsmose e argumentam que sua pesquisa "dá destaque a EMC e busca problematizar o papel da Matemática na sociedade e como consequência, nas escolas, com o intuito de levar às salas de aula debates sobre questões fundamentais, como, por exemplo, o contraponto entre o progresso tecnológico e as questões ambientais" (MEYER et al, 2001, p. 107).

Meyer et al (2001, p. 108) dão destaque à Modelagem na perspectiva da EMC, relatando que "a proposta da Modelagem segundo a EMC é fazer com que todos sejam matematicamente alfabetizados, para que eles possam vivenciar, entender e questionar a sociedade em que vivem".

Este relato é similar às ideias de Paulo Freire (1987), que dá destaque para a necessidade de que a educação aja a favor da sua própria libertação. Essa é a ideia central de seu livro "Pedagogia do Oprimido" que nos traz o termo "literacia", cujo significado é maior que o ato de ler, escrever e ser alfabetizado, ou seja, "letrados". É uma forma de caracterizar aqueles que

[26] Materacia é a capacidade de interpretar e manejar sinais e códigos e de propor e utilizar modelos na vida cotidiana, na mesma perspectiva de Literacia que é a capacidade de processar informação escrita, o que inclui escrita, leitura e cálculo, na vida cotidiana (D'AMBRÓSIO, 1999, p.63).

dominam a leitura, mas não só sabem ler: fazem uso competente e frequente da leitura e da escrita, num sentido mais amplo de alfabetização. Nessa perspectiva de Freire, mais importante que decodificar códigos, é compreender a funcionalidade da língua escrita, tornando-se cidadão atuante, participativo e autônomo, de forma significativa na sociedade na qual está inserido.

Nessa mesma perspectiva, Skovsmose (2007, p. 76) compreende as diferentes competências da Matemática como "matemacia", de forma idêntica à materacia defendida por D'Ambrósio e a destaca como: "Saber lidar com noções matemáticas, aplicar tais noções em diferentes contextos e ser capaz de refletir sobre essas aplicações, tal qual sugere Paulo Freire em relação à 'literacia'. A EMC está relacionada com o desenvolvimento da matemacia, de tal modo que pode promover melhorias similares àquelas expressas pelo letramento" (SKOVSMOSE, 2007, p. 76).

Araújo e Barbosa (2007, p. 29) afirmam que "Modelagem na perspectiva da EMC não é um tópico particular da Educação Matemática, mas uma expressão de algumas preocupações mais amplas sobre a Educação Matemática" e listam tais preocupações:

> 1) A educação não pode ser discutida apenas em termos de preparação para a educação futura ou para o mercado de trabalho. Escolarização também significa preparação para a cidadania e participação na vida social e política. O que isso significa para a educação matemática?
> 2) A matemática poderia servir como uma ferramenta para identificar e analisar aspectos críticos da vida social?
> 3) Como a educação matemática poderia considerar os interesses e competências dos alunos para o desenvolvimento do conhecimento e da aprendizagem?
> 4) A educação matemática poderia fornecer "filtros culturais" sendo por exemplo, guardiã do portão para a sociedade tecnológica. Como questões sobre igualdade, equidade e justiça poderiam estar refletidas na sala de aula de matemática?
> 5) A matemática poderia se tornar uma ferramenta problemática para resolver uma larga gama de problemas, já que a própria matemática é parte da sociedade tecnológica. A matemática não pode ser apenas uma ferramenta para crítica; deve-se também dirigir uma crítica à própria matemática e, nesse sentido, ela se torna um "objeto de crítica". O que significa isso para a educação matemática?
> 6) Toda sala de aula se torna uma microssociedade e pode representar a democracia em espécie. O que isso significa para as interações entre alunos e professor na sala de aula de matemática? (ARAÚJO & BARBOSA 2007, p. 29).

Com entendimento similar, Barbosa (2008) entende que a Modelagem nessa perspectiva pode produzir discussões reflexivas dos alunos. Segundo o pesquisador, "as discussões se referem à natureza do modelo matemático, ao critério usado em sua construção e às consequências desse critério" (BARBOSA, 2008, p. 3).

A Modelagem na perspectiva de EMC pode tornar a Matemática mais "humana". Isso, no sentido de poder ser questionada, contrapondo "a ideologia da certeza" descrita por Skovsmose (2001). É nesse sentido que Araújo (2017) sugere que:

> Os alunos podem se dar conta que as soluções de um mesmo problema, podem ser diferentes, dependendo das variáveis que são incluídas ou deixadas de fora desse modelo e dos critérios usados na escolha. Dessa forma, os alunos têm a oportunidade de desnaturalizar a concepção de matemática como ciência neutra e absoluta na busca de soluções para problemas em nossa sociedade (ARAÚJO, 2017).

A partir dessas considerações, sentimo-nos preparados para retomar o foco na perspectiva de Modelagem que pretendemos assumir na presente pesquisa, como descrevemos a seguir.

3.6. Um olhar possível para a Modelagem na dimensão sociocrítica

A partir da perspectiva da EMC, Araújo (2007b, p. 110) reforça que: "A formação matemática de estudantes não deve ser somente para instrumentalizá-los matematicamente, mas também para que eles possam refletir sobre o papel da Matemática na sociedade".

Por outro lado, como já descrito, a prática da Modelagem escolar tem influência nas teorias da Matemática Aplicada e é comum aparecer a compreensão de Modelagem como sendo um processo de construção de um modelo matemático. Segundo Bassanezi (1994, p.31), o modelo matemático seria "quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, obtido de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sob análise".

Porém, Barbosa (2001) enumera três tipos distintos de conhecimentos relacionados à Modelagem:

1) O conhecimento matemático em si;
2) O conhecimento tecnológico (referindo-se à construção e uso do modelo matemático);
3) O conhecimento reflexivo, referindo-se à natureza dos modelos e os critérios usados na construção, aplicação e avaliação.

Relacionando tais conhecimentos à concepção de Modelagem a partir da Matemática Aplicada, não basta que nós, educadores matemáticos, contentemo-nos com os conhecimentos matemático e tecnológico, não perspectivando o conhecimento reflexivo, pois como argumenta Barbosa (2001), "há uma parcela significativa da literatura que avança até o domínio do conhecimento reflexivo, como Fiorentini (1996) e Skovsmose (1994) ". Essa corrente investigativa acerca do conhecimento reflexivo é chamada de "sociocrítica".

Barbosa (2001), em sua explanação teórica acerca dessa corrente, acrescenta que as atividades de Modelagem devem ser consideradas como:

> Oportunidade para explorar os papeis que a Matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem Matemática nem Modelagem são "fins", mas sim "meios" para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a Matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. É pertinente sublinhar que necessariamente os alunos não transitam para a dimensão do conhecimento reflexivo, de modo que o professor possui grande responsabilidade para tal" (BARBOSA, 2001, p. 4).

Fiorentini (1996, p. 33) argumenta que "no Brasil, a partir dos anos 90, as experiências com o ensino da Matemática possuem um forte viés antropológico, político e sociocultural, já que têm procurado partir do contexto sociocultural e de seus interesses".

Barbosa (2001) contempla tais ideias e concebe a Modelagem como um "ambiente[27] de aprendizagem", da seguinte forma: "Um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (BARBOSA, 2001, p. 6). Segundo ele, o envolvimento dos alunos dar-se-á à medida que os interesses deles se encontrem com a proposta da Modelagem.

Nesse contexto apresentado por Barbosa (2001), estão o cerne e os princípios da perspectiva sociocrítica da Modelagem: a indagação e investigação. A indagação refere-se ao ato de criar as perguntas e ou as situações dos 'problemas da realidade" mencionados por Araújo (2007), enquanto à investigação relaciona-se a busca, seleção e organização das informações que conduzirá às reflexões e ao conhecimento reflexivo.

Essas premissas, a indagação e a investigação, também se fazem presentes na literatura de Paulo Freire, tratando-as como sendo o "próprio caminho da educação":

---

[27] O termo ambiente aqui é usado no sentido de um lugar ou espaço que envolve ou que cerca.

> O que o professor deveria ensinar – porque ele próprio deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário (BARBOSA, 2001 apud FREIRE & FAUNDEZ, 1998, p. 46).

A perspectiva sociocrítica é então caracterizada por Barbosa (2003a, p. 4)

> Como sendo um convite ao envolvimento em discussões reflexivas por meio da Matemática e de procedimentos e técnicas adotadas para a resolução de uma situação real e a construção de uma sociedade democrática, habilitando os indivíduos a participar de discussões políticas referendadas na Matemática (BARBOSA, 2003a, p. 4).

Ainda a respeito dessa perspectiva, Barbosa (2001, p. 7) argumenta que a Modelagem "deve estar vinculada a um conhecimento que permita desenvolver o senso crítico capaz de questionar a verdade e sua confiabilidade, gerada pelos resultados obtidos a partir do conhecimento matemático e tecnológico", pressupostos também propostos por Skovsmose (2001).

A partir das ideias de Barbosa (2003) e Araújo (2007), é preciso estabelecer uma conexão entre a Modelagem e os objetivos da EMC, considerando que ela é muito mais que um conjunto de procedimentos técnicos. É preciso ainda que ela ocorra de forma aberta e contextualizada, ressignificando os conteúdos matemáticos e, por fim, nossa própria prática pedagógica. Dessa forma, o termo "objeto de crítica", identifica-se como uma visão inovadora, indo além do "ato de modelar", fazendo-se necessário questionar, julgar e analisar o "modelo matemático". Assim se dará o juízo crítico, conduzindo-nos ao conhecimento reflexivo.

A partir do contexto dessa perspectiva de Modelagem, conclui-se ser necessário "construir" o conhecimento matemático, partindo da argumentação (problematização) e investigação do contexto vivido no ambiente pelos nossos alunos. Essa pode ser uma maneira de envolver e promover o interesse dos alunos pela Matemática, trazendo sentido para eles do "conhecimento técnico matemático em si". Além disso, permitindo a aplicação do "modelo matemático" e a percepção de que essa aplicação pode levar a desenvolver habilidades que viabilizem compreender o "papel social da Matemática", defendido por Burak (2008): "Uma perspectiva que não se prende especificamente à visão das Ciências naturais e exatas, mas que busque diálogo com outras áreas do conhecimento à luz das Ciências Humanas e Sociais" (BURAK, 2008, p. 4).

Nesta pesquisa, adotaremos essa perspectiva sociocrítica para a Modelagem, concebida na visão de Burak (2008) que, de forma similar a Barbosa (2003), concebe a Modelagem como sendo uma metodologia de ensino da Matemática com embasamento teórico sustentada nas teorias construtivista e sociointeracionista, em uma visão de ciência que contempla outras áreas do conhecimento além da Matemática, como a Psicologia, a Sociologia, a Antropologia relacionadas à Educação Matemática.

3.7. Um olhar para a Modelagem na dimensão sociocrítica na concepção de Dionísio Burak

Como afirma Miorin (2003, p. 2): “Vivemos numa realidade multidimensional, simultaneamente econômica, psicológica, mitológica, sociológica, mas estudamos estas dimensões separadamente, e não umas em relação com as outras”.

Burak (1992), ciente de tais características da pós-modernidade, propõe uma concepção de Modelagem numa perspectiva da Educação Matemática que:

> [...] busca manter-se em estreita harmonia com a visão apresentada em que a Matemática, seu ensino/aprendizagem é considerado como uma prática social, em acordo com Miguel (2004) [...] na medida em que envolvem uma comunidade de estudantes, o desenvolvimento de um conjunto de ações que amplia o espaço de sala de aula, bem como se orienta por princípios que envolvem interesse e visão antropológica e a possibilidade da construção de conhecimentos matemáticos e interdisciplinares. É uma visão que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que podem se fazer presentes no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática (BURAK, 1992 p. 62).

Dentro dessa perspectiva de Educação Matemática, Burak (1992, p. 62) argumenta acerca da Modelagem sugerindo que ela deve “constituir-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões”.

Klüber (2004, p. 4) analisa a concepção de Modelagem nessa perspectiva e afirma que o fato dela se constituir em um conjunto de procedimentos, significa “algo unido, conjugado, contíguo de ações, caminhos a empreender com vista a um objetivo”. Para ele, estabelecer um paralelo significa algo análogo a “fenômenos presentes no cotidiano, considerando aquilo que é percebido pelo indivíduo, neste caso, o estudante”. Fazer predições, neste contexto, tem o sentido de “realizar um diagnóstico pelo estudante e que os favoreçam e os permitam a tomar decisão”.

Para a prática da Modelagem nessa perspectiva, alguns passos são sugeridos por Burak (1992, 2004), a saber:

1) Partir do interesse do grupo de pessoas envolvidas (no caso, os estudantes);
2) Obter as informações e os dados no ambiente onde se localiza o interesse do grupo.

Segundo Burak e Klüber (2004), tais princípios:

> Buscam consolidar as ações a partir do interesse dos alunos envolvidos na atividade de Modelagem. Sob o ponto de vista socio-construtivista, seria que a razão para se fazer algo está em fazer algo. O interesse pela atividade está diretamente relacionado à motivação intrínseca e ganha força também no contexto que nutre tanto o interesse como a motivação (BURAK & KLUBER, 2004, p. 4).

Já na perspectiva de trabalhar a Modelagem como projeto de ensino da Matemática para a sala de aula, Burak (1998, 2004) sugere que seu desenvolvimento seja realizado em nas seguintes etapas, que serão detalhadas a seguir:

> 1) Escolha do tema;
> 2) Pesquisa exploratória;
> 3) Levantamento do problema;
> 4) Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático;
> 5) Análise crítica da solução do problema.

3.7.1. A escolha do tema

Deve partir de temas propostos pelos estudantes envolvidos no projeto de Modelagem que, segundo Burak (2004, p. 7), “além da visão antropológica, podem estar relacionados ao questionamento de relações sociais”. Isso permite, por exemplo, que o tema não tenha uma ligação intrínseca com o grupo, mas esteja relacionado e presente nos meios de comunicação e seja um tema em evidência e atual. É possível abstrair, nesse contexto, a aproximação da investigação do problema de forma interdisciplinar da Matemática com a Sociologia, pois:

> O professor tem participação, levantando aspectos, contrapontos, solicitando argumentos, desafiando os estudantes a manifestarem suas opiniões, seus pontos de vista, de modo que se envolvam na discussão. [...] Estes encaminhamentos constituem-se em ponto de partida para o desenvolvimento da pesquisa exploratória (BURAK, 2004, p. 7).

3.7.2. A pesquisa exploratória

Nesta etapa, deve-se pesquisar várias dimensões que constituem a realidade do que está sendo investigado, tais como políticas sociais, econômicas, estruturais, dentre outras. Os dados coletados serão importantes para o levantamento do problema. Como forma de coleta de dados, pode-se utilizar de ferramentas tecnológicas na própria sala de aula, em laboratórios das escolas e universidades, na biblioteca ou até externos, como órgãos e instituições públicas, por exemplo. Como atualmente o acesso à Internet está presente em todos os ambientes, esse é um aspecto positivo que facilitará o trabalho dessa etapa.

Segundo Burak (2004, p. 8), esta etapa "ajuda a formar um comportamento mais atento, mais sensível, que são atributos importantes na formação de uma postura investigativa. Pode contribuir com aspectos de uma formação envolvendo valores, atitudes e espírito mais crítico, além de desenvolver a autonomia e um olhar mais atento para as situações pesquisadas".

3.7.3. O levantamento do problema

Esta etapa ocorre a partir dos dados coletados na etapa anterior e refere-se ao "porquê", agregando valores da Educação Matemática associada à Filosofia, cujos enfoques respaldam suas ações, relacionados ao conteúdo cognitivo dos estudantes.

Vale destacar que o trabalho de Modelagem nessa perspectiva permite ao grupo de estudantes aprender a formular perguntas e questões e a indagar o sentido das informações e dos conteúdos matemáticos apresentados no contexto estudado.

Assim, essa perspectiva da Modelagem traz alternativas aos casos hipotéticos dos livros e materiais didáticos, relativos às atividades matemáticas. Segundo Klüber (2016, pp. 42-43), a alternativa ocorre "a partir de uma ação dos próprios estudantes e o significado atribuído à ação de coleta de dados, de organização e elaboração de questões de investigação é de assimilação da realidade".

Na caracterização desta etapa, Burak (2004) propõe que o (s) levantamento (s) do (s) problema (s):

> - Sejam elaborados a partir dos dados coletados na pesquisa exploratória;
> - Estimulem a busca e a organização dos dados;
> - Possuem, geralmente, caráter genérico, o que exige esforço e reflexão por parte dos alunos e do professor;
> - Favorecem a compreensão de uma situação problema;
> - Incentivam a participação ativa do aluno nas decisões e elaboração (BURAK, 2004, p. 9).

3.7.4. Resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático

Este é o momento em que os conteúdos matemáticos, questionados como e onde usá-los, serão úteis no desenvolvimento do projeto inicial e oportunizando a construção do modelo matemático para a Modelagem. Aqui, o significado de “modelo matemático” será ampliado e não se restringe apenas aos conceitos e propriedades matemáticas e determinará quais “ferramentas matemáticas” (Geometria, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais, etc.) deveremos usar na solução.

Ao evidenciar então a necessidade de resolução, pode-se construir o modelo matemático necessário àquela situação problema, valendo-se, por exemplo, do Cálculo Diferencial e Integral e das Equações Diferenciais, dentre outros. Segundo Burak (2004, p. 10),

> É nesse momento que que entendemos que se dá a relação mais forte entre o componente Matemática e o componente Psicologia da Educação Matemática, não esquecendo que essa relação foi subsidiada ao longo do processo, por outros componentes que ainda se fazem presentes, por estarmos trabalhando no contexto do tema escolhido (BURAK, 2004, p. 10).

3.7.5. Análise crítica da solução do problema

Considera-se que esta é a principal etapa da Modelagem em si, na perspectiva sociocrítica. Nela, está embasado tudo o que foi apresentado e discutido até aqui na forma de relatos e argumentos propostos na visão da EMC. Esta análise crítica da solução é o momento que culmina com o desenvolvimento do pensamento crítico e argumentação lógica dos conteúdos matemáticos usados na solução, bem como as formas que foram utilizadas no desenvolvimento das situações encontradas ao longo da solução do problema inicialmente proposto.

Segundo Burak e Klüber (2004), esta etapa é fundamental pois, numa visão mais ampla de ciência e cidadania, pode favorecer amplamente:

> A discussão de aspectos relacionados à Matemática, à Sociedade, à Cultura, à Economia e à Política. Além disso, pode-se perceber nesse momento, implicações para a forma de conceber a Modelagem no contexto da Educação Matemática, que leva em consideração uma natureza das Ciências Humanas e Sociais, que envolve mais do que a componente Matemática, mas enseja o momento para a discussão, levando em consideração os componentes sociais, psicológicos, antropológicos e históricos que, muitas vezes, são deixados de lado, quando se procura uma visão mais convergente para a Matemática (BURAK & KLUBER, 2004, p. 16).

Outro aspecto importante a destacar refere-se às possibilidades que podem surgir da Interdisciplinaridade, cujas as discussões levam a momentos de interação da Matemática com outras áreas de conhecimento, incluindo a “literacia” proposta por Freire e a “materacia” proposta por D’Ambrósio. Vale destacar também a inclusão das tecnologias numa perspectiva atual das Metodologias Ativas, capazes de amenizar a exclusão digital que, por vezes, ocorre nos lares brasileiros. Levando-se em consideração os resultados obtidos e por meio de reflexões críticas, pode-se enriquecer e conduzir a discussões e debates interessantes, inerentes ao contexto social, cujos efeitos se fazem presentes nos aspectos culturais, políticos, econômicos e sociais.

Burak & Klüber (2004), contribuem uma vez mais sobre a Modelagem nesta perspectiva, afirmando que:

> No trabalho com a Modelagem, o papel do professor fica redefinido, pois este passa a ser o mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou do grupo; o problematizador, ao promover e articular situações decorrentes do processo; o orientador, no sentido dos possíveis encaminhamentos a serem adotados. Essas atitudes se diferenciam das atitudes do ensino usual, em que, na maioria das vezes, o professor é o centro do processo. O fato de compartilhar o processo de ensino denota uma nova postura do professor. Ele se torna um aprendiz juntamente com os estudantes, há um educador-educando e um educando –educador, conforme enuncia Freire” (BURAK & KLUBER, 2004, p. 17).

3.8. Um olhar à guisa de justificativa

Assim, concluímos nossa imersão teórico-bibliográfica pela Modelagem na Educação Matemática, justificando nossa escolha pela concepção de Modelagem na dimensão sociocrítica como defendida por Burak & Klüber (2004), cujo cerne é o ensino/aprendizagem da Matemática:

> A Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática busca manter-se em estreita harmonia com a visão apresentada, em que a Matemática, seu ensino/aprendizagem é considerado como uma prática social. Isto, na medida em que envolvem uma comunidade de estudantes, o desenvolvimento de um conjunto de ações que amplia o espaço de sala de aula, bem como se orienta por princípios que envolvem: interesse e visão antropológica e a possibilidade da construção de conhecimentos matemáticos e interdisciplinares. Ou seja, uma visão que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que podem se fazer presentes no processo de ensino/aprendizagem da Matemática (BURAK & KLUBER, 2004, p. 3).

Observadores do contexto social atual, como cidadãos e professores do século XXI, a reflexão torna-se necessária em nossa vida e prática pedagógica. Aliar-se a livros, materiais didáticos e práticas que movimentam a educação e novos meios de produzir o conhecimento matemático é uma necessidade. Os estudantes atuais são delineados pelas características da pós-modernidade e devem vivenciar a realidade da interdisciplinaridade, de novas culturas e da Educação Inclusiva.

Essa integração com outras áreas do conhecimento é assim muito bem descrita por Machado (19995, p. 193): “A interdisciplinaridade é hoje uma palavra-chave para a organização escolar; pretende-se com isso uma intercomunicação efetiva entre as disciplinas, através da fixação de um objeto comum do qual os objetos de cada uma delas constituem sub-objetos”.

Como já se discorremos desde o primeiro capítulo, o fio condutor deste trabalho advém de pesquisas, observações e da experiência docente quanto a um ensino da Matemática que resulta em estudantes que “não conseguem aprender” ou que revelam “não gostar de Matemática”. Por outro lado, a Educação Matemática por meio de suas teorias sugere que o educador matemático, além de dominar os conhecimentos matemáticos, precisa implementar metodologias ativas e alternativas que abordem novas competências capazes de construir o conhecimento matemático através de problematizações, com atitudes críticas e autonomia.

Como aqui evidenciado, a Modelagem torna-se uma alternativa viável e, por meio dela, é possível evidenciar que o professor tem um novo papel de mediador do conhecimento matemático, numa visão diferente da forma tradicional. Outro fato relevante da Modelagem já mencionado é a questão da socialização, que é uma das principais funções da escola e pode ser favorecida pelo trabalho em grupo, permitindo que os estudantes se relacionem entre si e adquiram outras formas de interação, conforme argumenta Delval (2001).

Assim, consideramos adotar a Modelagem na dimensão sociocrítica como fundamentação teórica de nossa pesquisa, justificando sua potencialidade como projeto alternativo ao ensino da Matemática, uma vez que aborda em seus aspectos vitais, temas atuais sugestionados pela Educação Matemática, apresentados à luz da construção, fundamentação e desenvolvimento de conceitos matemáticos contextualizados com situações diversas, integrados a outras áreas de conhecimento e favorecidos pela socialização do trabalho em grupo, contribuindo para a quebra do paradigma do currículo linear já citado por D'Ambrósio (2012).

Por fim, recorremos a Paulo Freire (2004), cujas ideias se enquadram perfeitamente nas considerações da Modelagem na dimensão sociocrítica, numa situação segundo ele de "educação problematizadora":

> Não há um educador do educando ou um educando do educador. Há sim um educador-educando e um educando-educador. Ambos constituem em sujeitos do processo de ensino e de aprendizagem, são sujeitos históricos e reais, no sentido de estarem no mundo enfrentando problemas que muitas vezes extrapolam o âmbito escolar, os problemas da vida (FREIRE, 2004, p. 35).

No capítulo seguinte detalharemos os pressupostos metodológicos que orientaram a realização de nossa pesquisa.

Capítulo 4

DELINEAMENTO DOS ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

> "Ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando suas múltiplas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez mais" (BICUDO, 2004, p. 8).

Neste capítulo, apresentaremos os procedimentos metodológicos da pesquisa, com destaque para a forma como os dados foram coletados e para o contexto de realização da pesquisa.

4.1. Retomando a questão de investigação da pesquisa

À luz da Educação Matemática Crítica e dos referenciais teóricos, buscamos um aporte para possíveis subsídios visando obter respostas à questão de investigação:

Quais são as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso Licenciatura em Matemática?

4.2. Retomando o objetivo e as atividades de pesquisa

O objetivo geral da pesquisa foi identificar e analisar as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática.

As atividades de elaboração, desenvolvimento e avaliação de atividades de Modelagem Matemática, pretenderam estimular a criatividade e a criticidade dos futuros professores de

Matemática, que foram pontos centrais da pesquisa que teve como foco os processos de ensino/aprendizagem de EDO.

4.3. Justificando a opção por uma metodologia qualitativa de pesquisa

> Para se chegar a uma conclusão ou a uma resposta consistente e confiável para a questão de investigação, precisamos buscar ou construir um caminho, o qual permita de maneira satisfatória, tratar o problema ou responder à questão de investigação (FIORENTINI & LORENZATO, 2006, p. 60).

Em busca do caminho proposto por Fiorentini e Lorenzato (2006), encontramos uma forma de entender a essência da metodologia de pesquisa, alinhando-a ao objeto da pesquisa. Por um conjunto de perspectivas, esta pesquisa empírica observou os estudantes nas suas rotinas habituais para entender como eles relacionam a Matemática com os "problemas da realidade", indo além do conhecimento matemático em si. Isso nos remeteu a colocar em estudo as ações desses estudantes de maneira subjetiva, com critérios e rigor, envolvendo diálogos, questionamentos e observações.

Garnica (2001) preocupa-se com a relação entre pesquisa e as pessoas envolvidas, colocando em pauta a questão do objeto de estudo entre o ser humano e aquilo que se quer estudar:

> A humanidade é essencialmente uma comunidade e uma pesquisa, portanto, não pode fugir desta compreensão. Como ação intencionalmente desenvolvida visando à compreensão de faces da vida humana, não pode artificialmente desprender-se contextualmente dessa premissa (GARNICA, 2001, p. 6).

Nossa pesquisa contempla essa compreensão associada às "faces da vida humana" e são premissas que estão em conformidade com a Educação Matemática Crítica, de forma tácita e subjetiva. Dentre outros aspectos, enumeramos algumas características observadas no trabalho de pesquisa de campo, harmônicos com Bogdan e Biklen (1994):

- ✓ A diversidade de ideias trazidas pelos estudantes pesquisados, diferenciando de "métodos laboratoriais" concebidos de forma objetiva;
- ✓ A diversidade de perspectivas sociais associadas aos estudantes pesquisados;

- ✓ A diversidade das discussões produzidas no momento da palestra e das tarefas exploratórias;
- ✓ As reflexões e criticidade dos alunos pesquisados.

Observamos ainda que, no decorrer das tarefas, não foi possível construir um “norte prévio”, sendo esse se construindo à medida que aprofundamos a prática do referencial teórico adotado e o processo de coleta dos dados da pesquisa, o que é característico da pesquisa com Modelagem Matemática.

Nesse contexto e tendo em vista a natureza dos dados produzidos por nossa pesquisa de campo, a metodologia demandou uma análise qualitativa que, segundo Campos (2018, p. 71), caracteriza-se por “um processo cujo significado não pode ser medido em termos de quantidade, de intensidade ou de frequência”.

Colaborando com essa perspectiva metodológica, Burak (2010) considera que “no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, diversas assumem uma abordagem qualitativa”. Além disso, o pesquisador tem o entendimento da Modelagem com uma visão assumida a partir de uma Educação Matemática que contempla as Ciências Humanas Sociais. A partir dessa concepção, o pesquisador concebe a metodologia qualitativa como “coerente com esses elementos da Educação Matemática, segundo sua natureza e metodologia” (BURAK, 2010, p. 17).

Entendemos que o método qualitativo é indutivo e não intenta predizer, mas traz consigo a ideia de reconduzir, reconstruir e buscar compreender o conhecimento já internalizado das pessoas, apontando limites e potencialidades, exatamente a expectativa que assumimos desde o início de nossa pesquisa.

4.4. Detalhando a metodologia qualitativa de pesquisa associando-a à questão investigada

Bicudo (2006, p. 105) argumenta que “o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões”. De modo similar, Denzin e Lincoln (1994, p. 2) consideram como característica do método qualitativo “tentar dar sentido ou interpretar os fenômenos em termos dos significados que as pessoas trazem para elas”.

Burak e Klüber (2012) combinam e associam esses preceitos à Modelagem Matemática, entendendo que a abordagem fenomenológica de pesquisa deve acontecer de forma natural:

> O pesquisador geralmente está presente nos locais onde se verificam os fenômenos nos quais mantêm interesse, incluindo questões que dizem respeito do comportamento natural das pessoas. [...]. Assim, as pesquisas que têm como lócus a sala de aula parecem estar associadas à perspectiva naturalística, sobretudo porque as atividades com a Modelagem Matemática, geralmente, são desenvolvidas nesse contexto (BURAK & KLÜBER, 2012, p. 14).

Entendemos que as premissas do método qualitativo estão em sintonia com a Educação Matemática Crítica, referencial teórico desta pesquisa, e conciliam perfeitamente a perspectiva em tornar a "Matemática uma Ciência Humana e Social". Para sua validação, entretanto, é necessário obedecer a critérios que tornem os instrumentos metodológicos seguros e rigorosos, trazendo confiabilidade à análise para a compreensão do fenômeno em estudo.

Nesse sentido, Burak e Klüber (2012) contribuem e enumeram alguns princípios que devem ser observados e levados em conta na pesquisa de metodologia qualitativa:

> 1) relevância – contribuição para o campo profissional e científico; 2) coerência – articulação entre a questão de pesquisa, o referencial e os métodos de coleta e análise de dados; 3) competência – formulação adequada do problema e descrição das etapas da pesquisa; 4) acessibilidade – elucidação das bases teóricas bem como dos procedimentos de coleta e análise de dados; 5) ética – sobre a forma de abordagem dos sujeitos, fidedignidade, confidencialidade e divulgação dos resultados e 5) credibilidade – possibilidade de o leitor comparar os resultados discutidos com um relatório de pesquisa crível (BURAK & KLÜBER, 2012, p. 17).

A seguir, apresentaremos as características fundamentais do método qualitativo baseadas em Bogdan e Biklen (1994), procurando identificar características comuns entre a argumentações dos autores e a presença delas em nosso trabalho, abordando-as de forma sucinta:

1) O pesquisador é considerado instrumento de pesquisa, que pode recorrer às suas experiências, ao seu conhecimento tácito e aos seus pressupostos existenciais para coletar os dados, compreendê-los e interpretá-los.

Em nosso caso, o pesquisador foi o próprio professor da disciplina na qual foi realizada a pesquisa, já tendo ministrado para os participantes, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, II e III e, no 1º semestre de 2020, Equações Diferenciais Ordinárias. Assim, conhecia bem os participantes, vivenciando seus processos educacionais, sua convivência social, suas angústias e dificuldades. Neste contexto, o pesquisador tornou-se um instrumento por estar envolvido diretamente com os alunos pesquisados e coletando informações que propiciaram subsídios para análises posteriores, capazes de uma compreensão com mais veracidade da questão investigada.

2) A pesquisa qualitativa apresenta dados descritivos – capazes de retratar, descrever de modo organizado – que são abordados quanto possível como as coisas aconteceram, na forma de palavras.

Utilizamos anotações do diário de campo, filmagens das atividades e os *print's* de telas dos celulares colhidos dos grupos pesquisados, buscando traduzir tanto quanto possível como as coisas aconteceram. As palavras coletadas, trazidas de citações literais e de outros recursos, tiveram a expectativa de ajudar a descrever e retratar o ambiente pesquisado. As anotações e observações aconteceram no momento das atividades, da palestra e do questionário aplicado, composto por perguntas abertas e discursivas.

3) O ambiente natural pode é a fonte direta dos dados, neste tipo de pesquisa identificada como pesquisa qualitativa.

A pesquisa ocorreu em uma turma com estudantes organizados em grupos, num ambiente no qual os participantes estavam completamente inseridos, de forma confortável e tratando de questões do interesse deles. Assim, valorizou as relações humanas, possibilitando trazer para a sala de aula de Matemática o ponto de vista dos estudantes que sempre estiveram no foco da investigação.

4) A compreensão do processo deve ser mais relevante para o pesquisador qualitativo que o produto propriamente dito.

Entendemos que a compreensão do processo deve ser uma operação que entenda o fato proposto, trazendo sentido ao objeto de estudo em questão. No caso da nossa pesquisa, o objeto matemático em estudo, o crescimento populacional, estava intrinsecamente ligado ao interesse da pesquisa e também dos participantes. Além do conhecimento matemático, observamos a criatividade e criticidade dos alunos na realização das atividades. Eles estiveram inseridos no ambiente tecnológico e virtual, auxiliando-os na aprendizagem de alternativas pedagógicas que lhe serão úteis posteriormente, como futuros professores.

5) O método qualitativo é indutivo.

Enquanto o método dedutivo não trabalha novos conceitos e as conclusões são abstraídas em base de conhecimentos implícitos e já existentes, o processo indutivo parte de fatos particulares e busca a compreensão a partir dos dados do objeto em estudo.

Assim, não pudemos afirmar positivamente ou negativamente, de antemão, se a Modelagem Matemática explorando atividades inerentes ao crescimento populacional trouxe novos conhecimentos inerentes às Equações Diferenciais e também quanto à criatividade e criticidade dos alunos envolvidos. A partir da análise dos dados coletados, tentamos compreender se as atividades contribuíram para a aprendizagem e de que forma isso aconteceu.

6) O ponto central do método qualitativo é a busca do significado que as pessoas dão para o problema estudado.

Buscamos sempre como professor/pesquisador, observar os participantes sob o ponto de vista da aprendizagem, auxiliando-os em suas dificuldades e trazendo atividades com o objetivo de torná-los mais críticos com relação ao "empoderamento" da Matemática. Dessa forma, conhecendo a realidade dos alunos, importou trazer o ponto de vista subjetivo para entender o conhecimento da realidade, buscando relacionar experiências vividas com aquelas vivenciadas nas atividades, contribuindo para uma melhor observação das atividades da Modelagem.

Por fim, entendemos que as premissas da metodologia qualitativa aqui abordadas não devem servir como regras ou trilhas. São, na verdade, luzes que iluminam a condução da investigação e contém características afins entre a teoria metodológica e as propostas da pesquisa. Cabe ao pesquisador percorrer no ambiente natural e buscar respostas para a questão investigada.

4.5. Delineando a coleta e o registro dos dados

Para Bogdan e Biklen (1994, p. 149), "o termo 'dados' refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar. São os elementos que formam a base da análise".

De maneira similar**,** Campos (2018, p. 88) argumenta que a pesquisa realizada de maneira qualitativa pode abranger vários tipos de evidências e a coleta dos dados pode ser realizada por meio de uma triangulação que "auxilia a interpretação dos dados, conferindo-lhes maior credibilidade".

Neste trabalho, utilizaremos a triangulação que será realizada por meio de um contraste entre os referenciais teóricos descritos, da observação descrita em um diário de campo das atividades exploratórias por meio de Modelagem Matemática e das respostas ao questionário.

4.6. Destacando a observação das atividades

Nesta pesquisa, tendo em vista seus objetivos, optamos por uma observação conforme destacam Alves Mazzotti e Gewandznajder (1998, p. 166): "Os comportamentos a serem observados não são predeterminados. Eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação".

Ainda sobre o papel da observação por parte do pesquisador, Bogdan e Biklen (1994, p. 150) destacam a importância de "relatos escritos daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha, refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo".

Nesse contexto, durante as atividades de Modelagem Matemática, procuramos registrar, na medida do possível, as observações que percebemos, ouvimos e vimos. Além disso, as falas dos alunos, seus questionamentos e suas decisões foram gravadas, o que foi de grande valia no momento da análise da coleta dos dados.

Estes relatos deram origem a um arquivo digital, transformado em um documento estruturado denominado "diário de campo", contemplando a definição de Alves Mazzotti e Gewandznajder (1998, p. 169): "Considera-se como documento qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação".

4.7. Construindo as atividades de Modelagem Matemática

As atividades de pesquisa constituíram-se como um instrumento metodológico importante, pois conduziram os participantes e o professor/pesquisador à reflexão sobre a prática educativa, bem como exerceram um papel central nos processos de ensino/aprendizagem.

Elas foram conduzidas de forma exploratória, sendo que a exploração aqui nos remete à possibilidade de presumir que a construção do conhecimento matemático não seja conduzida de uma maneira convencional, não se constituindo em um processo lógico e dedutivo, mas, de uma maneira simples e eficiente, tendendo a compreender o ambiente da pesquisa e seus interlocutores – alunos e professor/pesquisador.

Para Garcia e Caberlini (2016, p. 9), "a investigação matemática e o seu ensino envolvendo atividades exploratórias vêm se constituindo como uma das tendências em Educação Matemática e tem sido apontada em diversos estudos como um encaminhamento metodológico promissor para a construção do conhecimento matemático".

Neste trabalho de pesquisa, as atividades exploratórias tiveram como premissa a possibilidade de investigar a Modelagem e o ensino de EDO, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior. Como discorremos no capítulo anterior, atividades de Modelagem no ensino da Matemática trazem consigo, algumas premissas que vão além do "resolver" ou "solucionar" questões matemáticas.

Concebemos ainda nossas atividades como exploratórias por fazerem parte de uma pesquisa exploratória. Para Burak (2010), o método de pesquisa exploratória foi trazido da Antropologia e presta uma grande contribuição à Educação e, mais particularmente, à Educação Matemática:

> A pesquisa exploratória é uma etapa que acontece de forma natural, pois uma vez escolhidos o tema, muitas vezes, dependendo do nível de ensino em que se esteja sendo trabalhado os temas são escolhidos por curiosidade, pelo desejo de se conhecer mais e melhor aquele assunto. (...) conhecer mais sobre o tema, buscar informações no local onde se realiza o interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de se constituir em uma das premissas para o trabalho nessa visão de Modelagem é uma etapa importante na formação de um estudante mais crítico (BURAK, 2010, p. 21).

Assim, as atividades exploratórias, que seguem nos apêndices, foram realizadas com futuros professores de Matemática e levaram em conta suas experiências e concepções sobre a Matemática. Utilizamos a Modelagem Matemática envolvendo aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem, na expectativa de estimular a reflexão e a criatividade dos estudantes, além de procurar entender aspectos inerentes à aprendizagem e possíveis dificuldades.

4.8. Destacando a importância do Questionário de Avaliação das Atividades

Gil (1999, p.128) define o questionário como uma "técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, etc.".

No âmbito das pesquisas em Educação Matemática, muitas delas utilizam o questionário como um instrumento eficiente de coleta dados. É um importante instrumento que contribui para a compreensão, por meio de suas respostas, do objeto de estudo. No entanto, Chagas (2000, p. 100) enfatiza que "cuidados devem ser tomados dentro de uma sequência lógica, para que sua elaboração tenha eficácia para a finalidade a que se destina".

Nessa perspectiva, Chagas (2000) propõe alguns componentes que devem ser levados em consideração no momento de sua elaboração. Dentre eles destaca: solicitação de cooperação, buscando motivar o respondente através de uma prévia exposição; instruções claras e objetivas; as informações solicitadas devem ser efetivamente o que se pretende pesquisar.

Entendemos que tais aspectos devem ter um propósito claro ligado à pesquisa e uma linguagem direta com o respondente, sem ambiguidades e imaginando de que forma podemos usar suas respostas na investigação. Além disso, cada pergunta deve ter uma justificativa embasada na questão de investigação, para que esse instrumento seja eficaz.

Assim, em nossa pesquisa, elaboramos um Questionário de Avaliação das Atividades, que foi aplicado ao final da pesquisa e consta dos apêndices.

4.9. Apresentando o contexto da pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada em um contexto de sala de aula, com alunos do curso presencial de Licenciatura em Matemática das Faculdades Doctum da cidade de Ipatinga – MG, matriculados na disciplina Equações Diferenciais Ordinárias, no 1º semestre de 2020, da qual o professor foi o pesquisador, como já havíamos destacado.

Devido à pandemia de Covid-19, tendo em vista as orientações da Organização Mundial de Saúde (OMS) e dos órgãos públicos para o distanciamento social, de abril a julho de 2020, as atividades da disciplina ocorreram de forma virtual, conectada e *on-line*, explorando os recursos da plataforma *Google Meet*, disponibilizada institucionalmente para alunos e professores das Faculdades Doctum.

As aulas da disciplina ocorreram uma vez na semana, com sessões de aproximadamente quatro horas de duração, no período da noite, divididas em 2 partes com 2 aulas de 50 minutos cada, com um intervalo de 20 minutos entre as partes. A pesquisa foi realizada, então, durante 4 semanas seguidas, no mês de junho de 2020,

Os 12 alunos participantes foram organizados em 4 grupos com 3 integrantes cada. A formação dos grupos aconteceu de forma espontânea. Para a comunicação e discussão das atividades, eles formaram grupos no *WhatsApp* e outras redes sociais. Assim, as tecnologias se configuraram numa possibilidade que, inclusive, poderá ser ricamente explorada pelos professores do século XXI, conforme argumentam de Carneiro e Passos (2014):

> A utilização das tecnologias nas aulas de Matemática pode promover mudanças na dinâmica da sala de aula e também nas formas de ensinar e aprender os conteúdos. Para tanto, os professores precisam compreender e ter clareza das possibilidades e também dos limites das tecnologias (CARNEIRO & PASSOS, 2014, p. 1).

A disciplina EDO é obrigatória na matriz curricular do curso e tem carga horária total de 80 horas aula, com início em fevereiro e término em julho de 2020. A ementa aborda os seguintes conteúdos: Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordens; Resolução de Equações Diferenciais usando séries de potências.

Como recursos metodológicos, o planejamento acadêmico sugere aulas expositivas e dialogadas com resolução de atividades inerentes às EDO. Durante a etapa, os alunos também devem realizar atividades supervisionadas pelo professor, tais como pesquisas teóricas e práticas envolvendo o assunto, além de atividades avaliativas de aprendizagem. Sugestiona-se ainda que haja interlocuções com outras disciplinas do curso, bem como palestras e seminários durante a etapa e ao final do semestre letivo sejam aplicadas atividades que estudem fenômenos relacionando aquilo que se estudou com o cotidiano dos alunos.

O curso de Licenciatura em Matemática, por sua vez, é cursado ao longo de 8 períodos. A turma com a qual foi realizada a pesquisa de campo cursava o 7º período e começou o curso no 1º semestre letivo do ano de 2017, quando contava com 35 alunos. Destacamos que, dos 12 alunos regularmente matriculados na disciplina EDO, 11 cursavam a disciplina pela 1ª vez e 1 aluno cursava a disciplina pela 2ª vez.

Para a realização da pesquisa, todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, exigência do Comitê de Ética em Pesquisa da UFOP. Além disso, tivemos o consentimento do Coordenador Acadêmico e do curso de Licenciatura em Matemática, conforme anexo.

Como primeira atividade de pesquisa, realizamos uma palestra, ministrada na 1ª parte da aula do dia 02 de junho de 2020, com duração de aproximadamente 2 horas, sobre Educação Matemática e Modelagem. Nessa palestra, proferida pelo pesquisador e pelo orientador da pesquisa, foram explorados alguns conceitos, premissas e perspectivas da Modelagem no ensino da Matemática. Além disso, apresentamos argumentações sobre como a Matemática pode empoderar e emancipar as pessoas, compreendendo-a como uma “Ciência Social e Humana”, características da Educação Matemática.

Na 2ª parte da aula do dia 02 de junho de 2020, lançamos para os alunos a seguinte questão: Em 2020, está prevista a realização de um Censo pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para dimensionar a população brasileira. Ele irá acontecer?

Rapidamente, os alunos realizaram pesquisas na internet e constataram que o Censo foi adiado para 2021 pelo próprio IBGE, uma vez que, no momento de pandemia vivenciado, não seria possível a realização censitária. A partir daí, suscitamos a seguinte discussão: Existiriam, então, modelos matemáticos confiáveis para dimensionar a população brasileira? Quais?

A partir daí, foi solicitado aos alunos que, já trabalhando em grupos, eles trouxessem pesquisas bibliográficas para a próxima aula relacionadas à questão de modelos matemáticos de previsão populacional, suas validações e limitações.

Assim, nas aulas de 09 e 16 de junho de 2020, desenvolvemos as 2 atividades exploratórias de Modelagem Matemática que envolveram problemas de taxa de variação e demandas de crescimento populacional e que foram extraídas e adaptadas de Laudares et al (2017, p. 118-124). Salientamos que houve autorização expressa do autor principal para utilização das atividades em nossa pesquisa e que elas foram essenciais para conseguirmos atingir os objetivos propostos. A Atividade de Modelagem 1 envolveu o crescimento exponencial de um problema com variação populacional, segundo a Lei de Malthus, enquanto a Atividade de Modelagem 2 tratou de um problema com análise de demanda e crescimento populacional, segundo a Lei de Verhulst.

Ao final de cada uma das atividades aplicadas, adaptamos uma questão solicitando que fosse feito uma análise crítica do Problema de Variação Populacional a partir de leis matemáticas e de outros instrumentos estatísticos utilizados no Brasil. Tal questionamento visou verificar a criticidade dos alunos acerca do que as Equações Diferenciais podem trazer de reflexão sobre o assunto do crescimento populacional e também sobre as políticas públicas vigentes.

A aplicação do Questionário de Avaliação das Atividades, após sua realização, aconteceu no dia 23 de junho de 2020, por meio de respostas individuais, enviadas virtualmente ao pesquisador. Após o envio, realizamos uma discussão com toda a turma sobre a experiência de trabalho com a Modelagem Matemática.

Assim, os dados foram coletados durante todo o processo, por meio dos *print's* dos sistemas de conversas no *WhatsApp*, dos *chats* das conversas na plataforma *Google Meet*, das anotações no diário de campo e das gravações de áudio e vídeo de todas as aulas, autorizadas pelos participantes da pesquisa, o que nos forneceu grande fonte para a transcrição dos dados, que serão mais detalhadamente descritos e analisados no próximo capítulo.

Capítulo 5

DESCREVENDO E ANALISANDO OS DADOS: A RETOMADA DOS CAMINHOS DA MODELAGEM

> "Podemos pensar em um grupo de pessoas, ao invés de uma pessoa individual como sendo o sujeito que aprende. [...] Noções como interação, comunicação e diálogo tornam-se importantes".
>
> Skovsmose (2007, p. 229)

Neste capítulo, descreveremos o contexto e os procedimentos da pesquisa, localizando-os nos encontros, cronologicamente.

Os encontros foram realizados remotamente, por meio da plataforma *Google Meet*, foram gravados, com a devida permissão dos participantes, e geraram imagens e áudios que serviram para compor o Diário de Campo do professor-pesquisador por meio de observações e anotações.

Salientamos que as descrições a seguir obedeceram fielmente às gravações e contêm aspectos que vão além do desenvolvimento dos modelos matemáticos e de suas resoluções, destacando características como interações e desenvolvimento da criticidade dos participantes da pesquisa, conforme premissas da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática Crítica.

Após as descrições dos encontros, apresentaremos a análise dos dados obtidos a partir dos instrumentos de pesquisa e das respostas dadas ao questionário aplicado individualmente, ao final das atividades de Modelagem Matemática.

Nesse contexto, retomaremos alguns referenciais teóricos e buscaremos centrar nosso foco na aprendizagem das EDO pelos estudantes da pesquisa, na visão do professor-pesquisador – observados no contexto da investigação – e também no seu desenvolvimento profissional e formação para a sala de aula, sem nos esquecermos de analisar possíveis contribuições das atividades de Modelagem Matemática para o desenvolvimento da sociocriticidade e da apropriação da cidadania.

Antes, porém, narraremos de forma breve a abordagem dada ao estudo das EDO, como preliminares para os processos de ensino e aprendizagem.

5.1. Apresentando as EDO aos estudantes

Iniciamos o 1º semestre letivo de 2020, no início de fevereiro, realizando uma revisão sobre as derivadas de funções de uma variável real, contemplando as propriedades das taxas de variação, e também revisando algumas resoluções de integrais, importantes instrumentos do CDI utilizados na resolução das EDO.

Durante essa etapa, destacamos a importância das EDO na solução de fenômenos físicos e naturais presentes ao nosso cotidiano e enumeramos algumas aplicações possíveis. Dentre elas, descrevemos a taxa de variação como importante ferramenta matemática na análise de fenômenos capazes de dar compreensão a estudos de fenômenos de crescimento e decrescimento populacionais.

Matematicamente, apresentamos as EDO como uma equação composta por uma "função desconhecida", inserida implicitamente nas taxas de variação – derivadas e diferenciais – dx e dy, classificando-as quanto à ordem e à linearidade, e trazendo uma notação matemática adequada com ilustrações e definições, ainda que preliminares.

Vale destacar ainda que, precedendo à pesquisa de campo, manuseamos soluções gerais e particulares das EDO de 1ª e 2ª ordens, gráfica e analiticamente. Para complementação dos estudos teóricos e conceituais e por sugestão da ementa da disciplina, os estudantes realizaram individualmente pesquisas bibliográficas e distintas acerca de possíveis aplicações para as EDO de 1ª ordem. Como resultados, trouxeram a resolução de problemas geométricos, disseminação de doenças, decaimento radioativo e datação por carbono, citando o exemplo da datação do Sudário de Turim. As situações-problema trazidas nas resoluções pelos estudantes envolvendo as EDO tiveram a abordagem retirada de atividades encontradas no livro-texto de Cálculo, Volume II, de Howard et al (2007), um dos livros das referências no planejamento da disciplina.

A seguir, em meados de março, houve a ocorrência da pandemia do novo Corona vírus, intitulado COVID-19 ou simplesmente COVID, e as aulas que eram até então presenciais passaram a ser remotas[28]: virtuais, conectadas e *on-line* por meio da plataforma *Google Meet*.

[28] Posteriormente, traremos uma breve fundamentação sobre as aulas conectadas, virtuais e on-line citadas aqui como remotas.

Como recursos pedagógicos, passamos a utilizar, além dos materiais didáticos tradicionais, o computador e programas do pacote *Office*.

Vale destacar a importância que a internet desempenhou em nossas aulas e nos encontros síncronos, ressaltando que, por vezes, alguns alunos e o próprio professor-pesquisador tiveram problemas com conexão.

Por outro lado, nesse período de pandemia, testemunhamos por meio dos mais diversos veículos de comunicação, a importância dos modelos matemáticos no estudo dos fenômenos naturais, gerando gráficos na análise da disseminação da doença. Destaque para as expressões utilizadas na mídia tais como pico, performance de crescimento e decrescimento das curvas, que foram estudadas nas aulas envolvendo conhecimento de derivadas – as taxas de variação.

5.2. Retomando o contexto da pesquisa

Conforme descrevemos no capítulo anterior, a pesquisa foi realizada com 12 (doze) estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do 7º período, no mês de junho de 2020, que estavam no penúltimo semestre para a conclusão do seu curso. Destes, 4 (quatro) são do sexo masculino e 8 (oito) do sexo feminino. No entanto, como o gênero dos estudantes não influenciou nas descrições e análises, serão designados apenas por alunos participantes da pesquisa (A) e identificados com nomes fictícios, enquanto o professor-pesquisador será identificado como (P) e o orientador da pesquisa será identificado como (O).

Assim, foram divididos em 3 (três) grupos de 4 (quatro) alunos que passaremos a denominar como G1, G2 e G3, formados de maneira espontânea. Ressaltamos que a interação entre os participantes de cada grupo formado e o professor-pesquisador foi feita por meio de grupos criados no *WhatsApp* e também pelo *Google Meet.* Vale ressaltar o fato de que 2 (dois) dos alunos da pesquisa, que não serão identificados, à época da pesquisa, não possuíam computador e, por isso, participaram das atividades e dos encontros síncronos em seus celulares.

A partir de agora, passaremos a descrever as atividades desenvolvidas em cada um dos 4 (quatro) encontros acontecidos na plataforma *Google Meet*, sintetizados brevemente no quadro a seguir. Lembramos que os encontros aconteceram uma vez por semana, sempre às 3as feiras, no horário de 18h25min às 20h05min e de 20h20min às 22 horas, e que foram gravados em sua íntegra, com a devida permissão dos participantes.

Quadro 4 – Cronograma resumido dos encontros

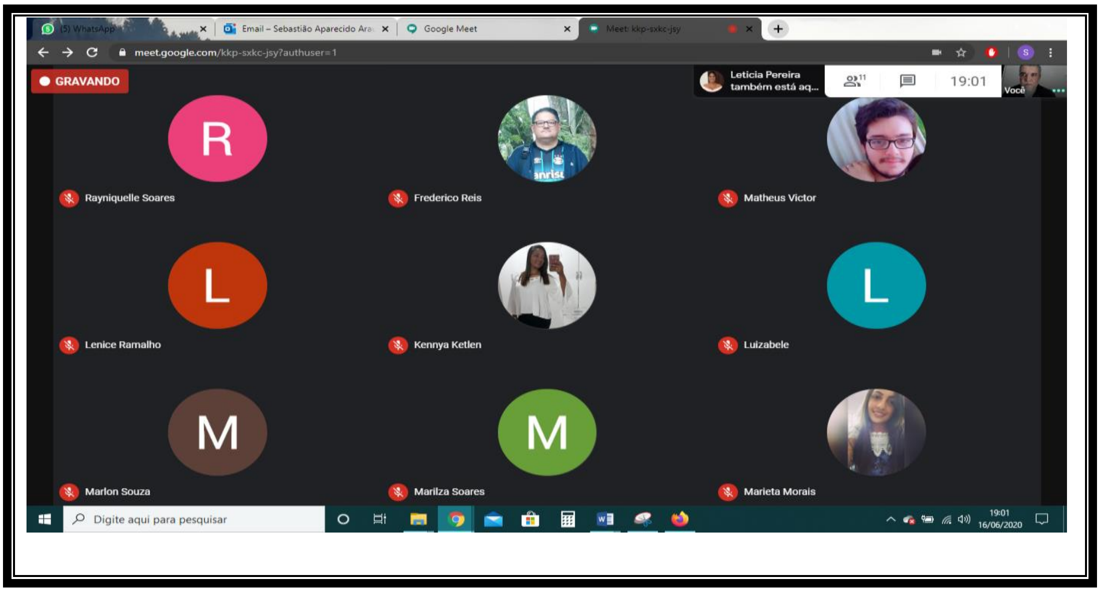
Nº	Data	Descrição do Encontro
1	02 / 06 / 2020	Palestra Inicial / Atividade Inicial sobre Modelagem Matemática
2	09 / 06 / 2020	Apresentação da Atividade de Modelagem 1 – Lei de Malthus
3	16 / 06 / 2020	Apresentação da Atividade de Modelagem 2 – Lei de Verhulst
4	23 / 06 / 2020	Considerações Finais / Questionário de Avaliação das Atividades

Fonte: Dados do autor (2020).

5.3. Descrevendo o 1º encontro (02 / 06 / 2020)

Iniciamos o 1º encontro contando, além dos participantes da pesquisa e do professor-pesquisador, com o orientador da pesquisa – Prof. Dr. Frederico da Silva Reis e com o Coordenador e Diretor Acadêmico das Faculdades Doctum, Unidade de Ipatinga, Prof. Ms. Ailton Raimundo de Almeida, além de alguns colegas professores do curso de Licenciatura em Matemática, especialmente convidados para esse encontro. Abaixo, trazemos uma tela capturada para registrar tal momento.

Figura 7 – Print do 1º encontro síncrono de 02 / 06 / 2020



Fonte: Dados do autor (2020).

Esse 1º encontro no *Google Meet* foi divido em dois momentos distintos:

1) 1º momento: uma palestra proferida pelo professor-pesquisador e pelo orientador da pesquisa;
2) 2º momento: uma atividade realizada com os participantes da pesquisa sobre o Censo Demográfico no Brasil, métodos e modelos de contagem populacional.

Traremos, a seguir, um recorte da palestra realizada no 1º momento do 1º encontro.

5.3.1. Detalhando a palestra inicial

Proferimos a palestra trazendo primórdios da Modelagem e da Educação Matemática nos seus diversos aspectos quanto aos processos de ensino e aprendizagem, na perspectiva de diversos pesquisadores (ARAÚJO, 2007, 2017; BARBOSA 2001, 2004, 2007; BIEMBENGUT, 2004, 2009; BURAK, 1998, 2004, 2008, 2010), cujas ideias foram devidamente descritas no Capítulo 3 do nosso referencial teórico. Nesse contexto, abordamos a importância das metodologias desenvolvidas nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, com enfoque para os conhecimentos e os saberes didáticos que o professor deve mobilizar no exercício da docência.

Abrimos a palestra convidando os participantes a uma reflexão sobre como o conhecimento matemático pode nos emancipar, tornando-nos cidadãos mais conscientes e críticos. Para justificar nosso pensamento, trouxemos a questão proposta por Skovsmose (2006, p. 19): “De que maneira a aprendizagem da Matemática pode contribuir para o desenvolvimento da cidadania? ”

Acerca desta citação, argumentamos:

P: A Matemática é importante não somente por possuir o ferramental para efetuar cálculos e servir de instrumento para outras ciências. Quem possui conhecimentos matemáticos é capaz de compreender melhor o mundo, de enxergá-lo de forma diferente daqueles que não os tem. Vejam um exemplo simples, aplicável ao nosso dia a dia: a questão das taxas de juros aplicadas no mercado quando tomamos um empréstimo com a finalidade de adquirir um bem durável qualquer, seja ele uma TV, um veículo ou um imóvel. Quando temos o conhecimento matemático e o aplicamos de forma crítica, somos capazes de enxergar nas entrelinhas. Muito além de a prestação caber no nosso orçamento, deve estar o entendimento do que isso pode representar em nosso orçamento pessoal. Isso é cidadania e criticidade.

O: Então, vejam só, pessoal: Se observamos bem, por trás dessa pergunta tem uma crença. Porque se a pergunta é “De que maneira a aprendizagem da Matemática pode contribuir para o desenvolvimento da cidadania? ”, então, nós, educadores matemáticos, acreditamos que ela, de fato, contribui. A pergunta poderia ser: A Matemática poderá contribuir para a cidadania? Seria diferente. E isso acontece porque ela é uma lente. O mundo tem várias nuances e interpretações. Quando aprendemos Matemática, podemos ler por meio dela essas compreensões de maneira clara e diferente daqueles que não aprendem Matemática. Vamos dar um exemplo bem atual. Vocês estão vendo as pessoas falarem sobre a questão da COVID, sua evolução, o pico, o platô. Quem não entende o mínimo de Matemática, não entenderá isso de forma precisa. O que significa estar no pico? O que significa platô? Crescimento e decrescimento da curva? Na verdade, estamos falando de um gráfico. Quando aprendemos Matemática, aguçamos nossa leitura e nossa lente para melhoramos a compreensão e entender o mundo. Então, seremos melhores cidadãos se tivermos o conhecimento matemático. Entenderemos melhor as coisas. Não seremos enganados, ludibriados ou passados para trás e estaremos exercendo melhor nossa cidadania, e isso é uma questão de crença. Então, quais crenças devemos ter enquanto educadores matemáticos? Aqueles que pensam diferente, não digo que estão errados, mas agem de forma diferente. Quando sabemos Matemática, o nosso foco e atitude mudam. Vocês, que serão professores de Matemática, devem ter isso em mente e pensar: quais são as minhas crenças? Vocês acreditam que a Matemática contribui, de fato, para a cidadania?

Alguns estudantes logo interagiram, buscando exemplificar alguns casos relacionados à importância do conhecimento matemático:

> Dá para usa-la, especular e compreender. Um consórcio de carro, por exemplo, é realmente compensatório? Tem casos onde consórcios são mais caros que o próprio carro (Marcone, junho de 2020).

Prosseguimos, perguntando: Matemática na vida ou Matemática para a vida? Complementando a discussão e já nos preparando para fazer menção à Modelagem, num contexto de aprendizagem, trouxemos um recorte dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

Figura 8 – Um recorte dos Parâmetros Curriculares Nacionais

> Essas premissas estão contempladas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S, 1999, p. 40):
>
> - À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer interferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores e trabalhar cooperativamente.

Fonte: Dados do autor (2020).

P: Como percebemos, diante da sugestão dos PCN, por vezes nos sentiremos impotentes diante do que eles preceituam. Fazer tudo o que eles sugerem não é tarefa fácil. Mas, como educadores matemáticos, podemos olhar para eles como princípios norteadores. No nosso curso, em etapas passadas, fizemos trabalhos de pesquisas que vinculam a Matemática a temas transversais, referindo-se aos Direitos Humanos e Universais por meio dos GRULES[29] contemplando as ideias trazidas aqui. Uma pessoa que não compreende esse contexto trazido pelos PCN diria: Mas, o que a Matemática tem a ver com os Direitos Humanos e Universais? Matemática não seria apenas para "calcular"?

O: A gente vê os PCN e sentimos que realmente não é fácil ser professor de Matemática. Parece que temos que super professores para fazer tanta coisa: estimular a capacidade de comunicação de nossos alunos, resolver problemas, tomar decisões, fazer interferências. No entanto, devemos olhar para eles e vê-los como parâmetros para nos balizar. O que não podemos é fazer o contrário: não termos o compromisso com isso. Ele deve ser uma linha e não pode intimidar a nossa prática pedagógica. Devemos tê-los como oportunidade de crescimento e fortalecimento de nossa prática docente, contribuindo assim para nossa formação continuada.

---

[29] GRULES são grupos de Leitura e pesquisa instituídos na Rede Doctum de Ensino para estimularem os discentes e docentes a fazerem pesquisa envolvendo temas transversais. Esse projeto faz parte do planejamento do curso de Licenciatura em Matemática do 1º aos 6º períodos e é vinculado a todas as disciplinas do curso.

Interagindo com a turma, o orientador perguntou para os participantes da pesquisa quantos deles tinham alguma experiência como professor. Manifestaram-se prontamente 8 (oito) estudantes sinalizando ter experiências com aulas particulares e/ou como professor substituto no Ensino Fundamental II. Assim, elogiou o perfil da turma e os incentivou a não terem a ideia de serem super professores, pois todos nós temos falhas e o importante é se aperfeiçoar.

Nesse contexto, falamos aos alunos sobre os princípios da Educação Matemática, que se preocupa com as questões do conhecimento matemático, com os processos de ensino e aprendizagem e com a sociocriticidade, trazendo uma citação do pesquisador Dionísio Burak (2016):

Figura 9 – A sociocriticadade no ensino da Matemática

De forma similar, o pesquisador Dionísio Burak, enaltece a importância do ir além ao "algebrizar" ou do "calcular", preocupando-se com o "como" e com o "porquê" do ensino da Matemática, harmonizando-se com as ideias centrais trazidas da Educação Matemática:

"[...] se faz necessário um ensino (de Matemática) que possibilite aos estudantes: análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias." (BURAK, 2016, p. 133)

FONTE: Dados do autor (2020).

O: Enfatizamos o sentido de os estudantes conjecturarem. Isso se dá no sentido de pensar sobre, de duvidar, de elaborar ideias e não somente se apegar ao pensamento pronto e acabado. O pensamento voltado para a aprendizagem de Matemática deve levar á ideia de criticar, de formular ideias. Não devemos ser aquele professor de Matemática que se preocupa somente com o produto (a fórmula pronta, a lei, o modelo). Mas, devemos nos preocupar mais com as ideias, com o processo em si. O bom professor de Matemática valoriza as ideias e o processo e, sem ideias, não há produto. É no processo que surgem as ideias.

P: Por que vocês acham que é importante a criticidade nas aulas de Matemática? O que significa isso?

Alguns estudantes buscaram fazer uma conexão com outras falas nossas, proferidas em outras disciplinas anteriormente ministradas:

> O professor Sebastião sempre diz assim: não acreditem em mim. Pesquisem e verifiquem (Dione, junho de 2020).

O: Criticidade é a capacidade de desenvolver o espírito crítico. É melhor ter alunos críticos que passivos, aqueles que não questionam. A Matemática tem o compromisso com a criticidade, com o questionamento. O professor que exerce a criatividade e a criticidade em suas aulas, também passa a ser mais crítico de suas aulas e mais preocupado com a aprendizagem dos alunos.

P: O educador matemático deverá sempre estar interessado que os alunos aprendam. Conhecimentos não são transmitidos, são construídos. Nessa perspectiva, estaremos em um processo de ensino para a aprendizagem. O professor deve ser mediador do conhecimento juntamente com o seu aluno, construindo juntos o conhecimento. Isso torna o aluno autônomo e corresponsável pelo seu aprendizado. Esses são princípios sugeridos pela Educação Matemática.

Diante de nossa fala, alguns estudantes resolveram se manifestar em relação às questões que tentamos levantar:

> Sebastião, penso que a primeira coisa é aprender a ser mais cidadão (Marcone, junho de 2020).

O: Complementando: a aprendizagem deverá ser o cerne do processo e o foco.

P: Mas, afinal, como podemos entender, agora, o que é o processo de Modelagem? Nessa perspectiva de construção do conhecimento, apresentaremos a Modelagem na percepção da pesquisadora Araújo (2007, p. 20): "Uma compreensão da Modelagem Matemática nesse sentido seria então uma forma de descrever a realidade por meio da Matemática. Assim, diante de um problema da realidade, os objetos que o constituem e suas relações se aproximariam de formas matemáticas e suas relações"

P: Assim, entendemos a Modelagem como uma oportunidade de construção do conhecimento matemático, de socialização entre os estudantes e professores e de um ambiente propício para pesquisa a temas até então desconhecidos (ou não) – inclusive, os não matemáticos. Além disso, pode possibilitar a inserção de tecnologias e novos recursos didáticos. Observem que todas essas premissas convergem para as ideias sugeridas pela Educação Matemática e pelos preceitos dos PCN debatidos há pouco. Acreditamos que elas poderão nos auxiliar a nos inserir nesse universo, mesmo que tenhamos que sair de nossa zona de conforto. Fato importante a ser considerado é ser uma oportunidade para amenizar a exclusão digital imposta a uma parcela das pessoas, tendo em vista que o trabalho é realizado em grupo, com a interação entre estudantes e professor. Isso, tendo em vista que nem todos os alunos tem acesso a um computador, à internet e, por vezes, até a um celular que proporcione acesso a informações advindas das tecnologias virtuais, que tanto proporcionam acesso a um universo de informações e conhecimentos. Nesse contexto, seus princípios podem ainda auxiliar os seus participantes a evoluírem no pensamento matemático, abstraindo interpretações dos modelos matemáticos por meio de suas variáveis presentes nos modelos matemáticos, extraídos dos fenômenos estudados. Entendemos, portanto, que mesmo de forma implícita, estão aí princípios de cidadania.

Rapidamente, alguns alunos reagiram diante das novas perspectivas que estávamos trazendo:

> Vejo que a Educação Matemática está mais próxima ao aluno, porque trata de coisas do seu cotidiano. Logo, dando ênfase às expertises do aluno naquilo que ele gosta de fazer (Luísa, junho de 2020).

Nessa perspectiva, trouxemos alguns aspectos que a Modelagem pode proporcionar, argumentados por Barbosa (2001, 2004):

1) Motivação;
2) Facilitação da aprendizagem;
3) Preparação para utilizar a Matemática em diferentes áreas;
4) Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração;
5) Compreensão do papel sociocultural da Matemática.

A seguir, destacamos algumas premissas da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, baseando-nos em Burak (2010), ao defender que a "Matemática pode ser mais humana e social".

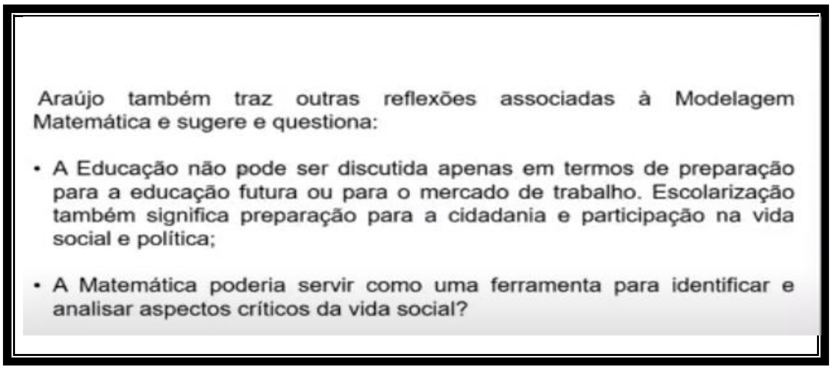
P: Para o contexto da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, destacamos: a preocupação com o conhecimento matemático, com a aprendizagem e uma terceira – a criticidade e analiticidade. Dessa maneira, associamos a Modelagem com os desafios da construção de um conhecimento matemático ancorado em bases sólidas da Matemática, de conhecimentos didáticos e pedagógicos e que tenham a capacidade da crítica e dos questionamentos. Nessa perspectiva, a Matemática é capaz de nos trazer compreensão para questões atuais, por meio dos números, sobre os porquês da nossa sociedade brasileira. Dentre eles, exemplificamos alguns: por que o teto de gastos? Por que temos os cortes nos orçamentos para a Educação? Por que as reformas (da Previdência Social, trabalhista, administrativa, etc.)? A quem as reformas beneficiam? Qual a dimensão dos números apresentados pelo censo populacional e o que eles podem indicar de importante para as políticas sociais? O que ele pode nos trazer além dos números atualizados da população brasileira? Essas são perguntas que os números podem nos fazer entender que o conhecimento matemático pode nos tornar cidadãos mais questionadores e críticos, num contexto maior que o simples algebrizar e calcular em ações de uma Matemática pela Matemática. Isso é cidadania. Isso é Matemática.

Destacadamente, alguns alunos faziam observações sucintas no chat de conversas do *Google Meet* e, inclusive, sugeriam links que poderiam contribuir para os temas que estavam sendo mencionados:

> https://www.infomoney.com.br/colunistas/terraco-economico/994-dos-brasileiros-nao-conhecem-o-conceito-de-juros-compostos-e-isso-e-preocupante/ (Marcone, junho de 2020).

Justificamos essas premissas também com considerações de Araújo (2017), pesquisadora da Educação Matemática Crítica.

Figura 10 – Trazendo aspectos críticos da Matemática



FONTE: Dados do autor (2020).

O: Pessoal, para complementar e ilustrar o que o Sebastião acabou de dizer, existe algum movimento atual acontecendo que podemos relacionar à fala da pesquisadora Jussara Araújo? Vamos lá, esse movimento que agora está acontecendo nos Estados Unidos e viralizando no mundo inteiro chamado de *Black Lives Matter* (Vidas negras importam). Por que as pessoas falam de racismo estrutural? Porque se for verificar, a população negra dos Estados Unidos representa 25% ou 30% da população total e por que, então, a metade ou mais das pessoas que estão nos cárceres são negras? Por que, com a COVID, 40% ou 50% das mortes são de pessoas negras? Por que aproximadamente 2/3 das pessoas negras nos Estados Unidos não têm planos de saúde? Esses são números, são dados matemáticos, mostrando os "princípios da igualdade" ou não. É a Matemática formando cidadãos. Quanto mais sabemos Matemática, menos manipulados seremos no mundo em que a gente vive.

Alguns estudantes se manifestaram de forma lacônica: "Os números falam por si, professor" (Márcia, junho de 2020).

P: Para finalizar, que nós, educadores matemáticos, saibamos das diferentes possibilidades de ensinar e aprender a Matemática, respeitando as individualidades e a diversidade. Para isso, existem as metodologias ativas que podem nos auxiliar nesse processo de construção do conhecimento, aliadas às tecnologias. Se esse momento da pandemia é de dificuldades, também poderá ser de aprendizagem, inclusive para sermos cidadãos mais críticos. Acreditamos que a Modelagem na perspectiva da Educação Matemática poderá nos conduzir rumo a essa compreensão e travessia.

Após a conclusão da palestra inicial, passamos para o 2º momento do 1º encontro que detalhamos a seguir.

5.3.2. Detalhando a atividade inicial

. No 2º momento do 1º encontro, iniciamos os trabalhos falando aos estudantes sobre a importância do desenvolvimento dos processos que envolvem a Modelagem em sala de aula, utilizando as etapas de Biembengut (2004), descritas como fases de um projeto de Modelagem para a sala de aula.

Figura 11 – Fases do Projeto de Modelagem para sala de aula

DESENVOLVIMENTO DO PROCESSO DE MODELAGEM:

Biembengut (2004) sugere que o professor eleja um tema de alguma área de conhecimento que possa interessar aos alunos e elabore um modelo matemático, adaptando-o ao ensino da Matemática. Esse processo envolve as seguintes etapas:

1) Exposição do tema;
2) Delimitação do problema;
3) Formulação do problema;
4) Desenvolvimento do projeto;
5) Apresentação de exemplos análogos;
6) Formulação de um modelo matemático e resolução do problema a partir do modelo proposto;
7) Interpretação da solução e validação do modelo matemático.

FONTE: Dados do autor (2020).

Para melhor discorrer e justificar cada uma das etapas, trouxemos um exemplo de Modelagem que poderá ser realizada com alunos da Educação Básica, sobre uma situação-problema que envolve o contexto de uma sala de aula, focando-se no cálculo de áreas.

O: Imaginem uma sala de aula medindo 7 por 10 metros. Vamos lá: essa sala é pequena ou grande?

Alguns estudantes arriscaram-se a responder: “A sala é grande, professor” (Larissa, junho de 2020).

O: Ela é pequena ou grande, dependendo do número de alunos que nela estudam, não? Vamos delimitar o problema: Eu preciso saber quantos alunos essa sala comporta de forma confortável. Formulação do problema: Qual o número de alunos ideal de acordo com o seu tamanho? Para o projeto de Modelagem, podemos fazer medições da sala, das carteiras, do espaço útil que cada aluno ocupa, dos corredores. Qual é a área que precisamos ter? Depende também do tamanho das carteiras. Será que 1,5 metro quadrado é uma área ideal a ser ocupada por cada aluno? A solução seria obtida, então, simplesmente multiplicando 7 por 10 e depois dividindo por 1,5? A resposta seria não. Por quê? Porque teríamos que descontar a parte onde fica o professor e o quadro. Pode ser 1 metro? A validação do problema: Interpretar quantos alunos cabem na sala por meio das operações realizadas e deixar os alunos contarem, interpretando solução: x.y – 1 dividido por 1,5. Chegamos a uma fórmula matemática. Ah, professor, mas a sala tem "x" alunos e já está apertada. Voltamos e fazemos a operação novamente, atentando para alguns parâmetros. Fizemos um projeto de Modelagem e a Matemática foi usada como ferramental. Barbosa argumenta que quanto mais conhecimentos matemáticos demandar o modelo, mais este ficará requintado. Num modelo matemático envolvendo o CDI, por exemplo, teremos além da função, a derivada que poderá indicar máximo ou mínimo, indo além do conhecimento de função.

Diante de alguns poucos comentários discretos no chat, o orientador continua:

O: Existem outras premissas que podem ser usadas na solução desse problema proposto e, então, os resultados seriam próximos ao obtido pelo modelo anterior, com soluções diferentes. Isso nos mostra os princípios enumerados na palestra, conduzindo-nos à questão de que o mais importante são os processos e não o produto final. Esse foi um exemplo simples de como poderemos propor um projeto de Modelagem em sala de aula, o que motivará o aluno a pensar e conjecturar, tornando-o autônomo na construção do conhecimento matemático.

A seguir, solicitamos aos alunos uma breve "pesquisa exploratória" envolvendo o tema "Estimativa e Taxas de Variação da População Brasileira". Nessa etapa do trabalho, guiamo-nos na perspectiva de Modelagem de Burak (1998, 2004) e buscamos seguir suas ideias sob vários aspectos, quando ele propõe que a Modelagem deve "buscar manter-se em estreita harmonia com a visão apresentada em que a Matemática e seu ensino/aprendizagem é considerado uma prática social”, argumentando ainda que o professor, ao levantar aspectos, contrapontos e solicitar argumentos e pontos de vista, inicia o ponto de partida para o desenvolvimento da pesquisa exploratória.

O: Vamos agora iniciar o projeto de Modelagem que envolve as EDO. Vamos perguntar o seguinte: Qual é a população do Brasil, hoje? Quero que alguém clique rapidamente e fale.

> 220 milhões (Bruno, junho de 2020).
>
> 212 milhões (Joanis, junho de 2020).

O: Alguém faça uma pesquisa rápida na internet.

> Vi aqui na internet: deve ultrapassar 209 milhões em 2019 (Joanis, junho de 2020).

O: Pesquisem agora, a população em 2010.

> 190,7 milhões, vi aqui na internet agora (Bruno, junho de 2020).

O: Certo. Pode ser 191? Se vai ultrapassar 209 em 2019, isso dará uma diferença de 18 milhões. Como se passaram 10 anos, será que o aumento médio foi de 1,8 milhão por ano? Será que foi realmente isso? E aí, o aumento foi linear?

> Aumento médio sim. Linear não. (Larissa, junho de 2020).

> Não, professor. Por que devemos levar algumas situações em consideração e várias coisas podem ter acontecido que fizeram essa taxa variar, né?! (Raina, junho de 2020).

O: Exatamente!

> Há alguns anos atrás, tiveram mais nascimentos. Minha avó, por exemplo, teve 7 filhos, enquanto minha mãe só teve 2 filhos, eu e meu irmão (Dione, junho de 2020).

O: Será? Vamos analisar. Se sua avó teve 7 filhos e cada filho dela tiver 2 filhos, isso implica que o número de nascimentos aumentou, enquanto o número de pessoas por famílias diminuiu, não?

> Então, procurei aqui na internet e vi que o número de filhos por cada mulher em 2011 era 1,78 e, em 2018, estava em 1,76 (Joanis, junho de 2020).

O: Então, nesse caso, Joanis, você nos trouxe um outro índice: taxa de nascimento. Outra premissa a se considerar. Além dessa premissa trazida pelo Joanis, pessoal, tem mais alguma que podemos considerar?

> Expectativa de vida? (Márcia, junho de 2020).

> Condições hospitalares! (Dione, junho de 2020).

O: Excelente! Além dessas, temos outras. Vejam bem, estamos somente há 5 minutos discutindo e olhem quanta coisa apareceu. Quero perguntar outra coisa a vocês: Em 2010, foi dada uma população e foi falado que tem uma estimativa para 2020. Como descobrir se a expectativa vai se cumprir? Existem maneiras? Como olhar a população do Brasil, hoje?

> Basta considerar a taxa de crescimento populacional (Dione junho de 2020).

O: Mas como ter esse número com maior precisão possível?

> Basta ver os números do IBGE[30] (Dione, junho de 2020).

O: Há, sim, o IBGE. Mas o que ele faz para ter esses números?

> Estatísticas (Dione, junho de 2020).

---

[30] IBGE é o instituto Brasileiro de Geografia e Estatísticas, um órgão público da administração federal brasileira, criado na década de 1930 com a missão de realizar estudos e levantar dados quantitativos sobre o território do Brasil e sobre sua população.

O: Faltou uma palavra...

> Faz pesquisa sobre dados do Brasil e da população (Joanis, junho de 2020).

O: Muito bem! E qual pesquisa?

> O Censo[31]. (Joanis, junho de 2020).

O: Ah, o Censo! Chegamos a um problema: Esse ano vai ter Censo?

> Será que vai ter? Li na internet que pode não ter o Censo (Dione, junho de 2020).

O: Vai ter ou não o Censo? Tem o COVID, a questão do distanciamento social. Então, a pergunta é: Vai ter Censo em 2020? Procurem aí. Usem a internet. Vejam o que encontram e anotem os links no chat. Vamos dar 10 minutos para vocês pesquisarem.

Os alunos pesquisaram e voltaram com a informação sobre o adiamento do Censo para o ano de 2021, deixando no chat, os links pesquisados:

> O censo foi adiado para 2021, professor. Vi aqui no site: https://censo2020.ibge.gov.br/ (Joanis, junho de 2020).

> Vi aqui também no site: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/27160-censo-e-adiado-para-2021-coleta-presencial-de-pesquisas-e-suspensa (Raina, junho de 2020).

> Isso acontecerá porque ainda nem houve uma redução ou reversão no gráfico de avanço da COVID-19. Foi adiado para 2021 e pelo mesmo motivo foi o adiamento do ENEM[32] (Marcone, junho de 2020).

---

[31] Censo ou recenseamento demográfico é um estudo estatístico referente uma população que possibilita o levantamento de informações inerentes a ela, incluindo dados sociais e políticos. Esta pesquisa, normalmente, é realizada de dez em dez anos na maioria dos países.

[32] ENEM é o Exame Nacional do Ensino Médio, criado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), em 1998, com o intuito de avaliar o desempenho dos estudantes ao fim da escolarização básica. Atualmente, também é utilizado como critério de seleção para os estudantes ingressarem nas universidades públicas de todo o território brasileiro, bem como para aqueles que pretendem concorrer a bolsas de estudo em Universidades particulares no Programa Universidade para Todos (PROUNI).

> https://folhadirigida.com.br/noticias/concurso/ibge/coronavirus-concurso-ibge-tera-novo-cronograma-do-censo-demografico (Bruno, junho de 2020).

> https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/27160-censo-e-adiado-para-2021-coleta-presencial-de-pesquisas-e-suspensa (Quésia, junho de 2020).

> https://www.poder360.com.br/brasil/ibge-adia-censo-para-2021-por-causa-do-coronavirus/ (Luísa, junho de 2020).

> https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&url=https://www.ibge.gov.br/novo-portal-destaques/27161-censo-2020-adiado-para2021 (Márcia, junho de 2020).

O: Vocês viram aí que o Censo foi adiado para 2021. Mas, suponhamos que, mesmo assim, quiséssemos ter um levantamento da população brasileira e uma previsão populacional para 2020. O que seria preciso para estimar a população brasileira? Imagine que um aluno lhe pergunte: Professor, como posso estimar a população brasileira?

> Como as redes sociais atingem um número considerável de pessoas, poderíamos ter um link para isso (Joanis, junho de 2020).

O: Hummm! A internet ajudaria, mas seria fidedigna?

> Não, pois não é atingida por todos os brasileiros. E está acontecendo isso também com a questão do ENEM, já que nem todos têm a Internet (Marcone, junho de 2020).

> É verdade, acho que a internet contempla hoje uns 40% da população brasileira (Joanis, junho de 2020).

O: Queremos estimar a população brasileira e não as características dela. Então, a internet ajudaria sim, mas não seria fidedigna. Existe um número muito grande da população que não possuem internet. Uma reportagem do Fantástico da Rede Globo mostrou que pessoas aqui de Minas têm que andar vários quilômetros para ter esse acesso.

> Descobri um jeito: acessar o site de ajuda emergencial da Caixa Econômica Federal e do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) (Joanis, junho de 2020).

> Os cartórios civis (Quésia, junho de 2020).

> A companhia telefônica por exemplo, tem registro de cada aparelho. Seria uma "gambiarra" um pouco melhor, do que da internet. Se for considerar que celular com chip, mas sem internet é barato, então melhora a situação (Marcone, junho de 2020).
>
> O SUS[33] fornece dados precisos de quantas pessoas nasceram e morreram por data e período? Ou é tudo estimulado? Talvez seja uma fonte de dados interessante (Dione, junho de 2020).

O: Vejam, já melhoramos o modelo. Mas, nem todos tem acesso ao cadastro único do SUS. Nem todos nascem em hospitais. Nem todos os brasileiros foram registrados em cartórios após o seu nascimento e isso acontece anos somente mais tarde. Várias crianças não possuem cadastro de CPF. A Márcia deu uma sugestão interessante aqui:

> Acredito que dá pra relacionar os números anteriores e criar uma fórmula / meio de calcular os dados (Márcia, junho de 2020).
>
> Verdade. Podemos usar as taxas de variação anteriores, taxa de crescimento, de natalidade, de falecimentos (Dione, junho de 2020).

O: Todas essas sugestões são modelos. Para o Censo, a amostra chega a quase 100% e quanto maior o tamanho da amostra, melhor será a confiabilidade da pesquisa. No Censo, a amostra tem todos os domicílios visitados, diferente de outros modelos que podem estimar a população brasileira e mesmo assim, no momento seguinte de sua apresentação, a população já terá mudado.

Nesse contexto da pesquisa exploratória trazida pelos alunos, o orientador argumentou sobre a Modelagem:

O: Aprendam uma coisa: em Modelagem o professor nunca tem a resposta pronta, completa e definitiva. A resposta não é única. Se quisermos trabalhar a Modelagem, deveremos ser humildes, pois não sabemos muitas coisas. Em Modelagem, o professor deve ensinar e aprender

---

[33] SUS refere-se ao Sistema Único de Saúde brasileiro, criado em 1988 na Sessão da Assembleia Nacional Constituinte. Constitui-se num conjunto de ações e serviços de saúde prestados por órgãos e instituições públicas federais, estaduais e municipais da administração pública direta e indireta das fundações mantidas pelo poder público. É considerado um dos maiores e mais complexos sistemas de saúde pública do mundo e visa proporcionar o acesso universal à saúde, conforme a Constituição Federal de 1988: "A saúde é direito de todos e dever do Estado".

e não é o detentor do conhecimento. Ele detém o conhecimento quando vai ao quadro e diz: essa curva de “x ao quadrado” é voltada para cima por tal, tal e tal razão, mas, na Modelagem, ele dirá: será que tem a ver a curva ser para cima? Vamos descobrir juntos. Em Modelagem, nunca teremos uma resposta pronta. Como o Sebastião falou agora há pouco, não tem um único jeito de pensar, uma única maneira de solucionar os problemas e vai depender das premissas, do que o aluno pensou. Então a primeira lição que fica: Não existe um jeito único de pensar. Constatamos isso agora há pouco. Em Modelagem, valorizamos o processo, as ideias e o produto, também importante, virá como consequência do processo vindo das ideias. É isso que propomos para vocês neste trabalho de Modelagem com as Equações Diferenciais com o Sebastião, e que vai servir de base para sua Dissertação de Mestrado.

Nesse momento, destacamos a questão da construção do conhecimento nos processos de ensino e aprendizagem e dos modelos matemáticos, debatidos na palestra inicial e descritos na referência teórica da pesquisa:

P: Vocês foram autônomos na construção do conhecimento. Consultaram e trouxeram soluções diferentes. O processo de Modelagem possibilita essa construção do conhecimento. Riqueza de modelos, de formas, de métodos de etapas, tudo isso é possibilitado pelo processo de Modelagem. Mas, a pergunta é: Será que existe um modelo que pode prever a população brasileira? E quem falou que o modelo tem que ser uma fórmula? Não! Pode ser uma tabela, uma função de uma variável ou de duas variáveis. Pode ser um conjunto de condições: se isso, então aquilo. Ou o modelo pode ser teórico: não dá para ter um único modelo matemático. Lembram das funções de várias sentenças? E nem sempre são parecidos: uma condição, uma tabela. Várias possibilidades de modelos, da mesma maneira que existem várias possibilidades de solução.

Nesse contexto, propusemos que os participantes trouxessem alguns modelos matemáticos para o próximo encontro, que fossem capazes de estimar a população brasileira em 2020:

P: Para o próximo encontro, no dia de 09 de junho, solicitamos que vocês tragam uma pesquisa bibliográfica com as seguintes questões: Como estimar a população em 2020? Existem modelos? Quais os parâmetros e dados a utilizar? Tragam juntamente com as referências.

Lembrando que os modelos não são perfeitos, devem ser aperfeiçoados e são aproximações. Olhem que o Censo também é uma aproximação, pois diremos que a partir do momento em que é publicado, já no momento seguinte, pessoas já nasceram, morreram e mudaram-se do país.

Vale ressaltar que não foi possível contemplar a sugestão de desenvolver atividades de Modelagem Matemática com temas propostos pelos estudantes, como sugere Burak (2010), tendo em vista a necessidade de atrelamento das atividades aos conteúdos das EDO e ainda as dificuldades impostas pela pandemia, especialmente, a obrigatoriedade de implementação imediata do ensino remoto conforme decisão da direção institucional.

Enfim, gostaríamos que essa etapa da pesquisa, a definição do tema, tivesse acontecido de forma mais aberta e ampla, no que diz respeito à decisão em conjunto com os participantes. No entanto, ainda assim, acreditamos que o tema, apresentado por nós e trabalhado pelos estudantes nas Atividades de Modelagem, foi de grande interesse do grupo de estudantes e esteve em bastante evidência nas mídias brasileiras. Outrossim, o problema de análise populacional é sempre um tema relevante e traz, em seu contexto, dados matemáticos e nuances interessantes a serem analisadas na perspectiva sociocrítica, proposta em nossa pesquisa.

5.4. Descrevendo o 2º encontro (09 / 06 / 2020)

Iniciamos o 2º encontro, resgatando os debates do 2º momento do 1º encontro. Os alunos trouxeram as pesquisas solicitadas, indicando que pesquisaram vários sites, dentre eles, o do IBGE e encontraram, além da projeção para a população brasileira de 2020, algumas outras informações importantes sobre os números censitários.

Passaremos a detalhar as pesquisas realizadas pelos estudantes.

5.4.1. Detalhando as pesquisas realizadas pelos estudantes

Na semana anterior a esse encontro, os alunos Bruno e Luísa entraram em contato com o professor-pesquisador e solicitaram ajuda para utilizar modelos matemáticos envolvendo conhecimentos matemáticos aprendidos durante a graduação, com a finalidade de calcular a projeção populacional de 2020. Bruno, representando o grupo G1, propôs utilizar a extrapolação polinomial utilizando a interpolação de Lagrange estudada na disciplina Cálculo Numérico. Luísa, representante do grupo G2, propôs utilizar os conhecimentos da Álgebra Linear para interpretar um polinômio de 3º grau pesquisado na internet como modelo possível para o cálculo e estimativa da população brasileira. Dessa forma, um interessante diálogo foi estabelecido:

> Professor, nosso grupo sugere utilizar a extrapolação para estimar a população de 2020 utilizando como dados para a tabela, os números dos Censos anteriores fornecidos pelo IBGE. Nas aulas de Cálculo Numérico, o professor disse algo sobre isso. Você nos auxilia nos cálculos? Os números são muito grandes. Vimos lá no livro de Cálculo Numérico que ele pode nos fornecer um modelo matemático capaz de nos dar a projeção da população de 2020 (Bruno, junho de 2020).

P: Vamos descobrir juntos, então, e ver como será. Para os cálculos, podemos utilizar *softwares* matemáticos. Montem a tabela com os dados do Censo desde 1980 e, então, obteremos um polinômio do 3º grau.

> Ok. Vamos comunicar aqui pelo grupo do *WhatsApp* e trocando ideias então (Bruno, junho de 2020).
>
> Professor Sebastião, nosso grupo encontrou na internet um site que nos dá um polinômio para encontrar a população futura de 2020. Podemos usar? (Luísa, junho de 2020).

P: Ele fundamenta os parâmetros que usa na descrição do polinômio?

> Vimos lá que foi baseado em taxas de natalidade, de fecundidade e de mortalidade. Caso possamos utilizar, você nos auxilia nos cálculos? Os números são muito grandes! E não temos como fazer as contas com as calculadoras que temos (Luísa, junho de 2020).

P: Podemos utilizar *softwares* matemáticos para calcular as matrizes geradoras dos coeficientes do polinômio.

Vale ressaltar que a interação alunos e professor-pesquisador acontecida anteriormente e no momento da pesquisa são características da pesquisa qualitativa, como descrevem Bogdan e Biklen (1994), ao afirmarem que o pesquisador é considerado um instrumento da pesquisa.

Nessa perspectiva, os grupos G1 e G2, por meio dados censitários obtidos no site do IBGE a partir de 1980 até 2010, construíram a tabela a seguir, que serviu de base para sua apresentação no 2º encontro.

Tabela 1 – Números dos Censos Demográficos de 1980 a 2010.

Ano	1980	1991	2000	2010
Nº de Habitantes	119.002.706	146.825.475	169.799.170	190.732.694

Fonte: IBGE (2020).

Iniciando as apresentações do 2º encontro, os integrantes do grupo G1 procuraram informações sobre a extrapolação e compreenderam que, no meio matemático, extrapolação é o processo de construção de novos pontos que se encontram fora dos limites dos pontos conhecidos, similar ao processo de interpolação, que constrói novos pontos entre aqueles já conhecidos.

Adotaram, então, o método da extrapolação polinomial, que pode ser criado a partir dos dados fornecidos no intervalo e utilizaram a interpolação de Lagrange. Na pesquisa, utilizaram o livro de Cálculo Numérico de Barroso et al (1987, p. 164-169) para a obtenção do polinômio.

Segundo o material didático, o polinômio pode ser obtido a partir do modelo matemático a seguir. O material consultado contém a demonstração e justificativa para o modelo, mas não será demonstrado aqui, tendo em vista não ser essa a intenção para o presente trabalho.

Sendo: (x_i, y_i) na qual i = 0, 1, 2, ..., n, n + 1, ... pontos distintos, isto é: $x_i \neq x_j$ para: $i \neq j$ existe um único polinômio p (x) de grau não maior que n, tal que: $P(x_i) = y_{i,}$ para todo i.

Figura 12 – Equação matemática para obtenção da extrapolação

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} yi \ . \prod_{i \neq j \ e \ j=0}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_{i-} x_j} \right)$$

Fonte: Dados do autor (2020)

Passaram, então, aos cálculos para obtenção do polinômio que poderá fornecer a estimativa populacional de 2020, conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Dados para obtenção do polinômio

i	x_i	y_i
0	1.980	119.002.706
1	1.991	146.825.475
2	2.000	169.799.170
3	2.010	190.732.694

Fonte: Dados do autor (2020).

O grupo G1 formulou a transcrição dos dados para o polinômio interpolador, obtendo:

Quadro 5 – Transcrição dos dados do polinômio interpolador

$$P_3\ (x) = y_0 \cdot \left[\frac{(x - x_1)\ .\ (x - x_2)\ .(x - x_3)}{(x_0 - x_1).(x_0 - x_2)\ .(x_0 - x_3)}\right]$$
$$+ y_1 \cdot \left[\frac{(x - x_0)\ .\ (x - x_2)\ .(x - x_3)}{(x_1 - x_0).(x_1 - x_2)\ .(x_1 - x_3)}\right]$$
$$+ y_2 \cdot \left[\frac{(x - x_0)\ .\ (x - x_1)\ .(x - x_3)}{(x_2 - x_0).(x_2 - x_1)\ .(x_2 - x_3)}\right]$$
$$+ y_3 \cdot \left[\frac{(x - x_0)\ .\ (x - x_1)\ .(x - x_2)}{(x_3 - x_0).(x_3 - x_1)\ .(x_3 - x_2)}\right]$$

Fonte: Dados do autor (2020)

O que equivale a:

Quadro 6 – Transcrição dos dados da tabela para a equação matemática

$$P_{(3)x} = 119.002.706..\left[\frac{(x- 1.991)\ .\ (x- 2.000)\ .(x- 2.010)}{(1.980-1.991).(1.980- 2.000)\ .(1.980 - 2.010)}\right] +$$

$$+ 146.825.475\,.\left[\frac{(x-1.980)\,.\,(x-2.000)\,.(x-2.010)}{(1.991-1.980).(1.991-2.000)\,.(1.991-2.010)}\right]+$$

$$+ 169.799.170\,.\left[\frac{(x-1.980)\,.\,(x-1.991)\,.(x-2.010)}{(2.000-1.980).(2.000-1.991)\,.(2.000-2.010)}\right]+$$

$$+ 190.732.694\,.\left[\frac{(x-1.980)\,.\,(x-1.991)\,.(x-2.000)}{(2.010-1.980).(2.010-1.991)\,.(2.010-2.000)}\right]$$

Fonte: Dados do autor (2020)

Para facilitar, tendo em vista os números expressivos, utilizaram o *software* matemático MatLab que efetuou os cálculos e forneceu o resultado. O valor provável para a população brasileira em 2020, obtido por meio do polinômio e utilizando a extrapolação deverá ser: 206.215.865.

Abaixo, deixamos as telas com os cálculos fornecidos pelos softwares matemáticos, trazidos pelos alunos.

Figura 13 – Cálculos fornecidos pelo *software* matemático Matlab.

```
clc, clear all
%% Cálculo de estimativa  da população de 2020
ano = [1980 1991 2000 2010];
populacao = [119002706 146825475 169799170 190732694];

extrap_2020 = interp1(ano, populacao, 2020, 'pchip', 'extrap');
sprintf('A estimativa para o ano de 2020 é de %9.0f', extrap_2020)
```

```
Command Window

ans =

    'A estimativa para o ano de 2020 é de 206215865'
```

Fonte: Dados do autor (2020).

Os integrantes do grupo G2 trouxeram a indicação de 2 sites contendo métodos para investigar o crescimento populacional utilizando métodos aritméticos e geométricos, capazes de estimar a população de 2020. São eles:

1) http://www.etg.ufmg.br/wp-content/uploads/2018/09/tim1-2018-2-estudos-populacionais-texto-apoio.pdf
2) https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/notatecnica.html

Dentre eles, optaram por utilizar o site do IBGE (2º link) que forneceu como perspectiva para a estimativa de 2020 um polinômio de 3º grau, conforme figura a seguir, cujos os parâmetros adotados para se chegar ao modelo matemático foram taxas de natalidade, mortalidade e migração internacional, segundo pesquisa feita pelos integrantes do grupo G2 que ressaltaram, na sua investigação, que os parâmetros foram desenvolvidos levando em conta características do ano de 2013 e que serão usados pelo instituto até o ano de 2020.

Figura 14 – Polinômio para cálculo de projeções populacionais

A expressão analítica da função ajustante é a seguinte:

$$Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

Onde,
Y = População;
X = Ano;
a, b, c, d = parâmetros da função polinomial estimados pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Fonte: Dados do autor (2020).

Com auxílio da Tabela 1, eles construíram um sistema linear, que foi solucionado pelos *softwares* matemáticos Numerico e MatLab, retornando com a solução para o valor corresponde ao ano de 2020: P (2020) = 201.933.170.

Figura 15 – Cálculos efetuados pelo software matemático Numérico

FONTE: Dados do autor (2020).

Figura 14 – Cálculos efetuados pelo software matemático Matlab

```
A = [1980^3 1980^2 1980 1;
     1991^3 1991^2 1991 1;
     2000^3 2000^2 2000 1;
     2010^3 2010^2 2010 1];

B= [119002706;
    146825475;
    169799170;
    190732694];

C = A^(-1)*B

P3 = C(1)*2020^3 + C(2)*2020^2 + C(3)*2020 + C(4)
```

1
-844.5720
5.0441e+06
-1.0039e+10
6.6586e+12

```
P3 =

   2.0193e+08
```

FONTE: Dados do autor (2020).

Ressaltamos que os integrantes dos grupos G1 e G2 não trouxeram discussões teóricas sobre os modelos matemáticos.

Já o grupo G3 não apresentou um modelo matemático com cálculos para a estimativa da população em 2020. No entanto, trouxeram uma pesquisa teórico-bibliográfica realizada no site do IBGE que continha uma projeção numérica para a população brasileira em 2020.

Segundo a pesquisa do grupo G-3, para se chegar ao número estimado a seguir, o IBGE identifica e separa a população por sexo, idade e faixa etária. A partir daí, efetua o cálculo utilizando como parâmetros as taxas de variação descritas a seguir:

- ✓ Taxa de fecundidade: o Instituto considera o grupo de mulheres entre 15 e 49 anos e é obtida pela divisão do número de filhos nascidos vivos e os não vivos das mulheres desta faixa etária, obtidos a partir do PNAD[34] anualmente;
- ✓ Taxa de mortalidade: Representa a frequência que ocorrem os óbitos em uma determinada população de uma região do país em um determinado ano;
- ✓ Taxa migratória: Representa a diferença entre o número de emigração e imigração em uma determinada região do país em um determinado ano.

Abaixo, a estimativa da população brasileira para o dia 10 de junho de 2020, obtida pelo grupo G3, a partir do site do IBGE:

Figura 15 – Projeção da população brasileira para o dia 10 / 06 / 2020

FONTE: https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/.

Além da estimativa acima, destacaram questões importantes inerentes ao Censo que deverá ocorrer em 2021, em virtude da pandemia do novo Corona Vírus de 2020. Descreveram-no como sendo o principal instrumento de coleta de dados populacional realizado no Brasil, há pelo menos 150 anos. Tem importância não apenas por apresentar os dados numéricos da população brasileira, mas constitui-se como uma fonte de referência para conhecer e compreender aspectos sociais e políticos do Brasil.

Sob esse aspecto, destacaram que um modelo matemático puro não identificará essas nuances e, por vezes, pode-se estimar com erro a população, tendo em vista que pode desconsiderar outras condições que não são contempladas pelas taxas de natalidade, de mortalidade e de fecundidade. Como pontos mais importantes a respeito do Censo populacional, destacaram as informações trazidas pelo site www.censo2020.ibge.gov.br

[34] PNAD: Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios, de periodicidade anual é feita pelo IBGE em uma amostra de domicílios brasileiros e tem por propósitos investigar características socioeconômicas da sociedade tais como: população, educação, trabalho, rendimento, condições de saúde, habitação, previdência social, fecundidade, nupcialidade, taxas de desemprego, dentre outros.

- ✓ A pesquisa tem periodicidade decenal, exceto para os anos de 1910 e 1930 – suspensos e para 1990 adiado para 1991;
- ✓ Sua abrangência geográfica é nacional e na próxima investigação visitará todos os 5.570 municípios brasileiros, com os resultados também divulgados para as 27 Unidades de Federação, Regiões, Regiões Metropolitanas, Microrregiões e Municípios;
- ✓ Previsão de seu questionário básico (com 26 questões) ser aplicado a aproximadamente 71 milhões de domicílios brasileiros nessa próxima pesquisa e o seu questionário amostral (com 76 questões) ser aplicado para 10% dos domicílios (7,1 milhões), abarcando questões que contemplem questões temáticas como: características dos domicílios, identificação racial, nupcialidade, núcleo familiar, fecundidade, religião ou culto, pessoas com deficiência, migração interna e ou internacional, nível escolar, deslocamento para estudo e trabalho, rendimento familiar, dentre outros;
- ✓ Estimativa de que mais de 240 mil pessoas participarão das etapas de preparação, coleta e análise dos dados obtidos a partir dos questionários.

Por meio do site www.infoescola.com/geografia-demografico/amp/ obtiveram informações acerca dos objetivos da pesquisa censitária, destacando:

- ✓ Ter por objetivo um retrato detalhado sob vários aspectos da população brasileira, dentre eles: a saúde, educação, moradias, trabalho e condições de vida. Além disso avalia as mudanças ocorridas nos últimos 10 anos, permitindo comparar os dados e compreender a evolução desses indicadores sociais.

Segundo o grupo G3, o site enfatiza que essa fonte de dados obtida pela pesquisa censitária, pode ser essencial para:

- ✓ Subsidiar as políticas públicas, orientar o planejamento da gestão e orçamentos governamentais a aplicarem os recursos obtidos por meio dos impostos nas áreas prioritárias;
- ✓ Referenciar tomadas de decisões de investimento de capitais dos setores público e privado, tendo em vista que os dados possuem informações sobre o mercado consumidor, poder de compra e até a localização desse público.
- ✓ Fornecer informações indispensáveis para estudos e pesquisas científicas de diversas áreas como Econômicas, Educacionais, Saúde, Sociais, Segurança pública, dentre outras.

Ainda segundo o grupo G3, o site trouxe informações que, assim como em 2010, o próximo Censo deverá acontecer por meio eletrônico, contanto inclusive com o sistema de

GPS[35] que possibilitará uma maior precisão e facilidade de acompanhamento, descrição e análise dos dados da pesquisa populacional.

Por fim, destacaram que os indicativos para as transformações sociais passam pela realização das pesquisas censitárias e que modelos matemáticos não seriam capazes de substituí-los, tendo em vista todas as suas complexidades. Por meio de informações obtidas do site www.ibge.gov.br o grupo descreveu uma síntese de indicadores sociais, condições de vida, desigualdades e pobreza que o Censo poderá trazer em 2021:

- ✓ Condições de vida, desigualdade e pobreza: compreendem as informações sobre as condições de vida da população em seu sentido mais amplo, que abrangem medidas de desigualdade, inclusão ou exclusão social.
- ✓ Síntese de Indicadores Sociais – SIS: São obtidos a partir da análise de dados que descrevem a qualidade de vida e os níveis de bem-estar das pessoas, famílias e grupos populacionais, bem como a efetivação de direitos humanos e sociais e o acesso a diferentes serviços, bens e oportunidades. Esses indicadores são obtidos por meio dos questionários e visam identificar a heterogeneidade da sociedade brasileira sob a perspectiva das desigualdades sociais;
- ✓ Indicadores Sociais Mínimos – ISM: Aprovado pela comissão de estatística das Nações Unidas em 29 de fevereiro de 1997, constituem-se num conjunto de indicadores sociais para compor a base de dados nacionais e tem como objetivo permitir o acompanhamento estatístico dos programas nacionais de cunho social, recomendados pelas diversas conferências internacionais promovidas pelas Nações Unidas. Dentre elas destacam-se: Conferência sobre população e desenvolvimento (Cairo, 1994), sobre desenvolvimento social (Copenhagen, 1995), sobre a mulher (Beijing, 1995) e sobre assentamentos humanos (Cairo, 1996). Esse conjunto de indicadores sociais compreende a distribuição da população por sexo, idade, cor ou raça e ainda fatores sobre o desenvolvimento da população sob os aspectos de pobreza, emprego, desemprego, educação, saúde e condições de vida. Esta é uma recomendação estatística dada pelos organismos internacionais e apresentada pelo IBGE. Estes são dados obtidos a partir da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios – PNAD, por ocasião da administração da pesquisa censitária, onde ocorre a contagem da população.
- ✓ Pesquisa de Orçamentos Familiares – POF: São análises a partir do questionário do Censo Demográfico que avaliam as estruturas de consumo, de gastos, de rendimentos e parte da variação patrimonial das famílias brasileiras, oferecendo um perfil das condições de vida da população a partir da análise das informações obtidas.

[35] GPS é o sistema de posicionamento global de navegação, por meio de satélite, que fornece a um aparelho receptor móvel a posição e o horário sob quaisquer condições atmosféricas a posição pesquisada.

Assim, embora o grupo não tenha trazido um modelo matemático capaz de projetar o número da população para 2020, trouxe contribuições importantes para a nossa pesquisa, que entendemos estar em consonância com os seus objetivos. Esses aspectos trazidos pelo grupo G3, possuem números matemáticos implícitos indicando a possibilidade da Matemática ser uma “ciência humana e social”, conforme sugestiona Burak (2010) e, em nossa compreensão, está em consonância com as etapas da Modelagem em sua perspectiva, correspondendo ao levantamento de dados para o problema.

Entendemos ainda que os levantamentos realizados pelo grupo G3 lançam luz à questão proposta por Skovsmose (2006, p. 19): “De que maneira a aprendizagem da Matemática pode contribuir para o desenvolvimento da cidadania”?

Passaremos, a seguir, para a descrição da Atividade de Modelagem 1, envolvendo o Modelo de Malthus.

5.4.2. Detalhando a Atividade de Modelagem 1

Após as discussões e debates que envolveram a realização da pesquisa exploratória sobre a contagem populacional brasileira, iniciamos o desenvolvimento da primeira Atividade de Modelagem. Esta é a etapa que Burak (2010) destaca como sendo a resolução do problema e desenvolvimento do conteúdo matemático.

A Atividade de Modelagem 1 trouxe o Problema do Crescimento Exponencial, explorando: Problema de Variação Populacional – Lei de Malthus – Problema de valor de Contorno – PVC e Problema de Valor Inicial – PVI, enunciado como segue destacado na cor azul, para diferenciar o que propusemos aos estudantes das soluções apresentadas.

DADOS:

(i) Uma população se desenvolve proporcionalmente à população atual, segundo a lei de Malthus;
(ii) Sabemos que a população inicial é de 5000 habitantes e, 10 anos depois, é 8000.

QUESTÕES:

(iii) Determine a população em qualquer tempo;
(iv) Determine os modelos de equações da população;
(v) Analise a variação da população;

(vi) Esboce os gráficos do modelo;
(vii) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações.

Após a interpretação do enunciado, apresentamos diversos passos didáticos, descritos a seguir.

Passo 1:

1.1). Identifique as variáveis para a solução do problema.

1.2) A variação da população, segundo a Lei de Malthus pode ser expressa matematicamente pela equação (1): $\frac{dP}{dt} = k.P, com\ k > 0$.

Passo 2:

Descreva as condições inicial e de contorno dadas no problema

Passo 3:

Determine a população em qualquer tempo, encontrando outra equação (2), exponencial, a partir da equação (1).

Passo 4:

Por meio dos modelos das equações da população encontradas, determine:

a) Velocidade da variação da população em função do tempo pela equação (1);
b) Velocidade de crescimento da população em função do tempo pela equação (2);
c) Variação da população em função do tempo.

Passo 5:

Analise o crescimento da população por meio do modelo matemático proposto.

Passo 6:

Esboce os gráficos do desenvolvimento da população.

Passo 7:

7.1). Como suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado, responda:

a) Por que o gráfico da equação (1) é uma reta?
b) Por que o gráfico da equação (1) é crescente?
c) Por que o gráfico da equação (1) é positivo?

d) Do desenvolvendo da equação (1) surge uma outra equação (2), exponencial. Analise o gráfico dessa equação quanto à natureza da derivada;
e) Verifique que a equação do gráfico da equação (2) é crescente exponencialmente. Por quê?
f) Verifique que para um tempo crescente, a população será sempre crescente e não há limite. Por quê?

7.2) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto comparando os gráficos e as equações.

Passo 8:
Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Malthus.

O grupo G1 solucionou assim Passo 1: identificou as variáveis P como população a qualquer tempo e que poderia ser escrita da forma P (t), enquanto t representa o tempo e k é a taxa de crescimento populacional. Não as identificou como variáveis independentes ou dependente. Resolveu o Passo 2 assim: Se t = 0, então: $P_0 = 5.000$ e se t = 10 então $P_{10} = 8.000$.

Enquanto isso, os grupos G2 e G3 identificaram P como variável dependente, t como variável independente e k como uma constante real, de forma mais completa que G1. Para o Passo 2, fizeram as mesmas descrições.

Na solução do Passo 3, o grupo G1 digitou a solução e encontrou a equação exponencial: $P = 5.000e^{0,047t}$ utilizando os conhecimentos trazidos das aulas de EDO:

Quadro 7 – Solução do Passo 3 de G1

I) $Se\ \frac{dP}{dt} = k.P, então\ podemos\ escrever\ assim$: $\frac{dP}{P} = k.dt$ e podemos aplicar integrais: $\int \frac{dP}{P} = \int k.d\,t \Rightarrow \ln\|P\| = kt + C_1$. Mas, como P representa a população, P será positivo e assim $\|P\| = P$ e então: $P = e^{kt+C_1} = e^{kt}.e^{C_1} = e^{kt}.C$. Lembrando que C é uma constante real.
II) aplicaremos as condições iniciais do problema para encontrarmos o valor de C e k: $\begin{cases} Se\ t = 0 \rightarrow P = 5.000 \\ Se\ t = 10 \rightarrow P = 8.000 \end{cases}$ Então, como $P = C.e^{kt}$ vamos substituir: $5.000 = C.e^{k.0} \Rightarrow 5.000 = C.e^0 = C.1 = C \Rightarrow C = 5.000$

Como C = 5.000 então $P = 5.000\ e^{kt}$
Logo, podemos encontrar o valor de k, utilizando o tempo após 10 anos: $P = 5.000e^{kt}$ $\Rightarrow$ 8.000 = $5.000e^{k.10}$, e então: $e^{10k} = \frac{8.000}{5.000} = \frac{8}{5}$. Aplicamos logaritmos à equação exponencial e daí vem: $\ln(e)^{10k} = \ln\left(\frac{8}{5}\right) = \ln(8) - \ln(5)$ e daí temos: $10k.\ln(e) = 2{,}08 - 1{,}61 = 0{,}47$ $\Rightarrow$ 10k = 0,47 e por fim: $k = 0{,}047$
Assim podemos a escrever a equação exponencial: $P = 5.000e^{0{,}047t}$ Como um modelo matemático que determinará a população a qualquer tempo dentro dos parâmetros dados pelo problema apresentado.

FONTE: Dados do autor (2020).

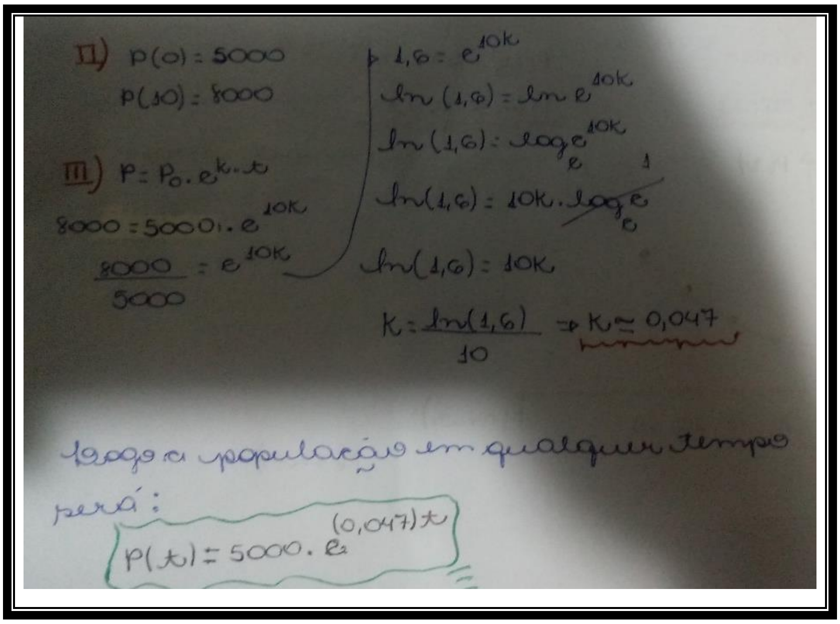
Os outros dois grupos também encontraram a mesma equação: $P = 5.000e^{0{,}047t}$ encontrada pelo G1, suprimindo algumas etapas. Abaixo trazemos a solução apresentada do passo 3 pelo G2 e sua transcrição, conforme Quadro 8 e fFigura 16.

Quadro 8 – Transcrição da solução do passo 3 feita pelo G2

$II)\ P(0) = 5.000\ \ P(10) = 8.000$ $III)\ P = P_0.e^{k.t}$ $8.000 = 5.000.e^{10k}$ $\frac{8.000}{5.000} = e^{10k}$ $1{,}6 = e^{10k}$ $\ln(1{,}6) = \ln(e^{10k})$ $\ln(1{,}6) = 10k.\ln(e)$ $\ln(1{,}6) = 10k.\log_e e$ $\ln(1{,}6) = 10k$ $k = \frac{\ln(1{,}6)}{10}\quad e\ k \approx 0{,}047$ Logo a população em qualquer tempo será: $P(t) = 5.000.e^{(0{,}047t)}$

Fonte: Dados do autor (2020

Figura 16 – Solução do Passo 3 de G2



FONTE: Dados do autor (2020).

Os 3 grupos interpretaram o Passo 4 de forma similar, encontrando a velocidade da variação da população em função do tempo dada pela equação (1), da seguinte forma $\frac{dP}{dt} = k.P \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0{,}047P$

No entanto, nenhum dos grupos entendeu o passo seguinte para derivar a equação: $P = 5.000e^{0{,}047t}$ resultando em $\frac{dP}{dt} = 235e^{0{,}047t}$ e, assim, não atenderam ao Passo 4.b. No Passo 4.c, todos os grupos deixaram como solução a equação: $P = 5.000e^{0{,}047t}$.

Um integrante do grupo G1 interagiu com o professor-pesquisador com a seguinte argumentação:

> Professor Sebastião, esta variação encontrada aqui não será totalmente exata, pois no cálculo da sua equação tem o arredondamento quando vamos calcular os logaritmos Neperianos, mesmo considerando três casas após a vírgula (Bruno, junho de 2020).

No Passo 5, que solicitava analisar o crescimento da população por meio do modelo matemático proposto, os grupos deixaram as seguintes observações de forma sucinta:

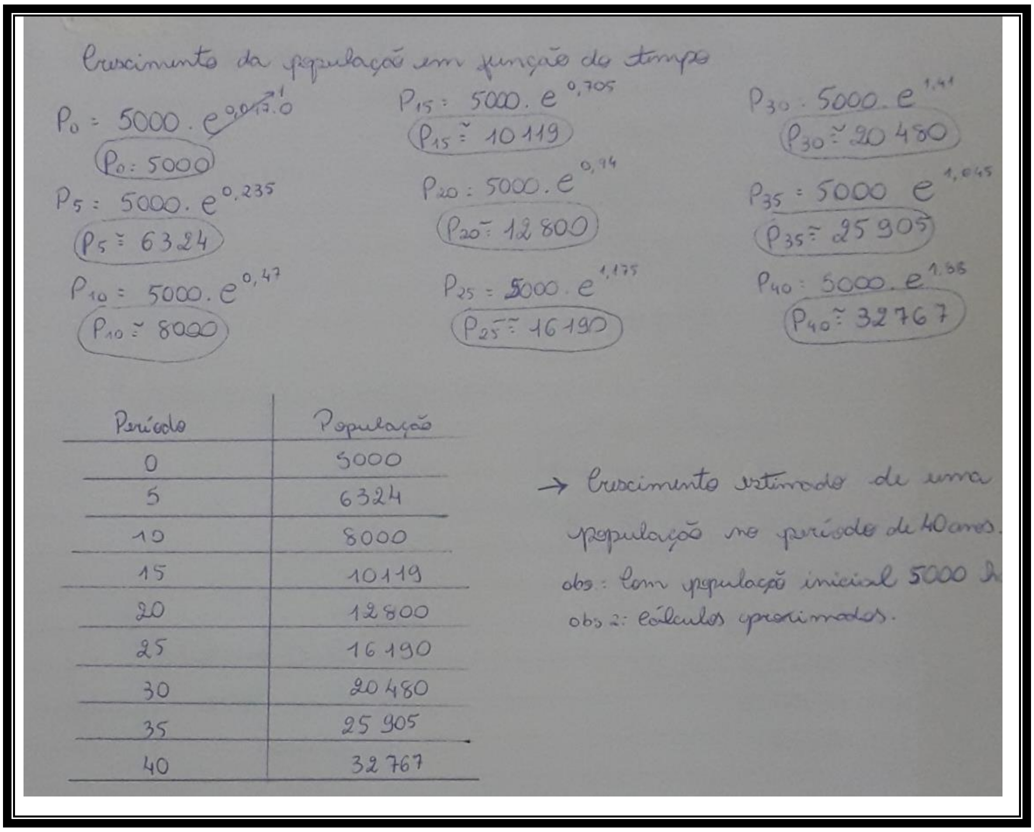
O crescimento da equação 1 definida por: $\frac{dP}{dt} = 0{,}047.P$ é linear enquanto o crescimento da equação 2 definida por: $P = 5.000\ e^{0{,}047t}$ será exponencial (G1).

O crescimento da população por esse modelo matemático será exponencial (G2).

Com base na equação: $P(t) = 5000.e^{0{,}047t}$ podemos observar um crescimento exponencial, em que a população aumenta sem limites, tendendo ao infinito (G3).

O grupo G2 ainda apresentou uma tabela para justificar suas observações feitas no Passo 5, conforme Figura 17.

Figura 17 – Solução do Passo 5 de G2



Crescimento da população em função do tempo

$P_0 = 5000 . e^{\cancel{0{,}047.0}}$ 1
$P_0 = 5000$
$P_5 = 5000 . e^{0{,}235}$
$P_5 \cong 6324$
$P_{10} = 5000 . e^{0{,}47}$
$P_{10} \cong 8000$
$P_{15} = 5000 . e^{0{,}705}$
$P_{15} \cong 10119$
$P_{20} = 5000 . e^{0{,}94}$
$P_{20} \cong 12800$
$P_{25} = 5000 . e^{1{,}175}$
$P_{25} \cong 16190$
$P_{30} = 5000 . e^{1{,}41}$
$P_{30} \cong 20480$
$P_{35} = 5000 . e^{1{,}645}$
$P_{35} \cong 25905$
$P_{40} = 5000 . e^{1{,}88}$
$P_{40} \cong 32767$

Período	População
0	5000
5	6324
10	8000
15	10119
20	12800
25	16190
30	20480
35	25905
40	32767

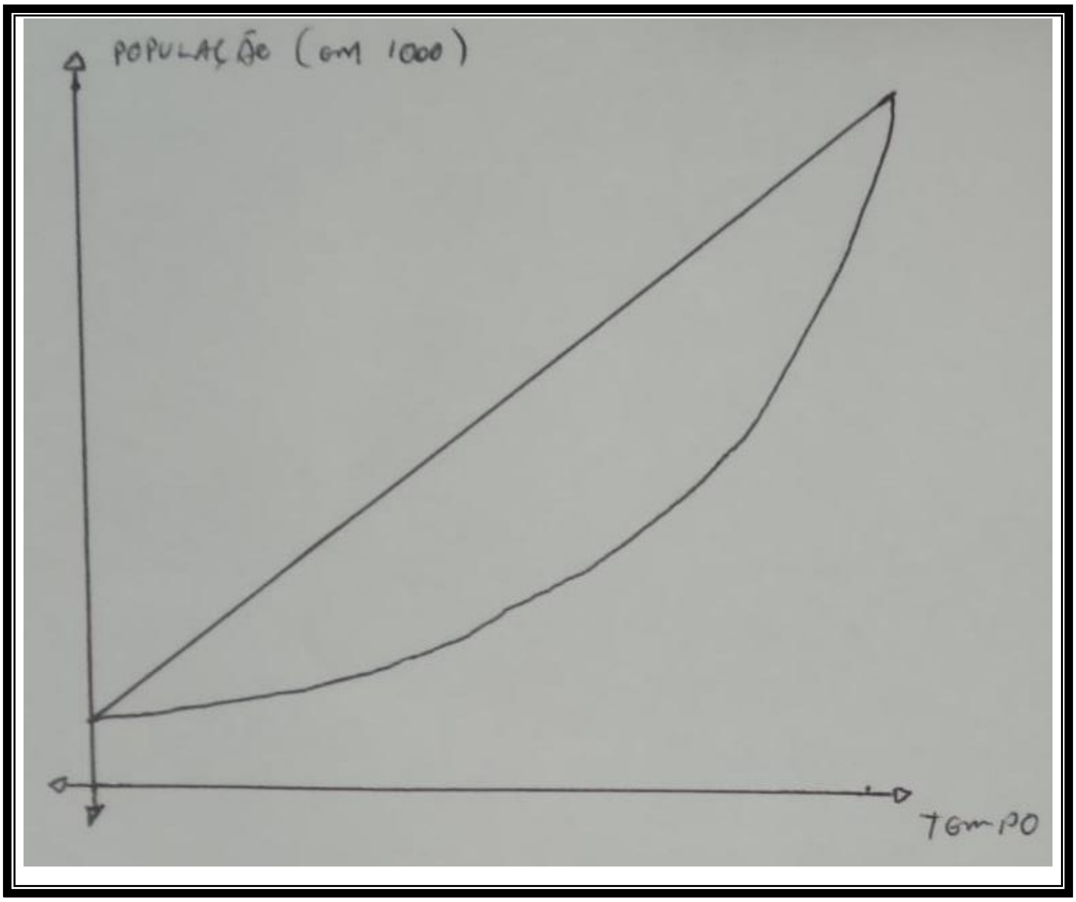
→ Crescimento estimado de uma população no período de 40 anos.
obs.: Com população inicial 5000 h
obs 2: Cálculos aproximados.

Fonte: Dados do autor (2020).

O Passo 6 solicitou o esboço dos gráficos do desenvolvimento da população a partir das equações $P(t) = 5.000\ e^{0{,}047t}$, $\frac{dP}{dt} = 0{,}047P$ e $\frac{dP}{dt} = 235\ e^{0{,}047t}$

No entanto, os grupos não compreenderam o Passo 4.b, impossibilitando trazer o seu gráfico. O grupo G1 elaborou um gráfico único e os outros grupos elaboram 2 gráficos, trazidos a seguir nas figurasFigura 18,Figura 19 eFigura 20.

Figura 18 – Solução do Passo 6 de G1

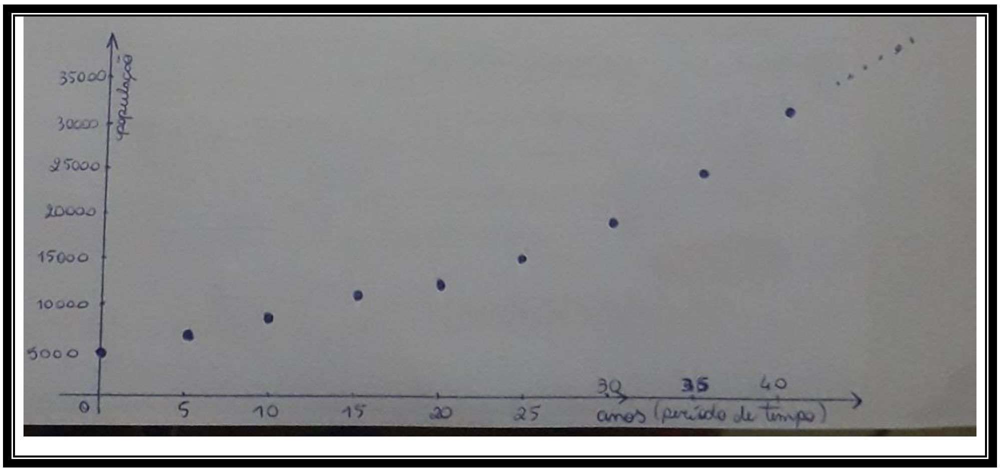


FONTE: Dados do autor (2020).

Ressaltamos que no traçado da Figura 18, G1 não observou que as equações $P(t) = 5.000.e^{0,047t}$ e $\frac{dP}{dt} = 0,047P$ possuem variáveis distintas e por isso não deveriam elaborar o seu traçado em um único plano IR^2. E, enquanto isso, G2 traçou o gráfico da função $P(t) = 5.000.e^{0,047t}$ de forma pontilhada não atentando para o domínio do variável tempo (t) ser real, ou seja: $t \in IR$ conforme Figura 19.

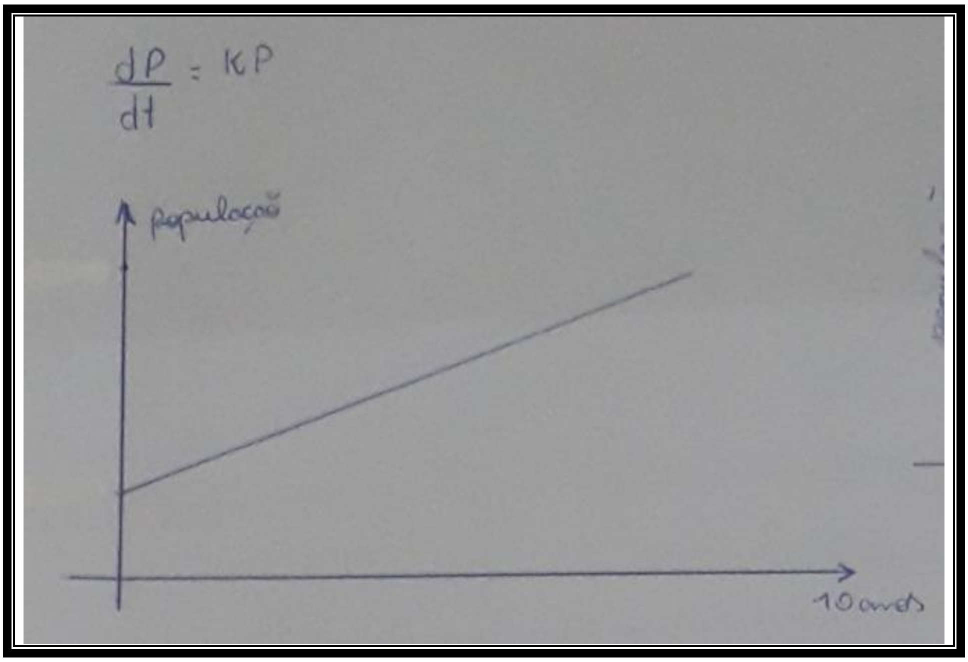
Professor, observamos aqui que ambas as equações têm os seus coeficientes positivos, indica então que a população sempre será crescente e cresce infinitamente. Outra observação: a equação 2 será mais precisa tendo em vista tratar-se de uma equação exponencial e, assim, serão iguais somente nos pontos de interseção entre seus gráficos. A partir daí o gráfico da equação exponencial mostra que o crescimento da população será mais ponderado do que no caso da representação linear. Isso está mais de acordo com a realidade que acontece de fato. É isso mesmo? Fizemos os gráficos em um único plano e assim ficou mais fácil para analisar (Joanes, junho de 2020).

Figura 19 – Solução do Passo 6 de G2



FONTE: Dados do autor (2020).

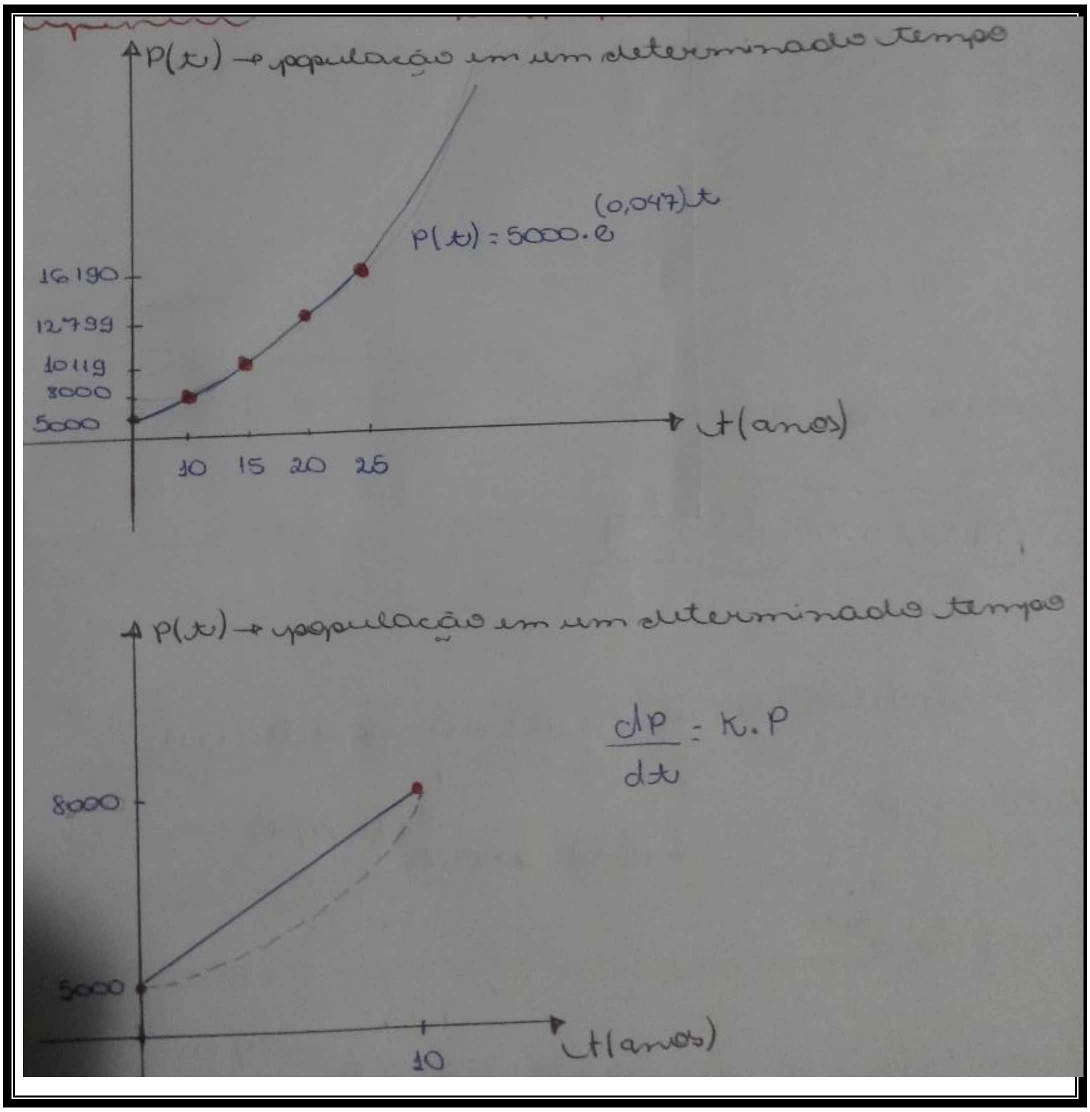
Figura 20 – Continuação da Solução do Passo 6 de G2



FONTE: Dados do autor (2020).

A seguir, os traçados dos gráficos do grupo G3, conforme Figura 21.

Figura 21 – Solução do Passo 6 de G3



FONTE: Dados do autor (2020).

O Passo 7 solicitou que os grupos trouxessem um texto com o entendimento do comportamento do fenômeno a partir de seus gráficos. Descrevemos abaixo a síntese de cada grupo.

O grupo G1, por meio de um de seus integrantes, interagiu com o professor e argumentou da seguinte forma:

Além da argumentação oral descrita acima, o grupo G1 ainda trouxe a seguinte escrita sucinta:

> Quanto maior for o tempo t, mais a população tenderá ao infinito. Não existe no modelo matemático um parâmetro limitador da população e ele não considera eventos que atrapalham o crescimento da população (G1).

Por sua vez, o grupo G2 trouxe uma escrita bem mais detalhada, como descrito a seguir:

> O gráfico da equação 1 definida por: $\frac{dP}{dt} = 0{,}047P$ é linear, tendo em vista tratar-se de uma função do primeiro grau com o coeficiente k positivo representando o crescimento populacional. No entanto, a equação 2 representada por uma função exponencial dada por: $P(t) = 5.000\, e^{0{,}047t}$ não cresce de forma linear. Entretanto, se aplicarmos o limite com: $t \to \infty$ nestas funções, ambas tenderiam a infinito, crescendo indefinidamente, como verificamos nos gráficos (G2).

Já o grupo G3 chegou às mesmas conclusões dos outros dois grupos sobre o crescimento ilimitado para ambas as equações.

Vale ressaltar que nenhum grupo analisou o gráfico da equação quanto à natureza da velocidade de crescimento da população em função do tempo. Para isso, seria preciso derivar a equação (2): $P(t) = 5.000\, e^{0{,}047t}$ e chegariam a: $\frac{dP}{dt} = 235\, e^{0{,}047t}$.

No Passo 8, solicitamos uma análise crítica do modelo populacional proposto por Malthus por meio das equações 1 e 2. Todos os grupos destacaram que o modelo não é eficaz para o cálculo de uma população com um número maior de habitantes e com um período de t anos mais prolongado, pois não leva em consideração as várias situações que podem ocorrer. Dentre elas, enfatizaram as taxas de natalidade, de mortalidade e de fecundidade que podem variar em função de situações econômicas, sociais e momentâneas, como a própria situação da pandemia vivenciada, que influenciam diretamente na tomada de decisões das famílias quanto ao número de filhos, o que não é levado em conta no modelo matemático de Malthus. Devido a tais observações, os grupos destacaram que não deveriam usar o modelo para calcular a população de 2020 com base nos Censos do IBGE de anos anteriores.

Destacamos abaixo as observações do grupo G2 sobre o modelo matemático apresentado pela Lei de Malthus:

> Esse modelo leva ao crescimento exponencial que é válido para populações pequenas e sem limitantes para o crescimento. Sendo assim, não haverá limite quando t tender a um tempo maior e será assim sempre crescente. Devido ao modelo considerar um crescimento constante e ilimitado, sem levar em conta as demais taxas, como de mortalidade, longevidade, ocorrências eventuais

> como a pandemia atual, entre outros. Com essas observações feitas, pode-se concluir que há problemas na utilização do modelo de Malthus para uma grande população em longo período de tempo, porque nesta lei, o crescimento não tem interferências que modificam o seu resultado. Sendo assim, o modelo é mais eficaz se for aplicado em um intervalo de tempo mais curto e numa população menor que não haja limitantes naturais (G2).

Finalizando o 2º encontro, lembramos que, no próximo encontro, trabalharíamos com a 2ª Atividade de Modelagem.

5.5. Descrevendo o 3º encontro (16 / 06 / 2020)

O 3º encontro foi todo utilizado para trabalharmos a Atividade de Modelagem 2, que trouxe o Problema da Análise do Modelo de Demanda e Crescimento Exponencial, explorando: Lei de Malthus – Lei de Verhulst e Problema de Valor Inicial – PVI, enunciado como segue destacado na cor azul, para diferenciar o que propusemos aos estudantes das soluções apresentadas.

DADOS:

(i) Leis de Demanda e Crescimento Populacional

Lei de Malthus: A Lei de Malthus é que a taxa instantânea de variação de uma população P é proporcional à população presente no instante t considerado, isto é, $\frac{dP}{dt} = kP$, cuja solução é da forma: $P = C.e^{kt}\ com\ k\ > 0$ conforme visto no Problema 1.

Lei de Verhulst: Observando a Lei de Malthus e sua equação modelo, que admite um crescimento ilimitado (exponencial) para a população e, ainda, manipulando dados estatísticos da época, Verhulst percebeu que uma população, na vida real, não cresce de forma ilimitada. Ele constatou que, em situações normais, as regiões habitáveis (cidades, estados e países) tendem a sofrer o efeito da concentração populacional e, então, ele assumiu que “a taxa relativa de crescimento de uma população decresce linearmente, considerando a evolução da população no tempo”. Isso correspondeu a assumir k, na equação de Malthus, como uma função linear decrescente. Significa considerar k como um fator de redução do crescimento ilimitado da população, provocado, na vida real, pela escassez e disputa por recursos naturais. Portanto, o modelo logístico para a Lei de Verhulst é: $\frac{dP}{dt} = (a - bP)P \; com \; a \in IR \; e \; b \in IR, a > 0 \; e \; b > 0$

(ii). Num instante inicial t = 0, a população é dada por $P = P_0$.

QUESTÕES:

(iii). Determine a função P = P(t), solução analítica da Equação Diferencial de Verhulst;

(iv). Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst;

(v). Esboce os gráficos do modelo de Verhulst;

(vi). Descreva num pequeno texto os modelos de Malthus e Verhulst comparando os gráficos e as equações.

Após a interpretação do enunciado, apresentamos diversos passos didáticos, descritos a seguir.

Passo 1:

1.1) identifique as variáveis para a solução do problema;

1.2) expresse matematicamente a Lei de Malthus;

1.3) expresse matematicamente a Lei de Verhulst.

Passo 2:

Descreva a condição inicial dada no problema.

Passo 3:

Determine o modelo de Verhulst, que é uma Equação Diferencial de 1ª ordem do tipo separação de variáveis.

Passo 4:

Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst.

Passo 5:

Esboce o gráfico do modelo de Verhulst.

Passo 6:

A partir do seu entendimento do comportamento da demanda e crescimento populacional, escreva um texto comparando os gráficos e as duas Leis: de Malthus e de Verhulst.

Passo 7:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Verhulst.

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir de leis matemáticas e outros instrumentos estatísticos utilizados no Brasil.

Passaremos às descrições das soluções e observações dos Passos 1 e 2 feitas pelo grupo G2. Abaixo, descrição e figura da resolução.

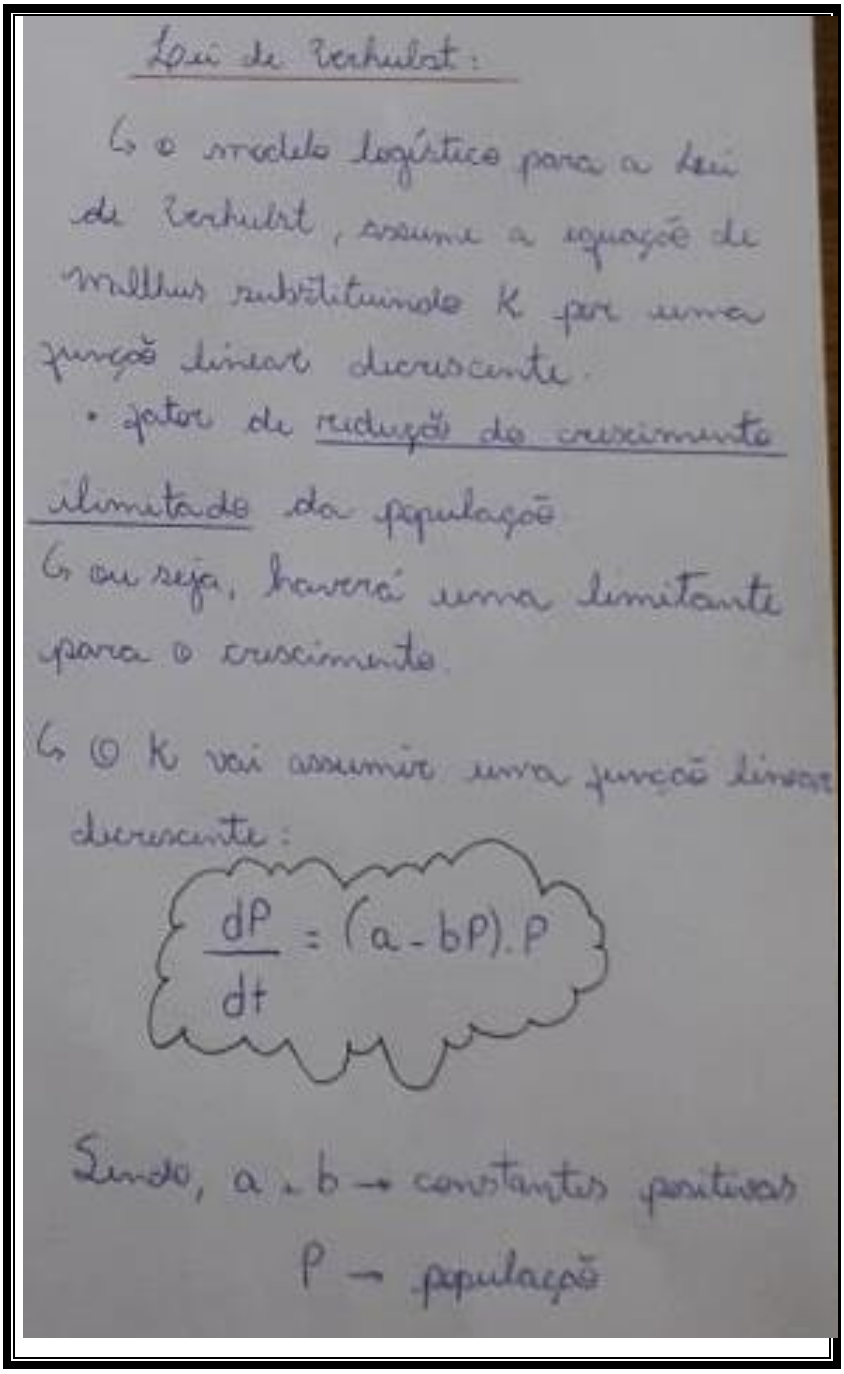
O modelo logístico para a lei de Verhulst resume a equação de Malthus, substituindo k por uma função linear decrescente. K será fator de redução do crescimento ilimitado da população, ou seja, haverá um limite para o crescimento. Assim, a constante k vai assumir uma função decrescente em: $\frac{dP}{dt} = (a - b.P).P$ sendo, a e b constantes positivas e P a população, com $k = (a - b.P)$.

O grupo G2 trouxe na solução informações sobre a lei de Verhulst, definindo-a como modelo logístico, k assumindo fator de redução de crescimento, definindo as constantes a e b como sendo constantes positivas e P representado a população em qualquer tempo e sendo a variável independente da função. Essas informações estão inseridas a seguir na Figura 22.

> P é a variável dependente e representa a população a qualquer tempo, t representa o tempo e é variável independente, k é constante real, $\frac{dP}{dt}$ é a taxa de variação da população P. A lei de Malthus é dada por $\frac{dP}{dt} = k.P$ enquanto a lei de Verhulst é representada por $\frac{dP}{dt} = (a - bP)P$. Observamos que a lei de Vehulst é um aprimoramento da lei de Malthus (G2).

> Nosso grupo teve dificuldades para se chegar à equação matemática solicitada no modelo de Verhulst. Fizemos de acordo com a nossa compreensão, mas não sabemos se está correto. O problema, professor, é que nos materiais didáticos disponíveis que temos e até a internet não explica isso direito, apesar que aprendemos na sala de aula os conceitos das Equações Diferenciais. Mas não é a mesma coisa, né?! (Luísa, junho de 2020.

Figura 22 – Interpretação da Lei de Verhulst de G2



Lei de Verhulst:

↳ o modelo logístico para a Lei de Verhulst, assume a equação de Malthus substituindo K por uma função linear decrescente.

• fator de redução do crescimento ilimitado da população

↳ ou seja, haverá uma limitante para o crescimento.

↳ O K vai assumir uma função linear decrescente:

$$\frac{dP}{dt} = (a - bP).P$$

Sendo, a e b → constantes positivas

P → população

FONTE: Dados do autor (2020).

Para o Passo 3, G2 encontrou uma equação definida por $P(t) = \frac{ac}{bc + e^{-at}}$ conforme descritos nas Figura 23 e Figura 24.

Figura 23 – Solução do Passo 3 de G2

Modelo de Verhulst - EDO - separação de variáveis

$$\frac{dP}{dt} = P(a-bP)$$

$$\frac{dP}{P(a-bP)} = dt$$

$$\frac{1}{P(a-bP)}\,dP = dt$$

$$\left[\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{(a-bP)}\right] dP = dt$$

$$\int\left[\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{(a-bP)}\right] dP = dt$$

$$\frac{1}{a}\ln(P) - \frac{1}{a}\ln(a-bP) = t + C$$

$$\ln\frac{P}{a-bP} = \frac{t+C}{\frac{1}{a}}$$

$$\ln\frac{P}{a-bP} = (t+c).a$$

$$\ln\frac{P}{a-bP} = at + \underbrace{ac}_{C_1}$$

↳ constante × constante = constante

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln}\frac{P}{a-bP}} = e^{at+c_1}$$

$$\frac{P}{a-bP} = e^{at}.\underbrace{e^{c_1}}_{C}$$

e elevado a uma constante constante

$$\frac{P}{a-bP} = e^{at}.C$$

$$P = e^{at}.C(a-bP)$$

$$P = ae^{at}C - bPe^{at}C$$

$$P + bPe^{at}C = ae^{at}C$$

→ continuação

cálculos auxiliares:

$$\frac{1}{P(a-bP)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{(a-bP)}$$

$$\frac{A(a-bP)+BP}{P\cancel{(a-bP)}} = \frac{1}{P\cancel{(a-bP)}}$$

$$A(a-bP) + BP = 1$$

Se $P = 0$

$$A(a-0) + 0 = 1$$

$$Aa = 1$$

$$A = \frac{1}{a}$$

$$(a-bP) = 0$$

$$a = bP$$

$$P = \frac{a}{b}$$

Se $P = \frac{a}{b}$

$$A\left(a - \cancel{b}.\frac{a}{\cancel{b}}\right) + B.\frac{a}{b} = 1$$

$$A.0 + B.\frac{a}{b} = 1$$

$$B = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

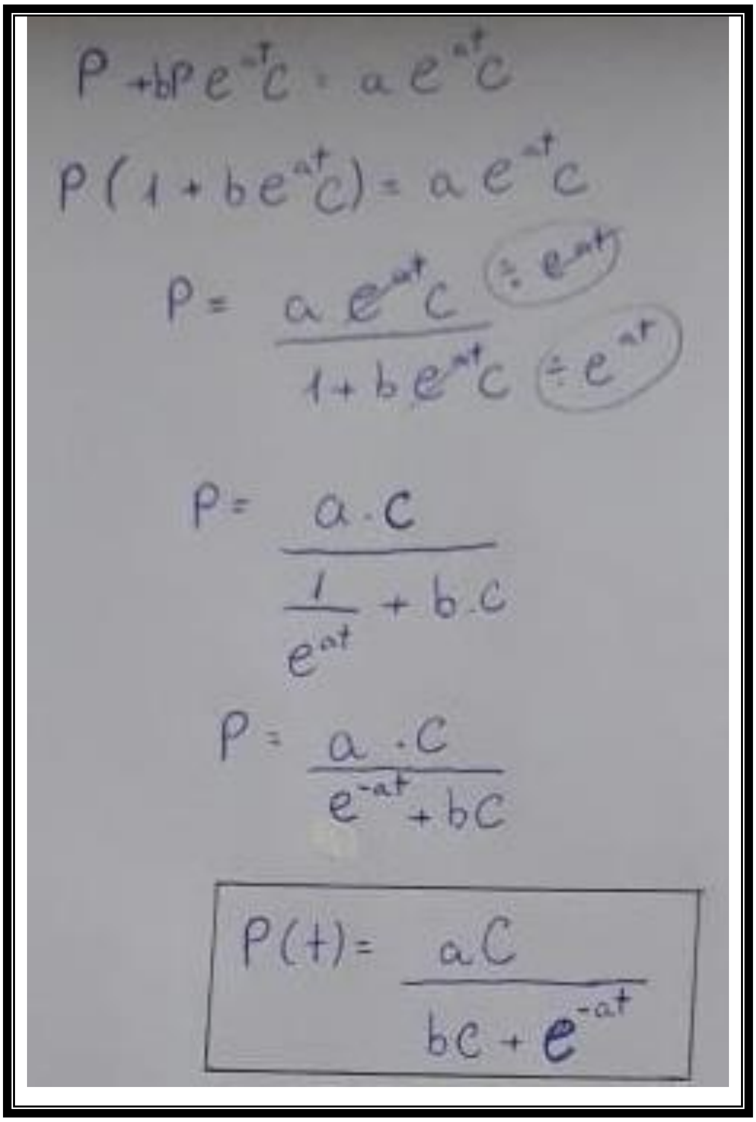
$$B = 1.\frac{b}{a}$$

$$B = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\frac{1}{a}}{P} + \frac{\frac{b}{a}}{(a-bP)}$$

FONTE: Dados do autor (2020)

Figura 24 – Finalização da resolução do passo 3 de G2



$$P + bPe^{at}C = ae^{at}C$$

$$P(1 + be^{at}C) = ae^{at}C$$

$$P = \frac{ae^{at}C}{1 + be^{at}C} \quad \begin{matrix} \div e^{at} \\ \div e^{at} \end{matrix}$$

$$P = \frac{a \cdot C}{\frac{1}{e^{at}} + b \cdot C}$$

$$P = \frac{a \cdot C}{e^{-at} + bC}$$

$$\boxed{P(t) = \frac{aC}{bC + e^{-at}}}$$

FONTE: Dados do autor (2020)

Abaixo descreveremos a solução da equação de Verhulst, conforme Quadro 9, Quadro 10Quadro 11. Ressaltamos que as demais resoluções de todas as atividades de Modelagem estão disponíveis no produto educacional intitulado: Modelando sociocriticamente no ensino de Equações Diferenciais para a Licenciatura Matemática. Este, disponível no site do programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP: https://ppgedmat.ufop.br/

Quadro 9 – Decompondo a equação em frações parciais

$\frac{dP}{dt} = (a - bP) \, . P \;\; \rightarrow \;\; \frac{dP}{(a-bP).P} = dt$

$\frac{1}{(a-bP).P} = \frac{A}{(a-bP)} + \frac{B}{P} = \frac{A.P+B.(a-bP)}{(a-bP).P}$ Daí teremos:

$A.P + B.(a - bP) = 1, válidos\ para\ P \geq 0$

$Se\ P = 0 \rightarrow A.0 + B.(a - 0) = 1 \rightarrow B = \frac{1}{a}$

$Se\ P = \frac{a}{b} \rightarrow A.\left(\frac{a}{b}\right) + B.\left[a - b.\left(\frac{a}{b}\right)\right] = 1 \rightarrow A.\left(\frac{a}{b}\right) + B.(0) = 1 \rightarrow A = \frac{b}{a}$

E então: $\frac{dP}{(a-bP).P} = \frac{b}{a.(a-b.P)}dP + \frac{1}{a.P}\ dP = dt$

FONTE: Dados do autor (2020)

Quadro 10 – Integrando as frações parciais

$I)\ \int \frac{1}{aP}\ dP = \frac{1}{a}.\int \frac{dP}{P} = \frac{1}{a}.\ln|P| + c_1$

$II)\ \int \frac{b\ dP}{a.(a-bP)} = \left(\frac{b}{a}\right).\int \frac{dP}{a-bP}$ Considerando: $u = a - b.P$ teremos:

$\left(\frac{b}{a}\right).\int \frac{(-\ du)}{b.u} = \left(\frac{b}{a}\right).\left(-\frac{1}{b}\right).\int \frac{du}{u} = \left(-\frac{1}{a}\right).\ln|a - b.P| + c_2$

Isso fazendo a substituição:

$a - b.P = u \rightarrow -b.dP = du \rightarrow dP = \left(-\frac{du}{b}\right)$

III) $\int dt = t + c$

Assim virá: $\int \frac{b}{a.(a-b.P)}dP + \int \frac{1}{a.P}\ dP = \int dt$ O que nos levará a:

$\frac{1}{a}\ln|P| - \left(\frac{1}{a}\right).\ln|a - b.P| = t + c_3$

FONTE: Dados do autor (2020)

Quadro 11 – Simplificando as expressões

$\left(\frac{1}{a}\right).[\ln|P| - \ln|a - b.P|] = t + c \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right).\ln\left[\frac{|P|}{|a-b.P|}\right] = t + c$

$\ln\left[\frac{|P|}{|a-b.P|}\right] = a.(t + c) \rightarrow \left[\frac{|P|}{|a-b.P|}\right] = e^{a.(t+c)} = e^{at}.e^{a.c} = e^{at}.K$

Assim: $|P| = |a - b.P|e^{at}.K$

Podemos retirar os módulos, pois somente nos interessa $\frac{dP}{dt} > 0$ e ainda: $0 < P_0 < P$

Na qual, P_0 representa a população inicial. Assim,

$P = (a - b.P).k.e^{at}$

Na condição inicial, se t = 0, teremos então: $P = P_0$ e por consequência vem:

$P_0 = (a - b.P_0).k.e^0 = (a - b.P_0).k \;\Rightarrow\; k = \frac{P_0}{(a-b.P_0)}$

Substituindo o valor de K em P vem,

$P = (a - b.P).\left(\frac{P_0}{a-b.P_0}\right).e^{at}$ O que resulta em:

$P = \frac{a.P_0 - b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} - \frac{b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$ O que nos levará a:

$P + \frac{b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$

$\frac{P.[(a-b.P_0).e^{-at}] + b.P.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}} = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$

$P.\left[\frac{(a-b.P_0).e^{-at} + b.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}\right] = \frac{a.P_0}{(a-b.P_0).e^{-at}}$

$P = \frac{a.P_0.[(a-b.P_0).e^{-at}]}{[(a-b.P_0).e^{-at} + b.P_0].(a-b.P_0).e^{-at}}$ E por fim:

$P = \frac{a.P_0}{b.P_0 + (a-b.P_0).\, e^{-at}} \Rightarrow P(t) = \frac{a.P_0}{b.P_0 + (a-b.P_0).\, e^{-at}}$

FONTE: Dados do autor (2020)

Os Passos 4 a 8 foram analisados conjuntamente, conforme descrito a seguir:

> Conforme já argumentamos, a equação de Malthus não limita a população por fatores externos. Assim, percebemos que a equação de Verhulst pode ser mais eficaz no cálculo de uma população futura, pois considera competições por espaço, alimento, etc. Num tempo t maior, a lei de Verhulst impõem um limite de crescimento L e é mais eficaz para os cálculos de populações futuras, conforme descrevemos no gráfico a seguir (G2).

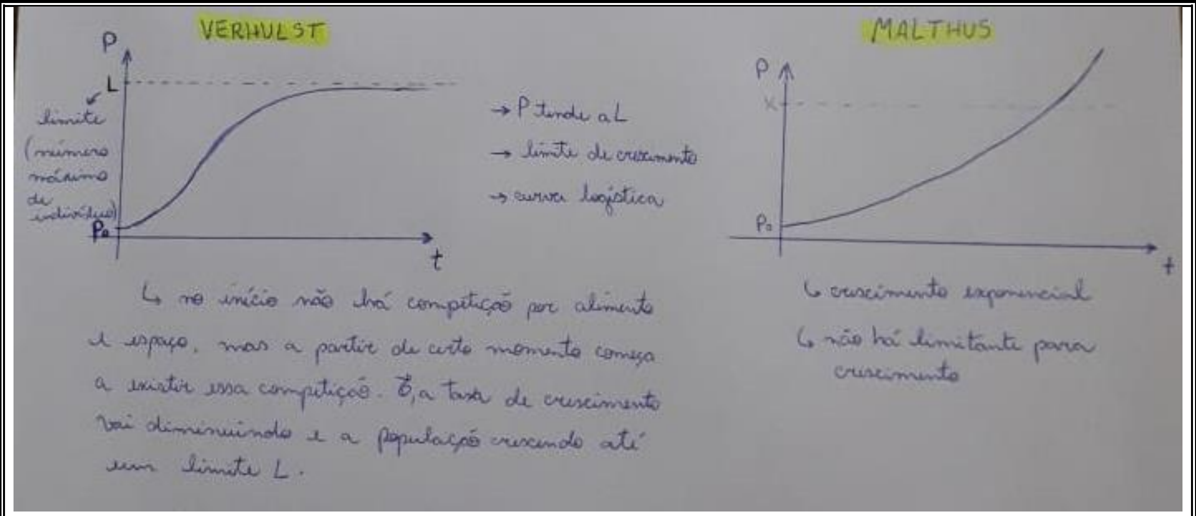
Argumentaram ainda que a Lei de Verhulst é um modelo matemático limitador da Lei de Malthus, pois ambas são exponenciais e mantêm a teoria de que a taxa de variação da população é proporcional à população inicial. Assim, trouxeram o seguinte argumento crítico:

> De fato, percebemos que na vida real a população não cresce de maneira ilimitada, tendo em vista que vários fatores tornam a cadeia instável. Em nossas pesquisas para este trabalho percebemos que o crescimento logístico na forma de um "S" acontecido na Lei de Verhulst ocorre rapidamente, desacelera com o tempo e se mantém estável quando o número de indivíduos atinge o limite L trazido no gráfico abaixo. Isso se dá tendo em vista os recursos disponíveis no ambiente da população local. Este limitador da população acontece, quanto o fator tempo "t" tende a um número grande e no Cálculo Diferencial e Integral corresponde ao estudo de limites envolvendo

> infinito. Verificamos ainda que L no gráfico acima é uma reta que tangencia a curva de Verhulst no infinito e assim pode ser chamada de assíntota? (G2).

O grupo G2 trouxe além das observações uma comparação gráfica das leis de Malthus e de Verhulst, conforme Figura 25.

Figura 25 – Comparação dos gráficos das Leis de Malthus e Verhulst de G2



FONTE: Dados do autor (2020).

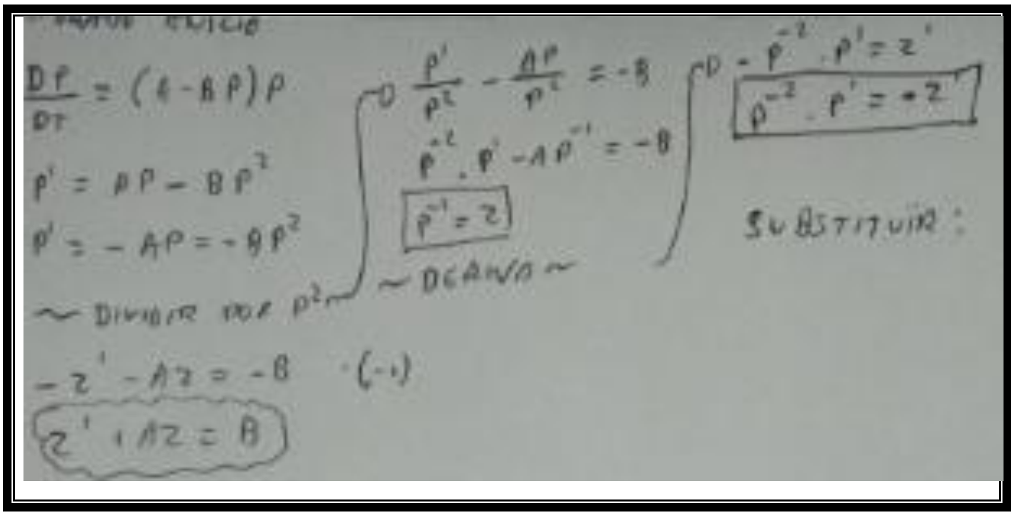
Por fim, analisaram o problema de variação populacional a partir de leis matemáticas e outros instrumentos estatísticos utilizados no Brasil trazendo, inclusive, uma síntese de suas pesquisas:

> Ficamos confusos devido a tantas informações diante das discussões sobre como estimar a população brasileira em 2020. Consultamos diversos sites na internet, canais do *Youtube* e *softwares* matemáticos para calcular a projeção populacional de 2.020 que não fechou com a projeção atual apresentada pelo IBGE. Nosso grupo acredita que isso aconteceu por que o polinômio projetado não considerou fatores externos que acontecem (como argumentaram anteriormente), o que ocorre também com o modelo de Malthus. O modelo de Verhulst leva em consideração algumas limitações, mas ainda assim não é perfeito. Como futuros professores de Matemática, percebemos que a Modelagem Matemática nos trouxe uma mensagem: que o docente deve estar sempre atento para buscar novos conhecimentos, inclusive os não matemáticos. Aprendemos a parte algébrica das Equações Diferenciais na sala de aula e neste trabalho percebemos que não foi o suficiente para aprender de fato. Pesquisando outros instrumentos, tivemos contato com outras maneiras de aprender e também contextualizar o que aprendemos de Equações Diferenciais. Vimos que a Matemática, através de suas "contas", traz números

> que deixam de ser simplesmente números e passam a ser reflexões, não somente para nós estudantes de Matemática, mas para a população de um modo geral. Como exemplo, nosso grupo levantou uma questão: Neste ano de 2020, acontecerão as eleições municipais. Por que o percentual de mulheres no Brasil é aproximadamente 51,8 %, segundo Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD do IBGE (dados de 2019) e, no entanto, o percentual de participação de mulheres nos cargos eletivos do país, sequer alcançam 15 %? (Dados do Correio Brasiliense de 08/03/2020) (G2).

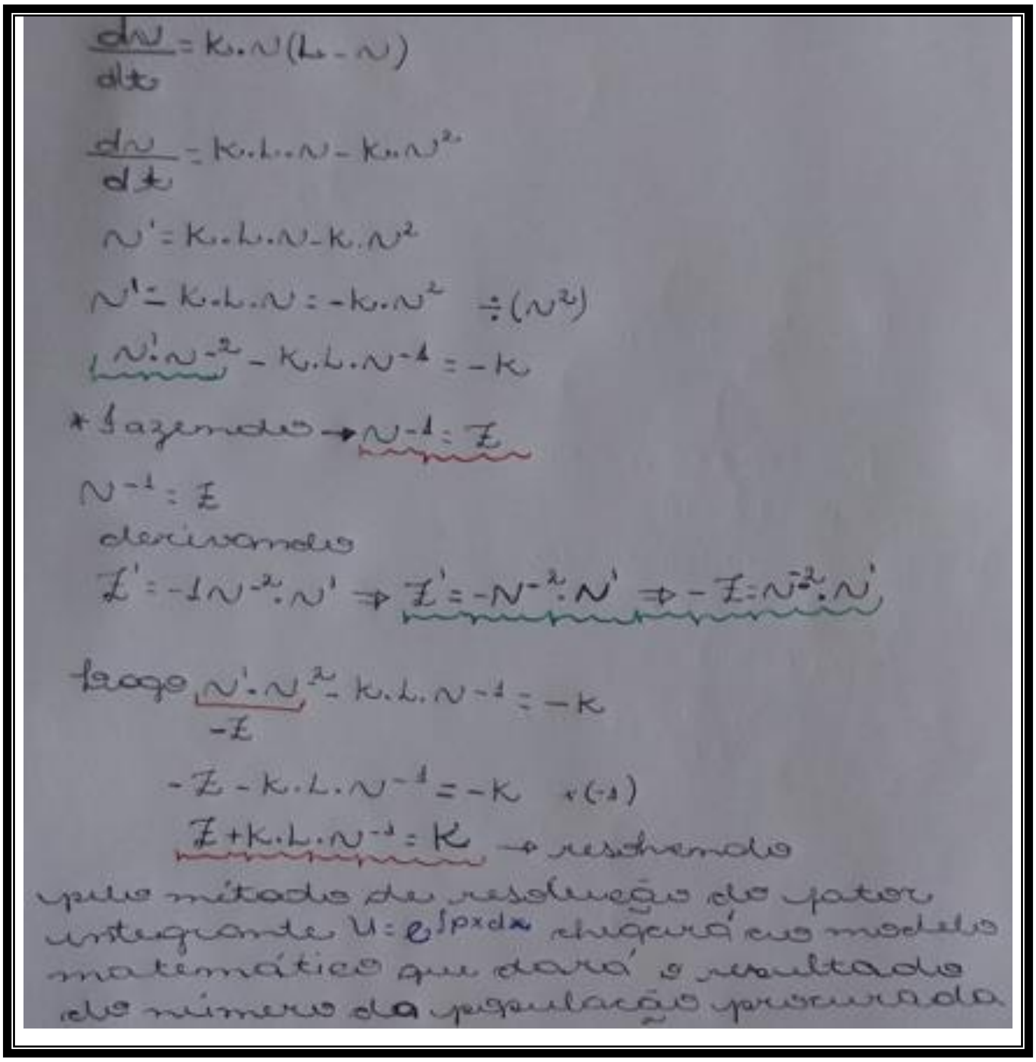
Ressaltamos que os grupos G1 e G3 não chegaram ao modelo matemático de Verhulst capaz de fornecer a população em um tempo t. Ambos os grupos tentaram encontrar a equação utilizando a resolução de Equações Diferenciais por meio do método de Bernoulli, conforme Figura 27 eFigura 26. No entanto, os dois grupos não chegaram a uma solução final.

Figura 26 – Tentativa de obtenção da equação do modelo de Verhulst de G3



FONTE: Dados do autor (2020)

Figura 27– Tentativa de obtenção da equação do modelo de Verhulst de G1



$\frac{dN}{dt} = k.N(L - N)$

$\frac{dN}{dt} = k.L.N - k.N^2$

$N' = k.L.N - k.N^2$

$N' - k.L.N = -k.N^2 \quad \div(N^2)$

$N'.N^{-2} - k.L.N^{-1} = -k$

* fazendo → $N^{-1} = Z$

$N^{-1} = Z$

derivando

$Z' = -1N^{-2}.N' \Rightarrow Z' = -N^{-2}.N' \Rightarrow -Z = N^{-2}.N'$

logo $\underbrace{N'.N^{-2}}_{-Z} - k.L.N^{-1} = -k$

$-Z - k.L.N^{-1} = -k \quad \times(-1)$

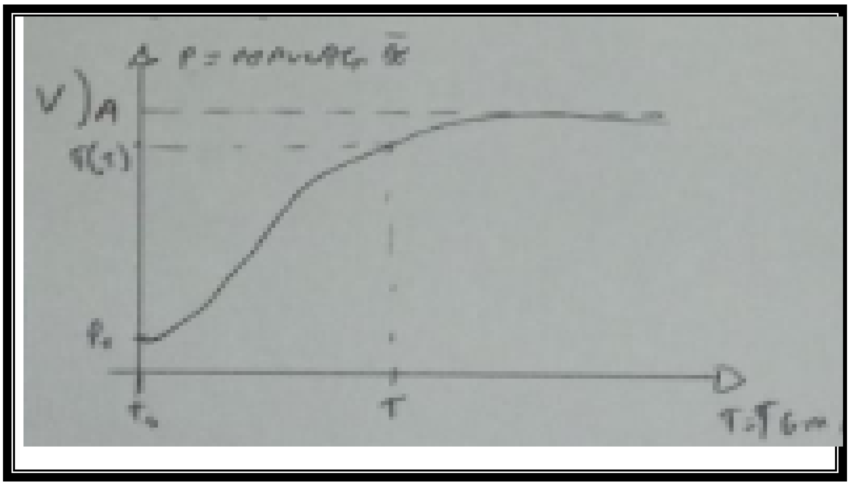
$Z + k.L.N^{-1} = k$ → resolvendo pelo método de resolução do fator integrante $U = e^{\int p x dx}$ chegará ao modelo matemático que dará o resultado do número da população procurada

FONTE: Dados do autor (2020).

Apesar de não terem conseguido encontrar a equação do modelo de Verhulst, os grupos G1 e G3 trouxeram gráficos idênticos conforme Figura 28 e deixaram suas discussões sobre os modelos de Malthus e de Verhulst.

> A equação de Malthus prevê um crescimento populacional ilimitado sem levar em consideração a evolução da população no tempo. Também em seu gráfico percebe-se um crescimento exponencial em que a população aumenta sem limites ao infinito. Já na equação de Verhulst tem-se uma população que decresce linearmente considerando as questões instáveis no decorrer dos anos. Em seu gráfico, temos um crescimento que a população cresce rapidamente e desacelera mantendo instável (G3).

Figura 28 – Gráfico do modelo de Verhulst de G1



FONTE: Dados do autor (2020).

> No modelo de Malthus, a curva é crescente e infinita, pois se trata de uma equação exponencial. Já no modelo de Verhulst, também é exponencial e a curva cresce, porém, há um limite que serão os fatores que atrapalham o desenvolvimento de uma determinada população (G1).

Referindo-se aos Passos 7 e 8, os grupos G1 e G3 trouxeram as seguintes argumentações:

> Esse trabalho mostrou que o problema da variação populacional por leis matemáticas não é fidedigno, tendo em vista que desconsidera fatores externos. Mas, a Modelagem Matemática nos mostrou que é uma possibilidade para se chegar ao resultado. Serviu para mostrar também que a Matemática está presente em nossas vidas, mas o problema é que, até aqui no curso superior, os professores enchem o quadro (nas aulas presenciais) e nem os alunos e nem os professores também estão acostumados com um outro jeito de ensinar e aprender Matemática (G1).

> A Lei de Verhulst é um meio mais eficaz para a verificação do crescimento populacional, uma vez que a estrutura da equação leva em consideração valores como a evolução da população com o passar do tempo. Olhando de uma forma geral, o presente estudo nos mostrou que existe uma relação entre o crescimento da população e os diversos problemas sociais, que os modelos matemáticos não foram adaptados para calcular. Com isso, destacamos a importância do Censo Demográfico pois, a partir dele, de acordo com as pesquisas que fizemos, é possível prever demandas de questões como saúde, alimentação para as populações futuras, segurança e muitos outros fatores. Ele traz possibilidades para que o Estado administre e distribua recursos públicos para suprir as necessidades da população futuramente. Nesse sentido, as leis matemáticas e as projeções populacionais são instrumentos interessantes (G3).

Entendemos que as reflexões feitas pelos alunos de forma individual e em grupo, contemplaram a etapa de Modelagem referente à "análise crítica da solução do problema" proposta por Burak (2010).

Dessa forma, atendemos ao percurso proposto pelo pesquisador atendendo às suas sugestões para que a Modelagem acontecesse na perspectiva sociocrítica.

5.6. Descrevendo o 4º encontro (23 / 06 / 2020)

Nesse 4º e último encontro, retomamos as reflexões sobre as atividades realizadas nos encontros anteriores e propusemos aos estudantes a última etapa do trabalho de Modelagem.

P: Faremos, hoje, nossas atividades finais envolvendo a Modelagem Matemática. Gostaríamos de agradecer a todos vocês pela contribuição à nossa pesquisa, que poderá auxiliar estudantes e professores de Matemática a compreender a Modelagem Matemática como um possível projeto integrador capaz de trazer alternativas para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Quero agradecê-los pela voz e pelas falas de criticidade, trazendo a importância do papel social da Matemática. Vocês foram autônomos e construtores de conhecimentos matemáticos e não matemáticos também, com criatividade e criticidade. Como futuros professores de Matemática, aprenderam novas perspectivas e possibilidades para ensinar Matemática. Assim, gostaríamos que, individualmente ou em grupos, deixassem suas percepções sobre os nossos encontros, de uma forma espontânea. Traremos também um questionário a ser respondido individualmente.

Apresentaremos, por fim, as questões do Questionário de Avaliação das Atividades que foi respondido individualmente pelos participantes e composto por 2 partes.

1ª Parte). Conhecendo sua experiência docente e suas percepções

1) Ao fazer o Estágio Curricular obrigatório, o que você observou sobre o ensino de Matemática praticado nas escolas onde estagiou?

2) Se fosse o (a) professor (a) titular da (s) turma (s) nas quais estagiou, você utilizaria a mesma metodologia para o processo de ensino/aprendizagem da Matemática? Justifique!

3) Você tem alguma experiência como Professor (a) de Matemática? Caso afirmativo, por quanto tempo e em que níveis de ensino?

4) Como futuro (a) professor (a) de Matemática, como você percebe a relação entre a Matemática ensinada nas escolas e a realidade das pessoas no dia a dia?

5) Particularmente, como você utiliza a Matemática aprendida em sua formação básica e superior no seu cotidiano?

2ª Parte) Avaliando as Atividades de Modelagem realizadas

6) Ao longo do seu curso de Licenciatura em Matemática, você já havia estudado ou utilizado a Modelagem Matemática em outras disciplinas cursadas? Quais?

7) A realização das Atividades de Modelagem contribuiu para ressignificar seus conhecimentos matemáticos em relação às Equações Diferenciais? Em quais aspectos?

8) Na realização das Atividades de Modelagem envolvendo as Equações Diferenciais ocorreram algumas dificuldades? Explicite!

9) Em sua percepção, quais são os eventuais aspectos positivos e os aspectos negativos da Modelagem Matemática?

10) Em sua futura prática docente, você considera utilizar a Modelagem Matemática como alternativa metodológica em suas aulas? Em que conteúdos e níveis de ensino?

Entretanto, as principais respostas serão apresentadas atreladas a uma das categorias de análise que, a seguir, passamos a descrever.

5.7. Analisando nossos dados

Após termos descrito os encontros e, principalmente, as Atividades de Modelagem 1 e 2, passaremos à elaboração de categorias de análise, considerando a perspectiva de Gomes (2004) quando argumenta que:

> Quando falamos em análise e interpretação de informações geradas no campo da pesquisa qualitativa, estamos falando de um momento em que o

> pesquisador procura finalizar o seu trabalho, ancorando-se em todo o material coletado e articulando esse material aos propósitos da pesquisa e à sua fundamentação teórica (GOMES, 2004, p. 80).

Sabemos que, numa pesquisa qualitativa, as categorias de análise devem ser estabelecidas como forma de confrontar o conjunto dos dados coletados durante a pesquisa com o referencial de análise escolhido, sempre levando em consideração nossa perspectiva como pesquisador.

Fundamental também nesse processo de análise é ouvirmos as vozes dos participantes, que entendemos estar em certa sintonia e convergir com as ideias trazidas por Burak (2016), para quem se faz necessário e urgente um ensino que possibilite aos alunos, “análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias”.

Assim, a partir do desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, dos registros no diário de campo durante os encontros, das respostas dadas ao questionário aplicado e, a partir do confronto com o nosso referencial teórico / bibliográfico, estabelecemos 3 categorias de análise que, a seguir, passaremos a descrever, além de detalhar sua construção.

5.8. A Modelagem Matemática: inovações e limitações na perspectiva da aprendizagem de Equações Diferenciais

Nossa pesquisa tem o enfoque centrado na perspectiva de aprendizagem das EDO e as fases de coleta, de análise e interpretação foram norteadas pela questão de investigação: Quais são as possíveis contribuições para a aprendizagem do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática abordando aplicações de Equações Diferenciais numa perspectiva sociocrítica?

Entendemos que a aprendizagem acontece de várias maneiras, de forma individual e no seu próprio tempo para cada indivíduo e o seu processo de construção deve estar associado à interação, colaboração e diálogo. Essa é uma perspectiva dos processos de ensino e aprendizagem contemplada por Skovsmose (2006, p. 12) e relatada no nosso referencial teórico: “Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais”.

Dessa forma, coadunamos com Skovsmose (2006) e acreditamos que dialogar, colaborar e interagir são condições fundamentais para o processo de construção do conhecimento, diferentemente da postura tradicional do professor que fala, decide e "ensina" enquanto o aluno ouve, segue os passos do professor e "aprende". No processo de construção do conhecimento, a abordagem valoriza cada indivíduo inserido no ambiente de aprendizagem, bem como suas diferenças e individualidades. Assim, todos têm participação na realização das atividades que acontecem coletivamente, onde um membro do grupo "complementa" o outro, contribuindo para a aprendizagem de cada membro do grupo.

Entendemos então, assim como Skovsmose (2006), que a "aprendizagem dos conhecimentos matemáticos está associada e relacionada aos conceitos e às teorias da Matemática, já o conhecimento técnico diz respeito à aplicação da Matemática para resolver problemas, enquanto o conhecimento reflexivo se relaciona com a compreensão do papel da Matemática nas práticas sociais".

Essa é uma premissa sobre a forma como a aprendizagem é concebida pela Educação Matemática e, é nesse contexto, que a Modelagem se apresentou em nossa pesquisa, trazida no referencial teórico como uma lente crítica às aplicações. Por meio dela, os alunos exploraram a potencialidade, vivenciaram os seus limites e também evidenciaram algumas dificuldades de aprendizagem. Em outras palavras, novos conhecimentos foram adquiridos e/ou ressignificados, relacionando-se com aqueles que cada participante da pesquisa já possuía, ancorados em conceitos preexistentes.

Também nesse contexto de aprendizagem, Burak (2004) enfatiza que "o método de pesquisa exploratória foi trazido da Antropologia e presta uma grande contribuição à Educação". Isso quer dizer que, quando o indivíduo se relaciona com outras pessoas, estará em contato também com outras culturas, evidenciando aí a interdisciplinaridade.

Dessa forma, entendemos que aprendizagem está associada a um processo em aberto e, para aprender, devemos estar desejosos. Assim, no processo de aprendizagem, o professor deve estimular a capacidade de compreensão dos alunos, construindo conhecimentos novos e/ou ressignificando conceitos com novas representações. Essa preocupação foi contemplada por Burak (2004, p. 4), quando sugere que: "O interesse pela atividade está diretamente relacionado à motivação intrínseca e ganha força também no contexto que nutre tanto o interesse como a motivação".

São com essas premissas que analisamos as perspectivas de aprendizagem das EDO, entendendo que a aprendizagem modifica, ressignifica e/ou constrói novos pensamentos.

Salientamos que a análise foi realizada numa perspectiva fenomenológica[36] para a pesquisa qualitativa, trabalhando com a eleição de categorias a posteriori. Isso, numa perspectiva do olhar atendo do pesquisador depois que a pesquisa ocorreu, em contraste com o referencial teórico.

Assim, compreendemos que a análise deve passar por uma categorização e, por meio delas, configura-se a interpretação dos dados coletados na pesquisa qualitativa. Isso deve se dar por meio de uma leitura atenta das descrições que coloquem em evidência os sentidos dos termos utilizados, para assim estabelecermos as unidades de significado.

Segundo Gomes (2004, p. 70), “A palavra categoria, em geral, se refere a um conceito que abrange elementos ou aspectos com características comuns ou que se relacionam entre si. Essa palavra está ligada à ideia de classe ou série”. Ainda segundo o autor, “a atenção à categorização é importante e é essencial que o pesquisador vá além da categoria e possa abstrair dos dados novidades para o campo de pesquisa em questão”.

Nesse contexto, identificamos nas sutilezas das falas dos participantes, questões envolvendo a aprendizagem conforme descrevemos a seguir. Nelas, a colaboração, o diálogo e as interações entre alunos e professor-pesquisador foram fatores primordiais nos processos de ensino e aprendizagem das EDO. Isso evidenciou-se por meio do trabalho em grupo proporcionado pela Modelagem, conforme vozes dos participantes e do professor-pesquisador, extraídas do seu diário de campo:

> Ficamos confusos com tanta informação para resolver nas atividades de Modelagem Matemática, principalmente na Atividade 2. Porém, o diálogo e o trabalho em grupo foram primordiais na solução das atividades (Luísa, junho de 2020).
>
> Mesmo estudando as equações diferenciais em sala de aula, ainda assim tive muitas dúvidas nas atividades de Modelagem, principalmente na elaboração da segunda lei de Verhulst. Realizamos muitas pesquisas em vários contextos diferentes, nosso grupo dialogou bastante e com a colaboração de todos os colegas do grupo e apoio do professor, consegui sanar muitas dúvidas que ainda não tinha entendido direito anteriormente (Joanis, junho de 2020).
>
> Na resolução das atividades dos 2 blocos de Modelagem, no contexto das leis de Malthus e de Verhulst, envolvendo as Equações Diferenciais, observei que

[36] Fenomenologia é uma metodologia que retorna a importância dos fenômenos os quais devem ser analisados e, nessa perspectiva, depende do olhar do pesquisador depois que a pesquisa foi realizada. É com esse princípio que se dá a condição de análise posterior que deve se relacionar com o referencial teórico da pesquisa. É uma atitude reflexiva do fenômeno estudado.

> houve grande interação e diálogo entre os participantes de cada grupo, utilizando as mídias sociais (Diário de Campo, junho de 2020).

O ambiente de aprendizagem proporcionado pela Modelagem favoreceu a aprendizagem de Equações Diferenciais, trouxe proximidade com a interdisciplinaridade e colaborou para a inserção em outros campos de conhecimentos não matemáticos, tendo em vista que a Modelagem possui uma natureza aberta:

> Percebemos que um aspecto positivo da modelagem é mostrar como ela pode ser útil na vida real, no cotidiano, e como ela trabalha a interdisciplinaridade, pois interage com outras áreas do conhecimento (G2, junho de 2020).
>
> Achei interessante o fato de um modelo matemático ajudar a solucionar problemas que não são matemáticos. Não havia pensado sobre isso até então. [...] percebi que a modelagem matemática nos faz pesquisar e acessar outros meios além dos livros didáticos. Também tive dificuldades para resolver os trabalhos, mas o trabalho em grupo, mesmo sendo virtual, ajudou bastante (Helena, junho de 2020).
>
> Apesar das dúvidas que tivemos, destaco alguns pontos positivos da Modelagem Matemática: tivemos que fazer várias pesquisas sobre o assunto para desenvolver o que pedia. O fato do trabalho ser em grupo e a metodologia do trabalho permitir buscar várias fontes de consulta foi importante porque a maioria dos livros didáticos não possuem atividades assim e ainda aprendemos outras coisas além das Equações Diferenciais (Beatriz, junho de 2020).
>
> Percebi que a modelagem proporciona um bom ambiente para aprendizagem e poderia ser usada em todos os níveis de ensino. Acredito que ela pode ser utilizada para o desenvolvimento da aprendizagem e habilidades gerais, pois faz com que o aluno problematize, investigue, busque conhecimento por si mesmo sem ficar preso somente ao professor e a materiais didáticos (Luísa, junho de 2020).
>
> Pesquisando outros instrumentos, tivemos contato com outras maneiras de aprender e também contextualizar o que aprendemos de Equações Diferenciais nas aulas presenciais e remotas (G2, junho de 2020).
>
> A pesquisa exploratória conduziu os alunos a buscarem novos conhecimentos. Percebi, enquanto professor-pesquisador, que a atividade exploratória, tal qual sugerida por Burak, levou os alunos a pesquisarem as várias dimensões inseridas no contexto da contagem populacional e de um possível modelo matemático para projetar a população brasileira em 2020. Conjecturaram, discutiram, analisaram e trouxeram preocupações com o modelo matemático, apesar dos resultados não relatarem a realidade (Diário de Campo, junho de 2020).

O ambiente da Modelagem contribuiu para a aprendizagem de EDO, frente aos desafios de ressignificar os conhecimentos:

> Consegui entender melhor os conceitos das equações diferenciais a partir da modelagem. Essa é a segunda vez que curso a disciplina e na primeira vez tive muitas dificuldades em assimilar os conceitos. Dessa vez entendi que podemos estuda-la a partir dos conceitos e associando-a a fenômenos naturais que faz mais sentido para o aluno (Wellington, junho de 2020).

> Acredito que tudo pode modificar, facilitar ou dificultar o aprendizado do aluno em todos os níveis de ensino, desde os anos iniciais do fundamental. Na minha visão coube a modelagem de Equações Diferenciais adaptar essa realidade para a questão de aprender matemática de um novo jeito (Dione, junho de 2020).

> Olha, já até havíamos estudado a matéria de Equações Diferencias no decorrer do período, mas com a Modelagem conseguimos realizar uma atividade incrível usando o mesmo conhecimento, mas de uma forma bem mais prática e assim, consegui compreender muito mais sobre a matéria (Joanis, junho de 2020).

> Essa atividade me proporcionou a busca pelo conhecimento, além do que já havia aprendido em sala, me fez ver situações que antes eu não enxergava aplicadas em uma realidade. Foi muito importante e de grande aprendizado as atividades de modelagem, descobrir coisas novas e também perceber o quanto as Equações Diferenciais são imprescindíveis para diversas áreas e aplicadas no cotidiano (Luísa, junho de 2020).

O ambiente de Modelagem trouxe motivação à aprendizagem de EDO por meio de atividades relacionadas ao cotidiano e à realidade social e, assim, despertando a criticidade quanto à aprendizagem de Matemática:

> Em minha opinião, como ponto positivo da modelagem é que houve um ganho real da aprendizagem das equações diferenciais a partir da sua aplicação, a partir da interação com a realidade. [...] como futuro professor percebi que o aluno aprende mais como pesquisador; A interação entre professor e aluno por meio de pesquisa aumenta e o convívio social também (no caso de ser presencial) e isso traz motivação e satisfação para o aluno (Bruno, junho de 2020).

> Achei como ponto positivo que a modelagem relaciona a matemática com a realidade do aluno. O estudante começa a resolver problemas de sua vivência, consegue enxergar a aplicabilidade da matemática, e o que para ele muita das vezes não fazia sentido passa a fazer. Mostra também que os números também estão associados às questões sociais como na pesquisa que fizemos sobre o Censo (Raina, junho de 2020).

> Na minha opinião, o principal ponto positivo da Modelagem Matemática é que, ao ser realizada, mostra de forma simples e objetiva, para o aluno, os conceitos matemáticos no cotidiano, e isso gera um aprendizado extraordinário. Quanto ao ponto negativo, não acho que a modelagem matemática seja o problema, mas sim os professores e os alunos, pois a Modelagem é trabalhosa e bem cansativa de se fazer, exige muito trabalho e dedicação, e por conta disso, creio que muitos professores optam por atividades mais simples de desenvolver e avaliar (Bruno, junho de 2020).

Observamos nas falas acima, outras nuances da Modelagem trazidas pelo referencial teórico. Uma delas franqueou a questão das dificuldades para a aprendizagem. Esse aspecto evidenciou-se por meio das vozes dos participantes da pesquisa em 15 oportunidades ocorridas de forma individual e/ou em grupo. Além disso, essa particularidade importante associada à aprendizagem também foi observada pelo professor-pesquisador em interações com os grupos e foi relatada em seu diário de campo.

Com base nas vozes dos participantes e na observação do professor-pesquisador, procuramos entender onde e como aconteceram as dificuldades na aprendizagem de EDO e ousamos dizer que elas aconteceram por questões interpretativas, pela não observância dos conceitos matemáticos, por lacunas na aprendizagem de outras etapas do conhecimento matemático ou por outras questões implícitas. Uma dessas nuances implícitas pode ter algum tipo de relação com problemas semelhantes a certos distúrbios na aprendizagem caracterizados por motivos crônicos de saúde, como a dislexia[37] e a discalculia que devem ser objetos de investigação do professor, da comunidade escolar e das famílias dos alunos que apresentam um diagnóstico confirmado:

> Tive dificuldades sim, não é só com a modelagem, mas também com a matéria em si. Infelizmente eu tenho uma dificuldade imensa com a matemática (Helena, junho de 2020).
>
> Tive algumas dúvidas, mas creio que foi por ser a distância por causa dos acontecimentos atuais, pois quando estou em grupo e presencialmente tenho mais facilidade para entender determinados problemas (Larissa, junho de 2020).
>
> Tive dificuldades sim e credito isso a dois quesitos: a interpretações da atividade, e por não compreender bem dos assuntos e das questões abordadas.

[37] Dislexia é o distúrbio de aprendizagem caracterizado pela dificuldade de leitura e interpretação, sendo mais conhecido no meio acadêmico. Enquanto isso, a discalculia, distúrbio menos conhecido, diz respeito à dificuldade de lidar com números e algebrizações.

> Porém, após as pesquisas e leituras sobre as atividades propostas, foi mais fácil a compreensão para resolver, até porque uma coisa ia se ligando à outra, formando um conjunto de ideias. [...] também não somos acostumados com atividades assim (Márcia, junho de 2020).
>
> Sim, tive várias dificuldades, tive que fazer várias pesquisas sobre o assunto para desenvolver o que pedia, e quando achava que já sabia aparecia mais dificuldade, assisti vídeos, fiz pesquisas no *Google* e tirei dúvidas com o grupo (Beatriz, junho de 2020).
>
> Tive dificuldades na resolução de questões que pediram a construção dos gráficos, tanto de Malthus quanto de Verhulst E ainda o professor não estava presente tendo em vista o ensino remoto (Márcia, junho de 2020).
>
> Sim. No meu caso, tive dificuldades para resolver matematicamente a equação de Vershulst, porém, acredito que essa dificuldade que tive me gerou um conhecimento muito maior, comparado com o que eu teria sem ter feito as atividades de Modelagem. Trouxe significados importantes para mim, mais como futuro professor que como aluno em si (Bruno, junho de 2020).
>
> Sim. Algumas questões não entendi muito bem o que era para fazer, e nem sei se as resoluções estão corretas. Não estamos acostumadas com trabalhos assim onde o aluno tem a responsabilidade de procurar o conhecimento (Helena, junho de 2020).
>
> Percebi equívocos nos cálculos efetuados pelos alunos nas resoluções dos 2 blocos de atividades de Modelagem envolvendo a contagem populacional das 2 leis: a de Malthus e a de Verhulst. Na primeira atividade, observamos algumas resoluções incompletas. Na segunda atividade, além de incompletas, as resoluções evidenciaram dificuldades e lacunas de aprendizagem dos alunos com aspectos de conceitos matemáticos oriundos de conceitos e teorias de assuntos como funções e equações algébricas (Diário de Campo, junho de 2020).
>
> Os 3 grupos tiveram dificuldades na interpretação de alguns dos passos didáticos das atividades propostas. Essa dificuldade ficou evidente na interpretação do Passo 4 da atividade 1, na qual os alunos deveriam derivar a equação $P(t) = 5.000\ e^{0,047t}$ e chegariam a: $\frac{dP}{dt} = 235\ e^{0,047t}$ isso, no nosso entendimento não se trata de uma lacuna na aprendizagem de conceitos e ideias matemáticas, mas de interpretação textual, entendendo que taxa de variação corresponde a uma derivada (Diário de Campo, junho de 2020).

Percebemos também que as dificuldades de aprendizagem podem ainda estar associadas à metodologia utilizada na construção do conhecimento matemático que se perpetua desde a escolarização básica e ao longo dos tempos. Muitos professores e alunos ainda associam aprendizagem com a “transmissão de conhecimento” pelo professor, evidenciado pela fala da aluna Quésia e muitas das vezes negligenciado pelas pesquisas.

> Observei na sala de aula onde estagiei que há uma dificuldade muito grande para o professor passar o conteúdo de matemática aos alunos, pois eles já vêm com uma certa resistência desde os anos inicias em aprender tal matéria. [...] até achei a Modelagem interessante, mas não estou acostumada a resolver atividades assim e isso ne trouxe dificuldades de interpretação (Quésia, junho de 2020).

Outro fator que nos trouxer pistas com relação às dificuldades de aprendizagem, diz respeito aos materiais didáticos adotados pelas escolas, conforme opiniões deixadas nos *chats* da plataforma *Google Meet:*

> Uma questão que vi sobre a Modelagem é que os livros didáticos de Matemática, na sua grande maioria, principalmente aqueles para o curso superior, não trazem uma Matemática mais contextualizada como aconteceu em nosso trabalho (Dione, junho de 2020).
>
> Concordo com a Dione. Eu até cheguei a pensar em fazer meu TCC sobre essa questão de materiais didáticos para o ensino de Matemática (Marcone, junho de 2020).

Abaixo, trazemos outras falas dos alunos que também indicam que o modo de condução do processo de ensino influencia diretamente a aprendizagem:

> Professor, as duas atividades que envolvem Equações Diferenciais foram muito bem elaboradas e tivemos facilidade para encontrar a Lei de Malthus. No entanto, tivemos dificuldades para encontrar a Lei de Vershulst. [...] A Modelagem Matemática deveria ser usada pelos professores desde o Ensino Fundamental para o aluno ter acesso a esse jeito de aprender. É legal, mas não estamos acostumados com esse tipo de atividade e ela requer que os alunos trabalhem mais, e dá mais trabalho para o professor também. Sentimos isso nesse trabalho (G1, junho de 2020).
>
> (A Modelagem) serviu para mostrar também que a Matemática está presente em nossas vidas, mas o problema é que, até aqui no curso superior, os professores enchem o quadro (nas aulas presenciais) e nem os alunos e nem os professores também estão acostumados com um outro jeito de ensinar e aprender Matemática (G1, junho de 2020).

No entanto, apesar das dificuldades relatadas pelos participantes da pesquisa e pelo professor-pesquisador, entendemos que as atividades de Modelagem Matemática trouxeram um contributo para a aprendizagem e ressignificaram conceitos matemáticos de EDO, de CDI e de outros conhecimentos matemáticos requeridos diretamente na problematização:

> Observa-se que o grupo G2 obteve um melhor desempenho nas resoluções das atividades inerentes às Equações Diferenciais, incluindo a análise gráfica e a associação de conceitos matemáticos advindos do Cálculo Diferencial e Integral, como a existência da assíntota horizontal no gráfico que expressa a Lei de Verhulst e a utilização do conceito de limites envolvendo o infinito. Esse grupo identificou de maneira precisa as variáveis, independente e dependente, para a solução do problema proposto e descreveu a Lei de Malthus perfeitamente. Porém, cometeu um erro algébrico que o impediu de encontrar a lei matemática que expressa corretamente a Lei de Vershulst, mas quase chegou no modelo (Diário de Campo, junho de 2020).
>
> As análises gráficas da Atividade 1 foram realizadas com uma maior precisão. Destaque para o grupo G2 que construiu uma tabela que deu uma boa dimensão para a Lei de Malthus, mas que, ao construir o gráfico da função definida por $P(t) = 5.000\, e^{0,047t}$ não observou o domínio real, pontilhando a curva do gráfico (Diário de Campo, junho de 2020).

Outras particularidades de análise como criticidade, capacitação dos professores e aulas remotas foram levantadas nas vozes dos participantes e serão analisadas nas categorizações a seguir.

5.9. O Ensino Remoto: adaptações e implicações para o contexto da nossa pesquisa e para o "novo normal" educacional

Essa categoria enfatiza o ensino remoto a partir da necessidade imediata do uso das tecnologias digitais nas aulas por todos os lugares do mundo. Sem ele, não seria possível ter dado prosseguimento às aulas, após o mês de março de 2020 e, como consequência, nossa pesquisa teria sido interrompida bruscamente após o referencial teórico, o que teria nos exigido uma guinada total na sequência da pesquisa de campo.

O ano de 2020 será marcado e lembrado na história da humanidade por esta e pelas gerações futuras. Isso, em função do surgimento, no final de 2019, do vírus Sars-Cov-2 cuja letalidade da doença Covid-19, causada pelo vírus, varia entre 0,5% e 1% segundo estudos ao redor do mundo e que possui alto grau de contaminação e disseminação entre as pessoas. No entanto, essa taxa ainda está em discussão pela OMS, segundo a Revista Pesquisa Fapesp, trazida pelo site www. uol.com.br, de 05/10/2020.

Nesse contexto, a Organização Mundial da Saúde – OMS decretou em 11 de março de 2020 estado de pandemia[38], tornando-se evidente que se tratava de uma das maiores epidemias da história e, como consequência, houve a decretação de uma política mundial de isolamento social. Assim, face a essa nova realidade, tornou-se necessária a tomada de decisões emergenciais em todos os setores da sociedade, modificando as relações interpessoais e trazendo novas relações para as artes, o esporte, os cultos religiosos, o comércio e, em especial, para o mundo da Educação desconstruindo, de certa forma, a hegemonia dos processos de ensino e aprendizagem no modo presencial.

Em particular, o ambiente escolar constituído por profissionais da Educação, professores e alunos, em sua grande maioria jovens, constitui-se em um cenário perfeito para proliferação e transmissão do vírus. Os alunos, com menor tendência ao grupo de risco da doença e em convívio diário com outros estudantes e professores, seriam condutores perfeitos do vírus aos membros de suas famílias: pais, irmãos e avós, muitos de eventuais grupos de risco da doença, segundo os infectologistas.

Dessa forma, o retorno presencial às aulas das escolas pelo mundo deverá acontecer após tomadas várias medidas sanitárias e provavelmente serão as últimas a retornar, o que poderá acontecer após a imunização por uma vacina. Nesse ínterim:

> Mais do que um problema educacional, o bloqueio do acesso à escola reconfigurou a sociedade, na medida em que tempos e movimentos foram desconstruídos, famílias passaram a coadunarem as responsabilidades do trabalho e da vida dos estudantes em tempos ampliados e em contexto ora da necessidade da manutenção do emprego e da renda, ora no contexto de confinamento em espaços razoavelmente reduzidos, de maneira ao isolamento ser cotidianamente comparado a situações de Guerra (ARRUDA, 2020, p. 259).

Ainda segundo Arruda (2020, p. 260), “no dia 26 de abril (de 2020) chegamos a quase 90% de alunos impossibilitados de frequentar as aulas (no mundo). Esse número reduziu-se a 70% em 11 de maio devido, sobretudo, ao retorno gradual das aulas presenciais na China”.

Diante desse cenário, vários países do mundo tomaram medidas abruptas e muito rápidas em relação à Educação, utilizando em caráter de excepcionalidade, as Tecnologias da

---

[38] Segundo a OMS, pandemia é a disseminação mundial de uma nova doença que se caracteriza quando surtos se espalham por diferentes continentes, com transmissão sustentada de pessoa para pessoa.

Informação e Comunicação (TICs)[39]. Dentre eles, "países europeus como a França, Espanha, Portugal e Inglaterra adotaram estratégias de vínculo escolar por meio das tecnologias digitais de informação e comunicação" (ARRUDA, 2020, p. 260).

No Brasil, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), por meio do Conselho Nacional de Educação (CNE), homologou parecer suspendendo as aulas presenciais e autorizando as atividades remotas a valer como carga horária, para os cursos de graduação. A Portaria nº 544 de 16 de junho de 2020 dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais, enquanto durar a situação de pandemia do novo Corona vírus, e revoga as Portarias MEC nº 343, de 17 de março de 2020, nº 345, de 19 de março de 2020, e nº 473, de 12 de maio de 2020, estendendo o prazo da autorização até 31/12/2020:

> Art. 1º Autoriza, em caráter excepcional, a substituição das disciplinas presenciais, em cursos regularmente autorizados, por atividades letivas que utilizem recursos educacionais digitais, tecnologias de informação e comunicação ou outros meios convencionais, por instituição de educação superior integrante do sistema federal de ensino, de que trata o art. 2º do Decreto nº 9.235, de 15 de dezembro de 2017. § 1º O período de autorização de que trata o caput se estende até 31 de dezembro de 2020. § 2º Será de responsabilidade das instituições a definição dos componentes curriculares que serão substituídos, a disponibilização de recursos aos alunos que permitam o acompanhamento das atividades letivas ofertadas, bem como a realização de avaliações durante o período da autorização de que trata o caput (MEC, junho de 2020).

Para o ensino básico nos níveis fundamental e médio, a responsabilidade da autorização das aulas remotas se deu por meio de cada unidade federativa do Brasil e, em cada município, de acordo com a responsabilidade exercida do poder executivo sobre o nível de ensino. Particularmente, em Minas Gerais, o Conselho Estadual de Educação (CEE-MG), por meio da Resolução nº 474 de 27 de março de 2020, estabeleceu a autorização do ensino remoto para os Ensinos Fundamental II e Médio, por prazo indeterminado, até que perdure a condição da pandemia do novo Corona vírus.

Essa é uma orientação da Lei de diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), reforçada pelo Decreto Federal 9235 de 2017, estabelecendo para situações emergenciais, como essa vivida pela pandemia, a possibilidade do ensino remoto.

---

[39] As Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) constituem-se numa proposta de currículo escolar elaborado no final dos anos 1990, amplamente disseminado pelo mundo com a popularização da internet. Tem como objetivo principal auxiliar na comunicação, utilizando para o processamento das informações *softwares*, *hardwares* e a internet.

Dessa forma, o ensino remoto realizado por meio das tecnologias digitais possibilitou prosseguir na construção do conhecimento e dos processos de ensino e aprendizagem para aqueles cidadãos que possui ferramentas adequadas e a internet para se conectar. Na pandemia, constitui-se como principal referência as políticas voltadas para a manutenção do setor educacional, uma alternativa para a manutenção das "escolas abertas" aos estudantes, de forma similar ao trabalho "*home office"* estabelecido a outros setores da sociedade.

Entretanto, surgem questões reflexivas: O que é o ensino remoto? Ele tem as mesmas características do ensino a distância? Trouxe ganhos ou prejuízos aos processos de ensino e aprendizagem na educação brasileira? Ele atende a todos os brasileiros da mesma maneira?

Trazendo alguns entendimentos e nuances sobre o ensino remoto, Arruda (2000) afirma que:

> Apesar dos dois termos serem amplamente difundidos como sinônimos, Educação a Distância torna-se mais abrangente, porque implica não somente no uso de sistemas *online*, mas também analógicos, como materiais impressos. [...] A educação remota *online* digital se diferencia da Educação a Distância pelo caráter emergencial que propõe usos e apropriações das tecnologias em circunstâncias especificas de atendimento onde outrora existia regularmente a educação presencial (ARRUDA, 2000, p. 264).

Assim, em nossa compreensão, o atendimento aos alunos por meio do ensino remoto diferencia-se da Educação a Distância tendo em vista que esta requer um planejamento anterior para os encontros síncronos e assíncronos (como fóruns de discussões) e, além disso, uma formação técnica planejada dos professores para lidarem com os limites e as potencialidades das tecnologias.

Dessa forma, a modalidade remota constituiu-se numa emergência e as aulas ocorreram de forma parecida com as aulas presenciais, mas sem uma formação ideal aos professores. Se, por um lado, ela permitiu a continuação da educação durante a pandemia, por outro levou a incidência de aulas quase que estritamente dialogadas e expositivas, tendo em vista a falta de experiência dos professores e um tempo inadequado para utilizar outras metodologias.

Pelo lado dos alunos, os estudantes tiveram que aprender a organizar uma rotina fora da escola e a realizar muitas atividades sem o auxílio do professor. Alguns estudantes têm o auxílio dos pais, porém outros não contam com essa estrutura familiar e, assim, não conseguem realizar as atividades sem nenhum auxílio, tendo em vista que alguns não possuem nem o acesso adequado às tecnologias e/ou à internet.

Outro fator a se considerar é a questão da estrutura para a realização das aulas remotas, ficando sua responsabilidade a cargo dos professores e alunos. Fatores externos como barulho, qualidade para acesso à rede mundial de computadores, exclusão digital causada pela falta de um computador ou mesmo de um celular adequado foram fatores que revelaram problemas estruturais para um bom ensino remoto, conforme observamos enquanto professor-pesquisador, durante as aulas remotas.

Outros fatores como a falta de acesso à internet e a um equipamento de tecnologia no Brasil, no nosso entendimento, acentuaram ainda mais a questão da desigualdade social para a Educação, nesse período de pandemia. Reportagens das mídias sociais mostraram essa realidade, como a reportagem de 30/06/2020, trazida por https://educação.uol.com.br

Outras estatísticas, como o levantamento do Comitê Gestor da Internet no Brasil (cgi.br), principal espaço internacional de discussão sobre a governança da internet, relata que, em 2018:

- ✓ 58 % dos domicílios no Brasil não tinham computador;
- ✓ 33 % não tinham acesso à internet;
- ✓ 85 % dos usuários de internet das classes sociais D e E, acessam a rede somente pelo celular;
- ✓ 13 % somente acessam a rede pelo celular e computador.

Dados mais recentes de 26/05/2020, trazidos por https://agenciabrasil.ebc.com.br apontam que temos, atualmente, cerca de 134 milhões de brasileiros usuários da internet correspondendo a aproximadamente 74 % dos brasileiros. Outros dados importantes afirmam que 97 % das pessoas que possuem curso superior acessam a internet, enquanto apenas 16% dos analfabetos ou que possuem apenas educação infantil usam a internet. Segundo a reportagem, embora a quantidade de acessos tenha aumentado, ainda persistem as diferenças de renda, gênero, raça e de regiões brasileiras.

Essas informações são parâmetros importantes para entendermos a questão do ensino remoto no Brasil e nos faz concluir que, para termos um ensino remoto de qualidade, é necessário dentre outros, ter uma boa ferramenta – equipamento de tecnologia (computador ou celular) e um acesso de boa qualidade para conexão junto à rede mundial de computadores.

Diante das reportagens, da leitura de artigos e das observações feitas em nossa pesquisa, constatamos que, para o Ensino Superior, foi possível um melhor aproveitamento e aceitação do ensino remoto, tendo em vista que os estudantes desse nível de ensino são pessoas jovens / adultas, encontrando-se em um nível de formação diferente dos estudantes do ensino básico.

Dados jornalísticos, em constante mutação, dão conta que a grande maioria das universidades federais e particulares aderiram ao ensino remoto. Na perspectiva de nossa pesquisa, a Instituição de Ensino Superior que mantém o curso de Licenciatura em Matemática, no qual foi realizada a pesquisa, aderiu ao ensino remoto assim que o MEC o autorizou.

Nesse contexto, trazemos algumas reflexões dos participantes da pesquisa e entendemos como professor-pesquisador que se faz urgentemente necessário a formação de professores e futuros docentes quanto às práticas pedagógicas e modalidades de ensino que envolvem as tecnologias digitais.

As questões levantadas sobre o ensino remoto também foram preocupações dos alunos que serão professores de Matemática, manifestadas por meio de falas ou citações no questionário e nos *chats* da plataforma *Google Meet:*

> Infelizmente, o momento vivido pela pandemia não nos conduziu a um jeito tranquilo de aprender as equações diferenciais. Apesar do trabalho ser em grupo, mas ocorrendo de forma virtual deixou um pouco a desejar. Quando estou em grupo e presencialmente tenho mais facilidade em aprender (Larissa, junho de 2020).
>
> Tive algumas dúvidas na resolução, mas creio que foi por ser a distância por causa dos acontecimentos atuais, pois quando estou em grupo tenho mais facilidade para entender determinado problema (Beatriz, junho de 2020)**.**
>
> Professor, também vi através da pandemia que o professor deve estar preparado para usar as tecnologias. Imagine se não existissem as tecnologias. Iríamos parar nosso curso? [...] Mas, também mostra outro lado que é a exclusão digital no nosso país. Nas aulas da rede pública, por exemplo, muitos alunos não têm computadores, acesso à internet e até mesmo um celular (Raina, junho de 2020).
>
> O que a Raina disse, faz sentido e nos faz pensar que é preciso que as escolas invistam nas tecnologias e que os cursos de licenciatura como o nosso, tenham disciplinas para capacitar o futuro professor a trabalhar com as tecnologias também (Beatriz, junho de 2020).
>
> É verdade, tenho uma irmã professora da rede pública estadual e ela fala que não teve capacitação para trabalhar com as aulas remotas, muitos alunos não têm computador e internet, e ainda o trabalho dela aumentou muito (Larissa, junho de 2020).

Assim, essa categorização nos trouxe parâmetros importantes que serviram para uma reflexão crítica acerca dos processos de ensino e aprendizagem, conforme observamos no diário de campo:

> Em nossa experiência e em sintonia com o que presenciamos nesse período de pandemia, harmonizamos com a percepção dos alunos no tocante à questão da formação continuada que o docente deve ter com relação às tecnologias. Fatores sociais enumerados pelos alunos participantes da pesquisa trouxeram à tona evidências do quanto nosso país é desigual e isso reflete diretamente na questão educacional. Entendemos que não basta simplesmente autorizar o ensino remoto e considerar que o problema da Educação está solucionado. É preciso que se tenha prioridades e que os números do próximo Censo, que ocorrerá em 2021, sirvam para trazer informações e indicativos para uma política pública que também encare a exclusão digital como um problema social. Ainda em nossa compreensão, a pandemia mostrou o valor dos professores e da Educação para o país. Mesmo sem uma formação e estrutura adequadas e com a Educação “meio que deixada de lado”, os professores colocaram as “mãos na massa” e não permitiram que as escolas ficassem fechadas de fato (Diário de Campo, junho de 2020).

Concluímos esta categoria, afirmando que já não é mais possível participar ativamente do mundo da Educação sem a utilização das tecnologias digitais. Essa é uma preocupação que, de certa forma, já vinha sendo manifestada por Carneiro e Passos (2014):

> O professor precisa estar em constante formação para caminhar pela zona de risco, pois as tecnologias e atividades exploratórias podem promover novas formas de abordar os conteúdos e fazem com que a imprevisibilidade, a insegurança e as dúvidas apareçam com maior frequência. [...] por isso, o professor precisa ver seus estudantes como parceiros no processo de ensino/aprendizagem e, portanto, estar sempre aprendendo (CARNEIRO & PASSOS, 2014, p. 112).

5.10. Matemática e Realidade: ressignificações e contribuições para a formação de um professor atento à sociocriticidade.

Essa categorização surgiu a partir da própria perspectiva da nossa pesquisa e também por entendermos que a Educação possui um papel primordial no desenvolvimento humano. Como já destacamos ao longo do presente trabalho, um dos pilares da aprendizagem é ampliar e/ou ressignificar conceitos e está associado diretamente às nossas necessidades humanas. Ser professor constitui-se, assim, em uma atitude de sociocriticidade, uma vez que o fato de mediar conhecimentos contribui para transformar a vida dos educandos, preparando-os para o exercício pleno da cidadania com criatividade e criticidade.

Vale ressaltar que o fato de nossa pesquisa acontecer com alunos que serão futuros professores de Matemática acentua ainda mais essa questão. Nos dias atuais, não é possível formar professores de Matemática sem os conhecimentos matemáticos, sem os conhecimentos didáticos e sem o conhecimento reflexivo para entender o papel da Matemática na sociedade. Entendemos que essa é uma contribuição de nossa pesquisa para futuros professores que poderão ser multiplicadores dessa ideia, uma vez que a formação acadêmica influencia diretamente nos saberes docentes de cada professor.

Assim, vislumbrando um olhar de como a Matemática pode se inserir na sociedade, entendemos que o professor de Matemática pode elaborar projetos relacionando os conhecimentos matemáticos a temas atuais e, por vezes, de interesse dos alunos, tal qual aconteceu em nossa pesquisa. Temas atuais como os transversais[40], ecológicos, ambientais e populacionais, dentre outros, têm o poder de proporcionar o significado que nosso referencial teórico trouxe por meio de Araújo (2007b, p. 110): "A formação matemática de estudantes não deve ser somente para instrumentalizá-los matematicamente, mas também para que eles possam refletir sobre o papel da Matemática na sociedade".

Nesse contexto, entendemos que, para que os alunos compreendam essa perspectiva de investigação crítica, é necessário que eles compreendam como ser autônomos na construção do conhecimento, nas tomadas de decisão e na análise das situações problema estudadas. Nessa perspectiva, a Modelagem mostrou que pode ser essa ponte favorecendo aos participantes o desenvolvimento de competências e habilidades nas soluções dos problemas propostas pelas atividades exploratórias, observando esses princípios.

Em particular, nessa categorização, buscamos compreender como os estudantes analisaram a proposta das atividades envolvendo conhecimentos matemáticos de EDO solucionando a contagem populacional e trazendo vozes críticas sobre os modelos matemáticos pesquisados durante as investigações.

Dessa maneira, consideramos à luz dos conceitos trazidos pela Educação Matemática Crítica, que as atividades propostas nessa pesquisa permitiram vislumbrar princípios de

---

[40] Temas como Ética, orientação sexual, relações de gêneros, meio ambiente, prevenções das doenças sexualmente transmissíveis e saúde, são considerados transversais pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

criticidade que foram além do conhecimento técnico e da aplicação dos fenômenos estudados. Certamente, a aprendizagem proporcionada por atividades desse naipe abarcou conhecimentos agregados à cultura e ao cotidiano dos alunos aliados ao caráter social da pesquisa. Ousamos dizer que, de fato, as atividades contribuíram para a formação cidadã dos futuros professores e para sua formação profissional.

Entendemos, assim, que as atividades exploratórias se caracterizaram por aspectos além dos conhecimentos matemáticos e da aplicabilidade ao cotidiano, atendendo à premissa da dimensão sociocrítica. Abaixo, trazemos algumas falas dos alunos no questionário da pesquisa:

> A aprendizagem e o ensino devem ter relação com o cotidiano do aluno para que ele possa ter maior entendimento. Temos que pôr em prática o ensino em relação com a cultura e os costumes de cada lugar. Esse trabalho de Modelagem trouxe essa característica (Larissa, junho de 2020).
>
> A matemática ensinada nas escolas, por muitas vezes, não é levada a associar à vida real do aluno. Por isso sempre há a famosa pergunta "Por que eu preciso aprender isso? " Ou "Onde eu vou usar isso? ". Mas como futura professora de Matemática eu percebo que essa relação pode muito bem ser aproximada e até mesmo ensinar a disciplina utilizando exemplos reais do dia a dia e dos contextos sociais (Luísa, junho de 2020).

Em consonância com essa abordagem, os participantes da pesquisa trouxeram reflexões sublinhando a importância que a Matemática tem nessa compreensão de entender o mundo, harmonizando-se com a perspectiva de Brandt, Burak e Klüber (2016, p. 5), para quem a Matemática "coloca-se como alternativa metodológica que traz para a sala de aula os problemas da vida real e da cultura dos alunos, para dialogarem com conhecimento universal, lógico e válido em todos os tempos e lugares da Matemática".

> Vimos que a Matemática através de suas "contas" traz números que deixam de ser simplesmente números e passam a ser reflexões, não somente para nós estudantes de Matemática, mas para a população de um modo geral. (...) nosso grupo levantou uma questão: Neste ano de 2020 acontecerão as eleições municipais. Por que o percentual de mulheres no Brasil é aproximadamente 51,8 %, segundo Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD do IBGE (dados de 2019) e, no entanto, o percentual de participação de mulheres nos cargos eletivos do país, sequer alcançam 15 %? (Dados do Correio Brasiliense de 08/03/2020) (G2, junho de 2020).
>
> O presente estudo nos mostrou que existe uma relação entre o crescimento da população e os diversos problemas sociais, que os modelos matemáticos não foram adaptados para calcular. [...] Com isso, destacamos a importância do

> Censo demográfico pois a partir dele, de acordo com as pesquisas que fizemos, é possível prever demandas de questões como saúde, alimentação para as populações futuras, segurança e muitos outros fatores (G3, junho de 2020).
>
> Eu já imaginava que a matemática estaria presente em nossas vidas e nas aplicações. Outras turmas do nosso curso de Matemática haviam mostrado isso. Mas, essa modelagem mostrou que ela está além dessa questão. Está na economia de um país, no controle de população, de alimentos e empregos para sociedade, está nas epidemias, ajudando a calcular probabilidades, entre outros (Dione, junho de 2020).

Essa também foi uma questão de observação do professor-pesquisador, conforme anotação de seu diário de campo:

> As questões sociais associadas aos números fornecidos pelo IBGE também foram preocupações dos alunos, trazidas em temáticas e aspectos associados à população brasileira como saúde, educação, moradia, condições de trabalho e de vida. Essas são nuances que a pesquisa trouxe na perspectiva de criticidade dos alunos (Diário de Campo, junho de 2020).

Os alunos também apresentaram características que nos vislumbram acreditar que os futuros professores de Matemática poderão utilizar a criticidade na sala de aula. Ressaltamos que, dos participantes da pesquisa, apenas 4 já exerceram a função docente em escolas públicas de Ensino Fundamental, mesmo que em substituições aos professores titulares, enquanto apenas 2 ainda não haviam concluído o estágio curricular obrigatório, à época da pesquisa. Ainda assim, algumas falas se destacaram

> Como futuros professores de Matemática, percebemos que a Modelagem Matemática nos trouxe uma mensagem: que o docente deve estar sempre atento para buscar novos conhecimentos, inclusive os não matemáticos. Aprendemos a parte algébrica das Equações Diferenciais na sala de aula e neste trabalho percebemos que não foi o suficiente para aprender de fato (G2, junho de 2020).
>
> A falta de capacitação dos professores acho que é um dos problemas para muitos professores não usarem metodologias diferentes como a modelagem. Por que percebi nesse trabalho sobre equações diferenciais que existe um planejamento e o professor deve estar disposto a enfrentar desafios e mudar radicalmente sua prática como estudamos nas disciplinas de didática (Dione, junho de 2020).
>
> Observei nas aulas que assisti no estágio, um caráter tecnicista que não atendia aos interesses dos alunos. Em minha opinião, isso indica que a formação desse professor aconteceu associada a conteúdos fragmentados da realidade. Sua

> formação o tornou assim e isso o levou a não considerar a interdisciplinaridade. Observei ainda um ensino básico preso ao livro didático e sem muitos meios para cativar e levar o aluno a ver a matemática por outro ângulo de aplicações e criticidade (Luísa, junho de 2020).
>
> Observei que a escola por onde passei como professor substituto está buscando despertar o interesse pelo conhecimento lógico matemático de forma criativa, lúdica e alegre. Onde o trabalho é feito com a utilização de jogos, brincadeiras, dinâmicas, músicas e histórias, que são ferramentas pedagógicas importantes. Na minha opinião a metodologia utilizada favorece o aprendizado e ainda leva o aluno a ser mais sociável e um cidadão mais consciente. Em minha prática profissional pretendo utilizar desses métodos (Larissa, junho de 2020).
>
> Creio que não utilizaria do mesmo método que vi na escola onde estagiei, porque como aluna também, eu sei o quanto o método de ensinar e aprender influencia nesse processo. Uma aula com uma dinâmica diferente ou utilizando outros meios materiais podem modificar o ambiente de aprendizagem na sala de aula. Além de tornar o ambiente mais leve e prazeroso para todos isso conduz a formação de um cidadão mais crítico no futuro (Luísa, junho de 2020).

Nesse contexto, acreditamos que a abordagem envolvendo a Modelagem contribuiu para a formação crítica desses futuros professores. Entendemos que serão capazes de atuar, dar suas opiniões e exercerem sua cidadania com criticidade em temáticas que podem ser solucionadas com os conhecimentos matemáticos. Esse entendimento aconteceu a partir de respostas dadas ao questionário descritas acima e que algumas, a seguir:

> Às vezes, a realidade e temas da sociedade são poucos explorados pelos professores e poderiam colocar a matemática muito mais no contexto o dia a dia do aluno. Mas, no meu estágio vi que o não domínio da aula pelo professor, o grande número de alunos na sala de aula, o tempo curto para outro tipo de aula também não favorece (Beatriz, junho de 2020).
>
> No meu ponto de vista é preciso relacionar mais a matemática em sala de aula à vivência do aluno, mas isso deve ser feito com critérios de forma a atender também os conceitos matemáticos. Jogos simplesmente, por exemplo, não resolvem o problema da metodologia como presenciei numa sala de estágio (Raina, junho de 2020).
>
> A Matemática, assim como as demais áreas da ciência, faz parte da natureza e dos contextos sociais. Por conta disso é completamente possível estudar a matemática utilizando situações e exemplos cotidianos, entretanto, creio que boa parte dos professores não utilizam disso. Onde fiz estágio, a matemática foi vista de uma maneira tradicional e percebi que os alunos tinham muita dificuldade para acompanhar. Por isso acho importante que as metodologias façam parte da formação do futuro professor (Bruno, junho de 2020).

Nesse contexto, entendemos que nossa pesquisa atendeu à abordagem sociocrítica e contribuiu, assim, para ressignificar e/ou construir **c**onceito**s** no tocante à criticidade dos alunos, como na questão citada pela aluna Raina quando levanta o lado recreativo e de entretenimento que muitas escolas usam na metodologia de jogos. Vale ressaltar que, em toda a pesquisa, seguimos a sugestão do referencial teórico embasado em algumas premissas da Educação Matemática Crítica, "postulando que a Matemática se apresente para uma decisão precisa nos debates sociais", como defende Araújo (2012).

Para que isso ocorresse, utilizamos atividades nas quais os alunos tiveram a necessidade de entrar em contato com fatos que os conduzissem a perceber a realidade social vivida fora dos muros da escola, avançando em direção ao conhecimento reflexivo que vai além do conhecimento técnico e de aplicação.

A intenção assim, foi gerar um ambiente de aprendizagem no qual os alunos pudessem interagir com o conhecimento munidos de suas experiências próprias, suas práticas cotidianas e seus conhecimentos matemáticos com a finalidade de resolverem a problemática trazida. Cremos assim, que as atividades contribuíram para entrar em contato com outras culturas e outros saberes que vão além dos conhecimentos matemáticos.

A seguir, traremos nossas considerações e conclusões acerca da pesquisa**.**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> “Porque nós estamos na educação formando o sujeito capaz de ter história própria, e não história copiada, reproduzida, na sombra dos outros, parasitária. Uma história que permita ao sujeito participar da sociedade”.
>
> Pedro Demo

Esta pesquisa nasceu a partir de ideias e ideais. No entanto, as ideias emergiram bem antes, conforme descrevemos no início da dissertação em nosso breve histórico discente e docente. Salientamos ainda que as ideias não terminarão ao fim desta pesquisa, tendo em vista que as questões sobre a aprendizagem e a prática docente estarão sempre em evidência na percepção do pesquisador e em outras pesquisas que hão de vir.

Diante das inquietações e da motivação advinda da vivência em sala de aula como docente, surgiu a questão de investigação:

Quais são as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática?

Essa questão investigativa conduziu nossa pesquisa e, na tentativa de respondê-la, levantamos alguns objetivos que acreditamos terem sido alcançados por meio das tarefas que nos dispusemos a realizar.

Para justificá-la na perspectiva de sociocriticidade, nossas discussões foram pautadas nas leituras que fizemos trazidas na revisão de literatura e em nosso referencial teórico, todas em consonância com a perspectiva da Educação Matemática, constituída como um campo acadêmico, de pesquisas e de práticas, que se preocupa com a Matemática, com o seu ensino e, em especial, com metodologias que podem contribuir para a aprendizagem dessa disciplina, ciência indispensável no desenvolvimento humano.

Dessa maneira, o referencial teórico direcionou nossa pesquisa para um entendimento acerca da questão da aprendizagem da Matemática e, em particular, das Equações Diferenciais, evidenciando que ela deve acontecer em um ambiente que atenda aos princípios do diálogo, interação e cooperação. Nesse sentido, a concepção trazida por Burak, em seus diversos trabalhos, da Educação Matemática como "uma ciência humana e social", foi uma lente para as descrições e análises das atividades exploratórias aplicadas em nossa pesquisa.

Logo após as fundamentações teóricas do trabalho, conduzimos a pesquisa de campo, que gostaríamos que tivesse contemplado atividades mais abertas, o que, entretanto, não foi possível em função da pandemia vivida no momento da pesquisa, conforme relatamos anteriormente. Porém, conseguimos realizar atividades exploratórias de interesse dos participantes da pesquisa, compostas por questões inerentes à contagem de população que trouxeram nuances para além dos números matemáticos proporcionados pela resolução das atividades envolvendo as EDO, apoiando-nos nos princípios da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática.

Vale ressaltar que as atividades de Modelagem Matemática geraram um enorme volume de dados que precisaram ser organizados e compreendidos pelo pesquisador. Isso aconteceu *a posteriori* em um processo continuado, identificando dimensões e categorias, e procurando atribuir significados às questões levantadas pelos alunos participantes da pesquisa. Para entendê-los melhor, elegemos 3 categorias de contribuições, conforme descrevemos anteriormente, no Capítulo 5. Suas descrições e análises nos proporcionaram a condição de identificar e analisar as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática numa perspectiva sociocrítica para a aprendizagem de Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática nosso objetivo geral da pesquisa.

Desse modo, com os princípios da pesquisa qualitativa e com dados analisados na perspectiva fenomenológica, sob um olhar crítico do pesquisador, contrastamos a questão de investigação e os objetivos da pesquisa com as ponderações e sugestões do referencial teórico. Destacamos que as descrições e análises apontaram respostas imprescindíveis por meio das argumentações e reações dos alunos a partir das atividades realizadas e nos auxiliaram a responder à questão investigativa e, assim, atender aos objetivos propostos para a pesquisa.

Mesmo com os encontros acontecendo de forma remota, a Modelagem mostrou que tem a sua "marca e identidade", pois proporcionou um ambiente aberto na busca ao conhecimento, dado o seu caráter interdisciplinar. Como o trabalho foi desenvolvido em grupos, potencializaram-se os princípios de aprendizagem quanto às questões da socialização, do diálogo e da cooperação. Esses são princípios também necessários na convivência em sociedade, atendendo às premissas da tolerância, do saber ouvir e do conviver em grupo, conforme pilares da Educação.

O ambiente de pesquisa proporcionado pela Modelagem atendeu aos interesses dos participantes e lhes trouxe, como futuros professores de Matemática, alternativas para tornar "o aluno, autônomo e o professor, mediador do conhecimento". Essa evidência se deu no momento das resoluções das atividades exploratórias por meio das observações do professor-pesquisador, das falas diretas dos alunos e de suas respostas dadas ao questionário e minimizou uma angústia do pesquisador que, ainda assim, persiste, descrita no início desta pesquisa.

Outra questão importante do ambiente de Modelagem consistiu em trazer para o contexto da sala de aula de Matemática, fatos do contexto atual, social e cultural de nossa geração, mesmo que alguns fatos não fizessem parte do cotidiano dos alunos. Inserir os alunos nos conhecimentos gerais foi uma preocupação da pesquisa, harmonizando com a perspectiva de Burak (2016, p. 34) que retrata ser necessário que os alunos tenham "contato com a realidade".

Portanto, a Modelagem mostrou que é possível construir conhecimentos matemáticos numa interação conteúdos matemáticos, contextos sociais e metodologias didáticas.

A Modelagem também franqueou as condições de conjecturar, não esperando respostas prontas, acabadas e únicas. Mostrou que o processo de busca pelo conhecimento é mais importante que o produto final. Adaptamos questões de análise crítica entre os modelos matemáticos, cujas resoluções aconteceram por meio das EDO como formas de conhecer a população futura, associando um olhar de criticidade na perspectiva de Burak delineada em nosso referencial teórico. Assim, a Modelagem se prestou a explorar os conhecimentos matemáticos e buscou entender também como os futuros professores se situam diante das questões de criticidade que a Matemática pode trazer.

Observamos, então, que várias ideias e pensamentos dos alunos se aproximaram das nuances da Educação Matemática Crítica, como verificamos nas falas, nas citações dos chats e nas respostas dadas ao questionário. Assim, em nossa perspectiva, consideramos que as atividades contribuíram para conectar a tecnicidade da Matemática com as questões cotidianas e com a emancipação que ela pode trazer, tornando-os cidadãos com uma criticidade maior. Nesse sentido, Burak (2016, p. 30) enfatiza que "a Modelagem Matemática contribui para tornar o professor mais reflexivo".

Ainda sobre a questão de criticidade, sublinhamos em nossa pesquisa alguns depoimentos dos alunos que revelaram a Matemática como importante por trazer à tona, temáticas sociais relativas à população, antes impensáveis em aulas de EDO, conforme trouxemos nas descrições e análises descritas no Capítulo 5.

Além disso, entendemos que as concepções dos alunos participantes considerando as falhas eventuais no processo de ensino remoto e as suas dificuldades durante o desenvolvimento das atividades, evidenciaram ações reflexivas nos processos de ensino e aprendizagem. O fato de um aluno, futuro professor de Matemática, entender que a Modelagem é uma alternativa importante, mas que sua implementação requer que o professor "saia de sua zona de conforto" é, sem dúvida, a evidência de que a pesquisa contribuiu para uma formação docente reflexiva. Entenderam que, se por um lado, o envolvimento com a Modelagem gera a satisfação pelo novo, por outro, traz inquietações pois a metodologia também requer cuidados no sentido de que o professor deve preparar-se melhor para sua realização.

Dentre os outros princípios da Modelagem, percebemos também que a descoberta de "inconsistências teóricas" nas respostas dadas pelos alunos devem ser objeto de reflexão do professor. Fomos inseridos no mundo da Matemática, desde cedo, como sendo uma ciência exata e que não aceita erros. No entanto, entendemos que, na construção do conhecimento, não estamos isentos às dificuldades e aos erros, em qualquer nível de escolaridade.

Assim, a Modelagem mostrou que se faz necessário que o professor fique atento às dificuldades de aprendizagem que, como destacamos nas análises dos dados, podem ocorrer por várias razões. Isso, tendo em vista que ele deve tratar as questões de aprendizagem de uma maneira central e mais abrangente.

Em nossa perspectiva, esse não é um ponto negativo da Modelagem, pois entendemos que quaisquer que sejam as metodologias praticadas pelo professor, fragilidades na aprendizagem existirão. Aliás, em nosso entendimento, torna-se um ponto positivo, pois podemos, a partir das dificuldades apresentadas, criar mecanismos e ações para reverter problemas na aprendizagem.

Ainda sobre a questão das dificuldades na aprendizagem, no contexto da nossa pesquisa, entendemos que cada aluno possui suas particularidades e experiências próprias diante dos conteúdos de Matemática. As dificuldades percebidas na resolução das atividades envolvendo as EDO aconteceram de formas distintas: na formalização de conceitos básicos matemáticos para encontrar as Leis de Malthus e de Verhulst, no entendimento dos conceitos de uma função e na interpretação dos gráficos das leis matemáticas de crescimento populacional.

Entendemos assim, que o ônus das dificuldades acontecidas nas resoluções das atividades de Modelagem não deve ser atribuído diretamente à aprendizagem das EDO. Sabemos que a disciplina EDO é oferecida nos cursos de exatas, após o aluno passar por uma formação de escolarização básica e por outras disciplinas, como o CDI. Essa também é uma das preocupações levantadas por Brandt, Burak e Klüber (2016, p. 5) ao conclamar os professores no Ensino Fundamental para "que ensinem aos seus alunos não somente conteúdos matemáticos puros, mas também valores, concepções e crenças sobre a Matemática".

Dessa maneira, entendemos que esta pesquisa traz sua contribuição para a Educação Matemática no Ensino Superior e, em particular, para os processos de ensino e aprendizagem das EDO, sugerindo uma reflexão que o ensino seja repensado sob alguns aspectos. Em nosso país de tamanho continental, de diversidades culturais e sociais diversas, a qualidade do ensino ainda é medida por exames padronizados e tem seu currículo linear, como argumenta D'Ambrósio (2014, p. 8): "[Ainda hoje] o ensino da Matemática é baseado nos componentes objetivos de uma sociedade conservadora".

Nossa pesquisa realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática teve a intenção de trazer reflexões sociais para seus participantes e assim de um certo modo diferencia-se de outras pesquisas com Modelagem para outras áreas de formação.

Nesse contexto, ousamos propor alguns temas para futuras pesquisas que permitam trazer outras reflexões:

- ✓ Formação continuada dos professores;
- ✓ A importância da pesquisa na formação de professores de Matemática;
- ✓ A Importância das tecnologias digitais na formação do professor de Matemática, frente às perspectivas de aprendizagem.

Finalizamos nossas considerações compreendendo que a Educação é capaz de combater as desigualdades sociais a partir do momento que oportuniza uma aprendizagem de qualidade para todos. Ela gera cidadania, é capaz de transformar vidas e, é por meio dela, que se tem a possibilidade do desenvolvimento pleno da sociedade. Nesse contexto, está a Matemática, uma lente com a capacidade de solucionar situações problemas e trazer entendimento para a sociedade dos seus contextos. Assim, podemos dizer que a Educação tem um compromisso humano com a esperança.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, M. V.; IGLIORI, S. C. B. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 718-734, 2013.

ALRO, H.; SKOVESMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira, 2002.

ALVES, M. B. **Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática:** Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática. 2008. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte.

ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L. **Cálculo.** Volume II. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ANTONIO MIGUEL, A., GARNICA, A. V. M., IGLIORI, S. B. C., D'AMBROSIO, U. **A Educação Matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização.** *Revista Brasileira de Educação*, n. 27, 2004.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática:** as discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 17-32, 2007.

ARAÚJO, J. L.; MARTINS, D. A. A oficina de modelagem #ocupaICEX: empoderamento por meio da matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** v.6. n. 12, p. 109-129, 2017.

ARAÚJO, S. A.; REIS, F. S. **Modelando sociocriticamente no ensino de Equações Diferenciais para a licenciatura em Matemática**. Produto Educacional, Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, 2020. Disponível em: https://ppgedmat.ufop.br/

ARRUDA, E. P. Educação Remota Emergencial: elementos para políticas públicas na educação brasileira em tempos de Covid-19. **Em Rede**, v. 7, n. 1, p. 257-275, 2020.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática:** concepções e experiências de futuros professores**.** 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

_____________. **Modelagem na Educação Matemática:** contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 24. 2001, Caxambu. Anais ... Rio de Janeiro: ANPED, p. 1-30, 2001. 1 CD-ROM.

_____________. **Modelagem matemática e a perspectiva sociocrítica**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2. 2003, Santos, Anais... São Paulo: SBEM, p. 1-13, 2003. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Modelagem matemática na educação brasileira:** pesquisas práticas educacionais**.** Recife: SBEM, 2007.

BARROS FILHO, A. A. **A resolução de problemas físicos com Equações Diferenciais Ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem:** análise gráfica com o software *Mapple.* 2012. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte.

BASSANEZI, R. C. **Ensino/aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2009.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa**: significados e a razão que a sustenta. São Paulo: Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativa, 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelación Matemática y los desafíos para ensenar matemática. **Educación Matemática**, v. 16, n. 2, p. 105-125, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v.2, n. 2, p. 7-32, 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S**. Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Trad. Iorio, V. M. 9ª ed. LTC, Rio de janeiro, 2010. p. 60-69.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática,** Rio de Janeiro: Blucher, 2012.

BRANDT, C. F; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.). **Modelagem Matemática:** perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**.** Ponta Grossa: UEPG, 2016.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1999.

BUÉRI, J. W. S. **Análise de fenômenos físicos no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem em cursos de Engenharia**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte.

BURAK, D. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino/aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

____________. **A Modelagem Matemática e a sala de aula.** In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004. Anais... Londrina: UEL, s.n., 2004. 1 CD ROM.

____________. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v.1, n. 1, p. 10-27, 2010.

____________. Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. In: BRANDT, C. F; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.). **Modelagem Matemática:** perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**.** Ponta Grossa: UEPG, p. 17-40, 2016.

BURAK, D.; ARAÇÃO, R. M. R. **A Modelagem Matemática e relações com a aprendizagem significativa**. Curitiba: CRV, 2012.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Considerações sobre a Modelagem Matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004. **Anais ...** Londrina: UEL, s.n., 2004. 1 CD ROM.

__________________________. Educação Matemática: Contribuições para a compreensão de sua natureza. ***Acta Scientiae***, v. 10, p. 93-106, 2008.

CABERLINI, G. S. F.; GARCIA, T. M. R. Práticas de Ensino Exploratório em Matemática: implicações para a aprendizagem dos alunos e para o trabalho docente. **Os desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva do professor.** Curitiba: Cadernos PDE, v. 1, p. 1-41, 2016.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades. **REVEDUC**, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre Educação Matemática. Campinas: UNICAMP, 1986.

_______________. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2014.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

CAMPOS, D. F. **Análise de uma proposta para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I surgida na UFMG após o REUNI usando o testbench de Engeström como modelo de aplicação da teoria da atividade em um estudo de caso.** 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.

CAMPOS, I. S. **A divisão do trabalho no ambiente de aprendizagem de Modelagem Matemática segundo a Educação Matemática Crítica.** 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2004.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa Qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1999.

GOMES, R. A Análise de dados em Pesquisa Qualitativa. In: MINAYO, M. C. S. (Org.); DESLANDES, S. F.; CRUZ NETO, O.; GOMES, R. Pesquisa Social: Teoria, Método e Criatividade. Petrópolis: Vozes, p. 67-80, 2004.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008.

________________________ . Sobre a pesquisa qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 862-882, 2012.

LACHINI, J.; LAUDARES, J. B. (Orgs.) **A Prática Educativa sob o olhar dos Professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

LAUDARES, J. B.; MIRANDA, D. F.; REIS, J. P. C.; FURLETTI, S. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace:** análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas – atividades com *softwares* livres. Belo Horizonte: Artesã, 2017.

LEANDRO, S. M.; CORRÊA, E. M. **Ensino Híbrido (Blended Learning):** potencial e desafios no ensino superior. 2018. Disponível em: <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/24>. Acesso em: 10 mar. 2020.

MAOR, E. E. **A história de um número**. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIORIM, M. A. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORÁN, J. **Mudando a Educação com metodologias ativas**. UEPG, 2015.

NASSER, L. Transcrição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo? In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Pirenópolis, 5, 2012. **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, s.n., 2012. 1 CD-ROM.

OLÍMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de conhecimentos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. O. H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

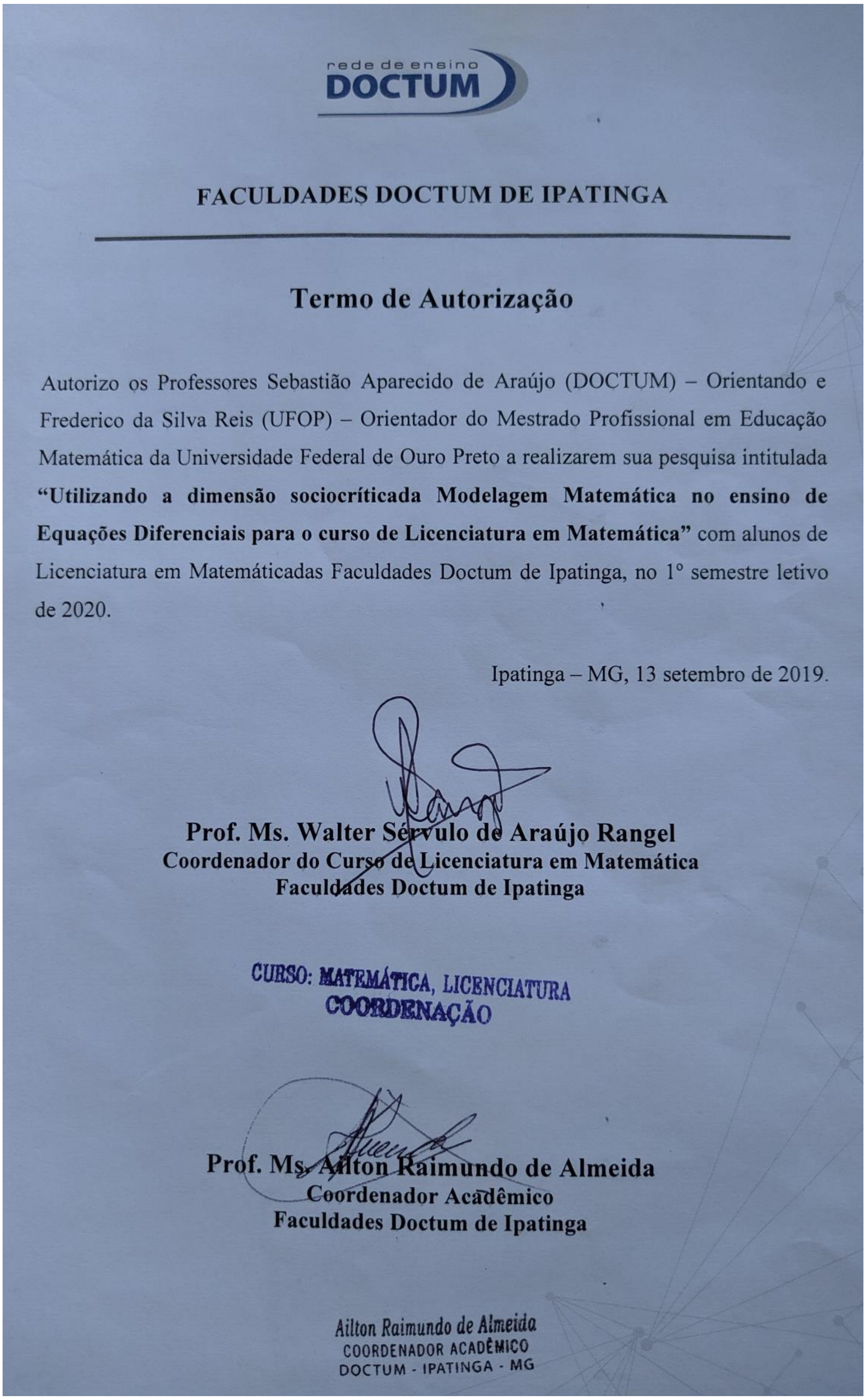
SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2006.

SKOVSMSE, O. **Educação Crítica:** incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

VIANA, M. C. V. O Movimento de Matemática Moderna e suas implicações no ensino de 1º e 2º graus no Brasil. **Escritos sobre Educação,** v. 3, p. 27-40, 2004.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais – Vol. I. Título original: Differential Equations With Boundary – Value Problems, 3ª ed.** Trad. Zumpano, A. Pearson – Makron Books – São Paulo, 2001. p. 38-68.

ANEXO 1: TERMO DE AUTORIZAÇÃO



FACULDADES DOCTUM DE IPATINGA

Termo de Autorização

Autorizo os Professores Sebastião Aparecido de Araújo (DOCTUM) – Orientando e Frederico da Silva Reis (UFOP) – Orientador do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto a realizarem sua pesquisa intitulada **"Utilizando a dimensão sociocríticada Modelagem Matemática no ensino de Equações Diferenciais para o curso de Licenciatura em Matemática"** com alunos de Licenciatura em Matemáticadas Faculdades Doctum de Ipatinga, no 1° semestre letivo de 2020.

Ipatinga – MG, 13 setembro de 2019.

Prof. Ms. Walter Sérvulo de Araújo Rangel
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática
Faculdades Doctum de Ipatinga

CURSO: MATEMÁTICA, LICENCIATURA
COORDENAÇÃO

Prof. Ms. Ailton Raimundo de Almeida
Coordenador Acadêmico
Faculdades Doctum de Ipatinga

Ailton Raimundo de Almeida
COORDENADOR ACADÊMICO
DOCTUM - IPATINGA - MG

APÊNDICE 1: ATIVIDADES DE MODELAGEM 1

Disciplina: **Equações Diferenciais Ordinárias**

Curso: **Licenciatura em Matemática** Turma: 7º Período Data: 09/06/2020

Natureza das atividades: Resolução de problemas da realidade relacionados a crescimento populacional, utilizando Equações Diferenciais de 1ª ordem.

Alunos: ____

____

____

____

INSTRUÇÕES IMPORTANTES:

Essa atividade de Modelagem é para ser feita em grupo. Entretanto, apenas *uma* pessoa do grupo deverá fornecer a resposta contendo o nome das outras pessoas de seu grupo.

Ela será enviada no e-mail da turma: matematica.mat2017@outlook.com na data da realização das atividades e deverá ser devolvida, na mesma data após sua resolução, no e-mail: seaparaujo@hotmail.com. A devolução deverá ser por meio de fotos das resoluções, que deverão ser feitas em folhas em folhas de papel A-4 com as resoluções à caneta, por questão de legibilidade.

Lembre-se que o objetivo principal não é verificar uma correta solução matemática e técnicas de resolução de equações diferenciais. O objetivo é averiguar como se dá a linha de raciocínio de cada grupo ao resolver o problema em questão. Dessa forma, é natural, além de esperado, que as respostas de cada grupo sejam *diferentes* e podem ser até mesmo bem diferentes! As respostas serão melhores quanto mais claras e objetivas forem. Não se limitem nas respostas.

Espero que fiquem atentos às normas contra plágios e cópias de trabalhos de colegas e/ou da internet, que serão verificadas e levadas em conta na pontuação final. Por outro lado, com a devida cautela, fiquem à vontade para usar meios disponíveis, sejam físicos ou eletrônicos, para consultarem ao realizar a atividade, tais quais livros, apostilas, internet, dentre outros.

Mantenham uma boa comunicação com cada um do grupo. Como sugestão, criem um grupo no *WhatsApp* e peço para enviarem os "*prints*" de suas observações e discussões do grupo, junto com as considerações e as respostas dadas.

Bom trabalho!

Que ele nos conduza a ótimas reflexões sobre a Matemática!

Obrigado pela colaboração!

Prof. Sebastião Aparecido, de Araújo

PROBLEMA 1: CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Problema de Variação Populacional – Lei de Malthus

Problema de valor de Contorno – PVC e Problema de Valor Inicial – PVI

(Extraído e adaptado de Laudares et al (2017))

ENUNCIADO:

DADOS:

(viii) Uma população se desenvolve proporcionalmente à população atual, segundo a lei de Malthus;

(ix) Sabemos que a população inicial é de 5000 habitantes e, 10 anos depois, é 8000.

QUESTÕES:

(x) Determine a população em qualquer tempo;

(xi) Determine os modelos de equações da população;

(xii) Analise a variação da população;

(xiii) Esboce os gráficos do modelo;

(xiv) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações.

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO:

Passo 1:

1.1). Identifique as variáveis para a solução do problema.

1.2) A variação da população, segundo a Lei de Malthus pode ser expressa matematicamente pela equação (1): $\frac{dP}{dt} = k.P$

Passo 2:

Descreva as condições inicial e de contorno dadas no problema.

Passo 3:

Determine a população em qualquer tempo, encontrando outra equação (2), exponencial, a partir da equação (1).

Passo 4:

Por meio dos modelos das equações da população encontradas, determine:

d) Velocidade da variação da população em função do tempo pela equação (1);

e) Velocidade de crescimento da população em função do tempo pela equação (2);
f) Variação da população em função do tempo.

Passo 5:

Analise o crescimento da população por meio do modelo matemático proposto.

Passo 6:

Esboce os gráficos do desenvolvimento da população.

Passo 7:

7.1). Como suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado, responda:

g) Por que o gráfico da equação (1) é uma reta?
h) Por que o gráfico da equação (1) é crescente?
i) Por que o gráfico da equação (1) é positivo?
j) Do desenvolvendo da equação (1) surge uma outra equação (2), exponencial. Analise o gráfico dessa equação quanto à natureza da derivada;
k) Verifique que a equação do gráfico da equação (2) é crescente exponencialmente. Por quê?
l) Verifique que para um tempo crescente, a população será sempre crescente e não há limite. Por quê?

7.2) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto comparando os gráficos e as equações.

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Malthus.

APÊNDICE 2: ATIVIDADE DE MODELAGEM 2

Disciplina: **Equações Diferenciais Ordinárias**

Curso: **Licenciatura em Matemática** Turma: 7º Período Data: 16/06/2020

Natureza das atividades: Resolução de problemas da realidade relacionados a crescimento populacional, utilizando as Equações Diferenciais de 1ª ordem.

Alunos: ____

____

____

____

Prof. Sebastião Aparecido, de Araújo

PROBLEMA 2: ANÁLISE DO MODELO DE DEMANDA E CRESCIMENTO POPULACIONAL

Lei de Malthus – Lei de Verhulst

Problema de Valor Inicial – PVI

(Extraído e adaptado de Laudares et al (2017))

ENUNCIADO

DADOS:

(i) Leis de Demanda e Crescimento Populacional

Lei de Malthus: A Lei de Malthus é que a taxa instantânea de variação de uma população P é proporcional à população presente no instante t considerado, isto é, $\frac{dP}{dt} = kP$, cuja solução é da forma: $P = C.e^{kt}$ conforme visto no Problema 1.

Lei de Verhulst: Observando a Lei de Malthus e sua equação modelo, que admite um crescimento ilimitado (exponencial) para a população e, ainda, manipulando dados estatísticos da época, Verhulst percebeu que uma população, na vida real, não cresce de forma ilimitada. Ele constatou que, em situações normais, as regiões habitáveis (cidades, estados e países) tendem a sofrer o efeito da concentração populacional e, então, ele assumiu que "a taxa relativa de crescimento de uma população decresce linearmente, considerando a evolução da população no tempo". Isso correspondeu a assumir k, na equação de Malthus, como uma função linear decrescente. Significa considerar k como um fator de redução do crescimento ilimitado da população, provocado, na vida real, pela escassez e disputa por recursos naturais. Portanto, o modelo logístico para a Lei de Verhulst é: $\frac{dP}{dt} = (a - bP)P$

(ii) Num instante inicial t = 0, a população é dada por $P = P_0$.

QUESTÕES:

(iii) Determine a função P = P(t), solução analítica da Equação Diferencial de Verhulst;
(iv). Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst;
(v). Esboce os gráficos do modelo de Verhulst;
(vi). Descreva num pequeno texto os modelos de Malthus e Verhulst comparando os gráficos e as equações.

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO:

Passo 1:
1.1). Identifique as variáveis para a solução do problema;
1.2). Expresse matematicamente a Lei de Malthus;
1.3). Expresse matematicamente a Lei de Verhulst.

Passo 2:

Descreva a condição inicial dada no problema.

Passo 3:

Determine o modelo de Verhulst, que é uma Equação Diferencial de 1ª ordem do tipo separação de variáveis.

Passo 4:

Analise as condições para o traçado do esboço do modelo de Verhulst.

Passo 5:

Esboce o gráfico do modelo de Verhulst.

Passo 6:

A partir do seu entendimento do comportamento da demanda e crescimento populacional, escreva um texto comparando os gráficos e as duas Leis: de Malthus e de Verhulst.

Passo 7:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir da Lei de Verhulst.

Passo 8:

Analise criticamente o Problema de Variação Populacional a partir de leis matemáticas e outros instrumentos estatísticos utilizados no Brasil.

APÊNDICE 3: QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES

Gostaria de conhecê-lo um pouco melhor e peço a sua contribuição, respondendo às questões abaixo, sabendo que **todas as suas respostas serão mantidas de forma anônima!**

As questões buscam, de modo geral, compreender aspectos inerentes ao ensino da Matemática e sua relação com o cotidiano das pessoas no seu contexto social e cultural.

A primeira parte visa conhecer um pouco sua experiência docente e algumas de suas percepções, enquanto a segunda visa avaliar as Atividades de Modelagem realizadas.

Agradeço pela participação! **Prof. Sebastião Aparecido, de Araújo**

1ª Parte). Conhecendo sua experiência docente e suas percepções:

1) Ao fazer o Estágio Curricular obrigatório, o que você observou sobre o ensino de Matemática praticado nas escolas onde estagiou?

2) Se fosse o (a) professor (a) titular da (s) turma (s) nas quais estagiou, você utilizaria a mesma metodologia para o processo de ensino/aprendizagem da Matemática? Justifique!

3) Você tem alguma experiência como Professor (a) de Matemática? Caso afirmativo, por quanto tempo e em que níveis de ensino?

4) Como futuro (a) professor (a) de Matemática, como você percebe a relação entre a Matemática ensinada nas escolas e a realidade das pessoas no dia a dia?

5) Particularmente, como você utiliza a Matemática aprendida em sua formação básica e superior no seu cotidiano?

2ª Parte) Avaliando as Atividades de Modelagem realizadas:

6) Ao longo do seu curso de Licenciatura em Matemática, você já havia estudado ou utilizado a Modelagem Matemática em outras disciplinas cursadas? Quais?

7) A realização das Atividades de Modelagem contribuiu para ressignificar seus conhecimentos matemáticos em relação às Equações Diferenciais? Em quais aspectos?

8) Na realização das Atividades de Modelagem envolvendo as Equações Diferenciais ocorreram algumas dificuldades? Explicite!

9) Em sua percepção, quais são os eventuais aspectos positivos e os aspectos negativos da Modelagem Matemática?

10) Em sua futura prática docente, você considera utilizar a Modelagem Matemática como alternativa metodológica em suas aulas? Em que conteúdos e níveis de ensino?