APRENDENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio

Adriana Luziê de Almeida

Ana Cristina Ferreira

Introdução

A Análise Combinatória é um dos núcleos centrais da matemática discreta e parte importante da Probabilidade. Constitui-se em um amplo campo de investigação com intensa atividade devido às numerosas aplicações em diferentes áreas (ex. Geologia, Química, Gestão Empresarial, Informática e Engenharia). Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1) "*os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias*".

Contudo, a realidade do ensino e da aprendizagem desse tema, nas classes da Educação Básica, carrega consigo inúmeros obstáculos.

A partir das próprias experiências docentes das autoras, do contato com colegas, da participação em cursos de extensão e leituras e reflexões pessoais, elaborou-se um projeto de Mestrado que, atualmente, encontra-se em fase inicial.

Com este estudo pretendemos responder à seguinte questão: *que contribuições, uma proposta de ensino embasada na resolução de problemas e na investigação matemática em sala de aula, pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória na Educação Básica*?

O propósito dessa pesquisa é construir, implementar e analisar uma proposta de ensino de Análise Combinatória em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. Tal proposta fundamenta-se na resolução de problemas e investigação matemática. Para desenvolvê-la, realizou-se um estudo da literatura acerca do ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, principalmente, no sentido de identificar os principais obstáculos e formas de enfrentá-los. A seguir, uma proposta de ensino foi elaborada e aplicada. Os dados foram coletados a partir de notas de campo (diário da pesquisadora), gravações em áudio e vídeo e registros produzidos pelos alunos.

Na fase atual de desenvolvimento da pesquisa, a aplicação da proposta (estudo piloto) em uma classe de 2º ano do Ensino Médio foi concluída e os dados coletados estão sendo analisados.

Nesse artigo, o foco principal está na apresentação do estudo piloto. Antes, porém, comentamos brevemente algumas das leituras feitas até o momento.

Ensino e aprendizagem da Análise Combinatória

Ensinar Análise Combinatória em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio tem sido um problema difícil de resolver para muitos professores de Matemática. Buscar subsídios que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo presente na matriz curricular de várias escolas de Ensino Médio e até mesmo em algumas do Ensino Fundamental é uma necessidade que se verifica não apenas no Brasil, mas em diversos países.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam, entre outros conteúdos, o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (PCN, 1998, p.257).

Em conversa informal com professores de Matemática e baseando-nos em experiências pessoas, observamos que é comum o ensino da Análise Combinatória através de fórmulas ou padronizações de resoluções. É verificável também que a aprendizagem, muitas vezes, não é alcançada a partir destes métodos. Desta forma, parece necessário romper-se com modelos tradicionais e implementar novas propostas.

Deixar que o aluno construa suas próprias resoluções através da análise e discussão de problemas é uma alternativa para o ensino de Análise Combinatória.

Os PCN (1998, p. 266) orientam:

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Várias pesquisas (BATANERO, 1997; ESTEVES, 2001; ROA e NAVARRO-PELAYO, 2001) evidenciam que iniciar o trabalho com Análise Combinatória no Ensino Fundamental fazendo uso da construção de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo, pode facilitar a abordagem desse assunto no Ensino Médio. Os alunos que apresentam maiores dificuldades com relação ao tema são os que nunca tiveram contado com o conteúdo desde as séries iniciais.

Ao trabalhar com tal assunto é importante analisar as etapas seguidas pelos alunos para solucionar as situações-problema e valorizar todos os modos de pensamento (BATANERO, 1997). Criar situações de discussões, onde o aluno tem a oportunidade de expor suas idéias, propor sugestões, questionar e refletir, proporciona ao mesmo, uma auto-confiança para resolver as situações propostas. Além disso, faz com que o aluno não dê importância ao fato de errar e sim no que acarretou o erro.

Segundo Batanero (1997) os alunos apresentam falhas do tipo aritmético. Os alunos se confundem sobre o tipo de elementos que se combinam, mas sabem identificar a configuração combinatória pedida em uma situação-problema, compreender a ordem, a repetição e o enunciado do problema, são capazes de enumeração sistemática, generalização e identificação da combinatória adequada.

É importante dar ênfase na ordem e repetição, aplicando situações-problemas diversas que contenham estes dois aspectos.

O uso de modelos, proporcionando atividades práticas com os alunos contribui para uma melhor compreensão. O uso de analogias também é um fator contribuinte (RIGOLINO e HARIKI, 1996 apud ESTEVES, 2001).

Piaget e Inhelder (1951 apud ESTEVES, 2001) indicam que para crianças de 4 a 7 anos é recomendável trabalhar o começo da seriação a nível preparatório. Essas crianças estão na etapa sensori-motora. Entre 7 a 11 anos recomenda-se que se inicie uma quantificação sistemática, com a realização de experimentos práticos. E para 11-12 anos em diante aconselha-se a combinação metódica e completa. Os alunos descobrem um sistema, de modo que, nenhuma associação seja esquecida.

Outro aspecto importante é a dinâmica de sala de aula. Estimular o trabalho em conjunto proporciona muitos benefícios aos alunos. Eles aprendem a questionar, trocam idéias uns com os outros e aprendem a trabalhar coletivamente. A experiência coletiva contribui para a individual e favorece a cooperação entre indivíduos. Mas é necessário tornar os alunos aptos a este tipo de trabalho, pois alguns alunos, deixam as tarefas por conta do grupo e não permanecem ativos nas atividades, não assimilando o conteúdo. O estudo individual também é importante para que o aluno tenha a capacidade de trabalhar por si só.

Para Esteves (2001), é importante valorizar os diferentes tipos de representações. As representações facilitam a visualização do processo utilizado para chegar a formalização. Facilitam a percepção de objetos abstratos que não são diretamente compreensíveis, pois representam um ambiente próximo do indivíduo. Segundo Vergnaud (1998 apud ESTEVES, 2001), a representação é um reflexo da realidade, um meio para prever efeitos reais e calcular as ações que se vão realizar. Nesse sentido, trabalhar com materiais concretos facilita a compreensão por parte do aluno, além de estimula-lo.

Esteves (2001) destaca que o relacionamento dos alunos com o professor, tipos de atividades propostas e o ambiente de trabalho são alguns, dentre os diversos fatores que podem influenciar no aprendizado, visto que as atividades devem ter significado e fazer sentido para os alunos e estes últimos têm de se sentirem confiantes perante o professor para que o aprendizado flua de forma favorável. O papel do professor é ajudar o aluno a desenvolver o seu repertório de esquemas e representações.

Para que o aluno não apenas memorize o conteúdo e depois de algum tempo esqueça-o, se faz necessário que o aprendizado aconteça de forma gradativa, com a compreensão do aluno. Para que ele chegue ao conhecimento por si só, vendo sentido no que está aprendendo aconselha-se aplicar soluções problemas para que o aluno resolva sem ter um conhecimento prévio do conteúdo. Ele deve refletir a respeito do problema e analisar uma estratégia para resolvê-lo.

Roa e Navarro-Pelayo (2001) ressaltam que a combinatória é um grande campo de investigação e tem inúmeras aplicações em diversas áreas, como também, implicações em outros ramos da Matemática. Para os autores, este conteúdo é um componente essencial do pensamento formal e um pré requisito importante para o raciocínio lógico geral. E por estas razões, a combinatória foi incluída nos currículos de Matemática.

A combinatória não é apenas uma técnica de cálculo de probabilidade, existe uma relação entre as duas. O raciocínio combinatório tem grande importância na probabilidade. Os autores afirmam que é usual ensinar conteúdo combinatório dentro da probabilidade, por exemplo, quando se descreve o espaço amostral de um experimento é utilizado raciocínio combinatório e se o aluno não tem uma boa capacidade para lidar com esta última, terá dificuldade em compreender a probabilidade.

Muitos modelos de distribuição de probabilidade são expressos por meio de operações combinatórias, por exemplo, a distribuição binomial. Em consequência disto, muitos erros de probabilidade podem ter relação com a falta de raciocínio combinatório.

Em sua revisão da literatura, Roa e Navarro-Pelayo (2001) discutem várias investigações acerca das principais estratégias utilizadas pelas crianças para resolver os problemas. As mais destacadas são: procedimentos de tentativa; buscar uma formulação de todas as combinações; o uso de um elemento constante a partir do qual se faz as demais configurações, podendo ser completo ou incompleto.

Hadar e Hadass (1981 apud ROA e NAVARRO-PELAYO, 2001) evidenciam que as dificuldades típicas dos alunos ao resolver problemas combinatórios são:

a. Dificuldade em reconhecer o conjunto correto a enumerar;
b. Escolher uma notação apropriada, o que é agravado com diferentes textos utilizando diferentes notações;
c. Fixar uma ou mais variáveis;
d. Generalizar a solução.

Para Roa e Navarro-Pelayo (2001), as dificuldades em relação a problemas combinatórios aumentam com o tamanho da solução. Nos problemas mais simples, que necessitam de apenas uma operação combinatória, o índice de acertos é maior. Uma das principais dificuldades é interpretar qual tipo de elementos combinar, qual esquema combinatório utilizar e assim ver se a ordem importa e se há repetição.

No que se refere ao tipo de elementos, segundo os autores, os estudantes identificam corretamente e a repetição que causa uma interferência. A maioria dos alunos interpretam a ordem corretamente e o erro está preferentemente ligado a combinação. A maioria dos alunos, também acertam na repetição e o erro se dá quando a mesma é ignorada. Os métodos mais usados são o de enumeração e uso de fórmulas e muitas vezes usa-se um para validar o outro. O uso de diagrama de árvores é escasso. É utilizado técnicas de resolução de problemas como traduzir o problema a outro equivalente, fixar variáveis, regras de soma, produto e cociente e decompor o problema em subproblemas.

De acordo com Roa e Navarro-Pelayo (2001), seria necessário uma proposta de ensino que não centrasse nas definições formais, mas que levasse em conta os diferentes problemas da combinatória, as estratégias e os modos de raciocínio. É sugerido que introduza idéias da regra de soma, produto e cociente; que utilize uma metodologia baseada em jogos manipulativos e diagrama de árvores.

A partir de tudo isso, elaboramos nossa proposta de ensino.

A proposta de ensino

Na elaboração da proposta de ensino, procuramos analisar, previamente, aspectos que consideramos importantes. Um destes aspectos é a preparação do ambiente, ou seja, sua introdução. É importante que o aluno queira participar das atividades e para tanto, o professor precisa deixar bem claro o valor do trabalho a ser realizado, como uma oportunidade de expor, discutir e desenvolver idéias e que resolver problemas pode ser uma atividade prazerosa. É preciso garantir ao aluno a possibilidade de ser ouvido e ter suas idéias valorizadas. Fazer do aluno um parceiro no desenvolvimento do trabalho pode levá-lo a se sentir motivado a realizar, com empenho, as atividades propostas.

A comunicação com a comunidade escolar é outro fator a ser considerado. Principalmente se o tipo de trabalho proposto não é usual na instituição. Para que haja garantia da realização das atividades é necessário contar com o apoio da Escola. Informar sobre os procedimentos, a importância e os objetivos do trabalho é uma obrigação do professor.

Outro aspecto importante é a escolha das questões. Estas precisam representar situações interessantes e desafiadoras e devem contemplar o conteúdo referente ao raciocínio combinatório. Quanto ao nível de dificuldade, inicialmente, buscar uma graduação crescente e em seguida, variar, alternando, questões com graus diferentes de complexidade. Iniciar com questões mais simples ajuda a motivar a realização da atividade e a variação do grau de dificuldade busca promover sua continuidade. Se o aluno percebe que o grau de complexidade está aumentando é possível que se sinta desmotivado a tentar resolver a próxima se não tiver sido bem sucedido em uma questão, mas se o grau de dificuldade é desconhecido é possível que ele, pelo menos, tente.

Procuramos determinar qual seria o papel do professor durante a realização das atividades. Ficou definido que ao professor caberá a função de incentivar os alunos a interpretar, criar estratégias, argumentar, trabalhar em equipe, explicar de modo claro e justificar suas idéias; acompanhar o trabalho dos grupos questionando suas conjecturas; verificar como o trabalho está sendo realizado; observar os sinais dos alunos como, por exemplo, sinais de cansaço ou desânimo, buscando atuar de forma a garantir a continuação do trabalho; ajudar, através de seus questionamentos, o desenvolvimento do raciocínio combinatório; apoiá-los, dando-lhes autonomia e valorizando suas idéias, bem como, avaliar seu progresso.

A preocupação com a elaboração, a aplicação e avaliação de um teste diagnóstico também foi um aspecto importante na elaboração da proposta. Ficou definido que o teste seria aplicado em dois momentos. No primeiro, como um pré-teste, aplicado antes da realização das atividades, com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios, ou seja, verificar como se processa o raciocínio combinatório destes alunos que ainda não entraram em contato com o conteúdo de Análise Combinatória no 2º ano do Ensino Médio. No segundo, como um pós-teste, ao final do desenvolvimento do trabalho, incluindo as apresentações e discussões das resoluções das questões propostas, a fim de verificar se houve e quais foram as contribuições decorridas após a realização das atividades.

As atividades

A proposta elaborada apresenta duas atividades compostas por situações-problemas. Na primeira, o aluno é convidado a identificar o número de peças que formam um jogo de dominó completo. Na segunda, recebe uma lista com problemas diversos para discutir e resolver. Em ambos os casos, a discussão e a apresentação das idéias devem ser realizadas em grupos de quatro ou cinco alunos. O objetivo de dividi-los em grupos é proporcionar-lhes a oportunidade de discutir as questões com seus pares de forma a desenvolver sua capacidade de argumentação e socialização de idéias. Estas discussões serão incentivadas almejando-se que sejam suficientes para que os alunos encontrem a validação de suas estratégias dentro do próprio grupo e desta forma sintam menos necessidade de consultar o professor.

As resoluções serão socializadas ao final de cada atividade. Cada grupo apresentará, para o restante da turma e para o professor, os registros de suas idéias.

As questões propostas contemplam situações que envolvem o princípio fundamental da contagem, o cálculo de arranjos, permutações e combinações.

O papel do professor neste processo é de questionador. Cabe a ele acompanhar o trabalho dos grupos ouvindo suas idéias e discutindo-as com eles.

O estudo piloto

Entendemos que seria adequada a implementação e análise da proposta em um projeto piloto com o objetivo de verificar como os alunos a recebem, acompanhar seu desenvolvimento, detectar possíveis falhas para que, se necessário, realizar alterações.

Esta proposta foi testada em uma escola particular na sua única turma de 2º ano do Ensino Médio, de trinta e um alunos.

A direção da Escola, quando comunicada da intenção de realização do projeto, respondeu positivamente. Os alunos foram convidados a participar, em uma conversa informal com a professora onde foram informados os objetivos do trabalho e os procedimentos propostos. Também foi comunicada a intenção de se gravar as intervenções da professora nas discussões dos grupos e filmar as apresentações para estudos posteriores. Todos os alunos aceitaram participar do projeto e concordaram com todos os procedimentos.

Foi aplicado o pré-teste. Este continha quatro questões. A primeira poderia ser resolvida através do princípio fundamental da contagem. Na segunda, que era um problema envolvendo permutação, o resultado poderia ter sido encontrado, entre outras estratégias, por enumeração dos agrupamentos. A terceira envolvia a idéia de arranjo. Exigia uma maior atenção nos dados apresentados no enunciado da questão além de um número grande de possibilidades, o que dificultou a enumeração dos agrupamentos. A última questão convidava o aluno a pensar sobre combinação através de um problema envolvendo o estudo de agrupamentos não-ordenados.

Os alunos, aparentemente, se empenharam em fazer o pré-teste. Ao término do horário reservado para realizá-lo discutiam as questões com outros colegas e questionavam a professora quanto aos resultados.

Ao analisar os registros no teste foi possível verificar que, dos trinta alunos que fizeram o teste, 70% encontraram o resultado esperado para a primeira questão e apenas um aluno deixou a questão em branco. Nas resoluções, 72% dos alunos que acertaram usaram, exclusivamente, operações de adição e subtração e os restantes registraram esquemas de resolução. Entre os que erraram a questão, 62,5% cometeram erros na escolha das operações. Os três alunos restantes erraram porque usaram dados diferentes dos que foram apresentados no problema, não terminaram a questão ou erraram na operação.

O número de alunos que acertaram a segunda questão corresponde a 40% dos trinta alunos que fizeram o teste, sendo que todos resolveram enumerando as possibilidades de forma sistemática. Nas resoluções dos alunos que não acertaram esta questão podemos observar que 33% também tentaram resolver usando a enumeração sistemática, 11%, a não sistemática e 56% por esquemas ou operações. Vinte e três por cento do total de alunos erraram a questão porque consideraram numerais formados por zero e outros três algarismos, nesta ordem, como sendo um numeral de quatro algarismos.

Nenhum aluno acertou as questões três e quatro. Dezessete por cento fizeram alguns registros, mas não responderam a questão e 10% a deixaram em branco. Na questão quatro, 7% não registraram resolução ou resposta e 10% não responderam à pergunta feita pelo problema. Na questão três as respostas foram muito variadas e apenas dois valores apareceram em dois testes diferentes. Já na questão 4: “Numa circunferência são marcados 12 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos”, 23% responderam o mesmo valor: 36 que é o produto do número de pontos distintos pertencentes a uma circunferência multiplicado pelo número de vértices de um triângulo:

Ficou claro, ao analisar, os pré-testes que os alunos não se preocuparam com o fato de estarem formando agrupamentos ordenados ou não, apesar de mostrarem que reconhecem que ao modificarmos a ordem dos algarismos em um numeral seu valor é alterado formando um novo numeral ou ao formarmos o triângulo de vértices ABC temos o mesmo triângulo se considerarmos os vértices em ordem diferente.

Alguns utilizaram a enumeração de agrupamentos possíveis como estratégia de resolução, mas quando a quantidade era grande não foram capazes de buscar padrões e generalizar a enumeração.

Alguns alunos mostraram que não são capazes de identificar informações importantes além das que estão explícitas no texto do problema, como por exemplo, que um numeral não começa com zero.

Muitos alunos procuraram resolver as questões registrando apenas operações. Quase não houve preocupação em justificar os cálculos feitos. Poucos alunos, em poucas questões justificaram argumentando através de pequenos parágrafos. Poucos foram os alunos que registraram algum tipo de esquema ou diagrama nas resoluções.

Depois de vencida a fase diagnóstica inicial, prosseguimos com o desenvolvimento das atividades. Com o consentimento da direção, dos alunos e dos pais, parte do trabalho foi registrado através de filmagens ou gravações. Houve o cuidado de pedirmos autorização por escrito dos responsáveis legais dos alunos, pois estes ainda não alcançaram a maioridade.

A primeira atividade propunha aos alunos que determinassem o número de peças de um jogo de dominó. Foi facilmente resolvida por todos os grupos. Alguns já conheciam o jogo e sabiam a quantidade de peças, mas foram convidados a mostrar por que aquela quantidade completava o conjunto de peças. Em alguns grupos a primeira resposta encontrada foi 49 e quando questionados sobre este fato mostravam esquemas em que cada um dos sete números, de zero a seis, estava associado a outros sete. Quando perguntados sobre a diferença entre a peça 1 – 3 e a peça 3 – 1 quase que imediatamente percebiam que haviam cometido um erro na resolução. Começava aí uma nova discussão sobre como determinar o total de peças. Quando solicitados a comparar a quantidade de peças que haviam encontrado e a quantidade que pretendiam encontrar depois de terem observado que a ordem na peça não importa todos afirmavam que seria menor. Este fato já demonstra uma evolução do raciocínio combinatório e prepara para o entendimento de estratégias de cálculo do número de combinações.

Alguns grupos resolveram por enumeração de todas as peças. Outros começaram a enumerar e quando descobriram um padrão interromperam a enumeração e resolveram a questão através deste padrão.

Em trinta minutos todos os grupos já haviam terminado a resolução da atividade. Os alunos esgotaram as discussões internamente em cada grupo. Não houve pedido, à professora, de validação das estratégias de resolução ou resultados encontrados.

Usando transparências produzidas pelos próprios alunos e um retroprojetor, apresentaram suas resoluções.

A resolução que prevaleceu foi a de enumeração sistemática de todas as peças.

Uma outra resolução que apareceu foi a soma 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 com justificativas do tipo: “*o zero combina com outros sete elementos; o um, com seis porque* *já combinou com o zero e não precisa mais; o dois, combina com cinco e assim por diante*."

Um dos grupos apresentou uma resolução usando a árvore de possibilidades. Quando o grupo foi questionado sobre este fato uma aluna explicou que conheceu a árvore de possibilidades na 8ª série. Os alunos dos outros grupos não demonstraram interesse em utilizá-la. Outro escreveu todos os agrupamentos desprezando o fato de que a ordem não importa e em seguida excluiu os agrupamentos semelhantes. Quando incentivados a comparar o número de agrupamentos que tinham antes com o número de agrupamentos que respondia à pergunta conseguiram observar que, desconsiderando os agrupamentos em que os elementos são iguais, a quantidade final é a metade da quantidade inicial. Quando questionados sobre o porquê deste fato demoraram a responder. Só depois de algum tempo, um aluno, sugeriu que deveria ser porque cada peça estaria sendo contada duas vezes quando a ordem no agrupamento importava. Este raciocínio pareceu confuso para alguns alunos que preferiram enumerar os agrupamentos ou usar outro padrão.

Durante as apresentações, a palavra 'combinação' apareceu várias vezes sendo utilizada pelos alunos para descrever as ligações entre elementos a fim de formar os agrupamentos possíveis. Quando questionados sobre o porquê da utilização deste vocábulo mostraram, através de suas respostas, que estavam, realmente, associando a esta palavra o sentido de ligação entre elementos.

Sempre que um novo grupo se apresentava para mostrar seus registros para o restante da turma insistiam no fato do agrupamento formado ser do tipo em que a ordem não importa. Faziam isto dizendo frases como:

"- *Se 1 e 3 é igual a 3 e 1 então não precisamos repetir esta combinação*".

Ao final das apresentações foram perguntados sobre o que julgavam mais importante para resolver problemas como o que foi proposto e alguns responderam que os aspectos a se considerar são: se as "combinações" não ficam diferentes se você troca a ordem dos elementos dela, se dá para escrever todas as possibilidades e se existe algum padrão que facilite o cálculo. Ninguém mencionou a utilização da árvore de possibilidades.

Todos os grupos acertaram a questão e isto pareceu motivá-los a continuar participando do trabalho.

A atividade dois foi proposta no dia seguinte, porém, apenas uma questão foi discutida: "*De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?*"

Os alunos apresentaram muita dificuldade para resolver esta questão. Queriam encontrar uma operação mais simples que a resolvesse diretamente. Alguns tentaram usar o mesmo método que utilizaram para resolver a questão da atividade anterior, mas ao perceberem que o tipo de agrupamento formado era diferente pelo fato de a ordem dos elementos ser importante na sua determinação, desistiam. Depois de algum tempo de discussão, os grupos começaram a criar estratégias para resolver o problema. Alguns grupos usaram letras para representar as pessoas e outros usaram números. Alguns fixaram o primeiro indivíduo e foram, de maneira sistemática, enumerando as possibilidades de trocas com as outras pessoas. Um dos grupos resolveu usando o diagrama de possibilidades. Outro grupo começou a desenhar o diagrama, observou um padrão e usou o princípio multiplicativo para terminar de resolver a questão. Esta última proposta, quando apresentada, chamou a atenção de um número maior de alunos por parecer mais simples. Todos os grupos encontraram a resposta correta e nenhum enumerou todas as possibilidades.

Neste momento, podemos perceber uma evolução no raciocínio combinatório destes alunos. Apesar das dificuldades enfrentadas ficou claro para eles que a questão investigada envolvia agrupamentos que tinham um comportamento diferente daqueles da atividade anterior. O interesse em observar e compreender as resoluções dos outros grupos gerou uma participação ativa de todos.

Na aula seguinte foram propostas outras três questões:

1. Dez pessoas participaram de uma reunião e no final, cada uma cumprimentou outra, apenas uma vez, através de um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados ao todo?
2. Num grupo de sete alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. A foto será deles sentados em fila. De quantos modos eles poderão sentar, respeitando essa incompatibilidade?
3. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

A primeira questão foi resolvida rapidamente porque foi associada à atividade do dominó e alguns grupos resolveram a questão como haviam resolvido antes, guardadas as devidas proporções. Alguns grupos modificaram suas resoluções e utilizaram outros processos, inclusive o diagrama de possibilidades. Este fato é interessante porque mostra que os alunos já estão categorizando os problemas a partir de análises próprias e buscando outras formas de resolvê-los.

A segunda foi desafiadora para todos. Até que alguns grupos começaram a perceber que havia um padrão que igualava a quantidade de possibilidades quando uma das pessoas que não se toleram sentava nas extremidades e uma outra quantidade quando ele se sentava em uma das cadeiras entre a primeira e a última. Com o auxílio do diagrama de possibilidades, dois grupos de um total de seis conseguiram chegar ao resultado.

E a terceira questão gerou muita discussão. Os alunos verificaram semelhanças entre esta questão e a questão das "pessoas dispostas em fila" que haviam resolvido na aula anterior. Por este motivo queriam usar um método parecido, mas quando questionados sobre o fato de uma cadeira vazia ser igual à outra cadeira vazia percebiam que havia um problema e retomavam os cálculos. Neste momento já apresentavam sinais de cansaço e desistiram da questão. Nenhum grupo conseguiu resolvê-la durante a aula.

No encontro seguinte, um dos alunos apresentou uma solução para a questão 3. Ele construiu a árvore de possibilidades com todas as sessenta formas possíveis destas três pessoas se sentarem nas cinco cadeiras. A resolução foi apresentada para a turma que achou a resolução muito trabalhosa e reclamou muito da questão.

Uma das alunas perguntou se, para resolver a questão 2, poderia calcular de quantas formas diferentes as pessoas poderiam se sentar, sem restrições e depois diminuir a quantidade de agrupamentos em que ficam juntos aqueles que não se toleram. A aluna foi convidada a apresentar sua idéia, mas se recusou afirmando que não saberia fazer o cálculo. A professora sugeriu a árvore de possibilidades e a aluna disse que faria depois porque seria muito trabalhoso.

Os dois grupos que conseguiram resolver a questão 2 apresentaram suas soluções. Um deles construiu o diagrama de possibilidades e o outro usou o princípio multiplicativo depois de ter começado a construir a árvore. É interessante observar que a utilização do diagrama foi crescendo gradativamente e neste momento dá sentido a um novo e reduzido modelo de resolução baseado na determinação de quantas possibilidades existem para cada elemento do agrupamento ordenado.

Os demais gostaram desta forma de resolver e pediram mais explicações. A professora utilizou-se deste pedido para recapitular os problemas anteriores e verificar se os alunos conseguiriam identificar quais os outros problemas que poderiam ser resolvidos daquela forma. Neste momento, alguns alunos mostraram que sabem diferenciar os tipos de agrupamentos porque responderam que só poderiam resolver daquela forma os que tratavam de agrupamentos em que se mudarmos a ordem dos elementos temos outro agrupamento diferente.

A professora questionou a aluna, que havia sugerido uma resolução para a questão 2 através de uma subtração, se com as últimas informações ficaria mais fácil resolver a questão e ela disse que não sabia. Então, a professora propôs que resolvessem juntas, no quadro e assim foi feito. Primeiro colocaram sete riscos horizontais, depois foram escrevendo a quantidade de possíveis ocupantes de cada cadeira com a ajuda de um diagrama de possibilidades que estava sendo construído simultaneamente, do outro lado do quadro. Após terminarem de escrever todas as quantidades alguns alunos sugeriram que as quantidades fossem multiplicadas. A professora questionou o porque daquela operação e um dos alunos explicou usando o diagrama de possibilidades. Encontraram o produto 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040. Depois disto foram escrevendo as várias posições diferentes que poderiam ser ocupadas pelos dois indivíduos selecionados e encontraram seis. A professora chamou a atenção dos alunos para o fato de serem seis para a ordem AB e seis para a ordem BA, sendo A e B a representação dos alunos que não se toleram, então são doze posições diferentes. Um dos alunos questionou o resultado dizendo que se diminuísse doze de 5040 encontraria um resultado diferente do encontrado através da outra resolução. A professora concordou e perguntou qual dos dois ele considerava verdadeiro. O aluno respondeu que confiava mais na resposta encontrada na primeira porque conseguiu acompanhar melhor os passos seguidos na resolução. Outros alunos concordaram e começou uma discussão entre eles. A professora afirmou que não haviam terminado de resolver a questão utilizando a estratégia da subtração. Pediu aos alunos que pensassem o que estava faltando. Como a resposta não veio, a professora, disse:

-“*São doze possibilidades para cada mistura das outras cinco pessoas, ou seja, são doze possibilidades para cada 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 agrupamentos diferentes, logo, são 1440 fotos possíveis com os alunos A e B juntos*.”

A professora escreveu, no quadro, 5040 – 1440 = 3600, que foi o resultado encontrado anteriormente. Os alunos acharam a estratégia muito trabalhosa e difícil. Alguns chegaram a dizer que nunca teriam pensado algo tão complexo. A professora interveio e disse a eles que cada problema poderia ser resolvido de várias formas e que cada um poderia investigar e criar sua própria estratégia.

Na aula seguinte foram distribuídas outras quatro questões.

1. Uma padronagem listrada tem quatro listras a serem preenchidas. Desejamos disponibilizar o maior número possível de tecidos distintos usando apenas três cores. Lembrando que duas listras adjacentes não podem ter a mesma cor, quantos tecidos poderão ser oferecidos?
2. Em uma lanchonete existem 12 opções de suco e 8 de salgados. De quantas formas diferentes uma pessoa pode: a) comer um salgado **ou** beber um suco? b) comer um salgado **e** beber um suco?
3. Quantas diagonais possui um octógono? E um polígono de n lados?
4. Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas contendo, no mínimo, 1 diretor?

As três primeiras questões foram resolvidas com alguma tranqüilidade apesar dos alunos demonstravam falta de interesse. Na primeira questão gastaram um tempo maior, mas conseguiram resolver. Os grupos usaram enumeração, diagrama de possibilidades e determinação da quantidade de possibilidades para cada faixa.

A segunda questão foi resolvida rapidamente e os resultados encontrados foram os esperados. Quando questionados sobre a diferença entre os itens (a) e (b) que geraram resultados diferentes explicaram que em (a) a pessoa vai fazer só uma "coisa", comer ou beber. Já em (b), vai fazer "duas coisas", comer e beber. A professora ressaltou a importância de uma boa leitura na resolução de problemas para que detalhes como os que aparecem nesta questão sejam considerados.

Para resolver a terceira questão, a maioria dos grupos esboçou um octógono e contou o número de diagonais desenhando-as com canetas coloridas. A contagem foi feita de forma sistemática. Escolheram um vértice para começar e contaram quantas diagonais tinham uma das extremidades neste ponto e foram repetindo o processo até contarem todas.

Na aula seguinte, os alunos disseram à professora que não queriam mais apresentar as resoluções. Afirmaram que não queriam apresentar as resoluções porque não tinham certeza se estavam corretas, porque estava ficando muito cansativo, porque as resoluções seriam todas muito parecidas. Reclamaram que não conseguiram resolver a última questão da aula anterior.

Neste momento, foi necessário repensar a dinâmica da aula e a professora sugeriu que resolvessem juntos a questão. Através da enumeração de possibilidades e observação de padrões resolveram-na no quadro. A professora sugeriu a estratégia de calcularem todas as comissões de cinco pessoas e depois excluírem a comissão formada sem diretores. Pediu que pensassem na questão do dominó e se lembrassem da resolução do grupo que escreveu todas as possibilidades de agrupamentos ordenados e depois excluiu os agrupamentos considerados repetidos porque na realidade a ordem não importava. Perguntou qual seria o total de agrupamentos ordenados e a resposta veio quase que imediata porque utilizaram a multiplicação 8 . 7 . 6 . 5 . 4 = 6720. Então ela perguntou quantas vezes cada agrupamento com os mesmos elementos estava sendo considerado. Nenhum aluno soube responder. Então a professora propôs que resolvessem, inicialmente com números menores até conseguirem resolver aquele problema. Os alunos aceitaram a sugestão e assim foi feito.

A professora propôs a análise de alguns agrupamentos comparando os ordenados com os não ordenados. E, desta comparação, extraíram a informação que, se dividirmos o total de agrupamentos ordenados pelas misturas possíveis dentro de cada agrupamento, vamos obter o número de agrupamentos não-ordenados. Para ajudar na visualização, ao enumerar alguns agrupamentos ordenados, aqueles que eram formados pelos mesmos elementos foram limitados por retângulos para exemplificar o processo.

A professora propôs que retomassem o último problema da atividade e tentassem resolvê-lo. Os alunos foram resolvendo individualmente ou em grupos, alguns explicavam para os outros e no final da aula todos haviam resolvido corretamente a questão utilizando a divisão.

Houve um acordo para cessarem as apresentações e a professora propôs que avaliassem o que haviam aprendido até aquele momento. Alguns alunos manifestaram-se dizendo de sua insegurança ao resolver os problemas. Afirmaram que, quase sempre, não tinham certeza se a resposta encontrada estava correta ou não e que este fato trazia muito desconforto. Alguns afirmaram que estavam com dificuldades para resolver problemas envolvendo agrupamentos não-ordenados. A professora os acalmou explicando que deveriam confiar mais em si mesmos e procurar resolver os problemas da melhor maneira possível e que, como na vida, resolver problemas requer buscar o conhecimento da situação, elaborar e aplicar estratégias de resolução e analisar o resultado encontrado, desta forma, a responsabilidade de conferir a resposta era deles. Quanto à dificuldade de resolver alguns tipos de problemas e a insegurança ao resolvê-los ficou combinado que resolveriam outras situações-problemas buscando aperfeiçoar suas estratégias.

Depois de mais algumas questões resolvidas e discutidas em sala de aula sem a preocupação de apresentar as resoluções para o restante da turma, o teste diagnóstico foi aplicado novamente.

No dia da aplicação, participaram vinte e cindo alunos. Analisando as resoluções apresentadas podemos verificar que o percentual de acertos, em todas as questões, foi maior se comparado com o pré-teste.

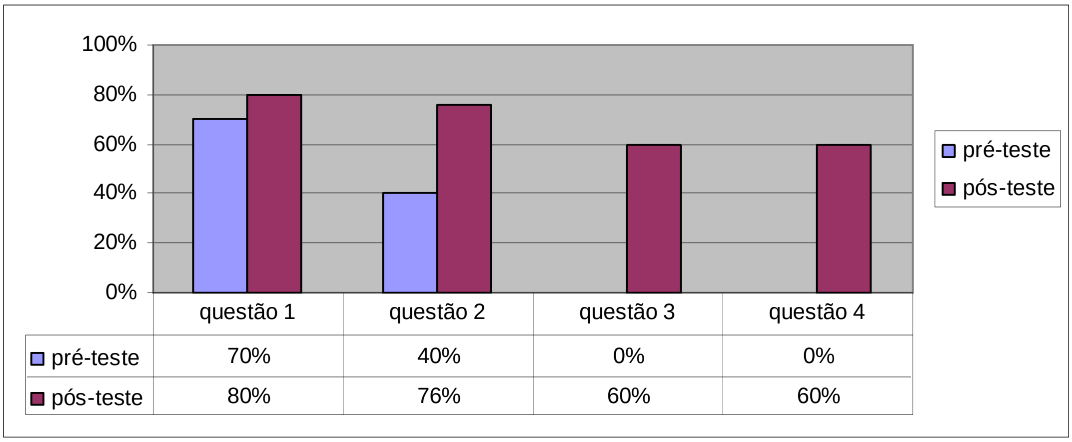

Gráfico 1: Porcentagem de acertos

É possível observar através das resoluções apresentadas pelos alunos que houve um desenvolvimento do raciocínio combinatório. A enumeração de todos os agrupamentos é uma estratégia presente em alguns pré-testes. Mas só em algumas resoluções apareceu de forma sistemática. A enumeração não sistemática pode levar ao erro quando a quantidade de agrupamentos é grande, como no caso da última questão. No pós-teste, nenhum aluno tentou enumerar todas as possibilidades. A enumeração só foi utilizada algumas vezes e para determinar um padrão e a partir deste padrão a questão era resolvida.

Na segunda questão, a enumeração, sistemática ou não, foi bastante utilizada no pré-teste, enquanto, no pós teste, apenas um aluno recorreu a este método, os demais utilizaram diagramas e operações.

A enumeração é uma ferramenta muito importante para a identificação dos agrupamentos, mas neste caso, o abandono desta enumeração para dar lugar aos diagramas mostra um desenvolvimento do raciocínio combinatório suficiente para abstrair e determinar a quantidade de agrupamentos sem precisar enumerá-los um a um. Uma vantagem desta evolução é a possibilidade de resolver problemas com uma quantidade grande de agrupamentos diferentes, neste caso, enumerar todas as possibilidades pode ser difícil ou quase impossível. Podemos observar este fato analisando as questões três e quatro. No pré-teste, muitos alunos tentaram resolvê-las enumerando as possibilidades e nenhum conseguiu encontrar todas ou algum padrão que o ajudasse a determinar esta quantidade. Já, no pós-teste, nenhum aluno utilizou a enumeração, mas usaram o diagrama de possibilidades que pode ser interpretado como uma forma reduzida de enumerar agrupamentos. A maioria das questões foi resolvida através de operações justificadas através de diagramas de possibilidades ou argumentações sobre a quantidade de alternativas para cada etapa.

Não foi pedido aos alunos que registrassem suas idéias, mas todos apresentaram resoluções com justificavas. As estratégias apresentadas pelos alunos variaram de pessoa para pessoa. Apesar de idéias comuns e, portanto resoluções similares, a forma de registrá-las variou.

Na questão um, 64% dos alunos resolveram através de operações. Destes, 69% acertaram a questão. Trinta e seis por cento dos alunos resolveram usando diagramas e operações. O percentual de acerto neste último grupo de alunos foi de 100%. Não houve registro em branco.

No pré-teste apareceram resoluções que também utilizavam operações e diagramas. A diferença é que, no pós-teste, o diagrama foi utilizado para justificar as operações determinadas pela generalização da situação.

Apenas um aluno (4% do total) errou a terceira questão por considerar os agrupamentos não ordenados sendo que, neste caso, a ordem importa. Já na questão quatro, 4 alunos (16% do total) erraram a resolução por não considerar o agrupamento não ordenado como indicava o problema. Usando estes dados como referências, acreditamos que a habilidade de identificar se o agrupamento em questão é ordenado ou não, foi desenvolvida pela maioria dos alunos que compõem o grupo estudado.

O percentual de acertos seria ainda maior se alguns alunos tivessem sido mais atentos quanto aos dados fornecidos pelo problema. Alguns erros aconteceram porque o aluno considerou numerais começados com zero ou analisou a construção de numerais com três algarismos quando o que foi pedido era a formação de numerais com quatro algarismos ou até mesmo erros de cálculo.

Avaliação da proposta pelos alunos

Aos alunos foi solicitado que respondessem às seguintes perguntas:

1. O que você aprendeu com o trabalho? 2. Você gostou de realizá-lo? Por quê?

Vinte e sete alunos responderam ao questionário. As respostas ao primeiro questionamento podem ser observados na tabela 1.

Tabela 1: Freqüência absoluta de respostas dadas pelos alunos à pergunta “o que você aprendeu com o trabalho?

Os alunos afirmaram terem aprendido a:	Freqüência
Usar padrões	9
Construir e interpretar a árvore de possibilidades	16
Identificar agrupamentos ordenados e não-ordenados.	16
Interpretar o enunciados dos problemas	9

Desenvolver o raciocínio	3
Enumerar possibilidades	6
Calcular o total de possibilidades	3
Resolver o mesmo problema de maneiras diferentes.	2
outros	3

Observando as respostas dadas, verifica-se que a maioria dos alunos afirmou ter aprendido a construir e analisar a árvore de possibilidades e identificar agrupamentos ordenados e não-ordenados. A grande incidência destas respostas pode sinalizar o fato dos alunos considerarem que estas duas habilidades são fundamentais para a resolução de problemas envolvendo cálculo combinatório.

Quando perguntados se gostaram de realizar o trabalho, setenta e cinco por cento dos alunos responderam que sim e enumeraram razões como: "*consegui aprender*" (2), "*é um método diferente*" (3), "*não tem fórmulas*" (1), "*aulas mais dinâmicas*" (2), "*oportunidade de debater em grupo*" (6), "*a matéria ficou mais fácil*" (3), "*fugiu da rotina*" (7), "*adoro matemática*" (1), "*a matéria é estimulante*" (1).

Vinte e dois por cento dos alunos afirmaram que gostaram "*mais ou menos*" do trabalho e justificaram dizendo que tiveram dificuldade em aprender a construir a árvore ou a interpretar os problemas ou identificar quando a ordem dentro do agrupamento modifica o tipo de resolução. Um afirmou que consegue identificar se a ordem importa ou não, mas não consegue chegar à resposta quando o agrupamento é não-ordenado. Todos afirmaram que acharam a atividade interessante no começo, mas no final disseram que ficou cansativo, principalmente durante as apresentações.

Um aluno, afirmou não ter gostado do trabalho. Justificou dizendo que teve dificuldades em interpretar os problemas e preguiça de escrever todas as possibilidades. Completou a resposta à segunda questão com a expressão: "*Mas, consigo*!".

A título de conclusão

Ao analisar as diferenças entre as resoluções do pré e do pós-teste concluímos que, no grupo de alunos estudado, houve contribuições significativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do trabalho em equipe. Destacamos: a capacidade de enumeração de agrupamentos e de observação de padrões e sua utilização na resolução de problemas; a aplicação, correta e consciente, dos princípios de contagem (aditivo e multiplicativo); a capacidade de reconhecer as diferenças entre agrupamentos ordenados e não ordenados e utilizá-las na elaboração de estratégias de resolução; criar estratégias de resolução de problemas independentes do uso de fórmulas; trabalhar em equipe de forma colaborativa; observar dados relevantes para a resolução de um problema; aprender com os erros e produzir pequenos textos argumentativos.

O trabalho não foi tão eficiente em desenvolver nos alunos a capacidade de resolver, com desenvoltura e rapidez, problemas envolvendo Análise Combinatória, quanto desejávamos. Talvez isso se deva ao fracasso ao fato desta turma estar acostumada a seguir padrões de resoluções apresentados pela professora e não a criar suas próprias estratégias.

O trabalho foi bem aceito pela maioria dos alunos que aprovou a metodologia adotada. Contudo, devemos considerar o fato de que uma parcela dos alunos afirmou que o trabalho ficou cansativo e, conseqüentemente, desmotivante. Para a implementação do projeto deveremos considerar esta observação e repensar a forma de apresentação dos registros.

Vencidas todas as etapas propostas para o estudo piloto concluímos que a execução do projeto é viável e precisará de alguns ajustes antes de ser realizado.

Bibliografia:

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p.

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BATANERO; C. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.** Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.