

# **Sistemas do Tipo Eixo-Raio Aplicados a Redes de Sensores Sem Fio Modeladas Como Redes *Small World***

**Daniel L. Guidoni, André L. L. de Aquino, Raquel da S. Cabral**

**Antônio A. F. Loureiro, Antônio Otávio Fernandes**

Departamento de Ciência da Computação

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha, Belo Horizonte, MG

{guidoni, alla, raquelc, loureiro, otavio}@dcc.ufmg.br

## **RESUMO**

As redes de sensores sem fio possuem restrições de recursos, tais como baixo poder computacional, largura de banda reduzida e especialmente, fonte de energia limitada. O alto consumo de energia pode ser observado quando o fluxo de dados em cada nó é alto e quando o número de vizinhos é grande. Além disso, essas redes podem ser modeladas como redes do tipo *small world*, onde o coeficiente de agrupamento é alto e o caminho médio mínimo entre cada par de nós na rede é pequeno. Através da utilização do conceito de sistemas do tipo eixo-raio, obtivemos uma configuração com um caminho médio mínimo pequeno entre qualquer par de nós, obtendo assim, uma configuração ótima para a rede, onde alguns nós são escolhidos como concentradores garantindo o menor consumo de energia.

**PALAVRAS CHAVE.** Sistemas do Tipo Eixo-Raio. Redes Complexas. Redes de Sensores Sem Fio.

**ÁREA DE CLASSIFICAÇÃO.** OC - Otimização Combinatória.

## **ABSTRACT**

The wireless sensor networks have some resource restrictions, as low computational power, reduced bandwidth and, specially, limited energy source. The high energy consumption can be observed when the data flow and number of neighbors of each node is great. Moreover, the sensor networks can be modeling as small world nets, where the cluster coefficient is high and the minimum average path is low. Through the use of hub-and-spoke systems concept, we get a sensor network configuration with low minimum average path between each pair of nodes. With this, we have a optimal network configuration, where some nodes are chosen how hubs, with this, we guarantee a minor energy consumption.

**KEYWORDS.** Hub-and-spoke Systems. Complex Networks. Wireless Sensor Networks.

**AREA CLASSIFICATION.** OC - Combinatory Optimization.

## 1. Introdução

O mundo ao nosso redor possui uma variedade de fenômenos que podem ser monitorados por equipamentos com poder de sensoriamento, processamento e comunicação. O conjunto desses equipamentos, trabalhando de forma cooperativa, é conhecido como rede de sensores sem fio (Estrin et al., 1999; Akyildiz et al., 2002; Tilak et al., 2002; Arampatzis et al., 2005). Tais redes podem ser modeladas utilizando os conceitos de redes complexas (Strogatz, 2001; Mark, 2003; Dorogovtsev and Mendes, 2003), mais especificamente redes do tipo *small world* (Milgram, 1967; Adamic, 1999; Albert et al., 1999; Watts, 2003; Watts and Strogatz, 1998) que possuem características particulares nesse ambiente.

Redes do tipo *small world*, surgiram com o experimento de Milgram (1967) que define o mundo como pequeno, pois uma pessoa conhece todas as outras pessoas do mundo diretamente ou indiretamente por meio de poucos intermediários. Em (Watts, 2003; Watts and Strogatz, 1998), os autores formalizam as idéias de *small world* e propõem uma forma de mensurar certas características de uma rede para que ela seja classificada como tal. Para isso, a rede deve apresentar um elevado coeficiente de agrupamento, ou seja, uma fração de nós que são vizinhos entre si; e um caminho médio, em número de saltos, entre a origem e o destino, pequeno em relação ao tamanho da rede. Para modelar uma rede de sensores como uma rede *small world* precisamos identificar o coeficiente de agrupamento elevado, que sempre ocorre em redes em grade e o obter um caminho médio pequeno entre qualquer par de nós na rede, através da inserção de ligações entre nós distantes na rede.

Apesar do potencial de suas aplicações, as redes de sensores possuem restrições de recursos, tais como baixo poder computacional, largura de banda reduzida e especialmente, fonte de energia limitada. Isto leva aos projetistas dessas redes buscarem soluções que permitam uma maior economia de energia. Dentre os diversos aspectos que acarretam num grande consumo de energia nas redes de sensores podemos destacar: (i) o fluxo de informação que cada nó possui, pois quanto mais dados enviados e recebidos maior a quantidade de energia consumida e (ii) o número de vizinhos ativos que cada nó possui, pois quanto mais vizinhos mais pacotes serão processados.

Levando em conta o menor consumo de energia na rede temos como objetivo neste trabalho obter um caminho médio mínimo pequeno entre qualquer par de nós através da utilização do conceito de sistemas do tipo eixo-raio (*hub-and-spoke systems*) (O'Kelly, 1986, 1987; Campbell, 1994a,b; Campbell et al., 2002). Com isso, obtemos uma configuração ótima para a rede, onde alguns nós são escolhidos como concentradores a fim de garantir o menor consumo de energia na rede. Isso é obtido através do balanceamento entre a quantidade de energia residual, fluxo de dados e número de vizinhos de cada nó.

Sistemas do tipo eixo-raio tornaram-se uma importante área de pesquisa da teoria de localização nas últimas décadas. Esse destaque se deve, em grande parte, ao sucesso de sua utilização em sistemas logísticos, tanto de transporte de passageiros quanto de cargas, e em redes de telecomunicações. Ao invés de servir cada par origem-destino de demanda com uma conexão direta, sistemas do tipo eixo-raio substituem essas conexões diretas por uma rede de concentradores. Esses concentradores permitem que o tráfego seja agrupado e transportado através de um meio de transporte compartilhado, para ser então entregue aos respectivos destinos. O compartilhamento desse meio de transporte permite que esses sistemas eixo-raio usufruam dos benefícios da economia de escala, isto é, o custo por unidade transportada torna-se menor ao se aumentar o volume do tráfego através do meio de transporte.

No contexto de redes de sensores estamos interessados em transportar pacotes entre os

nós da rede para os nós sorvedouros. Nesse caso, enviar diretamente os pacotes para os sorvedouros gera um custo alto de energia, uma vez que quanto maior o alcance do rádio maior o consumo de energia. Portanto, ao invés dos nós enviarem diretamente seus pacotes através de conexões diretas com os sorvedouros, podemos substituir essas conexões por uma rede de concentradores. Além disso, através de concentradores garantimos um caminho médio mínimo baixo entre o sorvedouro e todos os nós da rede, podendo assim modelar a rede de sensores como uma rede do tipo *small world*.

Os problemas do tipo eixo-raio envolvem a localização dos concentradores e o desenho da rede que consiste na atribuição das origens e dos destinos a cada concentrador. Dependendo do problema, o número de concentradores a serem localizados, a partir de um conjunto de pontos candidatos, pode ser conhecido previamente ou pode ser também uma variável do problema a ser determinada. A atribuição dos pontos de origem e de destino a cada concentrador pode ser classificada como simples, quando cada ponto só pode ser atendido por um único concentrador, e múltipla, quando cada ponto pode interagir com mais de um concentrador. Além disso, os concentradores e as conexões entre os mesmos podem ou não ser capacitados. Em um sistema capacitado, a capacidade de concentração/divisão e o transporte de fluxo em função do volume de tráfego são limitados. Nesse trabalho tratamos o problema de alocação múltipla e não capacitado.

Este trabalho segue com a seção 2, onde apresentamos uma visão geral a respeito das redes do tipo *small world*. Na seção 3, definimos o problema que estamos tratando, bem como o modelo matemático utilizado. Na seção 4, mostramos o método de decomposição de Benders utilizado para resolver o problema apresentado. Na seção 5 detalhamos o algoritmo utilizado para resolver o método de decomposição de Benders. Na seção 6, apresentamos os resultados referentes a aplicação do algoritmo para obtenção da melhor configuração para diversas redes de sensores. Por fim, na seção 7, concluímos o trabalho indicando suas futuras direções.

## **2. Redes do tipo *small world*: Visão geral**

Como dito anteriormente, o conceito de *small world* foi proposto para redes sociais através do experimento de Milgram (1967) que mostrou que o mundo é pequeno porque uma pessoa conhece todas as outras pessoas do mundo diretamente ou indiretamente por meio de poucos intermediários. Em (Newman and Watts, 1999; Watts and Strogatz, 1998), os autores formalizaram o conceito de mundo pequeno e definiram as redes *small world*. O fenômeno *small world* pode ser observado em redes existentes, como a Internet e no roteamento de mensagens em redes sociais (Kleinberg, 2000; Watts, 2004; Watts et al., 2002).

Para uma rede ser considerada *small world* devemos ter as seguintes características: (i) o caminho médio mínimo entre quaisquer pares de nós deve ser pequeno; e (ii) o coeficiente de agrupamento deve ser alto. O caminho médio mínimo pode ser definido pela quantidade mínima de saltos entre qualquer par de nós da rede. E o coeficiente de agrupamento, por sua vez, define a probabilidade, de dois nós vizinhos possuírem um outro nó vizinho em comum. Com essas características, garante-se o efeito de *small world* em uma rede qualquer. Além disso, redes do tipo *small world* possuem características de redes mapeadas como grafos regulares, cujo coeficiente de agrupamento é alto, e características de redes mapeadas como grafos aleatórios, cujo o caminho médio mínimo é pequeno.

Existem duas formas de criação de uma rede *small world*: utilizando o conceito de reposicionamento de ligações e o conceito de adição de ligações. Dado um grafo regular  $G(V, E)$ , o reposicionamento de ligações consiste em religar uma aresta  $e \in E \mid e = (v_i, v_j)$ ,

onde  $v_i, v_j \in V$ , a um outro vértice  $v_k \in V$ , de forma aleatória. O reposicionamento é feito seguindo uma probabilidade  $p$  determinada a priori para cada aresta de  $G$ . Após o reposicionamento das arestas, de acordo com  $p$ ,  $G$  pode possuir características *small world*. Uma ilustração dessa técnica pode ser observada na figura 1. Na figura 1(a), temos  $G$  regular, onde nenhuma aresta é reposicionada. Na figura 1(b), temos  $G$  do tipo *small world*, onde algumas aresta são reposicionadas ( $p$  pequeno). Na figura 1(c), temos  $G$  do tipo aleatório, onde várias aresta são reposicionadas ( $p$  grande). Vale ressaltar que a escolha de  $p$  influencia no grafo resultante.

Mais uma vez, considere um grafo regular  $G(V, E)$ . Utilizando o conceito de adição de ligação, uma probabilidade  $p$  de arestas são adicionadas de forma aleatória em  $G$ . Após a adição dessas novas arestas, de acordo com  $p$ ,  $G$  torna-se um grafo do tipo *small world*. A figura 2 mostra a criação de um grafo *small world* utilizando essa técnica. Quando  $p = 0$ , tem-se um grafo regular (figura 2(a)). A medida que  $p$  aumenta, o grafo regular torna-se *small world* (figura 2(b)). Quando  $p = 1$ , o grafo criado possui características de um grafo aleatório (figura 2(c)).

É importante destacar que as duas formas de construção de um grafo *small world* preservam as características de caminho médio mínimo pequeno entre qualquer par de nós da rede e o alto coeficiente de agrupamento.

### 3. Definição do problema

O problema de identificação de nós sensores concentradores com múltiplas atribuições pode ser assim enunciado:

**Problema:** *Dados um conjunto de nós sensores, as demandas de cada par origem-destino, que corresponde ao fluxo de dados que cada nó roteia e um conjunto de nós concentradores candidatos, o problema consiste em localizar nós concentradores atribuindo os pontos de origem e destino aos mesmos, de forma que o consumo total de energia seja mínimo e que a rota entre cada par de origem-destino passe por 1 ou 2 nós concentradores, ou seja, possua garantidamente características *small world*. O custo total é a composição dos custos de instalação, que é a energia gasta, dos nós concentradores e os custos de transporte, que é a quantidade de energia gasta para rotear um pacote entre cada par de nós.*

Neste trabalho foi utilizado o modelo de Skorin-Kapov et al. (1996) para sistemas do tipo eixo-raio com adaptações para o problema enunciado acima. A formulação aqui apresentada é baseada nas seguintes definições: seja  $N$  o conjunto de nós, isto é, pontos de origem e de destino; seja também  $K$  o conjunto de nós, que são candidatos a concentradores, tal que  $K \subseteq N$ . Para qualquer par de nós  $(i, j)$  com  $i, j \in N$ , representando um ponto de origem e de destino, respectivamente, têm-se  $w_{ij}$  que consiste na demanda de fluxo do nó  $i$  para o nó  $j$ , sendo normalmente  $w_{ij} \neq w_{ji}$ .

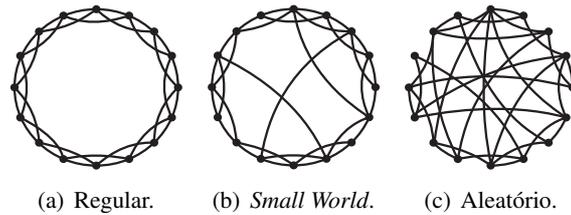


Figura 1: Exemplo de grafos utilizando a técnica de reposicionamento.

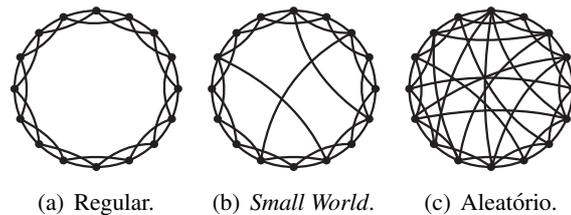


Figura 2: Exemplo de grafos utilizando a técnica de adição de novos links.

Seja  $a_k$  o custo de instalação de um concentrador no nó  $k \in K$  e  $c_{ijkm}$  o custo unitário de transporte do nó  $i$  até o nó  $j$  através dos concentradores  $k$  e  $m$ , tal que  $i, j \in N$  e  $k, m \in K$ . O custo unitário de transporte é a composição de três segmentos do caminho do nó  $i$  até o nó  $j$ . Assim, temos que  $c_{ijkm} = c_{ik} + \alpha c_{km} + c_{mj}$ , onde  $c_{ik}$  e  $c_{mj}$  são os custos unitários de transporte do nó  $i(m)$  até o nó  $k(j)$  e  $\alpha c_{km}$  é o custo unitário de transporte com desconto entre os concentradores  $k$  e  $m$ . O parâmetro  $\alpha$  representa a economia de escala alcançada pelo uso dos concentradores ( $\alpha \leq 1$ ).

As variáveis de decisão do modelo são  $y_k$ , que possui valor 1 se o nó  $k$  é instalado como concentrador e 0 caso contrário; e  $x_{ijkm}$  que é o fluxo do nó  $i$  até o nó  $j$  roteado via os concentradores  $k$  e  $m$ , nessa ordem.

O modelo de Skorin-Kapov et al. (1996) é dado por:

$$\text{Min} \left[ \sum_{k \in K} a_k y_k + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm} \right] \quad (1)$$

Sujeito a

$$\sum_{k \in K} x_{ijkm} \leq w_{ij} y_m \quad \forall i, j \in N; m \in K \quad (2)$$

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} \leq w_{ij} y_k \quad \forall i, j \in N; k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{m \in M} x_{ijkm} = w_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N; k, m \in K \quad (5)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (6)$$

A função objetivo (1) é composta por dois termos. O primeiro representa o custo de instalação dos concentradores e o segundo termo é o custo total de transporte. O conjunto de restrições (2) e (3) garantem que as demandas dos pares origem–destino só são roteadas por concentradores instalados. A restrição (4) assegura que as demandas dos pares origem–destino são roteadas via algum par de concentradores. Quando  $k = m$ , o roteamento só acontece via um único concentrador. Finalmente, as restrições (5) e (6) garantem não negatividade e integralidade das soluções, respectivamente.

Considerando  $n = |N|$ , observa-se que o modelo possui  $n^4$  variáveis de fluxo  $x_{ijkm}$ . Comparando esse valor com o número de variáveis inteiras  $y_k$  que é sempre menor ou igual a  $n$ , constata-se uma enorme diferença de magnitude, mesmo para valores pequenos de  $n$ . Essa característica foi a motivação para o uso de Decomposição de Benders (Benders, 1962) para resolver o problema que será detalhado na próxima seção.

#### 4. Solução baseada no método de decomposição de Benders

Decomposição de Benders (Benders, 1962; Geoffrion, 1972) é um método de particionamento para resolver problemas de programação linear e não-linear inteira mista. Nesse método, o problema original é decomposto em dois problemas: um problema com variáveis inteiras conhecido como problema mestre e um problema linear conhecido como sub-problema, para isso é utilizada a teoria de dualidade em programação matemática. Esse método foi utilizado por (Camargo et al., 2005; de Camargo et al., 2006) para o problema

de localização de concentradores não-capacitados e de alocação múltipla e será descrito a seguir.

Considerando a formulação(1) – (6), vamos determinar o problema mestre, que tem a função de instalar os concentradores, para que os subproblemas resolvam os problemas de fluxo entre os pares origem-destino, portanto o problema mestre possui apenas as variáveis  $y_k$ . Então em uma dada iteração  $h$  fixando-se o vetor de variáveis binárias,  $y = y^h$ , obtemos o problema primal dado pelas equações abaixo:

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{m \in K} c_{ijkm} x_{ijkm} \quad (7)$$

Sujeito a

$$\sum_{k \in K} x_{ijkm} \leq w_{ij} y_m^h \quad \forall i, j \in N; m \in K \quad (8)$$

$$\sum_{m \in K} x_{ijkm} \leq w_{ij} y_k^h \quad \forall i, j \in N; k \in K \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{m \in M} x_{ijkm} = w_{ij} \quad \forall i, j \in N \quad (10)$$

$$x_{ijkm} \geq 0 \quad \forall i, j \in N; k, m \in K \quad (11)$$

Para formular o problema mestre precisamos encontrar o dual do problema primal acima, então vamos associar o conjunto de variáveis duais  $u_{ijk}^h$ ,  $n_{ijm}^h$  e  $r_{ij}^h$  às restrições 8, 9 e 10, respectivamente. Pois para cada restrição no problema primal, temos uma variável no problema dual.

O problema mestre é uma versão do problema original com um conjunto de variáveis inteiras  $y_k$  e com as restrições associadas relaxadas. Considerando a formulação (1) – (6) o problema mestre é dado pelo conjunto de equações (12) – (16).

$$\text{Min} \left[ \eta + \sum_{k \in K} a_k y_k \right] \quad (12)$$

Sujeito a

$$\eta \geq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} r_{ij}^h - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} w_{ij} u_{ijk}^h y_k - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} w_{ij} n_{ijm}^h y_m \quad \forall h \in H \quad (13)$$

$$\sum_{k \in K} y_k \geq 1 \quad (14)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (15)$$

$$\eta \geq 0 \quad (16)$$

Onde  $h$  representa a iteração de Benders. A função objetivo 12 possui os custos de instalação e uma variável  $\eta$ , veja restrição 16, subestimadora do custo de transporte. A restrição 14 apenas determina que pelo menos um concentrador deve ser instalado, garantindo a viabilidade de todas as soluções propostas pelo problema mestre. As restrições 13 são conhecidas como os cortes de Benders do tipo I, sendo os valores de:  $u_{ijk}^h$ ,  $n_{ijm}^h$  e  $r_{ij}^h$ , calculados de forma eficiente através da resolução do subproblema, como veremos a seguir.

O subproblema é o problema original com os valores das variáveis inteiras fixadas temporariamente pelo problema mestre e tendo como incógnitas apenas as variáveis de fluxo  $x_{ijkm}$ . Em cada iteração, uma nova restrição, conhecida como corte de Benders, é adicionada ao problema mestre. Essa nova restrição é originada do dual do subproblema. Quando a mesma solução é encontrada para o problema mestre e o subproblema, então tem-se uma solução para o problema original dado pelo conjunto de equações (1) – (6).

A determinação da solução ótima no nível inferior, em uma dada iteração  $h$ , envolve o roteamento de menor custo de transporte para cada par  $ij$  de origem-destino. Isto é, pode-se dividir a resolução nesse nível em um subproblema para cada par  $ij$ . Lembrando que esse roteamento é feito via um ou dois concentradores, então existem quatro situações possíveis de roteamento para um dado par  $ij$  e para uma dada configuração de concentradores instalados, que são: a rota de menor custo pode passar por apenas um concentrador instalado,  $k$  ou  $m$ ; a rota de menor custo pode passar por dois concentradores instalados, tanto no sentido concentrador  $k \rightarrow m$  ou, o contrário,  $m \rightarrow k$ . A solução ótima para o subproblema primal dados pelas equações (7) – (11) é dada pela equação:

$$\sum_{i,j \in N} w_{ij} \text{Min}_{k,m \in K} \{c_{ijkm} \mid y_k^h = y_m^h = 1\} \quad (17)$$

Além disso, os valores ótimos das variáveis duais devem ser obtidos para a adição do corte de Benders do tipo I ao problema mestre. A obtenção dos valores das variáveis duais,  $u_{ijk}^h$ ,  $n_{ijm}^h$  e  $r_{ij}^h$  pode ser feito através da interpretação econômica de cada variável e pela propriedade das folgas complementares (Luna, 1978). Essa interpretação permite implementações eficientes na resolução do problema. Considerando  $r_{ij}^h$  como a maior diferença de preço possível entre os pontos  $i$  e  $j$  que se está disposto a pagar, tem-se que  $r_{ij}^h$  é o menor custo de transporte entre  $i$  e  $j$ , dada pela equação:

$$r_{ij}^h = \text{Min}_{k,m \in K} \{c_{ijkm} \mid y_k^h = y_m^h = 1\} \quad (18)$$

Interpretando  $u_{ijk}^h$  e  $n_{ijm}^h$  como taxas adicionais a serem pagas para se rotar o fluxo de  $i$  até  $j$  via os concentradores  $k$  e  $m$ , têm-se, que quando os concentradores  $k$  e  $m$  estão instalados ( $y_k^h = y_m^h = 1$ ), essas taxas são iguais a zero, como mostram as equações a seguir:

$$u_{ijk}^h = 0, \text{ se } y_k^h = 1 \quad (19)$$

$$n_{ijm}^h = 0, \text{ se } y_m^h = 1 \quad (20)$$

Por outro lado, se os concentradores não estão instalados, deve-se analisar qual é a contribuição marginal de cada concentrador, isto é, qual deles ofereceria a menor taxa para se rotar o fluxo. Essas taxas são dadas pelas relações:

$$u_{ijk}^h = \text{Max} \{0, \text{Max}_{m \in M} \{r_{ij}^h - c_{ijkm}\}\}, \text{ se } y_k^h = 0 \quad (21)$$

$$n_{ijm}^h = \text{Max} \{0, \text{Max}_{k \in K} \{r_{ij}^h - c_{ijkm}\}\}, \text{ se } y_m^h = 0 \quad (22)$$

Dessa forma, consegue-se resolver o subproblema adicionando os cortes de Benders ao problema mestre. É importante observar que devemos esperar que a maior parcela de custo da solução se deva aos subproblemas, uma vez que para cada par origem-destino haverá a necessidade de se determinar a rota de custo mínimo entre os diversos concentradores alocados pelo mestre.

## 5. Algoritmo para decomposição de Benders

A aplicação do método de decomposição de Benders ao modelo dado pelas equações (1) – (6) conduz ao algoritmo 1, para cuja compreensão vamos considerar a descrição das variáveis utilizadas, mostrada na tabela 1.

Variável	Descrição
$N$	Número de nós do problema
$K, M$	Conjunto de nós candidatos a concentradores
$LI$	Limite Inferior do custo de transporte e instalação dos concentradores
$LS$	Limite superior do problema do custo de transporte e instalação dos concentradores
$ls$	Limite superior da iteração
$CF$	Custo total do nós que são concentradores em uma iteração $h$
$CT$	Custo de transporte do nó $i$ ao nó $j$
$\eta$	Subestimadora do custo de transporte no problema mestre
$a_k$	Custo de instalação do concentrador $k$
$y$	Vetor que contém os nós
$c_{ijkm}$	Custo de transporte do nó $i$ ao nó $j$ passando pelos concentradores $k$ e $m$
$x_{ijkm}$	Quantidade de fluxo do nó $i$ até o nó $j$ que roteado via os concentradores $k$ e $m$
$w_{ij}$	Demanda de fluxo do nó $i$ ao nó $j$
$\mu$ e $v$	Variáveis duais
$i, j, k$ e $m$	Variáveis de controle

Tabela 1: Descrição das variáveis do algoritmo

---

### Algoritmo 1: Decomposição de Benders

---

**Entrada:**  $N$  – número de nós;  $custo\_transporte[i][j]$  – custo de transporte de  $i$  até  $j$ ;  $custo\_instalacao[i]$  – custo de instalação dos concentradores;  $demanda[i][j]$  – as demandas de  $i$  para  $j$ ; o desconto  $\alpha$

**Saída:** concentradores instalados e custo de transporte total(CT)

```

1 início
2    $LI \leftarrow 0$ 
3    $CF \leftarrow \sum_k a_k$  {onde  $k$  refere-se os nós que são concentradores}
4    $CT \leftarrow$  Resolve subproblema
5    $LS \leftarrow CF + CT$ 
6   Adiciona o corte ao problema mestre
7   enquanto  $LS \neq LI$  faça
8      $LI \leftarrow$  Resolve problema mestre
9      $CF \leftarrow \sum_k a_k$  {onde  $k$  refere-se os nós que são concentradores}
10     $CT \leftarrow$  Resolve subproblema
11     $ls \leftarrow CF + CT$ 
12    se  $LS < ls$  então
13       $LS \leftarrow ls$ 
14    fim
15    Adiciona o corte ao problema mestre
16 fim
17 fim

```

---

As linhas 2 a 6 do algoritmo 1 fazem todas as inicializações das variáveis para a primeira iteração do algoritmo. A linha 2 inicia o limite inferior com 0. Para que se tenha o valor do custo fixo é necessário estabelecer uma configuração inicial da rede, ou seja, quais nós serão instalados como concentradores. Nesse caso a configuração inicial utilizada foi a instalação de todos os nós como concentradores, assim na linha 3 o custo fixo é inicializado com a soma dos custos de instalação dos nós que foram instalados como concentradores. Na linha 4 temos a resolução do subproblema que obtém o menor custo

de transporte, dada a configuração inicial da rede, cuja solução é dada pelo conjunto de equações (17) – (22). Na linha 5 o valor do limite superior é calculado, sendo a soma dos custos totais de instalação e transporte. Na linha 6 é adicionado o corte de Benders. Da linha 7 a 16 temos um laço que implementa os ciclos de Benders. O algoritmo pára quando os limites inferior e superior convergem. Na linha 8 o problema mestre é resolvido e o valor do limite inferior para o problema é obtido. As linhas 9, 10 e 11 são equivalentes as linhas 3, 4 e 5 do algoritmo, considerando a configuração dos concentradores na iteração corrente que é representada por  $h$ , que nos dá o custo de transporte para se rotear o fluxo entre os pares  $ij$ .

Na linha 13 é feita a atribuição do novo valor para o limite superior, verificando se o valor atual é melhor do que o anterior. A linha 15 adiciona o corte de Benders ao problema mestre. Voltamos ao início da repetição que pára quando os limites superior e inferior são iguais.

## 6. Resultados e avaliações

Consideramos que ao aplicarmos o método de decomposição de benders é possível obter uma configuração ótima dos nós de uma rede de sensores, de tal forma que tenhamos uma rede do tipo *small world* que economiza energia no tráfego de pacotes, considerando o fluxo e a distância entre os nós. Para validar essa premissa avaliamos o número de nós concentradores instalados, o coeficiente de agrupamento e o caminho médio mínimo obtido com nossa solução. A avaliação da nossa solução é baseada nas seguintes considerações:

- **Topologia da rede:** Consideramos uma rede em grade  $L_x \times L_y$ , com distâncias entre os nós da grade  $\delta$ , raio de comunicação dado por  $\rho$  e com um único sorvedouro posicionado em  $(0,0)$ . Além disso, consideramos que a rede já está operando e que os nós possuem diferentes reservas de energia  $\varepsilon$ .
- **Custos de instalação:** O custo de instalação de um nó como concentrador é dado por  $\varepsilon$ , ou seja, quanto mais energia um nó gastou mais caro fica a sua utilização como concentrador.
- **Custo de transporte:** O custo de transporte entre cada par de nós na rede é dado pela distância entre cada nó. Isto foi considerado, pois quanto mais distante o nó destino mais energia de transmissão será gasta devido o alcance do rádio.
- **Demanda dos clientes:** É definido pelo fluxo de dados que cada nó possui. Como temos um único sorvedouro localizado em  $(0,0)$  os nós mais próximo do sorvedouro terá um maior fluxo, pois precisarão rotear mais pacotes do que os nós que estão mais distantes do sorvedouro.
- **Instâncias utilizadas:** Variamos o número de nós em  $(16, 20, 24, 28, 32)$ , através de  $L_x = 8, L_y = (8, 10, 12, 14, 16), \delta = 2$  e  $\rho = \delta \times \sqrt{2}$ .
- **Configuração de saída:** Considerando  $G = (V, E)$  o grafo de entrada e  $G_b = (V, E_b)$  o grafo obtido com o método de benders. A saída é dada pelo grafo *small world*  $G_{sw} = (V, E_{sw})$ , onde  $E_{sw} = E \cup E_b$ . Com isso, calculamos o coeficiente de agrupamento e o caminho médio mínimo. Além disso, obtemos como saída a quantidade de nós concentradores utilizados.

A tabela 2 apresenta os resultados do algoritmo de benders ao variar a quantidade de nós da rede. Os valores analisados são: (i) quantidade de concentradores instalados -

QC; (ii) coeficiente de agrupamento - CA; e (iii) caminho médio mínimo - CMM. Através dos resultados, podemos observar que com a utilização da técnica proposta, conseguimos construir uma rede com características *small world*. Como visto anteriormente, para uma rede ser considerada *small world*, o CA do grafo resultante deve ser semelhante ao do grafo regular, o que pode ser observado nos resultados apresentados. Com relação ao CMM, podemos observar que para as redes de 16, 20, 24, 28 e 32 nós, o CMM foi reduzindo em 8,7%, 14,4%, 21,8%, 28,5% e 36,3% respectivamente. Para garantir que a distância entre qualquer par de nós não ultrapasse o limite pré-estabelecido na definição do problema, são necessários 4, 6, 8, 9 e 12 concentradores respectivamente para as diferentes quantidades de nós da rede.

Nós	Concentradores	Coeficiente de agrupamento		Caminho médio	
		grafo regular	grafo SW	grafo regular	grafo SW
16	4	0.657	0.664	1.900	1.733
20	6	0.628	0.639	2.147	1.836
24	8	0.609	0.659	2.420	1.891
28	9	0.595	0.638	2.708	1.936
32	12	0.585	0.659	3.008	1.915

Tabela 2: Resultados referentes a variação do número de nós na rede (SW - *small world*).

Na figura 3, é ilustrado a razão entre o CA e CMM entre os grafos regular e *small world*. Onde,  $C(0)$  e  $C(p)$  representam os CA dos grafos regular e *small world* respectivamente e  $L(0)$  e  $L(p)$  representam o CMM dos grafos regular e *small world* respectivamente. Podemos observar que a medida que a quantidade de nós, ou seja, o diâmetro<sup>1</sup> da rede aumenta, a razão entre os CMMs diminui, por conseguinte, o CMM no grafo *small world* diminui em relação ao grafo regular. Podemos observar também que, a medida que a quantidade de nós da rede aumenta, a razão entre os CAs aumenta no máximo 11,2%, o que é esperado para uma rede com características *small world*, pois seu CA deve ser semelhante ao do grafo regular. É importante destacar que na rede de 32 nós, o diâmetro da rede regular é 7 e o diâmetro da rede *small world* é garantidamente 3 pela definição do problema.

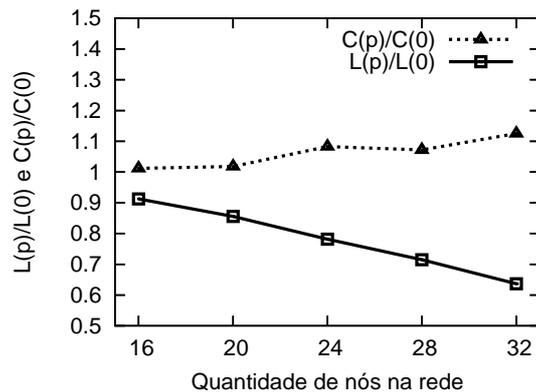


Figura 3: Razão do CA e CMM entre os grafos regular e *small world*.

## 7. Conclusões e trabalhos futuros

As redes de sensores sem fio possuem restrições de recursos, tais como baixo poder computacional, largura de banda reduzida e especialmente, fonte de energia limitada. O alto consumo de energia pode ser observado quando o fluxo de dados em cada nó é alto e quando o número de vizinhos é grande. Além disso, essas redes podem ser modelada como redes do tipo *small world*, onde o coeficiente de agrupamento é alto e o caminho médio mínimo entre cada par de nós na rede é pequeno. Através da utilização do conceito de sistemas do tipo eixo-raio, obtivemos uma configuração com um caminho médio

<sup>1</sup>Diâmetro é o maior caminho entre qualquer par de nós da rede.

mínimo pequeno entre qualquer par de nós, obtendo assim, uma configuração ótima para a rede, onde alguns nós são escolhidos como concentradores garantindo o menor consumo de energia.

Através dos resultados obtidos foi possível identificar as características de coeficiente de agrupamento e caminho médio mínimo entre qualquer par de nós nas configurações de rede avaliadas. Observamos que com a utilização de sistemas do tipo eixo-raio, o caminho médio mínimo foi reduzido em torno de 35% e o coeficiente de agrupamento aumentou no máximo 11,2% no cenário com 32 nós. Com isso, foi possível obter redes do tipo *small world*.

Como trabalhos futuros, pretendemos avaliar nossa solução com redes maiores através da implementação do algoritmo de decomposição de benders em paralelo. Além disso, iremos utilizar nossa solução para outras topologias de redes, como por exemplo aleatória, com mais nós sorvedouro. E por fim, utilizaremos uma solução aproximada para o problema proposto de tal forma que possamos obter uma solução distribuída onde os próprios nós sensores identificam quais serão os concentradores.

### Referências

**Lada A. Adamic**, The small world web, *ECDL '99: Proceedings of the Third European Conference on Research and Advanced Technology for Digital Libraries*, pages 443–452, London, UK, 1999, ISBN 3540665587.

**Ian F. Akyildiz, Weilian Su, Yogesh Sankarasubramaniam, e Erdal Cayirci**, A survey on sensor networks, *IEEE Communications Magazine*, 40(8):102–114, August 2002.

**Reka Albert, Hawoong Jeong, e Albert-Laszlo Barabasi**, The diameter of the world wide web, *Nature*, 401:130, 1999.

**T. Arampatzis, J. Lygeros, e S. Manesis**, A survey of applications of wireless sensors and wireless sensor networks, *Mediterranean Control Conference (Med05)*, 2005.

**J. F. Benders**, Partitioning procedures for solving mixed integer variables programming problems, *Numerische Mathematik*, 4:238–252, 1962.

**R.S. Camargo, G.S.Miranda, R. S. Cabral, e H.P.L. Luna**, Projeto de implementação paralela para decomposição de benders aplicada a sistemas eixo-raio com múltipla atribuição, *Anais do XXXVII SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2005.

**J. F. Campbell**, Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, 72:387–405, 1994a.

**J. F. Campbell**, A survey of network hub location, *Studies in Location al Analysis*, 6: 31–49, 1994b.

**J. F. Campbell, A. T. Ernst, e M. Krishnamoorthy**, *Hub Location Problems*, chapter 12, pages 373–402, 1 edition, 2002.

**R. S. de Camargo, G. Miranda Jr., e H. P. Luna**, Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem, *Computers & Operations Research, In Press, Corrected Proof*, 2006.

- S. N. Dorogovtsev e J.F.F. Mendes**, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, USA, March 2003, ISBN 0198515901.
- Deborah Estrin, Ramesh Govindan, John Heidemann, e Satish Kumar**, Next century challenges: Scalable coordination in sensor networks, *Fifth Annual International Conference on Mobile Computing and Networks (MobiCom'99)*, pages 242–248, Seattle, Washington, USA, August 1999, ACM Press.
- A. M. Geoffrion**, Generalized benders decomposition, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4):237–260, 1972.
- J. M. Kleinberg**, Navigation in a small world, *Nature*, 406(6798):845–845, August 2000, ISSN 0028-0836.
- H. P. L. Luna**, *Les Techniques de Décomposition-Coordination dans les Modèles Économiques d'Optimisation*, PhD thesis, Université de Toulouse III (Paul Sabatier), 1978.
- Newman E. Mark**, The structure and function of complex networks, *SIAM Review*, volume 45, pages 167–256, 2003.
- Stanley Milgram**, The small world problem, *Psychology Today*, 2:60–67, 1967.
- M.E.J. Newman e Duncan J. Watts**, Scaling and percolation in the small-world network model, *Physical Review E*, 60(6):7332–742, 1999.
- M. E. O'Kelly**, The location of interacting hub facilities, *Transportation Science*, 20(2): 92–106, 1986.
- M. E. O'Kelly**, A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities, *European Journal of Operational Research*, 32:393–404, 1987.
- D. Skorin-Kapov, J. Skorin-Kapov, e M. O'Kelly**, Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems, *European Journal of Operational Research*, 94:584–593, 1996.
- S. H. Strogatz**, Exploring complex networks, *Nature*, volume 410, pages 268–276, 2001.
- Sameer Tilak, Nael B. Abu-Ghazaleh, e Wendi Heinzelman**, A taxonomy of wireless micro-sensor network models, *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 6(2):28–36, April 2002.
- D. J. Watts e S. H. Strogatz**, Collective dynamics of 'small-world' networks., *Nature*, 393(6684):440–442, June 1998, ISSN 0028-0836.
- D. J. Watts, P. S. Dodds, e M. E. J. Newman**, Identity and search in social networks, *Science*, 296:1302, 2002.
- Duncan J. Watts**, *Small Worlds: The Dynamics of Networks Between Order and Randomness*, Princeton University Press, 2003.
- Duncan J. Watts**, *Six Degrees: The Science of a Connected Age*, W. W. Norton & Company, February 2004, ISBN 0393325423.