

Universidade Federal de Ouro Preto

Escola de Minas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
PROPEC

Dissertação

**Estratégias Numéricas para
Otimização da Solução Não
Linear de Problemas
Estruturais**

Jackson da Silva Rocha Segundo

Ouro Preto
2019



UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto – Escola de Minas
Departamento de Engenharia Civil
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Estratégias Numéricas para Otimização da Solução Não Linear de Problemas Estruturais

Jackson da Silva Rocha Segundo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva

Ouro Preto, Outubro de 2019

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

R672e Rocha Segundo, Jackson da Silva.
Estratégias numéricas para otimização da solução não linear de problemas estruturais. [manuscrito] / Jackson da Silva Rocha Segundo. - 2019.
81 f.: il.: , gráf., tab..

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira.
Coorientadora: Profa. Dra. Andréa Regina Dias da Silva.
Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto.
Departamento de Engenharia Civil. Programa de Engenharia Civil.
Área de Concentração: Estruturas e Construção.

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Engenharia de estruturas. 4. Análise não linear. 5. Análise numérica. 6. Métodos iterativos. I. Rocha Segundo, Jackson da Silva. II. Silva, Andréa Regina Dias da. III. Silveira, Ricardo Azoubel da Mota. IV. Universidade Federal de Ouro Preto. V. Título.

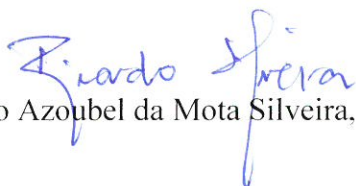
CDU 624.01

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB:1716

ESTRATÉGIAS NUMÉRICAS PARA OTIMIZAÇÃO DA SOLUÇÃO NÃO LINEAR DE PROBLEMAS ESTRUTURAIS

AUTOR: JACKSON DA SILVA ROCHA SEGUNDO

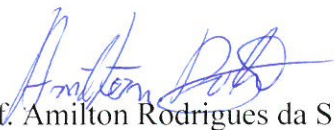
Esta dissertação foi apresentada em sessão pública e aprovada em 29 de outubro de 2019, pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira, D. Sc. – UFOP (Presidente)



Profa. Andréa Regina Dias da Silva, D. Sc. – UFOP



Prof. Amilton Rodrigues da Silva, D. Sc. – UFOP



Profa. Dalilah Pires Maximiano, D. Sc. – UFSJ

Aos meus familiares e orientadores.

Agradecimentos

A Deus por guiar meus passos nessa trajetória.

Aos meus pais, Jackson e Rackal, pelo amor e apoio incondicional; e por construírem um caminho que me trouxe até aqui; A minha irmã, Jackeline, pelo amor, bons momentos e compreensão.

Ao meu orientador, prof. Ricardo Silveira, pela oportunidade, motivação, dedicação e amizade ao longo destes anos de trabalho. Muito obrigado pela confiança, paciência e orientação.

À minha co-orientadora, profa. Andrea Silva, pela amizade, disposição, conselhos e contribuições para realizações deste trabalho. Muito obrigado pela atenção e assistência.

Aos meus tios, Cintya e Adilson, por todo carinho e cuidado comigo ao longo destes anos.

Ao amigo Rafael Barros por toda ajuda, disposição e colaboração durante a produção deste trabalho. Muito obrigado pela paciência e amizade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) pelos ensinamentos; e à Sílvia pela atenção e trabalho na secretaria do PROPEC

Aos meus amigos e amigas, em especial a Ana Rita, Amanda, Bernardo e Laila, e a minha prima Gwennyfer, pelo incentivo, correções e companheirismo; aos amigos do PROPEC, em especial ao Grupo TEAM I, pelas horas de estudo, convívio, risadas e bons momentos.

À CAPES, FAPEMIG, CNPq, UFOP e Fundação Gorceix pelo auxílio financeiro.

“Devemos aprender durante toda a vida, sem imaginar que a sabedoria vem com a velhice”

Platão

Resumo da Dissertação apresentada ao PROPEC/UFOP como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

ESTRATÉGIAS NUMÉRICAS PARA OTIMIZAÇÃO DA SOLUÇÃO NÃO LINEAR DE PROBLEMAS ESTRUTURAIS

Jackson da Silva Rocha Segundo

Outubro/2019

Orientadores: Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Andréa Regina Dias da Silva

É crescente a busca por ferramentas computacionais capazes de realizar simulações numéricas de sistemas estruturais com comportamento não linear. Para problemas estáticos não lineares, em particular, é fundamental a implementação e uso de estratégias numéricas com o objetivo de obter de forma completa as trajetórias de equilíbrio da estrutura, superando possíveis pontos críticos (pontos limite e de bifurcação). No contexto dos métodos de discretização (Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos de Contorno, etc), em que estratégias incrementais e iterativas são geralmente adotadas, os *solvers* não lineares devem ser eficientes nas duas fases do processo de solução (predita e corretiva), para cada passo do carregamento aplicado. São implementadas neste trabalho duas estratégias para tornar o procedimento de solução não linear mais robusto e eficiente: o ciclo iterativo de Potra-Pták e a técnica de otimização da busca linear. A primeira estratégia consiste em uma modificação do processo iterativo de Newton-Raphson, na qual são realizadas duas avaliações da função gradiente, representada pelas forças desequilibradas do sistema estrutural. Por sua vez, a busca linear é a técnica que visa escalonar o vetor de deslocamentos corretivos na fase iterativa, procurando garantir e acelerar a convergência do processo. Essas estratégias numéricas são detalhadas, implementadas (na ferramenta computacional CS-ASA, *Computational System for Advanced Structural Analysis*) e usadas em análises de estruturas com forte não linearidade. Através dos resultados numéricos obtidos, percebe-se que as estratégias empregadas são alternativas válidas e eficientes para a análise não linear geométrica de vigas, colunas, pórticos e arcos, proporcionando, em geral, a redução no número de incrementos de carga, iteração e tempo de processamento para obter o caminho de equilíbrio de forma completa.

Palavras-Chave: Análise não linear, Solução de equações não lineares, Busca linear, Potra-Pták

Abstract of Dissertation presented to PROPEC/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering.

NUMERICAL STRATEGIES FOR OPTIMIZING THE NONLINEAR SOLUTION OF STRUCTURAL PROBLEMS

Jackson da Silva Rocha Segundo

October/2019

Advisors: Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Andréa Regina Dias da Silva

The search for computational tools capable of numerical simulations of the structural systems nonlinear behavior has been growing. For nonlinear static problems, in particular, it is essential to implement and use numerical strategies to plot the complete structure equilibrium path, overcoming possible critical points (limit and bifurcation points). In the context of discretization methods (Finite Element Method, Finite Difference Method, Boundary Element Method, etc.), where iterative incremental strategies are generally adopted, nonlinear solvers must be efficient in both phases of the solution process (predictor and corrector) for each loading step. Two strategies are implemented in this work to make the nonlinear solver more robust and efficient: the Potra-Pták iterative cycle and the line search optimization technique. The first strategy consists of a modification of the iterative process proposed by Newton-Raphson, in which two evaluations of the gradient function (unbalanced forces) are performed. In turn, the linear search is the optimization technique that aims to scale the vector of corrective displacements in the iterative phase, seeking to ensure and accelerate the convergence of the process. These numerical strategies are described, implemented (in the CS-ASA, Computational System for Advanced Structural Analysis) and used in analysis of structures with strong nonlinearity. Through the numerical results obtained, it can be concluded that the strategies employed are valid and efficient alternatives for the geometrically nonlinear analysis of steel beams, columns, frames and arches, generally reducing the number of load step increments, iteration and time processing to obtain the structure equilibrium path completely.

Keywords: Nonlinear analysis, Nonlinear solver, Line search, Potra-Pták

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 Objetivos	3
1.3 O Sistema Computacional CS-ASA	3
1.4 Revisão Bibliográfica.....	5
1.5 Organização do Trabalho	9
2 Solução do Problema Estrutural Não Linear	10
2.1 Introdução.....	10
2.2 Metodologia de Solução.....	11
2.2.1 Solução Incremental Preditada.....	13
2.2.2 Ciclo Iterativo.....	15
2.3 Estratégias de Incremento de Carga.....	19
2.3.1 Estratégias Baseadas na Relação $I_d/I_{p,a}$	19
2.3.2 Estratégias Baseadas no Parâmetro de Rigidez GSP.....	22
2.3.3 Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga.....	24
2.4 Estratégias de Iteração.....	24
2.4.1 Iteração a Carga Constante	25
2.4.2 Iteração a Comprimento de Arco Constante	25
2.4.3 Iteração a Deslocamento Constante.....	27
2.4.4 Iteração a Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais.....	28
2.4.5 Iteração a Baseada no Deslocamento Generalizado	29
3 Ciclo Iterativo de Potra-Pták	30
3.1 Introdução.....	30

3.2	Fundamentos do Ciclo Iterativo de Potra-Pták.....	30
3.3	Validação da Estratégia de Potra-Pták	34
3.3.1	Pórtico de Lee.....	35
3.3.2	Arco Senoidal Perfeito.....	37
3.3.3	Arco Circular Abatido	39
3.3.4	Arco Circular Parcialmente Carregado.....	41
3.3.5	Arco Rotulado Engastado	43
3.3.6	Arco Circular Biarticulado	45
4	Método da Busca Linear	47
4.1	Introdução	47
4.2	Fundamentos da Busca Linear.....	47
4.3	Validação da Estratégia da Busca Linear	54
4.3.1	Pórtico de Lee.....	56
4.3.2	Coluna Engastada Livre	58
4.3.3	Viga Engastada Livre.....	60
4.3.4	Pórtico de Roorda.....	62
4.3.5	Arco Circular Parcialmente Carregado.....	65
5	Considerações Finais	68
5.1	Introdução	68
5.2	Conclusões	69
5.2.1	Potra-Pták.....	69
5.2.3	Busca Linear.....	70
5.3	Sugestões para Futuras Pesquisas	71
	Referências Bibliográficas	72

Lista de Figuras

1.1	Programa CS-ASA (Silva, 2009): análises e efeitos considerados	4
2.1	Trajectoria de equilíbrio (Maximiano, 2012)	12
2.2	Metodologia de solução incremental iterativa (Maximiano, 2012)	14
2.3	Representação gráfica do MNR Padrão e Modificado (Maximiano, 2012)	16
3.1	Pórtico de Lee: geometria e carregamento	35
3.2	Trajectorias de equilíbrio para o Pórtico de Lee – MPP	36
3.3	Arco senoidal: geometria e carregamento	37
3.4	Trajectoria de equilíbrio para arco senoidal – MPP.....	38
3.5	Arco circular abatido: geometria e carregamento	40
3.6	Trajectorias de equilíbrio para o arco circular abatido – MPP.....	40
3.7	Arco circular parcialmente carregado: geometria e carregamento	41
3.8	Trajectoria de equilíbrio para o arco parcialmente carregado – MPP.....	42
3.9	Arco circular rotulado-engastado: geometria e carregamento	44
3.10	Curva carga-deslocamento: arco circular rotulado-engastado – MPPM.....	44
3.11	Arco circular biarticulado: geometria e carregamento	45
3.12	Curva carga-deslocamento: arco circular biarticulado – MPPM.....	46
4.1	Busca linear e energia potencial total, Π (Crisfield, 1991)	49
4.2	Fluxograma do processo de busca linear	52
4.3	Trajectorias de equilíbrio para o Pórtico de Lee – NRP	56
4.4	Trajectorias de equilíbrio para o Pórtico de Lee – NRM	57
4.5	Coluna engastada-livre	58
4.6	Trajectorias de equilíbrio para a coluna engastada livre	59
4.7	Viga engastada-livre.....	60
4.8	Trajectorias de equilíbrio para a viga engastada-livre	61

4.9	Pórtico de Roorda: geometria e carregamento.....	62
4.10	Pórtico de Roorda: carga excêntrica.....	63
4.11	Trajelórias de equilíbrio: diferentes critérios de convergência.....	64
4.12	Arco circular parcialmente carregado: geometria e carregamento	65
4.13	Trajelória de equilíbrio para arco circular parcialmente carregado	66

Lista de Tabelas

2.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear	18
3.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear	33
3.2	Pórtico de Lee: avaliação da eficiência computacional do MPP	37
3.3	Arco senoidal: avaliação da eficiência computacional do MPP	39
3.4	Arco circular abatido: avaliação da eficiência computacional do MPP (Critério de convergência: forças)	41
3.5	Arco circular abatido: avaliação da eficiência computacional do MPP (Critério de convergência: deslocamentos)	41
3.6	Arco parcialmente carregado: avaliação da eficiência computacional do MPP	43
3.7	Arco rotulado-engastado: avaliação da eficiência computacional do MPPM	44
3.8	Arco circular biarticulado: avaliação da eficiência computacional do MPPM	46
4.1	Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear	53
4.2	Algoritmo da busca linear para estratégias linearizadas de iteração	54
4.3	Algoritmo da busca linear para estratégias não linearizadas de iteração	55
4.4	Pórtico de Lee: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a NRP	57
4.5	Pórtico de Lee: Avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a NRM	57
4.6	Coluna engastada-livre: avaliação da eficiência computacional da busca linear ...	59
4.7	Avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a diferentes estratégias de iteração	61
4.8	Pórtico de Roorda: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a diferentes critérios de convergência	64
4.9	Arco circular parcialmente carregado: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a formulação SOF-3	67

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A necessidade de projetos de edificações com relação peso/capacidade portante otimizados, reduzindo o consumo de materiais e o gasto financeiro sem, no entanto, comprometer a segurança e a durabilidade do sistema, sempre foi um dos principais objetivos da engenharia estrutural.

O avanço tecnológico dos materiais de construção e das técnicas construtivas, aliado aos recursos computacionais atualmente disponíveis, permitem a análise de estruturas considerando diferentes tipos de não linearidades, tais como: efeitos de segunda ordem, inelasticidade do material e semirrigidez das ligações. Com o aumento da esbeltez, por exemplo, o elemento ou sistema estrutural torna-se mais suscetível a sofrer grandes deslocamentos e rotações (antes da ruptura física), que podem gerar instabilidade estrutural do sistema ou mesmo o seu colapso de forma repentina.

Portanto, os vários fatores que influenciam o comportamento do elemento ou sistema estrutural devem ser levados em consideração nas análises. O estudo do equilíbrio e estabilidade de estruturas permite a obtenção dos deslocamentos, deformações e esforços solicitantes, quando essas são submetidas a diferentes condições de contorno e carregamento externo.

Posto isso, a busca por ferramentas computacionais capazes de realizar análises que simulam o real comportamento estrutural tem se intensificado. Tais análises, estáticas ou dinâmicas, precisam ser capazes de resolver problemas não lineares. As estáticas, em particular, necessitam de estratégias ou metodologias numéricas que consigam encontrar o caminho de equilíbrio estrutural de forma completa, passando por pontos críticos ao longo

desse caminho não linear. Destaca-se, portanto, a necessidade de procedimentos numéricos para a solução de equações não lineares — compatíveis com a robustez das formulações disponíveis para essa classe de problemas — que, em conjunto, possam efetuar a análise de forma completa e eficiente.

As melhores estratégias de solução não linear de problemas estruturais utilizam procedimentos incrementais e iterativos. Usualmente, a solução do problema de equilíbrio estrutural é encontrada passo a passo, em que se mantém fixo o parâmetro de carga (λ) durante o ciclo iterativo. Essa estratégia, entretanto, gera problemas de convergência nas vizinhanças dos pontos críticos (limites e bifurcação) presentes ao longo da trajetória de equilíbrio. Faz-se então necessário o emprego de técnicas ou métodos de continuidade, como o comprimento de arco, para se obter o equilíbrio do sistema após a passagem por esses pontos críticos.

Portanto, no âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF), em que normalmente são utilizadas essas estratégias incrementais e iterativas para problemas não lineares, os procedimentos de solução devem ser eficientes nas duas etapas do processo (preditora e corretora), para cada passo de carga. Uma vez que a eficácia de uma análise estrutural não linear é obtida não apenas através de formulações robustas de elementos finitos, mas também de *solvers* capazes de resolver os problemas, surge, portanto, a necessidade de sofisticações adicionais a esses procedimentos para torná-los mais desenvolvidos e habilitados.

Para um sistema estrutural fortemente não linear, ao se tentar resolver as equações algébricas resultantes da aplicação do MEF, num determinado passo de carga, é comum a necessidade de um número excessivo de iterações de Newton-Raphson (NR) para se obter convergência no processo e assim determinar um ponto de equilíbrio do sistema. Em algumas situações, entretanto, essa convergência não é obtida nem mesmo com um número elevado de iterações. Tendo isto em vista, este trabalho procura propor estratégias numéricas adicionais no sentido de melhorar a eficiência da solução desses problemas estruturais com não linearidade acentuada.

Nas próximas seções serão abordados os principais objetivos desta pesquisa e fornecidos maiores detalhes a respeito da base computacional utilizada, o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; SILVA, 2009), que receberá as modificações propostas nesta dissertação.

1.2 Objetivos

Tem-se como principal objetivo desta pesquisa tornar o *solver* não linear do CS-ASA mais robusto e eficiente, possibilitando a análise de estruturas mais complexas. Mais especificamente, foi proposto:

- Introduzir um novo ciclo iterativo, denominado de Potra-Pták (Potra e Ptak, 1984), mais eficiente que as iterações padrões ou modificadas de NR;
- Introduzir a técnica de otimização da busca linear (Crisfield; 1991, 1997) ao ciclo iterativo de NR (padrão e modificado) de forma a acelerar e garantir a convergência;
- Associar as diferentes estratégias de continuidade (comprimento de arco, deslocamento generalizado, norma mínima dos deslocamentos residuais, etc) ao ciclo iterativo de Potra-Pták;
- Estudar as condições de interferência na análise de estruturas quando a técnica da busca linear é aplicada;
- Testar a eficiência dos algoritmos implementados por meio da solução de problemas clássicos de estabilidade fortemente não lineares presentes na literatura (*benchmarks*).

Por fim, destaca-se que esta dissertação vai ao encontro dos objetivos do PROPEC/Deciv/EM/UFOP e está relacionada com as seguintes linhas de pesquisa:

1. *Mecânica Computacional*: que objetiva a aplicação de métodos numéricos na determinação de respostas de sistemas de engenharia;
2. *Comportamento e Dimensionamento de Estruturas*: que visa ao estudo isolado ou em conjunto do comportamento (resistência e estabilidade) das diversas partes de uma estrutura.

1.3 O Sistema Computacional CS-ASA

Esta seção apresenta as características da ferramenta computacional desenvolvida por Silva (2009), em sua tese de doutorado, a qual receberá intervenções desta pesquisa. O CS-ASA é um software destinado a resolver análises estruturais não lineares estáticas e dinâmicas de estruturas reticuladas bidimensionais. O programa foi escrito em linguagem Fortran 95 e estruturado em módulos que facilitam as intervenções e proporcionam o aumento da produtividade, além de facilitar a expansão do referido programa computacional.

O programa apresenta características comuns àqueles baseados no MEF, e tem a capacidade de realizar análises não lineares físicas e geométricas. Essa capacidade garante a possibilidade de realizar uma abordagem mais realista do comportamento estrutural. A Figura 1.1, a seguir, ilustra o esquema de funcionamento do CS-ASA.

A ferramenta é dividida em três partes principais: pré-processador, análise (processador) e pós-processador. Na Entrada de Dados (pré-processador) são definidas todas as informações do modelo necessárias para a obtenção da resposta estrutural por meio da análise. Nessa etapa o usuário define se fará uma análise linear ou não linear, dinâmica ou estática, assim como o tipo de estrutura a ser analisado (pórtico ou treliça). A partir dos dados de entrada, é gerada a malha de elementos finitos para o modelo estrutural e tem-se, na sequência, o início do processamento ou análise numérica (análise/processador). As principais respostas obtidas são os deslocamentos nodais no sistema estrutural e os esforços internos nos elementos finitos, que são apresentados em arquivos textos de saída (resultados/pós-processador).

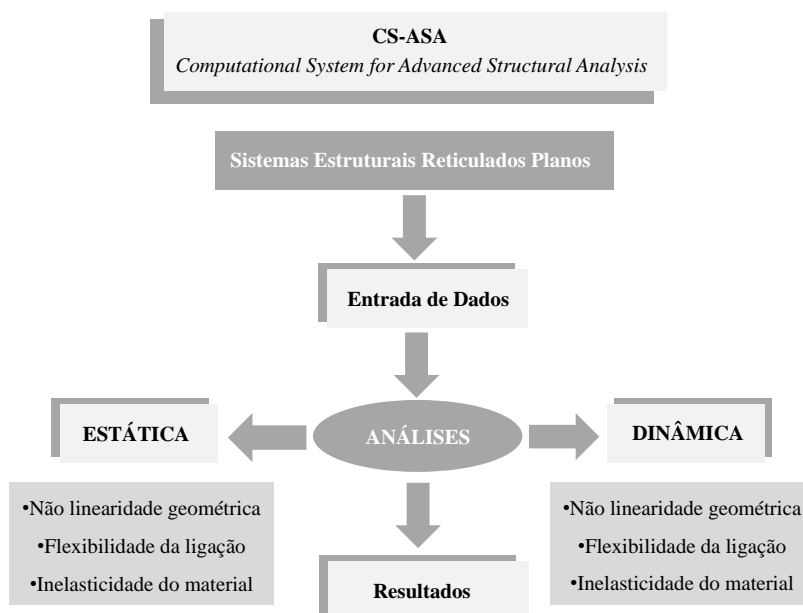


Figura 1.1 – Programa CS-ASA (Silva, 2009): análises e efeitos considerados

A plataforma CS-ASA é resultado de diversos programas independentes, que tiveram como base a ferramenta computacional desenvolvida em Silveira (1995). Galvão (2000), Rocha (2000), Machado (2005) e Rocha (2006) são algumas pesquisas que tiveram como base a plataforma desenvolvida inicialmente por Silveira (1995). Silva (2009) unificou esses estudos e implementações, e adicionou diversas funcionalidades à ferramenta, criando uma nova base computacional para que novos desenvolvimentos numéricos fossem possíveis.

O CS-ASA está em constante expansão e atualização, com novos módulos que aumentam as suas possibilidades de análises estruturais. Essa expansão, inclusive, vem acontecendo com a conclusão de algumas dissertações e teses. Por exemplo, Prado (2012) desenvolveu um pré-processador gráfico para o CS-ASA. Gonçalves (2013) implementou uma nova equação para o módulo tangente com o intuito de verificar como a degradação da rigidez da seção varia em função do esforço normal e do momento fletor em torno do eixo de menor inércia. Lemes (2015, 2018) desenvolveu o módulo para análise avançada de estruturas de concreto e mistas. Mais especificamente, ele definiu, baseado no método dos elementos de contorno, as propriedades geométricas da seção mista; introduziu no CS-ASA o conceito de rigidez generalizada para a análise não linear e cálculo da resistência da seção, considerando ou não a tração no concreto; implementou as curvas de interação esforço normal-momento fletor para o início do escoamento e plastificação; e simulou a perda gradual de rigidez nodal utilizando o método da rótula plástica refinado, para análise inelástica de estruturas mistas de aço e concreto.

Mais recentemente, através das pesquisas de Maximiano (2018) e Barros (2016), aconteceram implementações computacionais de formulações numéricas destinadas à análise avançada de estruturas metálicas, de concreto e mistas (aço-concreto) em situação de incêndio. Como consequência desses trabalhos, dois novos módulos foram desenvolvidos, que são o CS-ASA/FA e o CS-ASA/FSA (FA: *Fire Analysis*; FSA: *Fire Structural Analysis*). O primeiro se destina a realizar a análise térmica de seções transversais via MEF em regime permanente e transiente; o segundo módulo permite a realização da análise termomecânica de estruturas de aço, concreto e mistas considerando a degradação da resistência e da rigidez da estrutura por meio da utilização dos fatores de redução desses parâmetros, baseando-se nas recomendações normativas.

1.4 Revisão Bibliográfica

As estratégias de solução de problemas não lineares vêm sendo alvo de estudos desde o início da segunda metade do século passado. A maioria delas é baseada no método de Newton-Raphson (MNR). Entretanto, tal método, quando utilizado controlando apenas o parâmetro de carga, não é capaz de obter o caminho de equilíbrio da estrutura de forma completa caso apareça um ponto limite de carga. A saída encontrada por pesquisadores para esse problema foi associar procedimentos numéricos, denotados como técnicas ou métodos de continuação, às iterações usuais de NR.

Argyris (1964) aplicou um método puramente incremental na solução de um problema não linear. Os problemas não lineares passaram a ser resolvidos por meio de métodos incrementais-iterativos a partir de Brebbia e Connor (1969). Zienkiewicz (1971) modificou o método de Newton-Raphson (MNR) mantendo a matriz de rigidez constante durante o processo iterativo. Bergan e Soreide (1973) compararam diferentes procedimentos de solução numérica não linear.

Estudos foram realizados envolvendo o incremento automático do carregamento atuante. Bergan *et al.* (1978), por exemplo, usaram o “parâmetro de rigidez corrente (PRC)” do sistema para controlar o incremento da carga de acordo com o seu grau de não linearidade. Den Heijer e Rheinboldt (1981) desenvolveram uma estratégia de incremento de carga relacionado com a curvatura da trajetória de equilíbrio não linear. Crisfield (1991) apresentou diversas estratégias para o incremento de carga, e Yang e Kuo (1994) apresentaram um procedimento numérico baseado no “parâmetro de rigidez generalizado” (*General Stiffness Parameter*, GSP) para se obter o incremento automático da carga. Assim como o PRC, o GSP pode representar a rigidez do sistema no passo de carga corrente.

Um dos atributos de destaque em um *solver* não linear eficiente é a sua capacidade de determinar o sinal correto do incremento do parâmetro de carga, identificando quando os pontos críticos são ultrapassados. Crisfield (1981) sugeriu que o sinal desse parâmetro fosse definido através do sinal do determinante da matriz de rigidez tangente. Posteriormente, Wagner e Wriggers (1988) e Clarke e Hancock (1990) reforçaram tal sugestão através de vários experimentos numéricos. Crisfield (1981, 1991) afirmou que o sinal do incremento do parâmetro de carga corrente deve ser o mesmo do passo anterior, exceto quando o determinante da matriz de rigidez tangente mudar o sinal. Entretanto, como descrito por Meek e Tan (1984), esse procedimento pode falhar quando a estrutura apresentar múltiplos autovalores negativos.

Bergan *et al.* (1978) descreveram um critério para determinar o sinal do incremento do parâmetro de carga com base no trabalho externo. Clarke e Hancock (1990), entretanto, afirmaram que esse critério pode falhar na vizinhança de pontos limites de deslocamento. Feng *et al.* (1996, 1997) e Souza Neto e Feng (1999) utilizaram a estratégia proposta por Krenk e Hededal (1993, 1995), que definiram o sinal do incremento do parâmetro de carga analisando o produto interno entre o deslocamento incremental do passo de carga anterior e o incremento de deslocamento corrente. No caso do GSP, Yang e Shieh (1990) e Yang e Kuo (1994) indicaram que o sinal se torna negativo apenas quando está próximo aos pontos críticos.

Os processos ou estratégias iterativas, para que possam ser consideradas eficientes, precisam atender algumas condições. As mesmas devem evitar tempo de processamento e iterações elevadas para convergência; outra característica importante é a otimização do espaço de memória computacional na resolução de problemas estruturais não lineares com muitos graus de liberdade.

Batoz e Dhatt (1979), e posteriormente Powell e Simons (1981), desenvolveram processos iterativos realizados a deslocamento constante. Esse esquema nada mais é do que uma adaptação do MNR, mas tendo como parâmetro de controle uma componente específica do vetor deslocamento.

As técnicas ou métodos de continuação são largamente estudados. Meek e Tan (1984) fizeram um resumo das principais estratégias de solução para ultrapassar os pontos limites, com ênfase na técnica do comprimento de arco, considerada uma das mais eficientes. Outros tantos autores contribuíram com tal técnica, destacando-se: Riks (1972, 1979), Ramm (1981), Crisfield (1981, 1991, 1997) e Lam e Morley (1992). Kouhia e Mikkola (1989) fizeram um estudo para unificar os métodos de comprimento de arco propostos por Wempner (1971), Riks (1979), Ramm (1981), Crisfield (1981) e Fried (1984). Os esquemas propostos por Crisfield e Ramm foram combinados e utilizados por Fafard e Massicotte (1993), que interpretaram geometricamente o método proposto. Lin *et al.* (1993) contribuíram com uma definição mais ampla da técnica do comprimento de arco.

O método dos deslocamentos residuais mínimos (MDRM), conforme apresentado por Chan (1988), adota uma estratégia de minimização para os deslocamentos obtidos durante o ciclo iterativo (deslocamentos residuais). Já o método do resíduo ortogonal (MRO), que estabelece uma condição de ortogonalidade entre as forças residuais e os deslocamentos incrementais, foi proposto por Krenk (1995). Em Krenk e Hededal (1993, 1995) são encontradas aplicações do MRO. Yang e Kuo (1994) sugeriram o método do controle do deslocamento generalizado.

A técnica da “busca linear” associada às iterações de NR tem sido alvo de pesquisas. Merecem destaque: Gill e Murray (1974), que propuseram um algoritmo para otimização usando busca linear; Fletcher (1987), que, além da busca linear, apresentou outros métodos práticos de otimização; Lee (1989), que estudou a eficiência da busca linear em análises numéricas procurando destacar sua importância na solução de problemas fortemente não lineares; Crisfield (1991), que apresentou uma estratégia da busca linear no contexto do MEF; e Jeremic (2001), que utilizou um algoritmo de busca linear para melhorar a convergência no processo iterativo de NR. Trabalhos recentes trazem o tema “busca linear”

e destacam a sua importância no cenário da mecânica computacional. Fujiwara *et al.* (2005) e Okamoto *et al.* (2009), por exemplo, combinaram a busca linear e o MNR no sentido de acelerar a convergência do processo iterativo. Ritto-Corrêa e Camotim (2007) usaram a busca linear com os métodos de comprimento de arco. Burdakov e Kamandi (2018) combinaram os métodos “Multi-points” secantes e interpoladores com a busca linear para resolver sistemas de equações não lineares.

Na análise estrutural, estudos recentes também apontam para a procura de outros ciclos de iterações no sentido de se melhorar a convergência do processo de solução não linear. Alguns algoritmos baseados nessa abordagem têm ganhado destaque. Processos iterativos que utilizam a base conceitual de métodos como Super Halley, Chebyshev, Ponto Médio e Chun podem ser encontrados. Outro método relevante é o ciclo de iterações proposto por Potra e Pták (1984). Tal processo já tem grande destaque no campo da ciência matemática, porém ainda está em seus passos iniciais na área da engenharia estrutural. Trata-se, na realidade, de uma modificação do MNR em duas etapas, cuja função objetivo é avaliada duas vezes por iteração, e sua derivada avaliada uma vez. Estudos envolvendo esse e outros métodos de solução de equações não lineares podem ser encontrados em diversas pesquisas, com destaque para Chun (2007) e Herceg e Herceg (2015), que apresentaram famílias de métodos para resolver equações não lineares. Na sequência, Herceg e Herceg (2017) propuseram um novo método iterativo com taxa de convergência de ordem 8. Petkovic e Petkovic (2007) discutiram a respeito do desempenho de métodos iterativos que estavam surgindo, incluindo o método de Potra-Pták (MPP). Alterações para torná-lo ainda mais eficiente também são apresentadas em Cordero *et al.* (2010) e Soleymani *et al.* (2011), que fizeram modificações no método de Potra-Pták para solução de equação não lineares. Na esfera da engenharia estrutural podem ser destacados dois trabalhos que usam o MPP para analisar a estabilidade de estruturas: Souza *et al.* (2018) aplicaram este método de convergência cúbica para solução de problemas geometricamente não lineares; e Reis (2019) que aplicou esse ciclo para análises de problemas com não linearidade física.

Por fim, várias pesquisas desenvolvidas no âmbito do PROPEC estão relacionadas diretamente com esta dissertação. Estratégias de solução de sistemas de equações não lineares foram desenvolvidas e implementadas por Silveira (1995), visando a solução de problemas de estabilidade de colunas e arcos esbeltos com restrições de contato. Na sequência, Silveira e Gonçalves (1997) e Silveira (1999) testaram e compararam as variações do método do comprimento de arco e outros esquemas de solução não linear. As primeiras intervenções no módulo de solução não linear no programa desenvolvido por Silveira (1995)

aconteceram com Rocha (2000), com a implementação computacional de outras estratégias numéricas, como os métodos do deslocamento generalizado (MDG) e resíduo ortogonal (MRO), visando sempre à melhoria do traçado das trajetórias de equilíbrio. Silva (2009) unificou os *solvers* não lineares e várias formulações não lineares, e gerou, como já mencionado, o sistema CS-ASA (Figura 1.1). Com essa nova versão do CS-ASA, Pires (2012) e Maximiano *et al.* (2019) propuseram que uma condição de perpendicularidade — técnica do fluxo normal (TFN) — fosse satisfeita ao longo do processo iterativo de solução não linear para superar certas inconsistências da estratégia iterativa do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995).

A próxima seção traz a descrição dos capítulos que compõem este trabalho.

1.5 Organização do Trabalho

Esta dissertação é constituída por este capítulo e outros quatro, nos quais são apresentados os fundamentos teóricos de *solvers* não lineares utilizados para análises de estruturas e a base conceitual das estratégias aqui implementadas.

No próximo capítulo é detalhada a metodologia de solução de sistemas não lineares utilizada e modificada neste trabalho. Essa metodologia é caracterizada por um sistema incremental e iterativo de solução de equações não lineares. São destacados também as estratégias de incremento de carga e de iteração, e os critérios de convergência adotados pelo CS-ASA, sistema utilizado na presente pesquisa.

No Capítulo 3 são abordados os fundamentos teóricos do ciclo iterativo de Potra-Pták. A sua abordagem numérica é caracterizada por apresentar duas correções a cada iteração, e será detalhada através de um algoritmo que foi implementado no CS-ASA. Por fim, para comprovar a eficiência computacional do método, são realizadas análises da estabilidade elástica de cinco arcos e um pórtico, cujas respostas são disponíveis na literatura.

O Capítulo 4 aborda as bases conceituais da técnica de otimização da busca linear. A estrutura do método é elucidada, e os algoritmos necessários para introduzi-la no CS-ASA são detalhados. O capítulo se encerra com a validação da técnica por meio de análises de diversos sistemas estruturais fortemente não lineares.

São feitas considerações finais e conclusões referentes a este estudo no Capítulo 5, no qual se encerra o trabalho. Ainda no quinto capítulo, são feitas sugestões para desenvolvimento de pesquisas futuras, com o objetivo de dar continuidade aos estudos aqui realizados.

Capítulo 2

Solução do Problema Estrutural Não Linear

2.1 Introdução

Anteriormente ao desenvolvimento das tecnologias computacionais, das técnicas e materiais construtivos e do melhor entendimento do comportamento estrutural, os projetos estruturais eram realizados desconsiderando os efeitos não lineares. O sistema estrutural, nesse caso, era considerado perfeito, e a análise era realizada em regime linear — com algumas hipóteses, como, por exemplo: equilíbrio do sistema obtido a partir da configuração indeformada; não interferência de pequenas deformações na resposta; material com comportamento elástico; e idealização das ligações entre os membros como sendo rotuladas ou rígidas.

Entretanto, após a fase linear e anterior ao colapso, a maioria das estruturas apresentam comportamento não linear. Para que seu comportamento real seja simulado são necessárias análises que considerem os efeitos geométricos e do material não lineares. Esses efeitos, considerados pelas normas que regem o dimensionamento estrutural há algumas décadas, continuam presentes na maioria das normas técnicas atuais (Eurocode 2, 2004; ABNT NBR 8800, 2008; ABNT NBR 6118, 2014; AISC LRFD, 2016) — especialmente as baseadas no critério da resistência última. Tais diretrizes levam em conta esses efeitos e trazem prescrições para que os engenheiros projetistas os considerem em suas análises.

Como já mencionado, existem variadas fontes de não linearidade, como a geométrica e a física. A geométrica está relacionada com grandes deslocamentos e rotações, e sua

inclusão na análise exige que se considere o equilíbrio do sistema estrutural na sua posição deformada. A não linearidade física advém das relações constitutivas. Portanto, quanto menos simplificações na análise, maior será a precisão da solução do problema estrutural.

Nesse sentido, a resolução de equações não lineares é fundamental no estudo da estabilidade elástica ou inelástica de uma estrutura. Os processos incrementais iterativos são alternativas eficientes para solucionar tais problemas, com lugar de destaque na preferência da comunidade científica para a análise não linear de estruturas. As etapas desse processo serão explicadas detalhadamente neste capítulo.

A Seção 2.2 detalha a metodologia de solução do problema não linear, elucidando as duas etapas: ciclo iterativo e fase incremental. Nas Seções 2.3 e 2.4 são apresentadas, respectivamente, as estratégias de incremento de carga e iteração.

2.2 Metodologia de Solução

No contexto do MEF, a equação que governa o equilíbrio do sistema estrutural pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c, \boldsymbol{\psi}) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (2.1)$$

com \mathbf{F}_r sendo o vetor do carregamento externo de referência (apenas a sua direção é importante) e λ definido como uma grandeza escalar responsável pelo escalonamento de \mathbf{F}_r ; \mathbf{F}_i é o vetor de forças internas, que pode ser função dos deslocamentos nodais \mathbf{U} , das forças internas \mathbf{P} , do parâmetro relacionado com a semirrigidez das ligações \mathbf{S}_c e $\boldsymbol{\psi}$, que é um parâmetro relacionado com a plastificação da seção transversal dos elementos.

O comportamento não linear de um sistema estrutural deve ser estudado por meio do controle de um conjunto de parâmetros. Para entender a resposta da estrutura e identificar possíveis ocorrências de fenômenos de instabilidade é necessário entender como as suas configurações de equilíbrio variam de acordo com a alteração de alguns parâmetros de controle. As trajetórias ou caminhos de equilíbrio — que representam graficamente, por exemplo, a curva carga-deslocamento da estrutura — são obtidas através dessas análises.

Nessas representações, a abcissa geralmente representa uma componente do deslocamento nodal de interesse, e a ordenada o parâmetro de carga. Durante a trajetória, a estrutura pode sofrer mudanças qualitativas em relação à estabilidade. A Figura 2.1 ilustra uma trajetória de equilíbrio, na qual cada ponto representa uma configuração de equilíbrio

do sistema. Nessa mesma figura estão indicados os pontos críticos da trajetória, que são os pontos limites (de carga ou deslocamento) e de bifurcação.

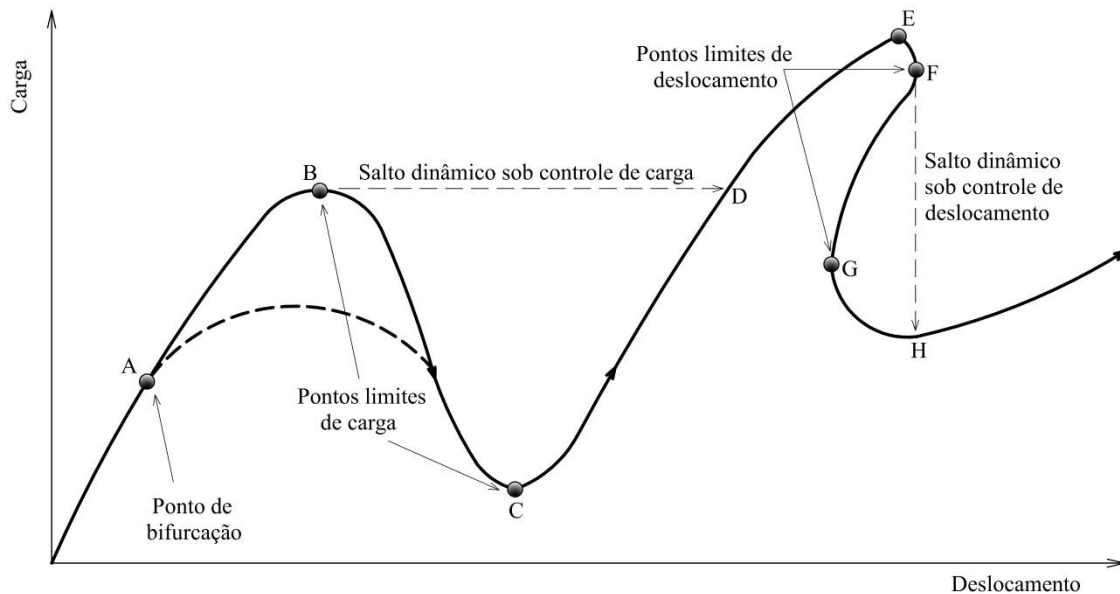


Figura 2.1 – Trajetória de equilíbrio (Maximiano, 2012)

O traçado completo da trajetória de equilíbrio de um sistema estrutural, mostrando os caminhos primário e secundário, é o grande objetivo de um *solver* não linear. Ou seja, um *solver* não linear eficiente deve ser capaz de obter configurações de equilíbrio do sistema além dos pontos críticos — que são característicos das trajetórias fortemente não lineares — e indicar trechos de ganho e perda de rigidez. Crisfield (1991) afirma que a determinação da resposta do sistema após os pontos críticos (caminho pós-crítico) é essencial quando se deseja estudar o comportamento da estrutura no domínio de grandes deslocamentos ou mesmo na identificação do tipo de colapso estrutural.

Como já mencionado, as estratégias incrementais e iterativas são as mais usuais e eficientes na resolução de problemas não lineares. Em um contexto computacional, para cada passo de carga, há duas etapas distintas:

- i. Inicialmente, a partir da última configuração de equilíbrio obtida, é selecionado um incremento de carga, $\Delta\lambda^0$, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga. Depois da determinação de $\Delta\lambda^0$, chega-se ao incremento dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{U}^0$. O parâmetro $\Delta\lambda^0$ e o vetor $\Delta\mathbf{U}^0$ definem a chamada solução incremental predita;

- ii. Na segunda etapa, procura-se corrigir a solução incremental predita por meio de um processo iterativo e, dessa forma, restaurar o equilíbrio do sistema estrutural.

Nas subseções a seguir, serão detalhadas essas duas etapas características do *solver* não linear implementado no CS-ASA. Para facilitar o entendimento, são feitas considerações a respeito da notação utilizada, ou seja:

- Considera-se que são conhecidos o campo de deslocamento e o estado de tensão da estrutura no passo de carga t ; deseja-se determinar a configuração de equilíbrio no passo $t + \Delta t$;
- k é o contador do número de iterações. Para $k = 0$, tem-se a solução incremental predita; para outros valores, tem-se o processo iterativo de NR;
- λ define o parâmetro de carga e \mathbf{U} define o vetor de deslocamentos nodais totais;
- $\Delta\lambda$ caracteriza os incrementos do parâmetro de carga, enquanto $\Delta\mathbf{U}$ os incrementos dos deslocamentos nodais, ambos medidos a partir da última configuração de equilíbrio; e
- $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{U}$ denotam as correções do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais, respectivamente, obtidas durante o processo iterativo.

A Figura 2.2 ilustra o processo de solução adotado para um incremento de carga quando a restrição do comprimento de arco é introduzida às iterações de NR. A última configuração de equilíbrio da estrutura é representada pelas coordenadas $({}^t\mathbf{U}; {}^t\lambda)$. A partir dessa configuração é selecionado um incremento de carga, $\Delta\lambda^0$, e calculado o incremento do vetor de deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{U}^0$. A solução $({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0; {}^t\lambda + \Delta\lambda^0)$ normalmente não satisfaz a Equação (2.1), pois o vetor das forças internas \mathbf{F}_i é não linear, e assim são necessárias iterações corretivas visando à restauração do equilíbrio do sistema.

2.2.1 Solução Incremental Predita

A primeira etapa para obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente $(\Delta\lambda^0, \Delta\mathbf{U}^0)$, consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente, \mathbf{K} . Obtém-se na sequência o vetor de deslocamentos nodais tangenciais, $\delta\mathbf{U}_r$, através da seguinte expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r \quad (2.2)$$

Por meio de uma estratégia de incremento de carga é possível fazer a seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$. Algumas das estratégias que estão presentes no CS-ASA já permitem essa forma de escolha. Pode-se vincular tal

seleção, por exemplo, a uma equação de restrição, como ilustrada na Figura 2.2 a restrição do comprimento de arco (Crisfield, 1991).

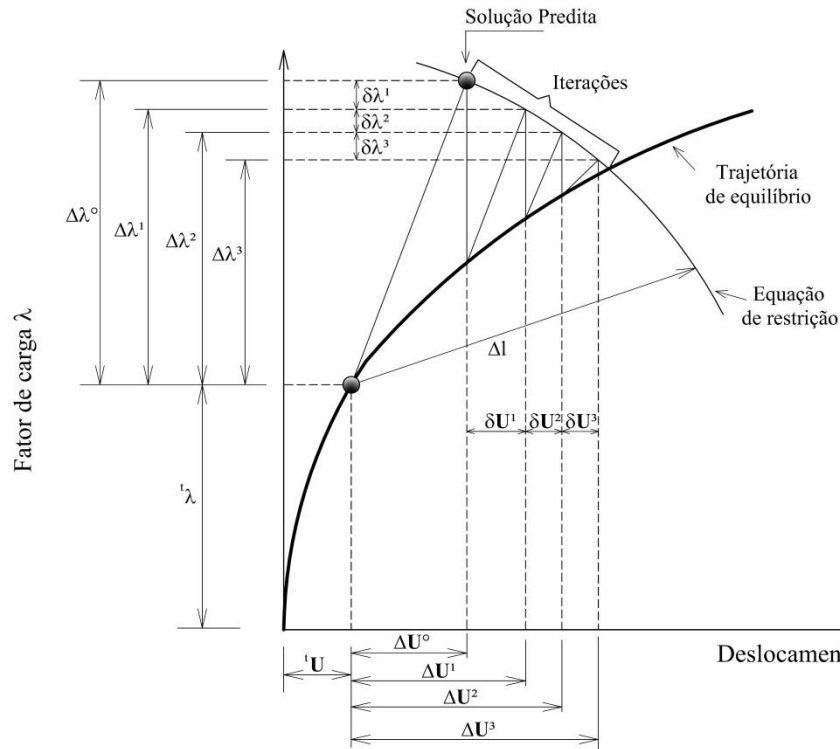


Figura 2.2 – Metodologia de solução incremental iterativa (Maximiano, 2012)

Após a definição do incremento inicial, $\Delta\lambda^0$, determinam-se os deslocamentos nodais incrementais, $\Delta\mathbf{U}^0$, escalonando-se de $\delta\mathbf{U}_r$, ou seja,

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \quad (2.3)$$

São atualizados então o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais através do seguinte procedimento:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (2.4)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (2.5)$$

em que ${}^t\lambda$ e ${}^t\mathbf{U}$ caracterizam o ponto de equilíbrio do sistema no último passo de carga, também indicado na Figura 2.2.

As soluções definidas através das Equações (2.4) e (2.5) nem sempre satisfazem as condições de equilíbrio, como mencionado anteriormente. Dessa forma, é necessário realizar um ciclo de iterações com o intuito de buscar o equilíbrio do sistema. A próxima seção traz a elucidação do processo iterativo.

2.2.2 Ciclo Iterativo

O objetivo do MNR, em uma análise numérica, é determinar as raízes de uma equação ou um sistema de equações não lineares. No problema estrutural, a equação cujas raízes precisam ser determinadas é dada por (2.1). Em um esquema padrão do MNR, apenas o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} , é corrigido durante o ciclo iterativo. O parâmetro de carga, λ , segue inalterado durante essa etapa. Com essa aplicação do ciclo iterativo, só é possível obter a trajetória de equilíbrio até o primeiro ponto limite de carga. Caso o objetivo seja obter o caminho de equilíbrio de forma completa, é necessário permitir a alteração de λ durante o processo iterativo.

Nesse processo numérico iterativo, o problema consiste em estabelecer uma série de correções para determinada estimativa inicial da raiz até que se obtenha um valor satisfatório dentro da precisão requerida (Cook *et al.*, 1989). Ao seguir a técnica geral proposta por Bathoz e Dhatt (1979), que permite a variação do parâmetro de carga, pode-se considerar uma mudança nos deslocamentos nodais governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k), k \geq 1 \quad (2.6)$$

em que \mathbf{g} representa o vetor de forças desequilibradas (ou gradiente) que deverá se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido. Esse vetor, como mostrado na equação anterior, é função tanto dos deslocamentos nodais totais, \mathbf{U} , calculados na última iteração ($k-1$), como do parâmetro de carga, λ , na iteração corrente (k), que agora é uma incógnita do problema, ou seja:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.7)$$

sendo $\delta\lambda^k$ a correção do parâmetro de carga. Substituindo (2.7) em (2.6), chega-se a:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\left[\mathbf{F}_i^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k)\mathbf{F}_r\right] \quad (2.8)$$

Na equação anterior, \mathbf{F}_i denota o vetor das forças internas; $\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r$ representa o total das forças internas que atuaram na iteração anterior; e os termos k e $k-1$ referem-se às iterações presente e passada, respectivamente.

Observe que a Equação (2.8) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k\mathbf{F}_r \quad (2.9)$$

que é a equação a ser trabalhada durante o ciclo iterativo.

A partir da Equação (2.9), pode-se dividir os deslocamentos nodais iterativos, $\delta\mathbf{U}^k$, em duas parcelas:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.10)$$

sendo:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \quad (2.11)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r \quad (2.12)$$

Nas equações anteriores, $\delta\mathbf{U}_g$ é a correção que seria obtida caso fosse aplicada a forma convencional do MNR com o incremento do parâmetro de carga constante; $\delta\mathbf{U}_r$ é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação de \mathbf{F}_r .

Existe também a possibilidade de se utilizar o MNR modificado, no qual a matriz de rigidez não é atualizada continuamente durante o processo iterativo. Nesse caso, $\delta\mathbf{U}_r$, na iteração corrente, será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais $\delta\mathbf{U}_r$ calculado através de (2.2). A Figura 2.3 ilustra a diferença entre os métodos NR Padrão (em que a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração) e NR Modificado (em que a matriz de rigidez é mantida constante durante o ciclo iterativo).

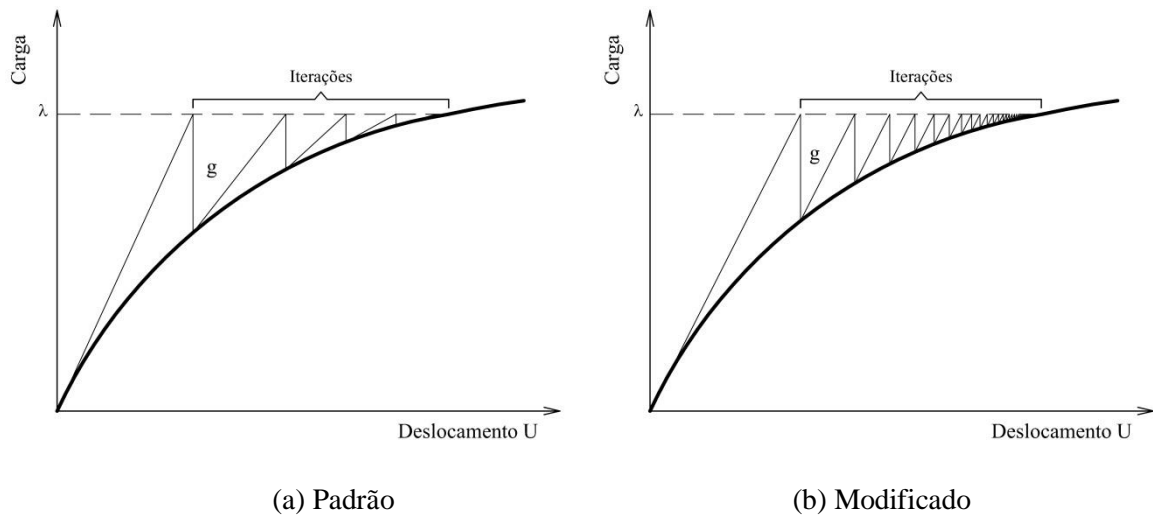


Figura 2.3 – Representação gráfica do MNR Padrão e Modificado (Maximiano, 2012)

A correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, única incógnita da equação (2.10), é determinada por alguma estratégia de iteração. Com a determinação de $\delta\lambda^k$, pode-se obter a correção dos deslocamentos através de (2.10).

Uma vez obtida a solução iterativa, $\delta\lambda^k$ e $\delta\mathbf{U}^k$, parte-se para a atualização das variáveis incrementais do problema

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (2.13)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.14)$$

e totais:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (2.15)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k \quad (2.16)$$

Como em qualquer processo numérico, a solução calculada é apenas uma aproximação da solução exata. Dessa forma, é preciso definir limites de tolerância para interrupção do processo iterativo. O processo é interrompido quando um ou dois critérios de convergência são satisfeitos. O primeiro critério de convergência — calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior — é baseado em relações de forças e definido de acordo com:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (2.17)$$

em que o numerador representa a norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas na iteração anterior; o denominador, por sua vez, é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo, sendo ζ um fator de tolerância fornecido pelo analista.

O segundo critério de convergência, verificado ao final de cada iteração, é baseado em relações de deslocamentos e definido como:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (2.18)$$

na qual o numerador é a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador a norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais.

A Tabela 2.1 descreve o processo incremental iterativo detalhado por esta seção. A metodologia até aqui explicada envolve o processo iterativo de NR. No Capítulo 3, será elucidada a modificação de tal metodologia para o ciclo de Potra-Pták (PP), que, por sua vez, é baseado nas clássicas iterações de NR. Já no Capítulo 4, são apresentadas as modificações desta metodologia para o acoplamento da técnica da busca linear. Nas próximas seções, apresentam-se as estratégias de incremento de carga e iteração.

Tabela 2.1 Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

-
1. Dados gerais: características geométricas e dos materiais, malha de elementos finitos e parâmetros particulares referentes ao tipo de análise.
 2. Define o vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{F}_r , que estabelece a direção do carregamento externo aplicado
 3. Consideram-se os deslocamentos e o parâmetro de carga na última configuração de equilíbrio conhecida, t : ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^t\lambda$
 4. **SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE**: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{U}^0$
 - 4a. Monta-se a matriz de rigidez tangente: \mathbf{K}
 - 4b. Calcula: $\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
 - 4c. Define $\Delta\lambda^0$ usando uma estratégia de incremento de carga (Veja seção 2.3)
 - 4d. Determina: $\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r$
 - 4e. Atualiza as variáveis na configuração $t + \Delta t$
 ${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0$
 5. **PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON**: $k = 1, 2, 3, \dots$
 - 5a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$
 - 5b. Calcula o vetor de forças residuais:
 $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$
 - 5c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente
SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
 - 5d. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}
 - 5e. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando uma estratégia de iteração (Veja Seção 2.4)
 - 5f. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{U}_r^k$, com:
 $\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$
 - 5g. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente
SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6*
SIM (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga para o item 6, apenas se houve a convergência no item 5c*
 - 5h. Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :
a) *Incremental*: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$
b) *Total*: ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$
 - 5i. Retorna ao passo 5
 6. **REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 4**
-

2.3 Estratégias de Incremento de Carga

A solução incremental predita, descrita na seção anterior, tem como etapa fundamental a definição do parâmetro inicial de carga, $\Delta\lambda^0$. Em um *solver* não linear eficiente, a definição automática do incremento desse parâmetro é de suma importância, devendo retratar o grau de não linearidade do sistema. Para caracterizar-se como eficiente, a estratégia deve satisfazer dois critérios: fornecer grandes incrementos quando a resposta do sistema for linear e, de maneira inversa, pequenos incrementos quando a resposta for fortemente não linear. Outra característica que merece destaque é a definição correta do sinal para o incremento, possibilitando a detecção da passagem por pontos limites.

O CS-ASA possui diversas estratégias de incremento de carga encontradas na literatura que atendem as características descritas anteriormente. Serão descritas brevemente a seguir algumas dessas estratégias, incluindo aquelas que foram utilizadas nas análises realizadas por esta dissertação.

2.3.1 Estratégias Baseadas na Relação $I_d/I_{p,a}$

Crisfield (1981) e Ramm (1981, 1982) sugeriram estratégias de incremento, não só de carga como de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo), baseadas na relação:

$$\left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^\xi \quad (2.19)$$

na qual I_d é o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente, parâmetro determinado pelo usuário do programa; $I_{p,a}$ é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse; e ξ é um expoente cujo valor se encontra usualmente entre 0,5 e 1,0.

Algumas estratégias baseadas nessa relação foram implementadas no CS-ASA e serão agora detalhadas.

1. Incremento Direto do Parâmetro de Carga

Tomando como base um esquema de solução incremental juntamente com o clássico MNR, Crisfield (1991) adotou o procedimento para calcular o parâmetro inicial de carga, a seguir:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_{p,a}^0 \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

em que $\Delta\lambda_{p,a}^0$ e $\Delta\lambda^0$ designam, respectivamente, os incrementos iniciais nos passos de carga anterior e corrente. A expressão dada pela equação anterior já considera a utilização de uma estratégia de iteração que permita a variação do parâmetro de carga. Caso não seja permitida tal variação, a expressão efetuará apenas incrementos positivos.

2. Incremento do Comprimento de Arco

Crisfield (1991) propôs que a relação (2.19) fosse utilizada na definição do incremento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente, portanto:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

em que $\Delta l_{p,a}$ e Δl representam, respectivamente, os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido) e no corrente (incógnita).

Por meio da Equação (2.21) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial,

$$\left(\Delta\mathbf{U}^0 \right)^T \Delta\mathbf{U}^0 = \Delta l^2 \quad (2.22)$$

obtem-se, usando a Equação (2.3) em (2.22), a expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r}} \quad (2.23)$$

Se a condição de restrição imposta à solução incremental predita não for a descrita por (2.22), mas a proposta por Riks (1972) e definida como:

$$\Delta\mathbf{U}^{0T} \Delta\mathbf{U}^0 + \left(\Delta\lambda^0 \right)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (2.24)$$

obtem-se para a expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta\mathbf{U}_r^T \delta\mathbf{U}_r + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (2.25)$$

Normalmente, o usuário de um programa de elementos finitos tem alguma ideia do incremento inicial do parâmetro de carga para uma certa análise. Dessa forma, tendo tal valor especificado, a técnica fornecida pela Equação (2.20) pode conduzir automaticamente os demais incrementos da análise. Entretanto, o mesmo não é observado para a magnitude incremental inicial do comprimento de arco. Para contornar esse problema, o CS-ASA solicita ao usuário a determinação do primeiro passo de carga como dado de entrada. Esse valor, então, é usado para calcular os deslocamentos incrementais $\Delta\mathbf{U}^0$, que por sua vez são utilizados na Equação (2.22) ou (2.24) para obter Δl_1 . Na sequência, calcula-se automaticamente Δl para determinar a magnitude dos passos de carga seguintes.

3. *Incremento de uma Componente de Deslocamento Seleccionada*

Nesta estratégia, é selecionado o incremento de uma componente do vetor de deslocamentos com o objetivo de limitar o incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$. Ao seguir o mesmo raciocínio utilizado para a técnica do comprimento de arco, pode-se calcular o incremento de uma componente j do vetor de deslocamentos para o passo atual de carga de acordo com:

$$\Delta U_j = \Delta U_{j(p,a)} \left(\frac{I_d}{I_{p,a}} \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

sendo $U_{j(p,a)}$ e ΔU_j , respectivamente, os incrementos da componente j do vetor de deslocamentos no passo de carga anterior e no passo de carga atual. Tem-se, então, que a componente j da solução incremental predita, $\Delta\mathbf{U}^0$, deve satisfazer à seguinte relação:

$$\Delta\mathbf{U}^0(j) = \Delta U_j \quad (2.27)$$

Agora, ao usar (2.3) em (2.27) obtém-se a expressão procurada para o incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$:

$$\Delta\lambda^0 = \frac{\Delta U_j}{\delta\mathbf{U}_r(j)} \quad (2.28)$$

A mesma analogia feita para o comprimento de arco, pode ser utilizada aqui para o primeiro passo de carga: o usuário fornece o primeiro valor que permitirá obter o

incremento inicial da componente j do vetor de deslocamentos; para os demais incrementos o processo é automatizado utilizando (2.26).

2.3.2 Estratégias Baseadas no Parâmetro de Rigidez GSP

Yang e Kuo (1994) propuseram que uma restrição deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não linear (solução predita e ciclo iterativo). A seguinte equação representa esta restrição:

$$\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}^k + k_1 \delta \lambda^k = H_k \quad (2.29)$$

na qual \mathbf{C} é uma matriz cujos elementos são constantes; k_1 também é constante; e H é um parâmetro incremental (deslocamento, comprimento de arco). Diferentes estratégias de incremento de carga e iteração podem ser obtidos a partir da escolha dessas variáveis.

Essa equação de restrição forma um sistema de equações com $N+1$ incógnitas com a Equação (2.9), na qual N se refere à dimensão do vetor de deslocamentos; e a unidade, ao parâmetro de carga λ . Yang e Kuo (1994) explicam que essas duas equações podem ser combinadas de forma que, após manipulações algébricas e matriciais, chega-se à seguinte expressão para o parâmetro de carga:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_r^k + k_1} \left(H_k - \mathbf{C}^T \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (2.30)$$

Yang e Shieh (1990) sugeriram como valores de \mathbf{C} e k_1 :

$$\mathbf{C} = {}^t \delta \mathbf{U}_r \Delta \lambda^0 \text{ e } k_1 = 0 \quad (2.31)$$

na qual ${}^t \delta \mathbf{U}_r$ é o vetor de deslocamentos nodais tangenciais no passo de carga anterior, levando a uma nova expressão para $\delta \lambda$:

$$\delta \lambda^k = \frac{1}{\Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left(H_k - \Delta \lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (2.32)$$

Para obter a solução incremental predita basta substituir, na equação anterior, $k = 0$, $\delta \lambda^0 = \Delta \lambda^0$, $\delta \mathbf{U}_g^0 = 0$ e $\delta \mathbf{U}_r^0 = \delta \mathbf{U}_r$. Tem-se, então:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \sqrt{\frac{H_0}{{}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r}} \quad (2.33)$$

Pode-se definir o valor do parâmetro incremental H_0 (no caso, deslocamento generalizado) usando a equação anterior e assumindo que, no primeiro passo de carga, o valor de $\Delta\lambda^0$ (introduzido pelo usuário) é conhecido. Tem-se, então:

$$H_0 = (\Delta\lambda_1^0)^2 ({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r) \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.33), chega-se a:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)\delta\mathbf{U}_r}} \quad (2.35)$$

Define-se então, como o parâmetro de rigidez generalizado do sistema (*Generalized Stiffness Parameter*, GSP) por meio da relação:

$$\text{GSP} = \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)\delta\mathbf{U}_r} \quad (2.36)$$

pode-se escrever a relação (2.35) como:

$$\Delta\lambda^0 = \pm \Delta\lambda_1^0 \sqrt{|\text{GSP}|} \quad (2.37)$$

Para escolher adequadamente o sinal na expressão anterior é utilizado o critério baseado no sinal do parâmetro GSP. Esse critério será apresentado na Seção 2.3.3. Assim como para estratégias anteriores, o primeiro incremento é um valor prescrito e $\text{GSP} = 1$.

As expressões para comprimento de arco e componente de deslocamento selecionada, bem como a para controle através do trabalho externo, podem ser obtidas diretamente a partir de (2.32). Para tal, são necessárias as seguintes considerações:

i. Controle do comprimento de arco:

$$k = 0, k_1 = \Delta\lambda^0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, \mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r \text{ e } H_0 = \Delta l^2$$

ii. Controle de uma componente de deslocamento selecionada:

$$k = 0, k_1 = 0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, \mathbf{C}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\} \text{ e } H_0 = \Delta U_j$$

iii. Controle do trabalho externo:

$$k = 0, k_1 = 0, \delta\lambda^0 = \Delta\lambda^0, \delta\mathbf{U}_g^0 = 0, \delta\mathbf{U}_r^0 = \delta\mathbf{U}_r, \mathbf{C} = \mathbf{F}_r \text{ e } H_0 = \Delta W$$

2.3.3 Sinal do Incremento Inicial do Parâmetro de Carga

Como visto na seção anterior, o sinal do incremento inicial de carga pode ser positivo ou negativo. A escolha correta desse sinal na fase predita é de grande importância para a obtenção completa do caminho de equilíbrio. Três critérios principais para essa escolha podem ser descritos:

Critério 1

Crisfield (1991) afirma que o sinal deve ser positivo sempre que a matriz de rigidez tangente \mathbf{K} (no início do incremento) for positiva definida. Ou seja, Crisfield sugere que o sinal de $\Delta\lambda^0$ deve seguir aquele do incremento anterior, exceto quando o determinante da matriz de rigidez tangente mudar de sinal. De acordo com Meek e Tan (1984), esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos. Nesses casos, o *Critério 2* é mais aconselhado.

Critério 2

Bergan *et al.* (1978) sugerem que o sinal do incremento do trabalho externo seja utilizado para detectar os pontos limites da trajetória de equilíbrio da estrutura. O sinal de $\Delta\lambda^0$ deverá ser modificado quando o sinal do incremento do trabalho externo atual seja diferente daquele do passo anterior. Clarke e Hancock (1990) esclarecem que esse critério pode se tornar inseguro nas proximidades de pontos limites de deslocamento.

Critério 3

Segundo Yang e Kuo (1994), o sinal do parâmetro de rigidez corrente depende apenas dos vetores ${}^t\delta\mathbf{U}_F$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{U}_F$ (passo de carga corrente). O parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

2.4 Estratégias de Iteração

A função de uma estratégia de iteração é determinar o parâmetro de carga iterativo $\delta\lambda$. O CS-ASA apresenta várias opções de estratégias de iteração. Essa diversidade é explicada pela incapacidade das estratégias de resolver problemas fortemente não lineares com igual eficiência. Algumas das estratégias disponíveis no CS-ASA, incluindo todas as utilizadas por este trabalho, são detalhadas a seguir:

2.4.1 Iteração a Carga Constante

Essa estratégia de iteração caracteriza o método tradicional de controle de carga constante, ou o MNR (padrão ou modificado), no qual o parâmetro de carga é mantido constante durante o ciclo iterativo. Com isso, a restrição se reduz à trivialidade:

$$\delta\lambda^k = 0 \quad (2.38)$$

Essa estratégia leva a Equação (2.10) a apresentar apenas os deslocamentos fornecidos pelo ciclo iterativo de NR. Outra característica é não ultrapassar pontos limites de carga.

2.4.2 Iteração a Comprimento de Arco Constante

Diversas técnicas de restrição baseadas em comprimento de arco estão disponíveis na literatura. As primeiras estratégias foram desenvolvidas por Riks (1972) e Wempner (1971), e as demais foram desenvolvidas a partir delas. Algumas dessas técnicas serão apresentadas a seguir.

1. Comprimento de Arco Esférico

Tomando como base a Equação (2.24) proposta por Riks (1972), Crisfield (1981; 1991) sugeriu que deveria ser respeitada, a cada iteração do processo, a seguinte condição:

$$\left(\Delta\mathbf{U}^k\right)^T \Delta\mathbf{U}^k + \left(\Delta\lambda^k\right)^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = \Delta l^2 \quad (2.39)$$

na qual $\Delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k$ representam, respectivamente, os incrementos do parâmetro de carga e dos deslocamentos nodais da iteração corrente. Substituindo (2.14) em (2.39), tem-se:

$$A\left(\delta\lambda^k\right)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0 \quad (2.40)$$

sendo os coeficientes A , B e C definidos como:

$$A = \left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \delta\mathbf{U}_r^k + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (2.41)$$

$$B = 2\left(\delta\mathbf{U}_r^k\right)^T \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k\right) + 2\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r \quad (2.42)$$

$$C = \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k\right)^T \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k\right) + \left(\Delta\lambda^{(k-1)}\right)^2 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r - \Delta l^2 \quad (2.43)$$

Resolvendo (2.40) chega-se a dois valores de $\delta\lambda$, $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$, que levam a escolha entre duas soluções:

$$\Delta\mathbf{U}_1^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda_1^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.44)$$

$$\Delta\mathbf{U}_2^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda_2^k \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.45)$$

Deverá ser selecionada a opção que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$. O objetivo dessa escolha é prevenir um possível retorno ao longo do caminho de equilíbrio já calculado.

Para realizá-la, o CS-ASA procura o menor ângulo entre $\Delta\mathbf{U}^k$ e $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$, o que equivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\cos\theta_{1,2} = \frac{\Delta\mathbf{U}^{(k-1)T} \Delta\mathbf{U}^k}{\Delta l^2} = \frac{\Delta\mathbf{U}^{(k-1)T} (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k)}{\Delta l^2} + \delta\lambda_{1,2}^k \frac{\Delta\mathbf{U}^{(k-1)T} \delta\mathbf{U}_r^k}{\Delta l^2} \quad (2.46)$$

Meek e Tan (1984) alertaram que a Equação (2.40) pode fornecer raízes imaginárias se o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto.

2. Comprimento de Arco Cilíndrico

Através de exemplos numéricos, Crisfield (1981) e Ramm (1981; 1982) observaram que para problemas práticos com número elevado de variáveis, o parâmetro de carga na Equação (2.39) tinha pequena influência. Crisfield propôs que a equação fosse modificada para:

$$(\Delta\mathbf{U}^k)^T \Delta\mathbf{U}^k = \Delta l^2 \quad (2.47)$$

Substituindo a equação (2.14) em (2.47) tem-se, novamente, uma equação quadrática em $\delta\lambda$, que tem a mesma forma de (2.40), porém com os coeficientes A , B e C dados por:

$$A = (\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k \quad (2.48)$$

$$B = 2(\delta\mathbf{U}_r^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) \quad (2.49)$$

$$C = (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k)^T (\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k) - \Delta l^2 \quad (2.50)$$

A escolha entre as raízes $\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$ segue o mesmo critério utilizado para o comprimento de arco esférico.

3. Comprimento de Arco Linear

A restrição de comprimento de arco constante (2.24) foi utilizada por Riks (1972; 1979) apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0$. Na etapa iterativa subsequente ($k \geq 1$), a equação de restrição usada para calcular $\delta\lambda$ é obtida fazendo com que a solução iterativa $(\delta\mathbf{U}^k, \delta\lambda\mathbf{F}_r)$ seja ortogonal à solução incremental predita $(\Delta\mathbf{U}^0, \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r)$, ou seja:

$$\delta\mathbf{U}^{kT}\Delta\mathbf{U}^0 + \delta\lambda^k\Delta\lambda^0\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r = 0 \quad (2.51)$$

A correção do parâmetro de carga é obtida substituindo a Equação (2.10) em (2.51)

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{\left((\Delta\mathbf{U}^0)^T \delta\mathbf{U}_r^k + \Delta\lambda^0 \mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r\right)} \quad (2.52)$$

Silveira (1995) afirma que, do ponto de vista geométrico, o esquema que Riks propôs pode ser interpretado como iterações em planos normais à linha tangente varrida por $(\Delta\mathbf{U}^0, \Delta\lambda^0\mathbf{F}_r)$.

Ramm (1981; 1982) sugeriu uma modificação nesse esquema: a substituição da solução incremental predita na Equação (2.51) para a solução “secante” $(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}, \Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r)$. Tal modificação garante que as correções sejam ortogonais à solução incremental da iteração anterior, ou seja:

$$\delta\mathbf{U}^{kT}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\lambda^k\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r = 0 \quad (2.53)$$

Silva (2009) esclarece que para esse caso, o hiperplano de restrição é normal a uma secante que passa pela solução incremental da iteração anterior (e não mais à tangente da trajetória de equilíbrio). Ou seja, ao contrário do que foi proposto por Riks (1972), o plano normal é atualizado a cada iteração.

2.4.3 Iteração a Deslocamento Constante

Batoz e Dhatt (1979) desenvolveram uma estratégia de iteração na qual, ao invés do parâmetro de carga usual, é escolhida como variável independente uma dada componente do vetor de deslocamentos nodais incrementais. Durante o ciclo iterativo, essa componente é fixada como uma constante, especificada de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta \mathbf{U}^k(j) = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) + \delta \mathbf{U}(j) = \Delta U_j \quad (2.54)$$

a partir daí, chega-se à expressão:

$$\delta \lambda^k = \frac{\Delta U_j - \Delta \mathbf{U}^{(k-1)}(j) - \delta \mathbf{U}_g^k(j)}{\delta \mathbf{U}_r^k(j)} \quad (2.55)$$

Já Powell e Simons (1981) estabeleceram uma estratégia incremental iterativa baseada nos seguintes procedimentos: na solução incremental predita, uma dada componente j do vetor deslocamentos é acrescida de uma certa quantidade especificada. Essa componente, entretanto, é mantida constante durante as iterações subseqüentes, de modo que a seguinte equação de restrição seja respeitada:

$$\delta \mathbf{U}^k(j) = \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) = 0 \quad (2.56)$$

assim, chega-se à expressão

$$\delta \lambda^k = - \frac{\delta \mathbf{U}_g^k(j)}{\delta \mathbf{U}_r^k(j)} \quad (2.57)$$

2.4.4 Iteração a Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais

O Método dos Deslocamentos Residuais (MDR) é uma estratégia bastante eficiente apresentada por Chan (1988), que consiste em eliminar diretamente os deslocamentos residuais (iterativos) devido às forças desequilibradas, sendo esse o objetivo principal do ciclo iterativo.

Para que o MDR seja implementado é necessário reescrever, numa dada iteração k , a componente j do vetor de deslocamentos $\delta \mathbf{U}$, na forma:

$$e_j = \delta \mathbf{U}^k(j) = \delta \mathbf{U}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k(j) \quad (2.58)$$

na qual e_j é considerado como um dado erro. Chan (1998) então propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de m graus de liberdade, poderia ser expressa de acordo com:

$$\frac{d \left(\sum_{j=1}^m (e_j)^2 \right)}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (2.59)$$

que é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais. Escrevendo em uma forma mais adequada a Equação (2.59), tem-se:

$$\frac{d \left[(\delta \mathbf{U}^k)^T \delta \mathbf{U}^k \right]}{d\delta\lambda^k} = 0 \quad (2.60)$$

A correção do parâmetro de carga é obtida substituindo (2.10) em (2.60) e derivando em relação a $\delta\lambda$, sendo dada por:

$$\delta\lambda^k = - \frac{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_g^k}{(\delta \mathbf{U}_r^k)^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (2.61)$$

2.4.5 Iteração Baseada no Deslocamento Generalizado

Yang e Kuo (1994) mostraram, através da estratégia de incremento de carga baseada no GSP, que a correção do parâmetro de carga pode ser obtida por meio da expressão:

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_r^k} \left(H_k - \Delta\lambda^0 ({}^t \delta \mathbf{U}_r^T) \delta \mathbf{U}_g^k \right) \quad (2.62)$$

Esses pesquisadores ainda indicaram que o parâmetro incremental H_0 (no caso, deslocamento generalizado), para a obtenção da solução incremental predita ($k = 0$), deve ser obtido através da Equação (2.34). Durante o ciclo iterativo, assume-se que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantém constante, ou seja, $H_k = 0$ para $k > 0$. Dessa forma, pode-se reescrever (2.62) como:

$$\delta\lambda^k = - \frac{{}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_g^k}{{}^t \delta \mathbf{U}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k} \quad (2.63)$$

que é a expressão para a correção do parâmetro de carga no ciclo iterativo.

Assim como para as estratégias de incremento de carga, a expressão (2.30) pode ser utilizada na obtenção das Equações (2.52), (2.57) e uma correção do parâmetro de carga baseado no trabalho externo fazendo as seguintes considerações:

i. Controle do comprimento de arco:

$$k \geq 1, k_1 = \Delta\lambda^0, \mathbf{C} = \Delta\lambda^0 \delta \mathbf{U}_r \text{ e } H_k = 0$$

ii. Controle de uma componente de deslocamento selecionada:

$$k \geq 1, k_1 = 0, \mathbf{C}^T = \{0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0\} \text{ e } H_k = 0$$

iii. Controle do trabalho externo:

$$k \geq 1, k_1 = 0, \mathbf{C} = \mathbf{F}_r \text{ e } H_k = 0$$

Capítulo 3

Ciclo Iterativo de Potra-Pták

3.1 Introdução

A metodologia generalizada para solução de problemas estruturais não lineares apresentada no Capítulo 2 segue o ciclo iterativo do MNR (padrão ou modificado). Neste Capítulo 3 será apresentada uma estratégia numérica baseada no ciclo iterativo proposto por Potra-Pták (1984; MPP). O objetivo deste capítulo, então, é apresentar tal metodologia e indicar as modificações efetuadas no CS-ASA, bem como validar as implementações realizadas através de várias análises não lineares.

Na Seção 3.2 estão os fundamentos do ciclo iterativo de Potra-Pták (1984), incluindo um algoritmo para sua implementação computacional. Para finalizar este Capítulo 3, na Seção 3.3, serão apresentados os resultados das análises numéricas utilizando esse novo ciclo iterativo, cujo objetivo é avaliar sua eficiência na solução de problemas estruturais exibindo forte não linearidade geométrica.

3.2 Fundamentos do Ciclo Iterativo de Potra-Pták

Na procura de uma melhor convergência do processo iterativo e um maior índice de eficiência que o obtido através do MNR, Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos iterativos, mas ainda usando os fundamentos do MNR. Soleymani *et al.* (2012) explicam que a principal diferença entre essas duas abordagens está na quantidade de vezes que a função gradiente (forças desequilibradas) é avaliada por iteração. Enquanto no MNR é realizada uma avaliação da função gradiente e uma de sua

primeira derivada (matriz de rigidez), no método de Potra-Pták (MPP) são realizadas duas avaliações da função gradiente e uma de sua primeira derivada.

Soleymani *et al.* (2012) esclarecem ainda que esses procedimentos levam o MNR a apresentar taxa de convergência quadrática e coeficiente de eficiência igual a $2^{1/2}$, enquanto o procedimento proposto por Potra e Pták (1984) conduz a uma taxa de convergência cúbica e coeficiente de eficiência igual a $3^{1/3}$.

Os dois passos utilizados por esse método são apresentados a seguir:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \quad (3.2)$$

em que, como indicado por Babajee e Duahoo (2006) em seus estudos sobre a relação de novos métodos iterativos com o procedimento clássico proposto por Newton, a expressão (3.1) coincide com a correção proposta pelo MNR; a Equação (3.2), por sua vez, fornece a nova aproximação da raiz a ser adotada no ciclo iterativo levando em consideração a aproximação de (3.1); ainda, f representa a função cujas raízes desejam ser estimadas, f' a sua derivada; e x_n , a aproximação inicial da raiz.

O maior custo computacional dos processos iterativos está relacionado com a avaliação de derivadas da função gradiente. No caso do problema estrutural, tal avaliação representa a matriz de rigidez do sistema. O procedimento descrito pelas Equações (3.1) e (3.2) não utiliza nenhum cálculo extra da derivada da função ou a avaliação de derivadas de ordens superiores, quando comparado com o MNR clássico. Babajee e Duahoo (2006), a respeito disso, destacam que durante a segunda correção a matriz de rigidez é mantida constante.

Cabe destacar que o estudo de métodos com duas ou mais avaliações da função objetivo tem sido recorrente, especialmente no campo da programação matemática. Além de Soleymani *et al.* (2012), Cordero *et al.* (2010) apresentaram dois métodos iterativos para resolução de equações não lineares, ambos modificando o método de Potra-Pták. Chun (2007) apresentou uma família de método iterativos de quarta ordem para resolver equações não lineares que utilizam duas avaliações da função e uma da derivada por iteração. Mais recentemente, Herceg e Herceg (2015) apresentaram uma família de métodos para resolver equações não lineares. Na sequência, os mesmos autores

(HERCEG e HERCEG, 2018) propuseram um método com taxa de convergência de ordem 8.

Apesar da sua relevância no contexto matemático, o método de Potra-Pták, somente agora, está ganhando destaque na análise estrutural, com atenção para as seguintes pesquisas: Souza *et al.* (2018) aplicaram este método de convergência cúbica para solução de problemas geometricamente não lineares em treliças planas e espaciais; e Reis (2019) que aplicou o ciclo iterativo de Potra-Pták para análises de treliças metálicas com não linearidade física.

A adaptação do ciclo iterativo de Potra-Pták para o problema estrutural é dada por:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = \mathbf{F}_1^k + \mathbf{F}_2^k \quad (3.3)$$

com \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 definidos como:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}) + \delta\lambda_1^k \mathbf{F}_r \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{g}(\mathbf{D}^k) + \delta\lambda_2^k \mathbf{F}_r \quad (3.5)$$

e $\delta\mathbf{U}$, correção dos deslocamentos nodais, obtido pela soma da primeira e segunda correções iterativas:

$$\delta\mathbf{U} = \delta\mathbf{U}_1^k + \delta\mathbf{U}_2^k \quad (3.6)$$

sendo a primeira e a segunda correções obtidas, respectivamente por meio de:

$$\delta\mathbf{U}_1^k = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_1^k \quad (3.7)$$

$$\delta\mathbf{U}_2^k = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_2^k \quad (3.8)$$

Na Equação (3.5), \mathbf{D}^k representa o vetor de deslocamentos após a primeira correção do método, calculado por meio de:

$$\mathbf{D}^k = \mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_1^k \quad (3.9)$$

A nova aproximação para o vetor de deslocamentos nodais é obtida, então, somando-se aos deslocamentos nodais da iteração anterior as duas correções do método:

$$\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{k-1} + \delta\mathbf{U}_1^k + \delta\mathbf{U}_2^k \quad (3.10)$$

Tomando as iterações de NR para a solução da equação não linear, a implementação do ciclo de Potra-Pták requer algumas modificações do algoritmo base apresentado no

capítulo anterior (Tabela 2.1). A Tabela 3.1 traz os detalhes das alterações necessárias realizadas na estratégia numérica generalizada adotada para análise não linear de estruturas para inclusão desse novo processo iterativo.

Tabela 3.1 Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

PROCESSO ITERATIVO POTRA-PTÁK: $k = 1, 2, 3, \dots$

a. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$

b. Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$

c. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga adiante na estratégia*

d. Se processo convencional de Potra-Pták, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}

e. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda_1^k$, usando uma estratégia de iteração

f. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}_1^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda_1^k\delta\mathbf{U}_r^k$, com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r$$

g. Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda_1^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_1^k$

b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

h. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$

i. Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$

j. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda_2^k$, usando uma estratégia de iteração

k. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}_2^k = \delta\mathbf{D}_g^k + \delta\lambda_2^k\delta\mathbf{U}_r^k$, com:

$$\delta\mathbf{D}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r$$

l. Atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda_2^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_2^k$

b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

m. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga adiante na estratégia*

SIM (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga adiante na estratégia, apenas se houve a convergência no item c*

n. Retorna ao início do processo iterativo

Vale ressaltar ainda que este trabalho propõe, em adição, testar a funcionalidade do método iterativo de Potra-Pták quando a matriz de rigidez é mantida constante ao longo do ciclo iterativo. Para fins de denotação, quando não houver atualização dessa matriz

durante o ciclo iterativo, o método de Potra-Pták será classificado como Potra-Pták modificado (PPM).

3.3 Validação da Estratégia de Potra-Pták

Esta seção tem o objetivo de verificar o desempenho computacional do *solver* não linear quando se adota o ciclo de PP nas análises estáticas não lineares de estruturas. Serão apresentados resultados de seis estruturas clássicas, com destaque para os arcos com comportamento fortemente não linear. A depender da magnitude e do tipo de carregamento, da geometria das seções e das condições de contorno, os arcos podem apresentar esse comportamento fortemente não linear, tornando-se valiosos na validação de estratégias de solução não linear. Procura-se, ainda, comprovar a eficiência do MPP quando combinado com diferentes estratégias de iteração.

Para se estimar a eficiência da estratégia numérica adotada, foram observados os seguintes parâmetros: número total de incrementos (N_{tot}) e iterações (I_{tot}); número de iterações médias por incremento ($I_{méd}$); tempo de processamento em segundos (CPU); e número total de reinicializações ($Rein$). É válido ressaltar que a reinicialização acontece quando se atinge o número máximo de iterações desejadas para o problema e não se obtém convergência no processo iterativo. Sendo assim, é necessário que se retorne à última configuração de equilíbrio conhecida, e que se recomece o processo de solução não linear considerando metade do valor encontrado para $\Delta\lambda^0$ do último incremento de carga.

Na validação das estratégias apresentadas neste capítulo e no Capítulo 4 foram utilizadas duas formulações de elementos finitos não lineares presentes no CS-ASA: *Second-order finite element formulation – 2* (SOF-2) e *Second-order finite element formulation – 3* (SOF-3). Ambas desenvolvidas considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Os fundamentos da formulação SOF-2 são encontrados no livro de Yang e Kuo (1994), enquanto SOF-3 foi baseada no trabalho de Pacoste e Eriksson (1997). Mais detalhes sobre essas formulações são encontrados em Silva (2009).

Em todas as análises numéricas desta seção, considerou-se: a tolerância de convergência igual a 10^{-4} ; e, para cada passo de carga, o número máximo de iterações para obtenção do equilíbrio estrutural igual a 21.

3.3.1 Pórtico de Lee

O Pórtico de Lee é uma estrutura frequentemente utilizada para validar formulações de elementos finitos e estratégias de solução não linear. A Figura 3.1 ilustra o problema a ser analisado nesta seção. Esse sistema é composto por um pilar e uma viga, ambos com comprimento $L = 120 \text{ cm}$, e apoios de segundo gênero nas duas extremidades. A seção transversal dos elementos tem área $A = 6 \text{ cm}^2$, momento de inércia $I = 2 \text{ cm}^4$ e coeficiente de forma $k = 1$. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material que compõe os elementos são $E = 720 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu = 0,3$, respectivamente. O carregamento externo é composto por uma carga vertical $P = 1 \text{ kN}$ aplicada a $0,2 L$ da extremidade esquerda da viga.

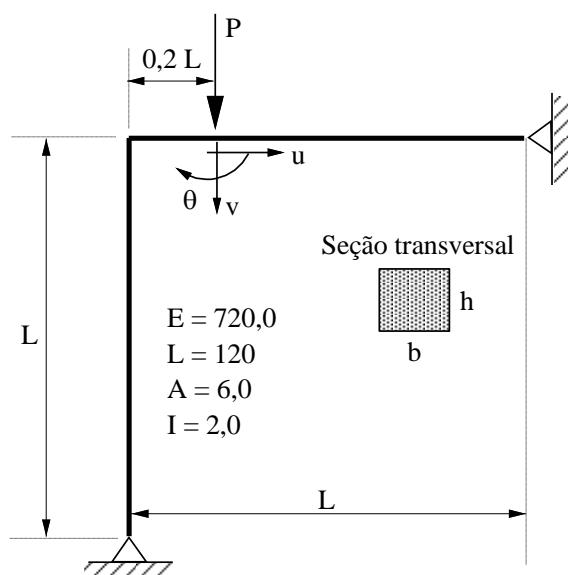


Figura 3.1 – Pórtico de Lee: geometria e carregamento

Os primeiros estudos com essa estrutura foram desenvolvidos por Lee *et al.* (1968). Na sequência, diversos autores analisaram esse pórtico numericamente: Schweizerhof e Wriggers (1986), Simo e Vu-Quoc (1986), Coulter e Miller (1998), Chen e Blandford (1993) e Pacoste e Eriksson (1997). Mais recentemente, Silva (2009) e Silva (2016) utilizaram esse pórtico para validar formulações implementadas no CS-ASA.

A validação da metodologia explicada na Seção 3.2 e implementada no CS-ASA será o foco principal desta seção. A formulação geometricamente não linear escolhida foi a SOF-2, com malha composta por 20 elementos finitos. Como estratégia de incremento de carga adotou-se o comprimento de arco, e incremento inicial do parâmetro de carga $\Delta\lambda^0 = 0,1$. O MPP com atualização da matriz foi utilizado em associação com a técnica

de continuação do comprimento de arco linear proposto por Riks. O critério de convergência utilizado foi baseado em relações de forças.

As escolhas para critério de convergência, estratégia de iteração e incremento de carga foram tomadas utilizando o trabalho de Souza *et al.* (2018) como referência. Busca-se, também, confirmar a abordagem levando em consideração outro elemento finito. As trajetórias de equilíbrio da estrutura são mostradas na Figura 3.2. Percebe-se a boa conformidade dos resultados obtidos com o fornecido pela literatura, confirmando a capacidade do MPP em resolver o sistema de equações não lineares, obtendo os pontos formadores do caminho de equilíbrio da estrutura.

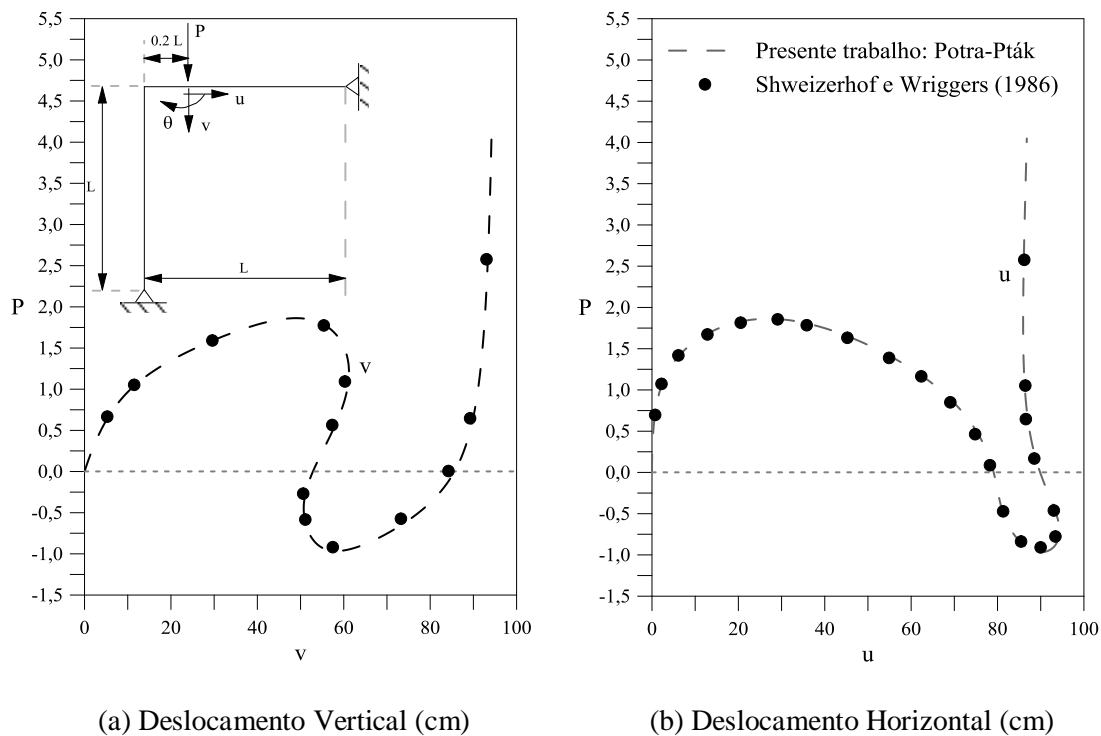


Figura 3.2 – Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee – MPP

A Tabela 3.2 fornece, em parâmetros de interesse para uma análise não linear de estruturas, o desempenho do processo de Potra-Pták comparado ao processo de Newton-Raphson. Observa-se uma redução considerável no número de incrementos e iterações totais para traçar todo o caminho de equilíbrio quando o MPP é adotado. O tempo de processamento, *CPU*, também é menor em comparação ao método de NRP, atestando a eficiência e viabilidade dele como opção para a análise não linear. O aumento no número de falhas é explicado pela aceleração que o processo incremental apresenta.

Tabela 3.2 Pórtico de Lee: avaliação da eficiência computacional do MPP

Método de Potra-Pták					Método de Newton-Raphson				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
453	5004	11,04	2	15,820	1280	14124	11,03	1	26,630

Em outras estruturas com a não linearidade em níveis semelhantes à do pórtico de Lee, o MPP apresenta a mesma eficiência. Para determinar como o método se comporta com estruturas com não linearidade ainda mais acentuada, nas próximas seções serão realizadas análises de arcos esbeltos.

3.3.2 Arco Senoidal Perfeito

O primeiro arco a ser estudado será o ilustrado na Figura 3.3. Trata-se de um arco senoidal biapoiado submetido a um carregamento uniformemente distribuído, P . As propriedades físicas e geométricas dessa estrutura também estão apresentadas na Figura 3.3.

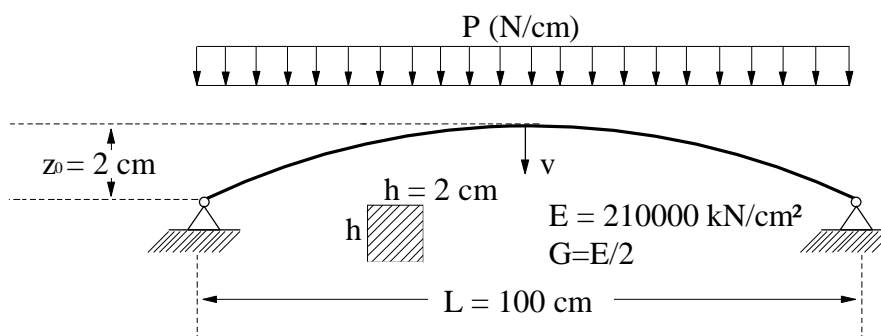


Figura 3.3 – Arco senoidal: geometria e carregamento

É possível encontrar na literatura uma gama extensa de trabalhos que contam com tal arco como objeto de estudo, podendo ser destacados: Bergan (1980), Galvão (2004) e Silva (2009). Mais recentemente, Maximiano (2012) e Silva (2016) também utilizaram a estrutura para validação de seus resultados. Galvão (2004) utilizou esse sistema estrutural para validar diversas formulações de elementos finitos. Silva (2009), por meio de uma abordagem dinâmica, realizou uma análise de vibração não linear desse arco. Maximiano (2012) utilizou a estratégia do resíduo ortogonal associada ao fluxo normal para obter as trajetórias de equilíbrio e comparar com o processo convencional. Os resultados numéricos obtidos por Bergan (1980) serão utilizados para comparação

O objetivo desta seção é atestar a eficiência do processo de PP quando associado com outras estratégias de iteração e incremento de carga. Para isso, adotou-se, em associação com o MPP, deslocamento generalizado para essas duas estratégias. O critério de convergência adotado para as análises foi o baseado em forças. O primeiro incremento do parâmetro de carga foi $\Delta\lambda^0 = 5$. Utilizaram-se para as análises a formulação SOF-3 e malha composta por 26 elementos

Os caminhos de equilíbrio da estrutura são apresentados na Figura 3.4. Observa-se boa conformidade entre os resultados encontrados por este estudo e aqueles obtidos por Bergan (1980).

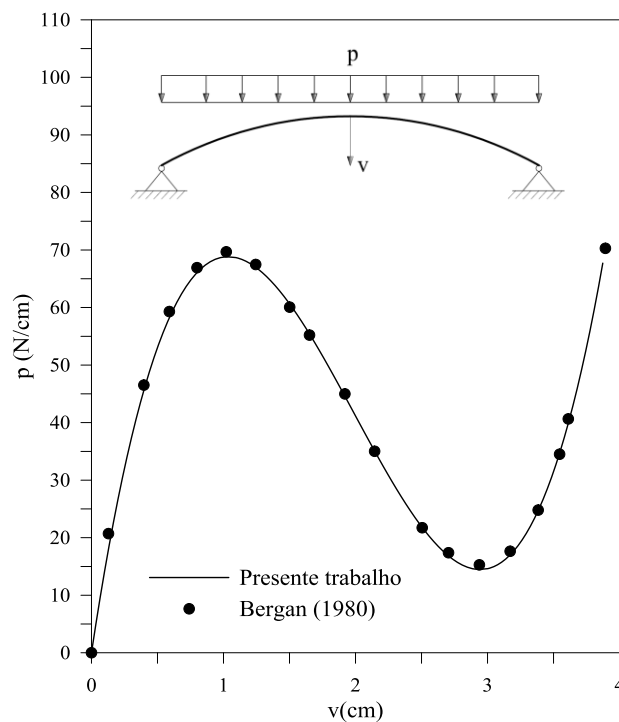


Figura 3.4 – Trajetória de equilíbrio para o arco senoidal – MPP

Com a Tabela 3.3 é possível comparar a eficiência entre o processo que utiliza o MNR e a estratégia implementada do ciclo iterativo de Potra-Pták. Nota-se considerável redução no número de iterações totais necessárias para a obtenção completa da curva de equilíbrio. O tempo de processamento também é reduzido quando o MPP é utilizado. Apesar do número de incrementos se manter igual, como a matriz de rigidez é calculada a cada iteração em ambos processos, o gasto computacional é menor na estratégia implementada por este trabalho.

Percebe-se, então, que, mesmo com outras estratégias de incremento ou iteração, o ciclo iterativo por Potra-Pták se mostra eficiente para a análise estrutural e resulta em um

processo de análise eficaz. Além disso, uma vez utilizada a formulação SOF-3, fica determinada a aplicabilidade do método em diferentes formulações.

Tabela 3.3 Arco senoidal: avaliação da eficiência computacional do MPP

Método de Potra-Pták					Método de Newton-Raphson				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
113	227	2,01	0	1,610	113	283	2,50	0	2,080

3.3.3 Arco Circular Abatido

A Figura 3.5 ilustra o arco circular abatido (além de sua geometria e carregamento) que será estudado nesta seção. Essa estrutura é caracterizada pela sua não linearidade acentuada, servindo de exemplo para verificar a capacidade das formulações e dos *solvers*. Normalmente, esse arco é analisado sob duas condições: sistema perfeito e imperfeito. No sistema perfeito, o arco é submetido apenas a uma carga vertical de magnitude P aplicada em seu eixo de simetria. No sistema imperfeito, a carga vertical P é associada a uma carga momento M de valor $2P$ que funciona como excentricidade do carregamento no sistema. Neste estudo, será analisado apenas o sistema imperfeito, pois ele é ainda mais fortemente não linear.

Esta seção visa ao estudo da influência do critério de convergência no ciclo iterativo de PP. Serão realizadas análises considerando dois critérios de convergência: um baseado em forças e outro em relações de deslocamentos. É utilizada a formulação não linear para elementos finitos SOF-3, com malha composta por 26 elementos. Para controlar o valor inicial do parâmetro de carga, utilizou-se a estratégia do deslocamento generalizado, assim como para a técnica de continuação. Para iniciar a análise fez-se intensidade da carga P igual a $0,1 N$.

A Figura 3.6 traz as representações gráficas do equilíbrio dessa estrutura para as análises realizadas por este trabalho. Para comparação, foram utilizados os resultados fornecidos por Yang e Kuo (1994). A boa conformidade entre os resultados deste trabalho e a referência da literatura permite afirmar que o ciclo iterativo de PP é totalmente capaz de obter a trajetória de equilíbrio desejada.

As Tabelas 3.4 e 3.5 permitem a comparação, através dos parâmetros importantes para qualificar um *solver* não linear, entre o desempenho do MPP e o do método de NRP.

Percebe-se que independentemente do critério de convergência o ciclo iterativo de PP é mais eficiente que as clássicas iterações de NR. Observa-se também uma melhora do MPP quando o critério de convergência baseado em relações de deslocamentos é utilizado. Esse efeito é resultado da localização da verificação de convergência pelo critério de deslocamentos ocorrer logo após a segunda correção do método de Potra-Pták.

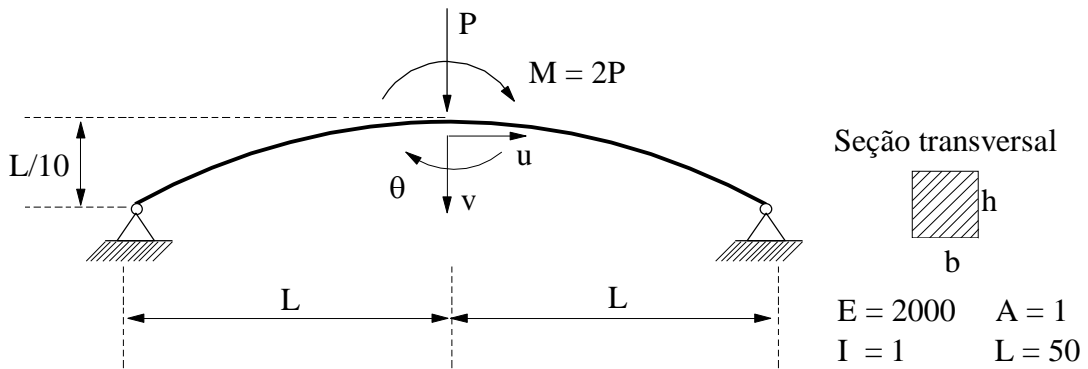


Figura 3.5 – Arco circular abatido: geometria e carregamento

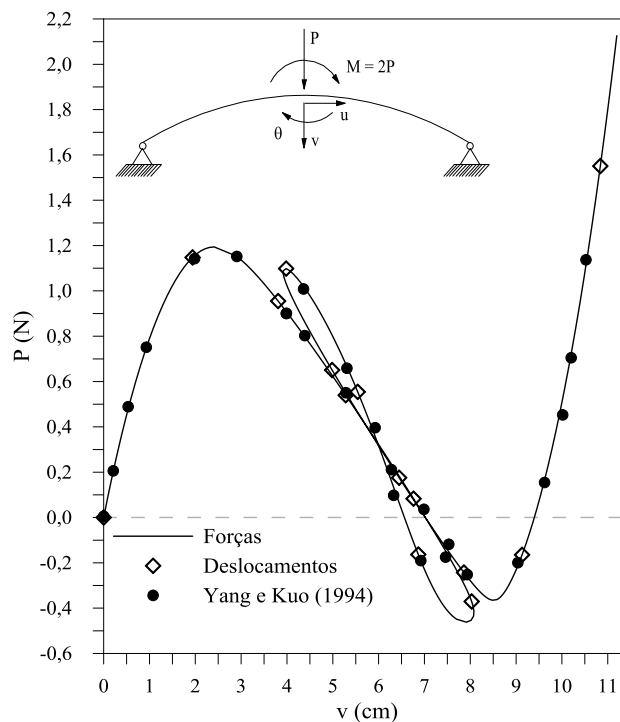


Figura 3.6 – Trajetórias de equilíbrio para o arco circular abatido – MPP

Foi possível verificar também, por meio das análises realizadas para este capítulo, que o comportamento do critério baseado em forças e deslocamentos é similar ao comportamento do baseado estritamente em forças.

Tabela 3.4 Arco circular abatido: avaliação da eficiência computacional do MPP
(Critério de convergência: força)

Método de Potra-Pták					Método de Newton-Raphson				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
264	548	2,08	0	3,010	264	710	2,69	0	3,840

Tabela 3.5 Arco circular abatido: avaliação da eficiência computacional do MPP
(Critério de convergência: deslocamento)

Método de Potra-Pták					Método de Newton-Raphson				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
264	288	1,09	0	2,770	264	552	2,09	0	3,800

3.3.4 Arco Circular Parcialmente Carregado

Esta seção destina-se a estudar um arco circular submetido a um carregamento uniformemente distribuído em metade de sua extensão. A ilustração da estrutura e a descrição das suas propriedades físicas e geométricas são apresentadas pela Figura 3.7.

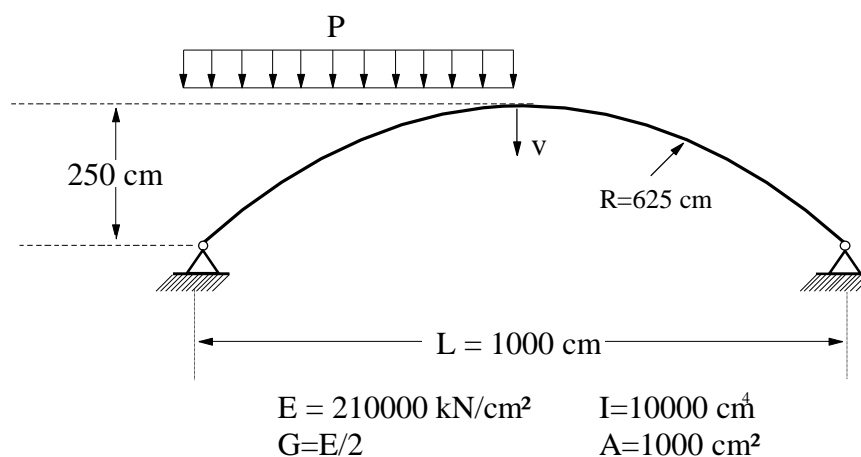


Figura 3.7 – Arco circular parcialmente carregado: geometria e carregamento

O objetivo da presente seção é corroborar o funcionamento do MPP quando a convergência da análise se dá por meio do critério baseado em relações de deslocamento, além de verificar o funcionamento quando esse é associado a outra estratégia de iteração.

Para isso, adota-se a estratégia baseada na norma mínima dos deslocamentos residuais como técnica para obtenção da correção do parâmetro de carga $\delta\lambda$. O incremento inicial do parâmetro de carga foi controlado pela estratégia de deslocamento generalizado, com $\Delta\lambda^0 = 0,1$ sendo o valor da carga P para o primeiro incremento. Utilizou-se formulação SOF-3 para as análises, com 20 elementos como malha.

A Figura 3.8 ilustra a trajetória de equilíbrio do arco circular parcialmente carregado. Para comparação, são utilizados os resultados de Xu e Mirmiran (1997) obtidos numericamente. A boa correspondência dos resultados encontrados por este trabalho com os fornecidos pela literatura confirma a versatilidade de funcionamento do ciclo iterativo implementado com diferentes estratégias de iteração. Com a Tabela 3.6 é possível avaliar o desempenho do MPP em comparação com o método de NRP.

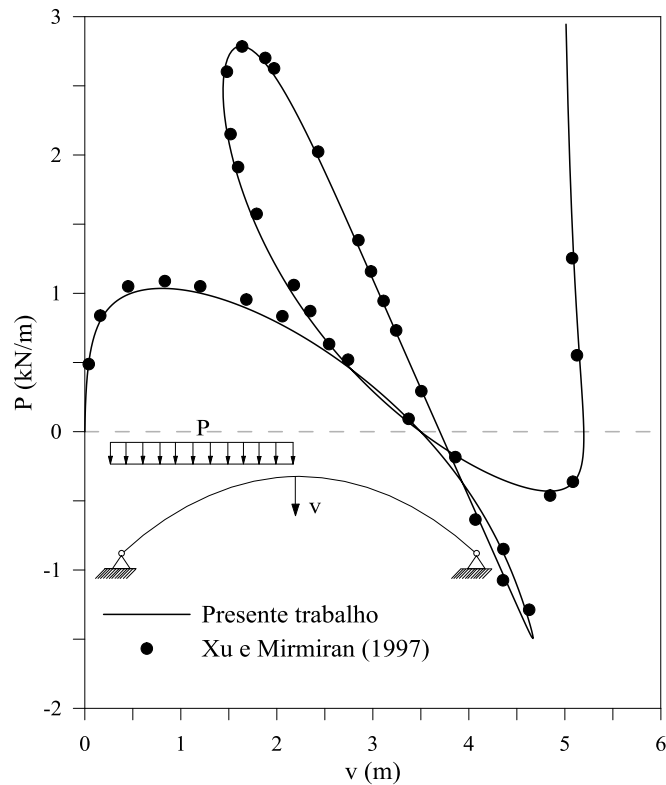


Figura 3.8 – Trajetória de equilíbrio para o arco parcialmente carregado – MPP

Ao analisar os resultados, percebe-se o melhor desempenho do MPP. Novamente, apesar do N_{tot} ser igual para os dois métodos, devido à segunda correção, o MPP necessita de menos iterações totais para determinar a trajetória de equilíbrio desejada. O reflexo disso é a redução do tempo de processamento para análise.

Tabela 3.6 Arco parcialmente carregado: avaliação da eficiência computacional do MPP

Método de Potra-Pták					Método de Newton-Raphson				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
393	672	1,71	0	3,310	393	1070	2,72	0	3,850

3.3.5 Arco Rotulado-Engastado

A proposta para esta seção — e para a próxima — é averiguar a eficiência do método de Potra-Pták quando não há atualização da matriz de rigidez, aqui nomeado de Potra-Pták Modificado. Para isso, nesta seção será estudado um arco rotulado engastado ilustrado na Figura 3.9, na qual também são retratados o carregamento e a geometria. Esta estrutura foi analisada por Wood e Zienkiewicz (1977), Kouhia e Mikkola (1989), Cardona e Huespe (1999) e Battini *et al.* (2003). Mais recentemente, por Makinen *et al.* (2011). Maximiano (2012) e Silva (2016) estudaram essa estrutura em seus respectivos trabalhos.

Para as análises realizadas por esta seção, optou-se pela formulação SOF-2 presente no CS-ASA. A estrutura foi discretizada em 32 elementos finitos. Para o controle do fator de carga usou-se a estratégia de comprimento de arco, com valor inicial do parâmetro $\Delta\lambda^0$ igual a 150 N . Em associação ao MPPM, utilizou-se a estratégia de iteração de comprimento de arco proposta por Riks (1972). O controle de convergência escolhido foi baseado em relações de forças.

As variações dos deslocamentos vertical e horizontal no centro do arco com a carga são mostradas na Figura 3.10. São utilizados os resultados obtidos por Wood e Zienkiewicz (1977) e Kouhia e Mikkola (1989) para comparação. É possível observar boa conformidade com os resultados da literatura.

Por meio da Tabela 3.7, é possível perceber que o método de PP mantém a sua eficiência mesmo que a matriz de rigidez não seja atualizada. Para fins de comparação, é utilizado o método de NRM. Percebe-se uma redução significativa no número total de incrementos e iterações, o que provoca uma acentuada redução no tempo de processamento. Portanto, pode-se afirmar que o aqui denominado método de Potra-Pták modificado é uma opção legítima para análises não lineares de estruturas.

Deve-se ressaltar que o número elevado de incremento de cargas e iterações é resultado da forte não linearidade apresentada pela estrutura.

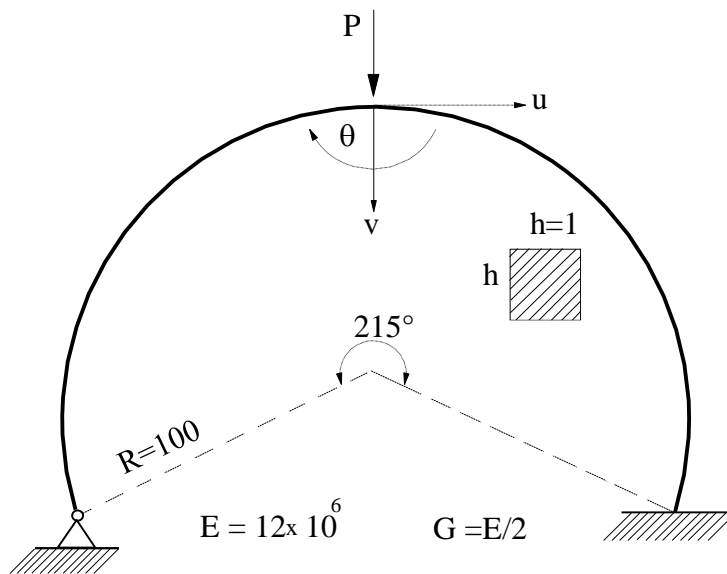


Figura 3.9 – Arco circular rotulado-engastado: geometria e carregamento

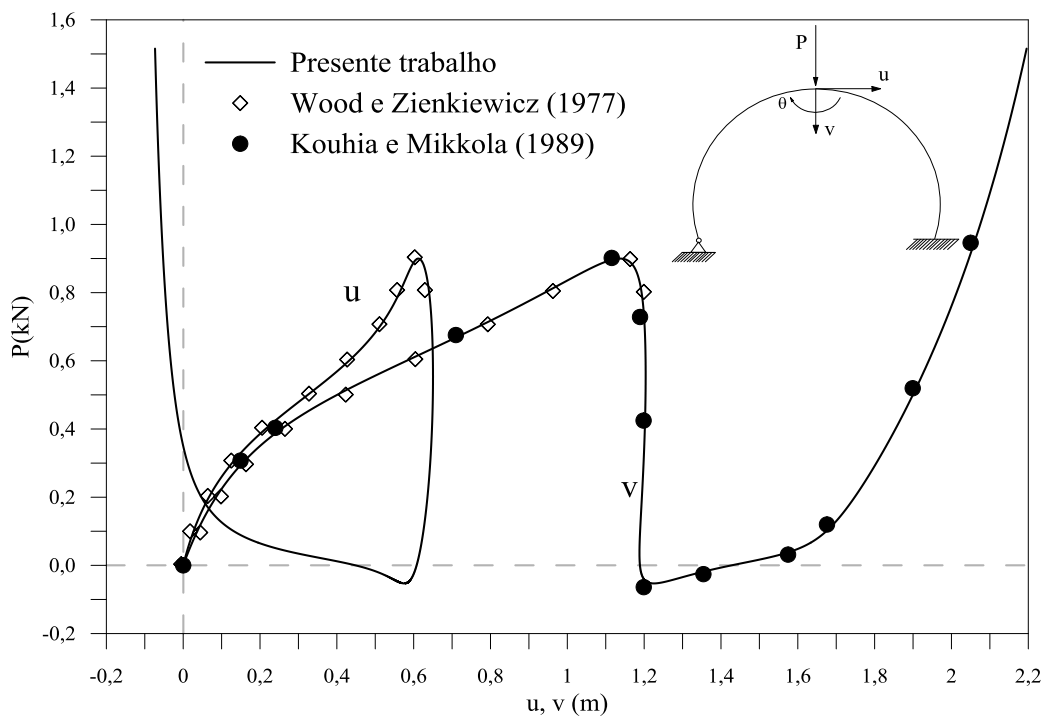


Figura 3.10 – Curva carga-deslocamento: arco circular rotulado engastado – MPPM

Tabela 3.7 Arco rotulado-engastado: avaliação da eficiência computacional do MPPM

Método de Potra-Pták Modificado					Método de Newton-Raphson Modificado				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
8739	96232	11,01	0	174,49	17166	189091	11,02	0	308,38

3.3.6 Arco Circular Biarticulado

Esta última seção, como dito anteriormente, será utilizada para averiguar a eficácia do MPP quando a matriz de rigidez não é atualizada durante o ciclo iterativo. O exemplo a ser analisado será um arco circular biarticulado. Inicialmente, esta estrutura foi estudada por Harrison (1978) e mais tarde por Yang e Kuo (1994) e Galvão (2000). Mais recentemente, Maximiano (2012), Santana (2015) e Silva (2016) também analisaram esse arco. O arco tem área $A = 10 \text{ cm}^2$, inércia $I = 1 \text{ cm}^4$, coeficiente de forma $k = 1$ e raio $R = 50 \text{ cm}$. O material que compõe os elementos apresenta módulo de elasticidade $E = 2000 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Tal estrutura é mostrada na Figura 3.11.

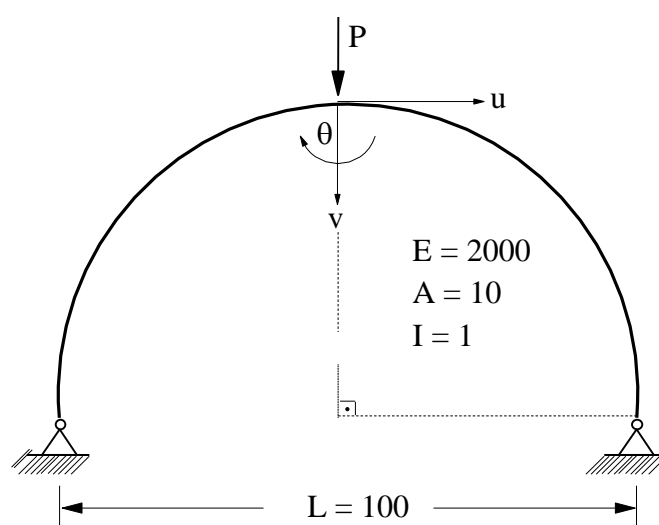


Figura 3.11 – Arco circular biarticulado: geometria e carregamento

Como esse sistema estrutural é simétrico, para realizar a análise apenas metade do arco foi discretizada com 34 elementos. O deslocamento axial e a rotação do ponto de aplicação da carga foram restringidos. A formulação escolhida foi SOF-3 — procurando atestar a eficiência independentemente da formulação utilizada. O método de Potra-Pták modificado foi utilizado em associação com a técnica de deslocamento generalizado para estratégia de incremento de carga e iteração. O valor inicial do parâmetro de carga, nesta análise, foi $0,4 P$, sendo P a carga vertical centrada igual a 1 kN . Definiu-se o critério de convergência baseado em relações de forças.

A curva carga-deslocamento obtida por meio das análises para a estrutura em questão é ilustrada na Figura 3.12. Cabe destacar a característica fortemente não linear desse arco, que apresenta diversos pontos limites de carga e de deslocamento. Os pontos limites de carga encontrados por Yang e Kuo (1994) são utilizados como referência para

comparação dos resultados. Percebe-se a boa concordância entre os resultados encontrados no presente trabalho com os obtidos por aqueles autores, confirmando o desempenho satisfatório do procedimento de PPM independentemente da formulação utilizada.

Por meio da Tabela 3.8 é possível comparar a eficiência entre os métodos de PPM e NRM. Constata-se redução em todos os parâmetros importantes para uma análise não linear de estruturas. Portanto, determina-se ser esse ciclo iterativo, mesmo sem a atualização da matriz de rigidez a cada iteração, uma opção excepcionalmente válida para *solvers* não lineares. A economia obtida no tempo de processamento abre portas para análises mais complexas e que levam em conta outras fontes de não linearidade.

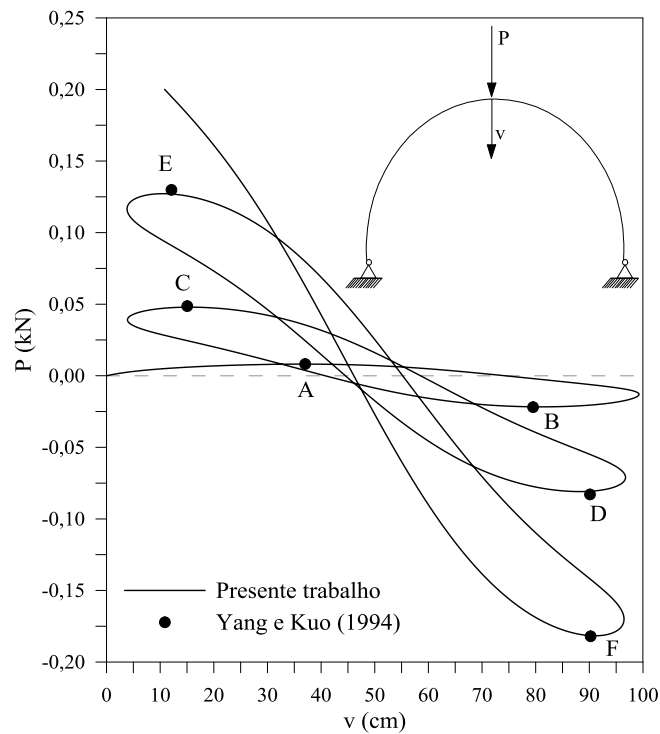


Figura 3.12 – Curva carga-deslocamento: arco circular biarticulado – MPPM

Tabela 3.8 Arco circular biarticulado: avaliação da eficiência computacional do MPPM

Método de Potra-Pták Modificado					Método de Newton-Raphson Modificado				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
7375	27723	3,76	4	65,41	8844	45457	5,14	5	115,17

Capítulo 4

Método da Busca Linear

4.1 Introdução

O Capítulo 2 apresentou um algoritmo geral de solução não linear para problemas estruturais. Neste capítulo serão apresentadas as intervenções necessárias para que esse algoritmo geral possa incluir, ao longo do seu processo iterativo, o método da busca linear. O objetivo deste capítulo é, então, apresentar os fundamentos desse método e indicar os passos necessários para sua implementação computacional.

A próxima seção fornece a ideia básica do método de busca linear partindo de uma abordagem energética. Serão apresentados detalhadamente, ainda na Seção 4.2, os diferentes algoritmos de busca linear utilizados neste capítulo. Por fim, na Seção 4.3, estão os resultados das análises não lineares de problemas de estabilidade usando as estratégias de busca linear implementadas. Como no capítulo anterior, são utilizadas tabelas com os parâmetros relevantes para análise da eficiência dos *solvers* não lineares, em conjunto com as trajetórias de equilíbrio.

4.2 Fundamentos da Busca Linear

Para solução de problemas não lineares, as estratégias incrementais iterativas precisam ser cada vez mais sofisticadas no intuito de melhorar sua capacidade de solucionar problemas com maior grau de complexidade. Para tanto, a técnica de busca linear, que é amplamente usada na área de “programação matemática”, pode ser adaptada aos processos iterativos de NR. Na literatura, são encontrados vários trabalhos que tratam desse tema, dentre os quais se destacam Wolfe (1978), Luenberger (1984) e Fletcher (1987).

A maioria das estratégias de otimização *sem restrição* utiliza a técnica da busca linear, que pode ser usada com uma gama de procedimentos iterativos. Além dos autores já citados, Geraldin *et al.* (1980) e Crisfield (1982, 1991, 1997) trazem uma discussão detalhada sobre o assunto.

Basicamente, o método da busca linear procura escolher o tamanho ideal do “passo” na direção que minimiza a função objetivo. Em outras palavras, esse procedimento procura escalonar a solução corretiva — obtida por meio das iterações de NR — de forma a se atingir o equilíbrio do sistema estrutural da forma mais rápida possível.

Por exemplo, a correção do vetor de deslocamentos nodais obtida através do método de NRM é dada por:

$$\delta \mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)} \quad (4.1)$$

com \mathbf{g} representando o vetor das forças desequilibradas (residuais) na última iteração. Caso seja empregado um procedimento de busca linear, os deslocamentos nodais incrementais devem ser obtidos de acordo com:

$$\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta \delta \mathbf{U}_g^k \quad (4.2)$$

em que $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ são os deslocamentos iterativos ao final da última iteração e $\delta \mathbf{U}_g$ é a direção (correção) obtida através da Equação (4.1). No processo usual do MNR, o escalar η é considerado igual a 1 ($\eta = 1$); se for usada a busca linear, η torna-se o comprimento do passo iterativo a ser determinado, sendo, para tal, a única variável.

Crisfield (1991) elucida, através de uma abordagem energética, que o procedimento da busca linear procura determinar o valor de η que torne a energia potencial total do sistema estrutural, Π , um valor mínimo. Em outras palavras, a busca linear tem como objetivo achar η que encaminhe o problema para a direção do equilíbrio estrutural.

Escrevendo Π através de uma expansão de Taylor em função η , única incógnita do problema, tem-se:

$$\begin{aligned} {}^{(t+\Delta t)}\Pi(\eta + \delta\eta) &= {}^t\Pi(\eta) + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \delta\eta + \dots = {}^t\Pi(\eta) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} \delta\eta + \dots \\ &= {}^t\Pi(\eta) + \left(\mathbf{g}(\eta)^T \delta \mathbf{U}_g \right) \delta\eta + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo o vetor gradiente das forças desequilibradas \mathbf{g} calculado através de:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} \quad (4.4)$$

e δU_g é obtido, por sua vez, usando (4.1).

Para que a solução seja estacionária em η e, portanto, a estrutura esteja em equilíbrio, é necessário que a derivada da energia potencial total em função dessa variável seja nula. Dessa forma:

$$S(\eta) = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = \delta U_g^T \mathbf{g}(\eta) = 0 \quad (4.5)$$

Tanto em (4.3) quanto em (4.5), note que apenas o vetor gradiente \mathbf{g} é escrito em função de η , pois $\Delta \mathbf{U}^{(k-1)}$ é o incremento de deslocamento na iteração anterior, já conhecido, e δU_g pode ser definido a partir de (4.1). Uma busca que satisfaça a equação anterior deverá determinar o tamanho do passo, η , que faça o ângulo α mostrado na Figura 4.1 ser zero.

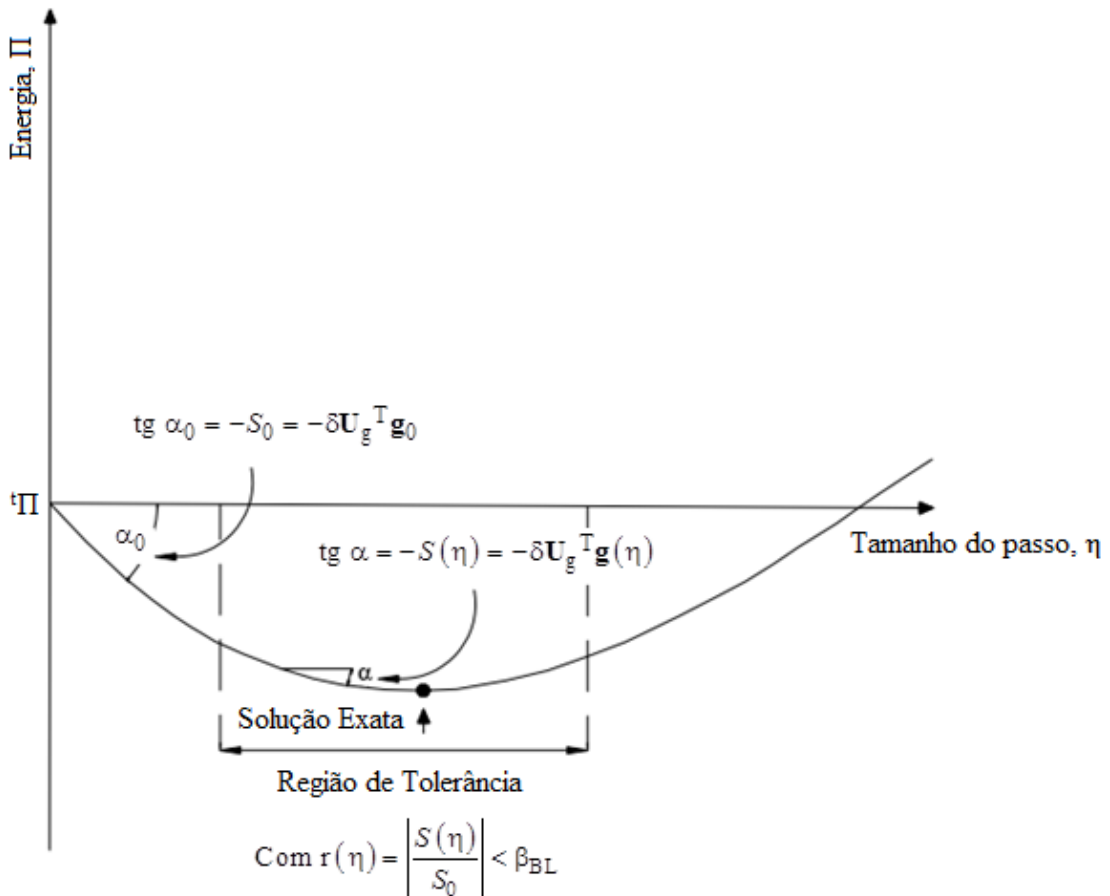


Figura 4.1 – Busca linear e energia potencial total, Π (Crisfield, 1991)

De (4.5) e da Figura 4.1, a inclinação $tg \alpha$, em $\eta = 0$, é S_0 , ou seja:

$$S_0 = S(\eta = 0) = \delta U_g^T \mathbf{g}(\eta = 0) = \delta U_g^T \mathbf{g}_0 \quad (4.6)$$

em que \mathbf{g}_0 é o vetor de forças desequilibradas ao final da iteração anterior.

Para o método de NRP, as Equações (4.1) e (4.6) continuam válidas, porém, em vez da matriz de rigidez do último ponto de equilíbrio, deve-se utilizar a matriz calculada a partir da última solução iterativa $\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$.

Para que seja possível aplicar uma busca linear em descida padrão, é necessário que S_0 seja negativo, pois assim a direção iterativa corrente estará em uma direção de descida energética — fator determinante, uma vez que a busca está fundamentada em um critério energético.

Se a busca linear fosse exata, a procura seria pelo menor valor positivo de η que solucione a Equação (4.5). Porém, na prática, é ineficiente aplicar uma busca linear exata. Em vez disso, é utilizado uma busca linear aproximada que procura tornar o módulo de $S(\eta)$ pequeno em comparação com o módulo de S_0 , isto é,

$$r(\eta) = \left| \frac{S(\eta)}{S_0} \right| < \beta_{BL} \quad (4.7)$$

na qual β_{BL} é o coeficiente de tolerância da busca linear. Crisfield (1991) e Crisfield e Shi (1995) indicam, respectivamente, que o valor adequado para esse coeficiente está na ordem de 0,8 e 0,7. A situação descrita pela inequação anterior é ilustrada na Figura 4.1.

Então, assumindo a existência dos declives, S , que podem ser facilmente calculados, através de (4.5) e (4.6), a partir do produto interno das forças desequilibradas \mathbf{g} e da direção de deslocamento iterativo $\delta\mathbf{U}_g$, é necessário apenas aplicar um procedimento de interpolação simples para executar a busca linear.

A generalização do processo de interpolação simples para obtenção do valor do escalar η é dada por:

$$\eta_{j+1} = \left| \frac{-S_0}{S_j - S_0} \right| \quad (4.8)$$

Esse processo envolve uma interpolação entre as “descidas” atuais e a em $\eta = 0$ — e nem sempre será apropriado. No lugar da interpolação pode ser necessário usar uma extrapolação, que não deve ser levada longe demais, sendo uma amplificação máxima necessária ao processo. De maneira semelhante, é necessário introduzir um comprimento de passo mínimo.

Deve ser enfatizado ainda que, para muitas iterações, a primeira tentativa de comprimento de passo, $\eta = 1$, irá satisfazer imediatamente a tolerância da busca linear.

Portanto, nenhum cálculo extrarresidual seria necessário por conta do procedimento de busca linear. O único trabalho extra, em relação a uma estratégia sem busca linear, seria, nessas circunstâncias, o cálculo do produto interno (4.5) (com $\eta = 1$), cujo esforço computacional é quase insignificante quando comparado com outros cálculos.

A Figura 4.2 apresenta o algoritmo implementado no programa CS-ASA para a inclusão do processo de busca linear. Esse algoritmo objetiva computar η_{i+1} — depois de entrar com um novo tamanho de passo η_i e o equivalente r_i . Nesse algoritmo, ainda: *amp* é o fator máximo de amplificação e $\eta_{\text{máx}}$ e $\eta_{\text{mín}}$, são, respectivamente, os comprimentos máximos e mínimos permitidos ao comprimento do passo. *ICO*, é um parâmetro inteiro indicador que normalmente é zero, que é definido como a unidade quando o máximo ou mínimo permitido ao comprimento do passo é atingido —, e como 2 quando esse valor for atingido duas vezes. Quando isso ocorre, o programa computacional recorre à redução incremental.

Algumas modificações na estratégia numérica generalizada para análise estática não linear, apresentada no Capítulo 2, são necessárias para o acoplamento da busca linear. As primeiras modificações básicas são realizadas no ciclo iterativo e apresentadas na Tabela 4.1. Essas modificações se restringem apenas ao processo iterativo, e, por esse motivo, a Tabela 4.1 está simplificada apenas a essa etapa. As linhas sublinhadas da tabela citada indicam as modificações efetuadas no processo iterativo.

O processo de busca é realizado após a correção dos deslocamentos e está destacado na Tabela 4.1. Esse processo de busca será elucidado através de dois algoritmos apresentados pelas Tabelas 4.2 e 4.3. A Tabela 4.2 apresenta um algoritmo mais simples que está associado a técnicas de continuações que não precisam da resolução de equações de segundo grau, enquanto a Tabela 4.3 apresenta um algoritmo ligeiramente mais sofisticado, que associa a busca linear com estratégias de continuação não linearizadas (por exemplo, comprimento de arco cilíndrico ou esférico).

A explicação para a necessidade de dois algoritmos distintos reside no acoplamento (ou não) entre as variáveis da busca e da restrição das técnicas de continuação. As variáveis da busca linear e das estratégias linearizadas são completamente desacopladas. Para ilustrar este desacoplamento entre variáveis, a Equação (2.51) de restrição proposta por Riks será reescrita para incluir a variável η da busca linear:

$$\eta \delta \mathbf{U}^k \mathbf{T} \Delta \mathbf{U}^0 + \eta \delta \lambda^k \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (4.9)$$

o que leva a mesma Equação (2.52) para a obtenção de $\delta \lambda$ (Tabela 4.2; Crisfield, 1991).

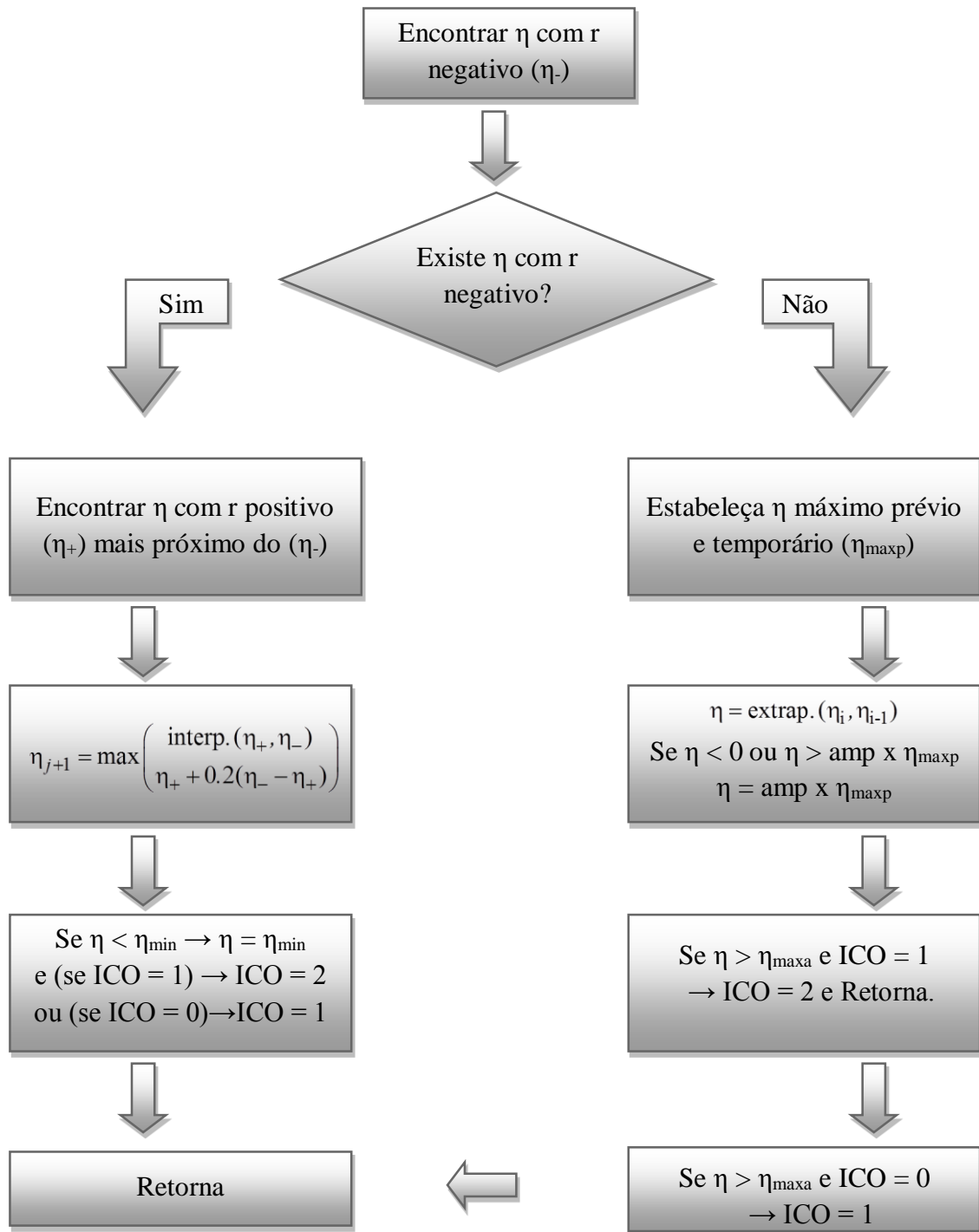


Figura 4.2 – Fluxograma do processo de busca linear

Tabela 4.1 Estratégia numérica generalizada para análise estática não linear

PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON: $k = 1, 2, 3, \dots$

a. Se $k \neq 1$ ou a busca linear estiver ativada, pule para a etapa **c**

b. Avalia o vetor de forças internas: ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}$

c. Calcula o vetor de forças residuais: $\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$

d. Salva o vetor \mathbf{g} em \mathbf{g}_0

e. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de forças): *Pare o processo iterativo e siga para o item 3*

f. Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}

g. Obtém a correção do parâmetro de carga, $\delta\lambda^k$, usando uma estratégia de iteração

h. Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: $\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k$, com:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \text{ e } \delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r$$

i. Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente

SIM (Critério de deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga adiante na estratégia*

SIM (Critério de força e deslocamentos): *Pare o processo iterativo e siga adiante na estratégia, apenas se houve a convergência no item e*

j. Atualiza o parâmetro de carga, λ e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

a) *Incremental:* $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k$

b) *Total:* ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k$

k. Busca linear está ativada?

SIM: Realiza o procedimento através de um dos algoritmos das Tabelas 4.2 e 4.3

l. Retorna ao início do processo iterativo

Por outro lado, para estratégias de iteração não lineares (comprimento de arco cilíndrico ou esférico) existe o acoplamento entre as restrições do método e a variável η da busca linear. Utilizando por exemplo a estratégia de comprimento de arco cilíndrico para ilustrar:

$$\left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \eta\delta\mathbf{U}^k\right)^T \left(\Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \eta\delta\mathbf{U}^k\right) - \Delta l^2 = 0 \quad (4.10)$$

em que pode ser visto um acoplamento entre as variáveis da busca e a restrição. Sendo assim, são necessários alguns ajustes para considerar a variação do parâmetro de carga à medida que o processo de busca linear é executado (Tabela 4.3; Crisfield, 1997).

Tabela 4.2 Algoritmo da busca linear para estratégias de iteração lineares

1. Calcula o produto interno S_0 relacionado com o nível de carga atual

$$S_0 = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_0 - \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r$$

Se $S_0 > 0$, abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

2. LAÇO DA BUSCA LINEAR $i = 1, 2, 3, \dots$

2a. Calcula o vetor de forças residuais \mathbf{g}_i com η_i relacionado com o nível de carga atual

2b. Calcula o produto interno S_i atual

$$S_i = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_i$$

2c. Se $\left| \frac{S_i(\eta)}{S_0} \right| \leq \beta_{BL}$, aceita a solução com η_i antes de passar para a próxima iteração

2d. Se a verificação de tolerância do item anterior não for satisfeita, aplica a busca linear indicada pelo algoritmo da Figura 4.2 para obter η_{i+1}

2e. Atualiza o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

a) *Incremental*: $\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta_{i+1} \delta \mathbf{U}^k$

b) *Total*: ${}^{(t+\Delta t)} \mathbf{U}^k = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k$

2f. Retorna para o item 2

4.3 Validação da Estratégia da Busca Linear

Serão apresentados os resultados das análises não lineares de cinco sistemas estruturais incluindo os procedimentos de busca linear apresentados na seção anterior. Pretende-se avaliar: a eficiência da busca linear associada ao NRP e NRM; a influência da taxa de tolerância da busca na eficiência do processo; a eficácia da busca linear com diferentes estratégias de iteração; a interferência do critério de convergência no processo de análise com busca linear; e a influência da formulação de elemento finito não linear.

Como no capítulo anterior, os parâmetros usados na verificação da eficiência da solução não linear são: número total de incrementos (N_{tot}) e iterações (I_{tot}); número de iterações médias por incremento ($I_{méd}$); tempo de processamento em segundos (CPU); e número total de reinicializações ($Rein$).

Alguns valores de parâmetros da busca linear foram escolhidos como fixo, a fim de garantir uma maior homogeneidade nos resultados obtidos. São eles: número máximo de buscas $NLS_{máx} = 6$; fator de amplificação $amp = 5,0$; e os valores máximos e mínimos do comprimento do passo, respectivamente, $\eta_{máx} = 25$ e $\eta_{min} = 0,001$.

Tabela 4.3 Algoritmo da busca linear para estratégias de iteração não lineares

1. Calcula o produto interno S_0 relacionado com o nível de carga atual

$$S_0 = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_0 - \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r$$

Se $S_0 > 0$, abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

2. Calcula os produtos internos d_1 — d_8 e c_1 e c_2 .

$$\begin{aligned} d_1 &= \Delta \lambda^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_r^k & d_2 &= \delta \mathbf{U}_g^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k & d_3 &= \delta \mathbf{U}_g^{kT} \delta \mathbf{U}_g^k & d_4 &= \Delta \lambda^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_g^k & c_1 &= \delta \mathbf{U}_r^{kT} \delta \mathbf{U}_r^k \\ d_5 &= \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_g^k & d_6 &= \delta \mathbf{U}_g^k \mathbf{g}_0 & d_7 &= \delta \mathbf{U}_r^k \mathbf{g}_0 & d_8 &= \Delta \lambda^{(k-1)} \Delta \lambda^{(k-1)} & c_2 &= \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k \end{aligned}$$

3. LAÇO DA BUSCA LINEAR $i = 1, 2, 3, \dots$

3a. Calcula o vetor de forças residuais \mathbf{g}_i com η_i relacionado com o nível de carga atual

3b. Calcula os produtos internos $e_{1,i}$ e $e_{2,i}$

$$e_{1,i} = \delta \mathbf{U}_g^{kT} \mathbf{g}_i \quad e_{2,i} = \delta \mathbf{U}_r^{kT} \mathbf{g}_i$$

3c. Calcula o produto interno S_i atual

$$S_i = e_{1,i} + \delta \lambda_i e_{2,i}, \text{ e } S_0 \text{ atual}$$

$$S_0 = d_6 + \delta \lambda_i (d_5 + d_7) + \delta \lambda_i^2 c_2$$

Se $S_0 > 0$, abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

3d. Se $\left| \frac{S_i(\eta)}{S_0} \right| \leq \beta_{BL}$, aceita a solução com η_i e $\delta \lambda_i$ antes de passar para a próxima

iteração

3e. Se a verificação de tolerância do item anterior não for satisfeita, aplica a busca linear indicada pelo algoritmo da Figura 4.2 para obter η_{i+1} no nível de carga $\delta \lambda_i$

3f. Para obter $\delta \lambda_{i+1}$, resolva:

$$a_1 (\delta \lambda_{i+1})^2 + a_2 (\delta \lambda_{i+1}) + a_3 = 0, \text{ com}$$

$$a_1 = \eta^2 c_1 \quad a_2 = 2\eta d_1 + 2\eta^2 d_2 \quad a_3 = \eta^2 d_3 + 2\eta d_4 + [d_8 - \Delta l^2]$$

3g. Calcula o produto interno S_i atual

$$S_i = e_{1,i} + \delta \lambda_i e_{2,i} + \delta \lambda_{i+1} d_5 + \delta \lambda_i \delta \lambda_{i+1} c_2; \text{ e } S_0 \text{ atual}$$

$$S_0 = d_6 + \delta \lambda_{i+1} (d_5 + d_7) + \delta \lambda_{i+1}^2 c_2$$

Se $S_0 > 0$, abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

3h. Se a verificação de tolerância do item anterior não for satisfeita, aplica a busca linear indicada pelo algoritmo da Figura 4.2 para obter η_{i+1} no nível de carga $\delta \lambda_{i+1}$

3i. Se η_{i+1} obtido no item anterior for próximo o suficiente do último η_{i+1} , aceita o último η_{i+1} calculado com seu respectivo $\delta \lambda_{i+1}$ que irá satisfazer a restrição da estratégia de iteração. Se não, retorna para o item 3f.

3j. Assumindo que agora tem-se η_{i+1} e $\delta \lambda_{i+1}$ atualiza o parâmetro de carga, λ , e o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} :

$$\text{a) Incremental: } \Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda_{i+1}^k \text{ e } \Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta_{i+1} \delta \mathbf{U}^k$$

$$\text{b) Total: } {}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta \lambda^k \text{ e } {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k$$

3k. Retorna para o item 3

4.3.1 Pórtico de Lee

A primeira estrutura a ser analisada para validação do método da busca linear também é o Pórtico de Lee, descrito anteriormente na Seção 3.3.1 e ilustrado na Figura 3.1.

Esta seção procurará estudar a eficiência do processo numérico de busca linear na análise colocando em evidência a atualização da matriz de rigidez durante o processo iterativo. Para o exemplo, usou-se uma malha com 20 elementos e a formulação SOF-2 presente no CS-ASA. O critério de convergência escolhido foi o baseado em deslocamentos, com tolerância $\zeta = 10^{-4}$, o incremento inicial do parâmetro de carga foi $\Delta\lambda^0 = 0,1$, e 21 iterações máximas foram permitidas. Como estratégia de incremento de carga e iteração foi utilizada, para ambas, o deslocamento generalizado. Para análises com busca linear, o parâmetro de tolerância da busca foi $\beta_{BL} = 0,6$. Para comparação, foram utilizados os resultados obtidos por Schweizerhof e Wriggers (1986). As trajetórias de equilíbrio são retratadas na Figura 4.3 para análises com NRP e na Figura 4.4 para análises com NRM.

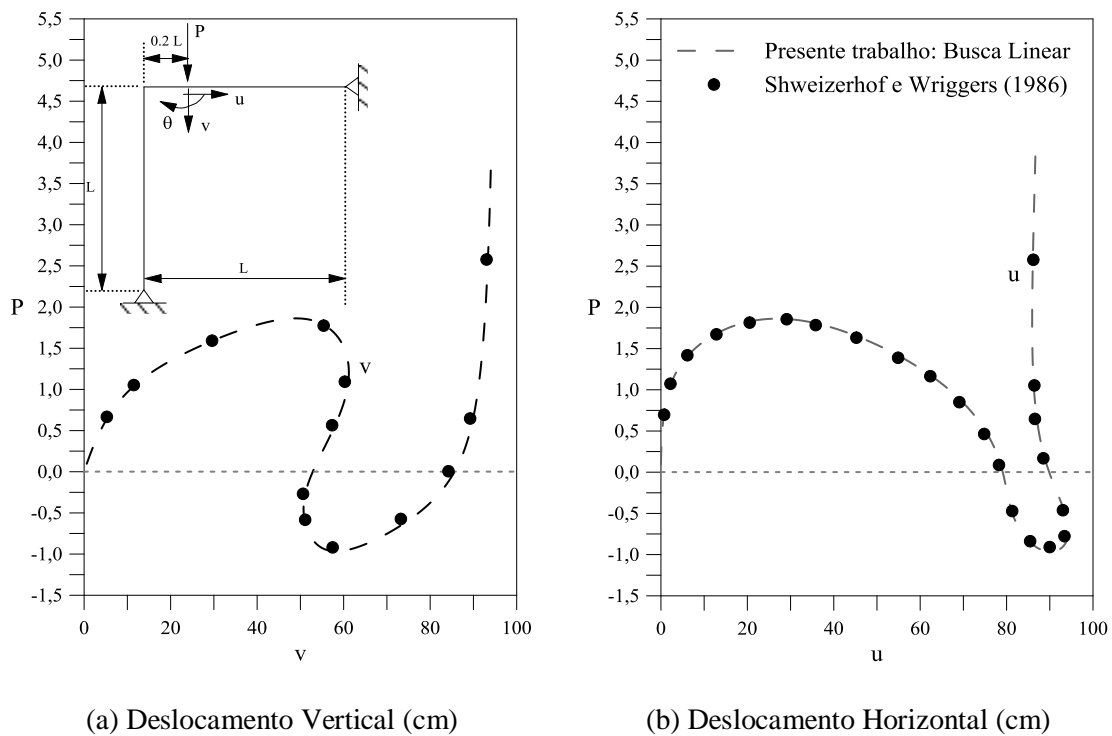


Figura 4.3 – Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee – NRP

As Tabelas 4.4 e 4.5 apresentam os resultados obtidos com o processo de busca linear e com o procedimento convencional para análises não lineares com NRP e NRM, respectivamente, para fins de comparação. Por meio dos resultados apresentados nas duas tabelas, é possível perceber a influência da busca na análise e um melhor desempenho

quando esse procedimento é aplicado, tanto para análises utilizando NRP quanto NRM. Pode-se notar redução em todos os parâmetros relevantes (exceto iterações médias), evidenciando a eficiência que o processo de busca proporciona.

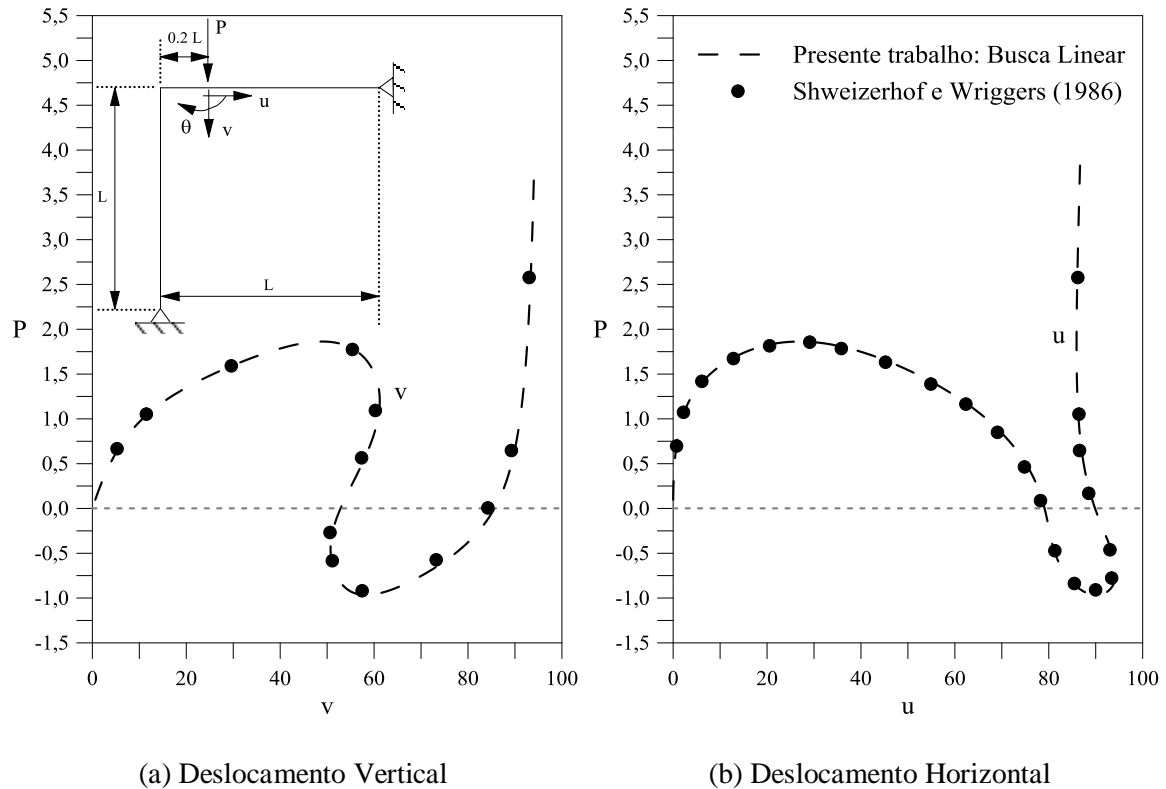


Figura 4.4 – Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee - NRM

Tabela 4.4 Pórtico de Lee: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a NRP

Busca linear					Processo convencional				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
412	4065	9,86	1	12,020	953	6459	6,78	2	16,540

Tabela 4.5 Pórtico de Lee: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a NRM

Busca linear					Processo convencional				
N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
582	4571	7,85	2	11,930	1252	5802	4,63	3	15,560

É possível observar, por meio da comparação entre as análises com e sem atualização da matriz durante o processo iterativo, que a busca apresenta desempenho semelhante para esses

métodos. Portanto, as análises das seções seguintes serão realizadas utilizando apenas o método NRM.

4.3.2 Coluna Engastada-Livre

Esta seção irá estudar uma coluna na qual uma das extremidades está engastada e a outra livre, como ilustra a Figura 4.5. A coluna tem comprimento L e rigidez a flexão EI . O carregamento é constituído por uma carga pontual P vertical associada a uma pequena excentricidade ($M = 0,001PL$), introduzida para evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação.

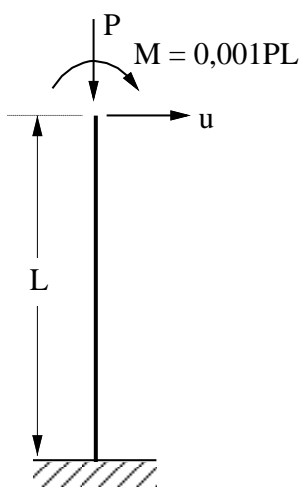


Figura 4.5 – Coluna engastada-livre

O objetivo fundamental desta seção é verificar a influência da tolerância da busca linear β_{BL} . Utilizou-se diferentes valores desse parâmetro nas análises para constatar tal influência. O método de comprimento de arco de Ramm foi utilizado em associação com o método de NRM. O critério de convergência adotado foi o baseado em deslocamentos, com tolerância $\zeta = 10^{-3}$. O incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, para o primeiro passo incremental foi considerado igual a $EI/(PL^2)$ com $P = 1$, com 21 iterações máximas permitidas. Empregou-se uma malha com 10 elementos finitos e formulação SOF-2.

Os caminhos não lineares de equilíbrio são exibidos na Figura 4.6. Como fonte de avaliação dos resultados obtidos, utilizou-se a solução analítica apresentada por Southwell (1941). Por sua vez, a Tabela 4.6 apresenta os resultados através dos parâmetros relevantes para uma análise não linear.

Ao comparar os parâmetros entre as análises, é possível perceber o melhor desempenho computacional com o processo de busca, com qualquer valor para tolerância, quando comparado com o processo convencional. Nota-se uma redução substancial no número de incrementos de carga e iterações totais. O número de falhas do processo de convergência também é reduzido quando o processo de busca é aplicado, evidenciando a característica de facilitar/acelerar a convergência que o método tem.

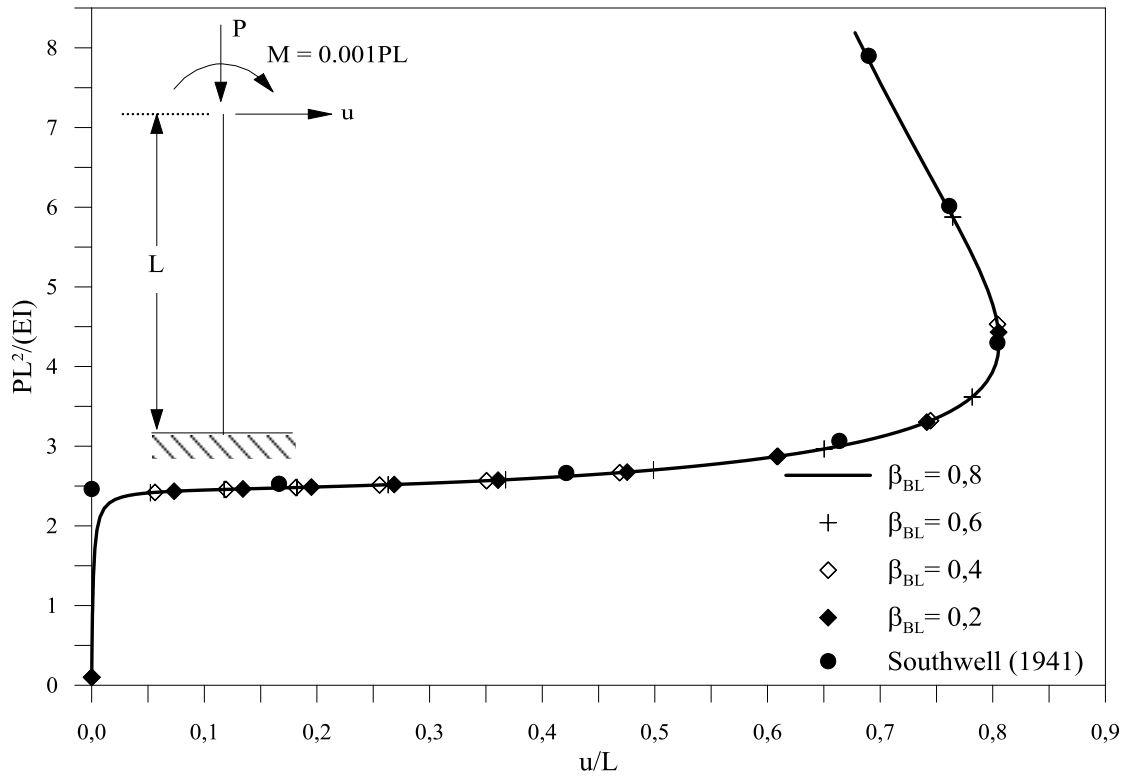


Figura 4.6 – Trajetórias de equilíbrio para a coluna engastada-livre

Tabela 4.6 Coluna engastada-livre: avaliação da eficiência computacional da busca linear

Valor de β_{BL}	N_{tot}	I_{tot}	$I_{méd}$	Rein	CPU (s)
Convencional	238	2505	10,53	3	2,62
$\beta_{BL} = 0,8$	128	1354	10,58	0	1,69
$\beta_{BL} = 0,6$	140	1439	10,28	2	1,84
$\beta_{BL} = 0,4$	147	1514	10,30	1	2,15
$\beta_{BL} = 0,2$	148	1546	10,45	0	2,14

Entretanto, como pode ser visto através da Tabela 4.6, uma simples redução da tolerância da busca não garante mais rapidez à análise. É possível constatar ainda que diferentes estruturas apresentam valores ideais diferentes para β_{BL} . Entretanto, para a maioria das análises realizadas neste trabalho, valores entre 0,6 e 0,4 produziram bons resultados.

4.3.3 Viga Engastada-Livre

O terceiro exemplo deste capítulo é um problema clássico na validação de modelos numéricos. Vários pesquisadores analisaram essa estrutura procurando validar as metodologias propostas por eles, incluindo Bathe e Bolourchi (1979), cujos resultados serão utilizados para comparação com as análises desta pesquisa, Simo e Vu-Quoc (1986), Crisfield (1990), Gummadi e Palazotto (1998), Silva (2009) e Silva (2016).

Esta viga, Figura 4.7, está engastada em uma de suas extremidades e submetida a um momento fletor na extremidade livre; tem comprimento L , seção transversal retangular e módulo de elasticidade E . Nesse estudo, o momento fletor aplicado na extremidade foi aumentado variando o parâmetro de carga de 0,0 a 2,0. Para $\lambda = 2,0$, tem-se que a viga se deforma com a extremidade livre rotacionando 720° .

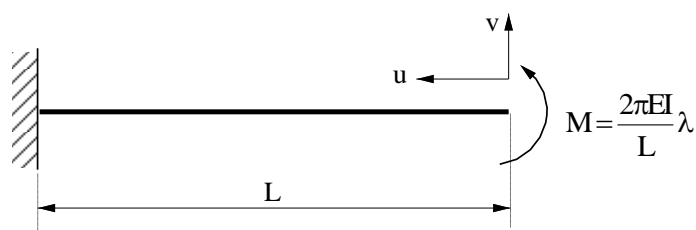


Figura 4.7 – Viga engastada-livre

Com esta seção procura-se confirmar a funcionalidade do método de busca linear com diferentes estratégias de iteração, mantendo para todas a estratégia de incremento do comprimento de arco. Para isso, serão associadas ao método de NRM as técnicas de norma mínima dos deslocamentos e os comprimentos de arcos propostos por Ramm e Riks, além do comprimento de arco cilíndrico. O número máximo de iterações permitidas foi igual a 21 e o incremento inicial do parâmetro de carga foi $\Delta\lambda^0 = 0,1$. O critério de convergência escolhido foi o baseado em deslocamentos, com tolerância $\zeta = 10^{-3}$. A tolerância da busca linear utilizada para as análises foi $\beta_{BL} = 0,5$. Foram utilizados 10 elementos finitos como malha e a formulação SOF-2 disponível no CS-ASA.

A Figura 4.8 mostra as trajetórias de equilíbrio com as diferentes combinações de incremento de carga e de iteração. A Tabela 4.7 traduz os resultados em função dos parâmetros relevantes para uma análise não linear.

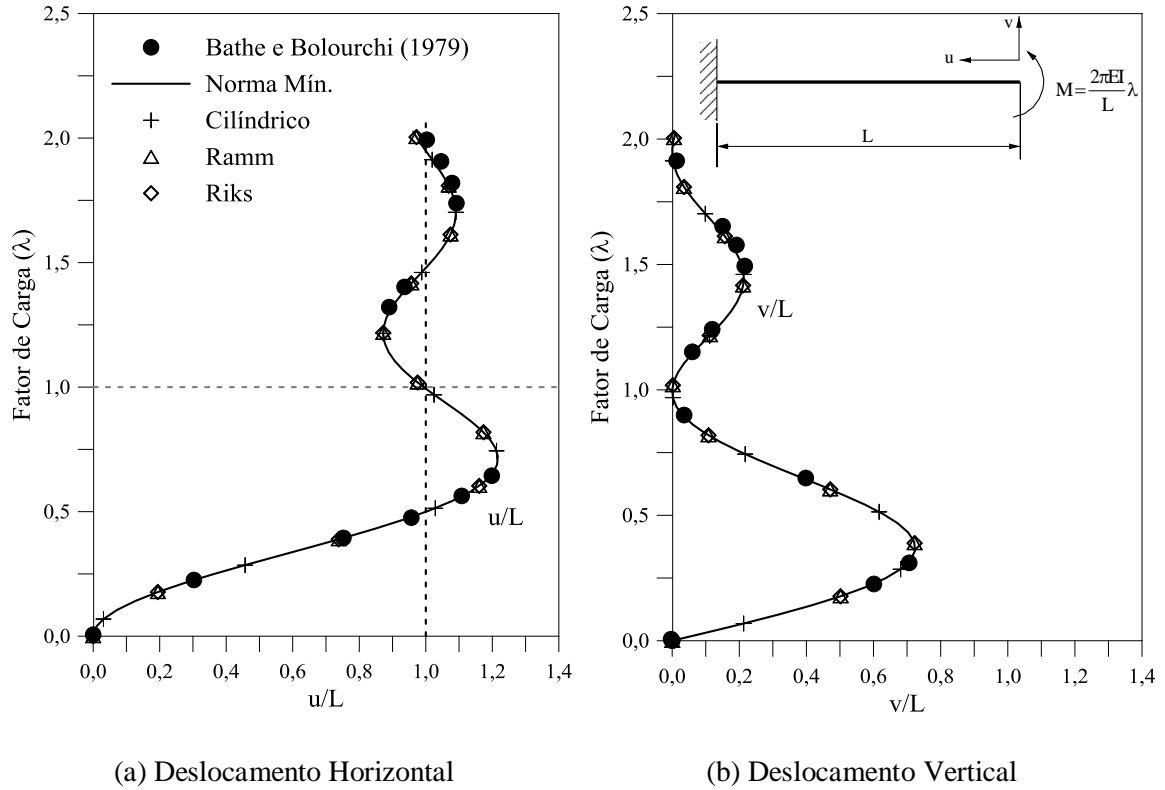


Figura 4.8 – Trajetórias de equilíbrio para a viga engastada-livre

Tabela 4.7 Viga engastada-livre: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a diferentes estratégias de iteração

Estratégia	Busca linear					Processo convencional				
	N _{tot}	I _{tot}	I _{méd}	Rein	CPU (s)	N _{tot}	I _{tot}	I _{méd}	Rein	CPU (s)
Norma Mín.	63	644	10,22	0	0,94	85	892	10,49	0	1,12
Cilíndrico	58	590	10,17	0	0,92	87	914	10,51	0	1,16
Ramm	251	2719	10,83	0	3,17	418	4564	10,92	0	4,46
Riks	251	2719	10,83	0	3,43	418	4564	10,92	0	5,14

Ao analisar os resultados, pode-se perceber que o método funciona adequadamente com diferentes estratégias de iteração, garantindo segurança ao analista em utilizar a busca linear. Para qualquer estratégia de iteração utilizada nesta seção, o método da busca reduz o

N_{tot} e o I_{tot} acima de 30%. Ainda é possível visualizar a manutenção da similaridade que o processo convencional proporciona entre as estratégias de Ramm e Riks e norma mínima e comprimento de arco cilíndrico.

4.3.4 Pórtico de Roorda

Outra estrutura clássica a ser analisada por este capítulo é o pórtico conhecido como pórtico de Roorda, ilustrado pela Figura 4.9. Trata-se de uma estrutura constituída por uma viga e um pilar, ambos com comprimento $L = 120 \text{ cm}$, formando um pórtico em L com apoios de segundo gênero nas duas extremidades. A seção transversal dos elementos tem área $A = 6$, momento de inércia $I = 2$ e coeficiente de forma $k = 1$. O módulo de elasticidade adotado foi $E = 720$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. O carregamento que o este pórtico está submetido é determinado por uma carga P na extremidade da coluna.

Diversos autores analisaram essa estrutura, com destaque para: Roorda (1965), Roorda e Chilver (1970), Koiter (1967) e Rizzi *et al.* (1980). Mais recentemente, Galvão *et al.* (2005) e Silva (2016) fizeram estudos com a estrutura como exemplo.

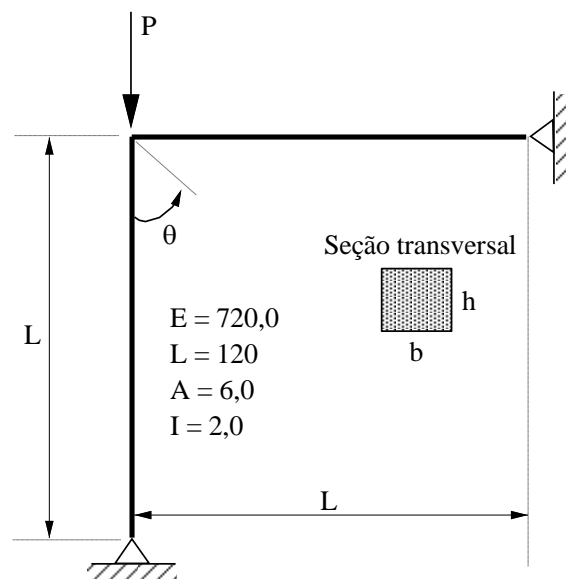


Figura 4.9 – Pórtico de Roorda: geometria e carregamento

O critério de convergência é um dos fatores importantes em uma análise não linear de estruturas. Por esse motivo, essa seção estudará a influência do critério de convergência quando a busca linear está associada ao processo de solução convencional, variando as análises entre as três opções disponíveis.

Será necessário inserir uma pequena excentricidade para o lado direito do pórtico. O trabalho realizado por Galvão *et al.* (2005) sobre a influência dos parâmetros geométricos e condições de contorno na resposta de pórticos em L será utilizado como referência. A escolha da excentricidade para a direita é feita em virtude do ganho de rigidez estrutural em comparação com a excentricidade para o lado esquerdo. A Figura 4.10 ilustra a excentricidade na estrutura a ser analisada, cujo valor escolhido foi $e = L/10$.

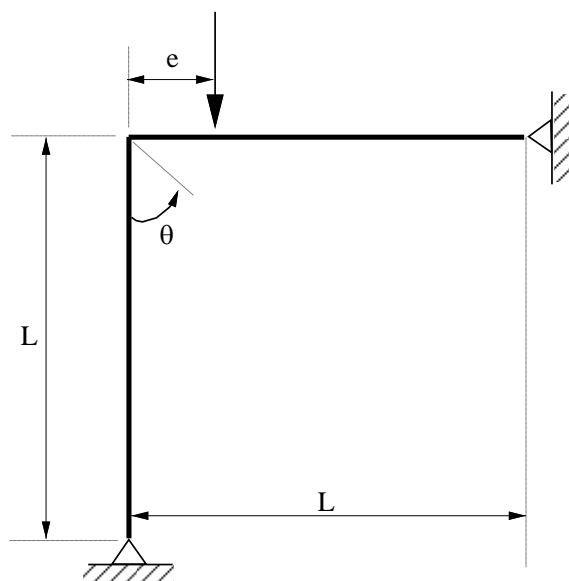


Figura 4.10 – Pórtico de Roorda: carga excêntrica

Foi escolhido o método de comprimento de arco proposto por Riks como estratégia de iteração associada ao método de NRM. O incremento de comprimento de arco foi a estratégia utilizada para incremento de carga. Foram permitidas 21 iterações máximas e incremento inicial $\Delta\lambda^0 = 0,1$, enquanto as tolerâncias para a convergência e para a busca linear foram, respectivamente, $\zeta = 10^{-4}$ e $\beta_{BL} = 0,4$. A formulação de elementos finitos escolhida foi a SOF-2, com malha composta por 20 elementos.

A Figura 4.11 retrata a trajetória de equilíbrio da estrutura para cada critério de convergência utilizado. Pode-se perceber a boa conformidade dos resultados apresentados por este com os obtidos por Galvão *et al.* (2005). Por sua vez, os parâmetros relevantes para qualificar a análise não linear são apresentados na Tabela 4.8, possibilitando a comparação entre o processo convencional e o processo associado com a busca linear.

Com a Tabela 4.8 percebe-se que a busca linear funciona independentemente do critério de convergência. Porém, fica evidente a melhor atuação dessa estratégia quando o

critério é o baseado em deslocamentos. Pode-se observar ainda que o controle de convergência baseado em deslocamentos é menos rigoroso que o baseado em forças. Por ser mais rigoroso, o critério de forças acaba tendo mais influência quando combinados esses dois critérios. Dessa forma, o critério de forças e deslocamentos apresenta comportamento análogo ao baseado exclusivamente em forças.

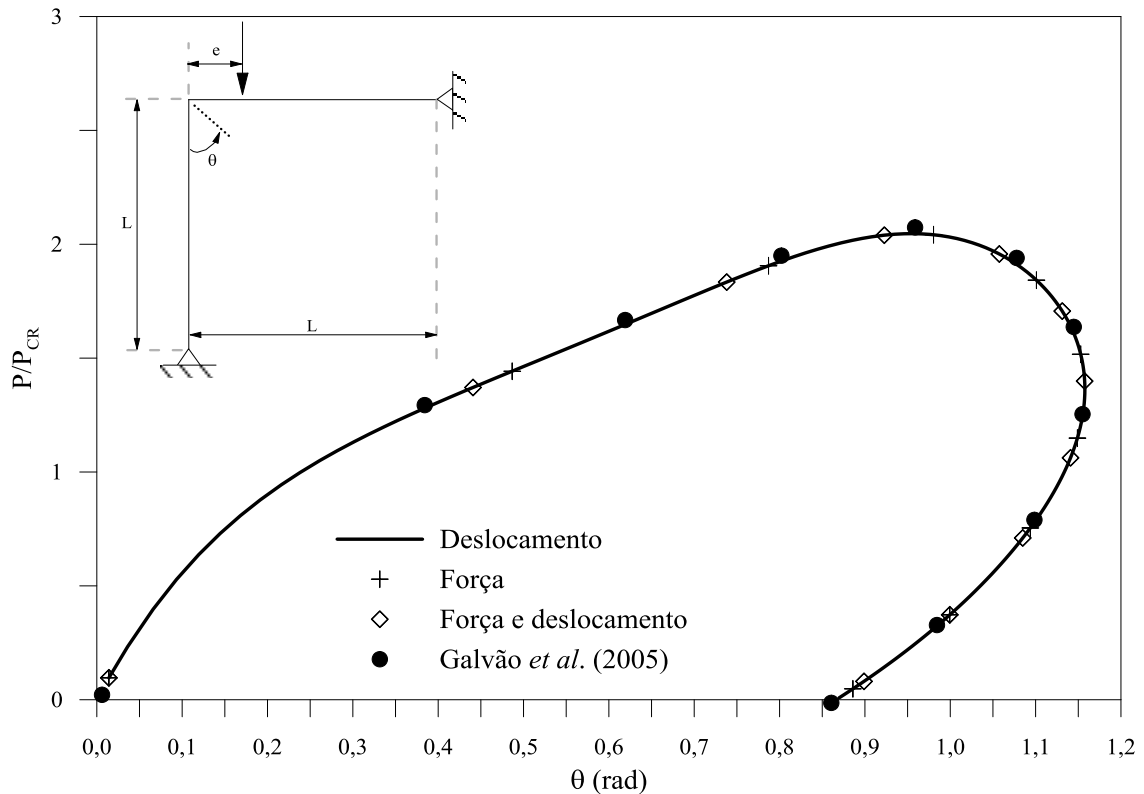


Figura 4.11 – Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Roorda: diferentes critérios de convergência

Tabela 4.8 Pórtico de Roorda: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a diferentes critérios de convergência

Estratégia	Busca linear					Processo convencional				
	N _{tot}	I _{tot}	I _{méd}	Rein	CPU (s)	N _{tot}	I _{tot}	I _{méd}	Rein	CPU (s)
Deslocamento	164	1824	11,12	0	3,64	274	3035	11,08	0	5,12
Força	413	4572	11,07	0	5,98	439	4854	11,06	0	6,74
Força e Desl.	413	4572	11,07	0	5,97	439	4854	11,06	0	6,86

4.3.5 Arco Circular Parcialmente Carregado

O último exemplo a ser analisado por este capítulo trata-se de um arco circular biapoiado submetido a um carregamento uniformemente distribuído em metade de sua extensão. A ilustração dessa estrutura é retratada na Figura 4.12.

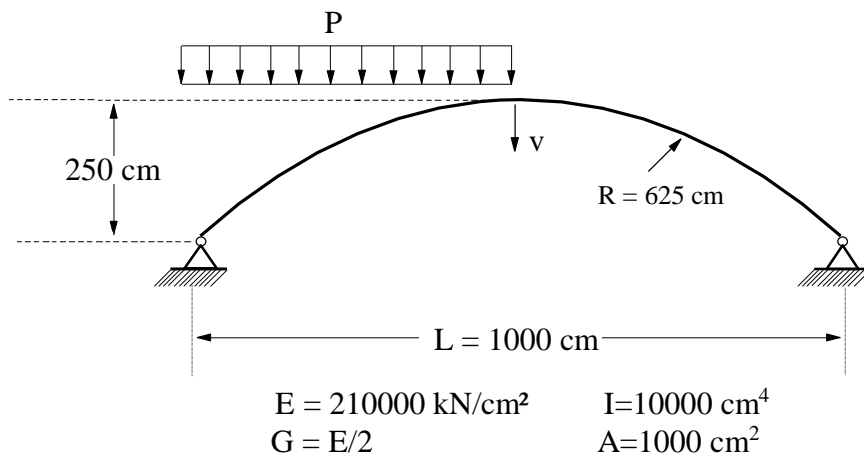


Figura 4.12 – Arco circular parcialmente carregado: geometria e carregamento

Pretende-se agora comprovar a eficiência da busca linear em outra formulação de elementos finitos. Para tal, esta seção, ao contrário das anteriores, realizou análises considerando a formulação SOF-3, que está disponível no CS-ASA, em conjunto a uma malha com 20 elementos finitos. Como estratégia para incremento inicial do parâmetro de carga optou-se pelo comprimento de arco, utilizando a estratégia de comprimento de arco cilíndrico para estratégia de iteração associada com o método de NRM. O critério de convergência adotado foi o baseado em deslocamentos, com $\zeta = 10^{-4}$. O número máximo de iterações permitido foi igual a 21, e o incremento inicial $\Delta\lambda^0 = 0,1$. Para perceber a influência da busca na análise, a tolerância escolhida foi $\beta_{BL} = 0,2$.

As variações do deslocamento vertical do centro do arco com a carga são mostradas na Figura 4.13. Os resultados encontrados por essa seção foram comparados aos obtidos numericamente por Xu e Mirmiran (1997). O comportamento fortemente não linear, característica marcante dos arcos, pode ser verificado neste exemplo.

A Tabela 4.9 analisa a eficiência da busca linear na formulação SOF-3 a partir dos parâmetros determinados no início deste capítulo. Ao observar a mesma tabela, pode-se perceber a redução do valor dos parâmetros, com exceção do número de reinicializações

quando a estratégia da busca é utilizada, atestando a eficácia da busca independentemente da formulação utilizada.

A estratégia da busca, como pode ser visto por meio da Tabela 4.9, garante uma redução no número de incrementos de carga e iterações totais. Porém, o número de reinicializações aumenta consideravelmente. Essa situação também foi observada em outros exemplos de arcos presentes na literatura. A não linearidade acentuada apresentada pelos arcos é uma possível explicação para o elevado número de reinicializações, uma vez que o algoritmo da busca linear tem a propriedade de reiniciar o processo de incremento quando a extrapolação atinge valores superiores ao máximo permitido — ou quando a interpolação não obtém um valor satisfatório para o passo de carga, situação presenciada próximas a pontos limites.

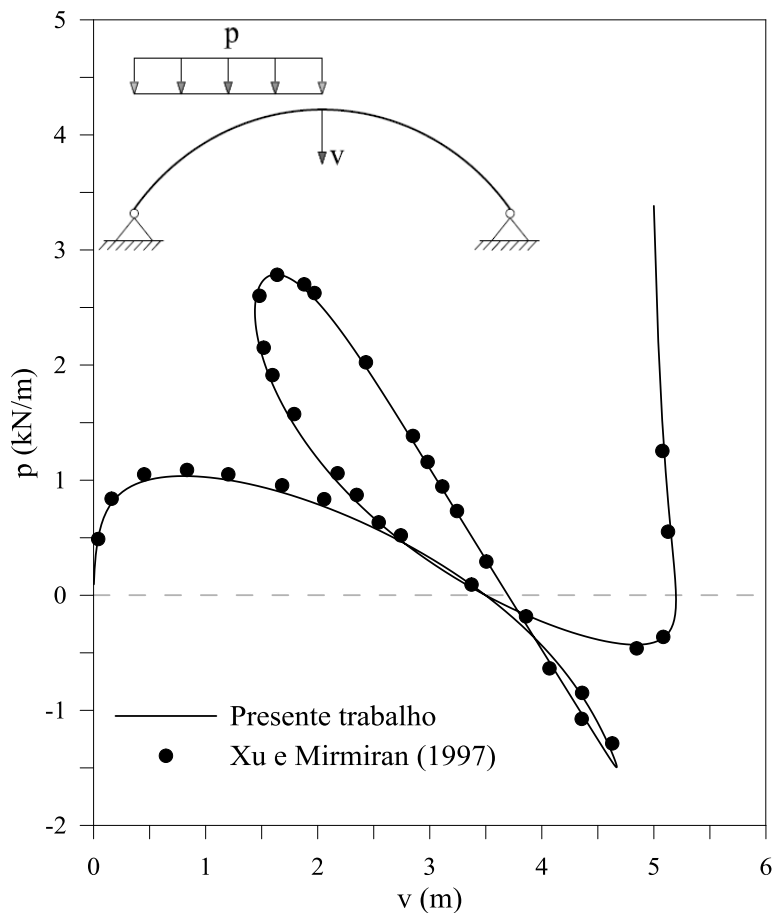


Figura 4.13 – Trajetória de equilíbrio do arco circular parcialmente carregado

Apesar desse grande número de reinicializações, a busca se mostra eficiente. Uma vez ocorrida a redução do incremento, a estratégia volta a acelerar o processo de solução e obtém

os demais pontos de equilíbrio com eficiência e mais agilidade. O tempo de processamento comparando o processo convencional e o processo associado com a estratégia de busca linear comprova tal eficácia.

Tabela 4.9 Arco circular parcialmente carregado: avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a formulação SOF-3

Busca linear					Processo convencional				
N_{tot}	I_{tot}	I_{méd}	Rein	CPU (s)	N_{tot}	I_{tot}	I_{méd}	Rein	CPU (s)
364	3722	10,25	31	3,670	464	5094	10,98	2	4,290

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Introdução

Este trabalho teve como finalidade desenvolver estratégias adicionais para o *solver* não linear disponível no CS-ASA. Foram implementados dois métodos: a técnica da busca linear e o processo iterativo de Potra-Pták. A técnica da busca linear, amplamente difundida em programação matemática, consiste em uma estratégia de otimização que procura escalonar a correção do processo iterativo e, com isso, acelerar e garantir a convergência. Por sua vez, o processo numérico de Potra-Pták é uma adaptação do ciclo iterativo de Newton-Raphson que apresenta maior taxa de convergência e coeficiente de eficiência, no qual são realizadas duas correções a cada iteração.

É importante salientar que, apesar do sistema computacional CS-ASA utilizado neste trabalho já dispor de um *solver* não linear robusto, as estratégias de solução não linear permanecem sendo objeto de estudo. Tendo em vista que as estruturas estão, cada vez mais, sendo levadas ao limite da solicitação estrutural e apresentando não linearidades acentuadas de diferentes fontes, são justificáveis o estudo e as implementações de recursos computacionais para a análise não linear de sistemas estruturais. O presente trabalho introduziu mais robustez e opções para o usuário do CS-ASA na busca pelo conhecimento do real comportamento estrutural.

Para validar as implementações deste trabalho e comprovar o desempenho computacional satisfatório das estratégias, foram realizadas análises estáticas geometricamente não lineares de variadas estruturas. Nas próximas seções são apresentados, respectivamente, algumas conclusões referentes ao trabalho desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros.

5.2 Conclusões

Os resultados obtidos a partir da análise não linear de diversos sistemas estruturais, com diferentes geometrias, condições de solicitação e apoio, foram comparados com soluções analíticas e numéricas presentes na literatura. Observa-se boa consonância das respostas obtidas nos exemplos dos Capítulos 3 e 4 deste trabalho com as fornecidas por outros autores. Tal observação permite afirmar que os dois métodos, busca linear e Potra-Pták, foram devidamente implementados e podem ser utilizados para estudar o comportamento de estruturas metálicas que exibem comportamento geométrico fortemente não linear. Discussões adicionais de ambas as implementações serão apresentadas separadamente a seguir.

5.2.1 Potra-Pták

No Capítulo 3, por meio da análise de seis estruturas, com destaque para arcos esbeltos, observou-se o bom funcionamento do ciclo iterativo de Potra-Pták. Destaca-se que em outras análises de estruturas com não linearidade menos acentuada o desempenho do método foi similar ou superior ao obtido para os arcos esbeltos, como comprovado para o pórtico de Lee.

A escolha de se utilizar arcos para validar o método proposto foi tomada para colocar à prova o ciclo iterativo em estruturas com comportamento extremamente não linear. Como resultado, percebe-se que o método provoca redução nos principais parâmetros que qualificam uma estratégia de solução de equações não lineares em análise estrutural. O procedimento se mostra mais eficiente e veloz que o método de Newton-Raphson, permitindo que a trajetória de equilíbrio desejada seja obtida com menor custo computacional.

O método se apresenta eficiente nas duas formulações (SOF-2 e SOF-3) utilizadas para realizar este estudo, o que permite afirmar que seu funcionamento não depende da formulação de elementos finitos utilizada. O mesmo é observado para o critério de convergência: independentemente do critério de convergência adotado, o método de Potra-Pták é mais eficiente do que o método de Newton-Raphson.

Souza *et al.* (2018) associaram este ciclo de iterações à estratégia de continuação do comprimento de arco linear proposto por Riks. As análises realizadas neste trabalho consideraram diferentes estratégias de continuação para testar a eficiência do método nessas

condições. Os resultados obtidos comprovam que o processo iterativo pode ser associado com qualquer estratégia de iteração.

Além disso, a proposta de se manter a matriz de rigidez constante durante o processo iterativo desse método foi testada e apresentou um bom desempenho, tornando-se mais uma opção para o *solver* não linear implementado no CS-ASA.

Portanto, as implementações relacionadas com o processo iterativo de Potra-Pták realizadas mostram que o método é uma opção válida e eficiente para a análise geometricamente não linear de estruturas.

5.2.2 Busca Linear

Por meio das análises de diferentes estruturas, incluindo vigas, colunas e pórticos, observou-se que a associação da técnica da busca linear com o método de Newton-Raphson se mostra eficiente para o processo de análise não linear de estruturas.

Este trabalho teve como objetivo determinar a performance do procedimento numérico da busca linear considerando diferentes aspectos numa análise não linear de estruturas. As principais conclusões serão explicadas separadamente, de acordo com cada aspecto colocado em evidência. Inicialmente, o desempenho da busca foi colocado à prova tendo em destaque a atualização da matriz de rigidez durante o processo iterativo. Percebe-se que a busca funciona tanto para o método de NR padrão quanto para o método de NR modificado.

A tolerância da convergência da busca linear é um parâmetro importante para a técnica. A simples redução dessa tolerância não garante uma melhora de desempenho do processo. Com as análises realizadas por este trabalho determinou-se que o valor ideal, para a maioria das estruturas, está entre 0,6 e 0,4. A convergência do processo iterativo, por sua vez, também foi verificada. É possível observar que o comportamento da análise é similar quando se adota o critério baseado em relações de forças ou em relações de forças e deslocamentos. O processo de convergência baseado apenas em relações de deslocamentos se mostra menos restritivo.

A eficácia da estratégia da busca linear sob a ótica da associação do processo iterativo com diferentes estratégias de iteração também foi examinado. Diversas combinações foram realizadas durante as análises, de onde se verificou que a técnica da busca linear pode ser associada à diferentes técnicas de continuação, tanto linearizadas quanto não linearizadas. Técnicas adicionais implementadas no CS-ASA poderão ser utilizadas em conjunto com a técnica da busca linear, sendo necessárias apenas pequenas adaptações. Conclusões

semelhantes podem ser desenvolvidas com a formulação de elementos finitos não lineares. Ou seja, independentemente da formulação adotada, a técnica da busca linear mostra-se eficaz — portanto, pode ser considerada uma alternativa para acelerar o processo de convergência de *solvers* não lineares de programas de análise estrutural.

Entretanto, nas análises de arcos esbeltos realizadas para o desenvolvimento deste trabalho, a técnica da busca linear não se apresentou tão eficaz. A não linearidade acentuada dessas estruturas acaba desestabilizando o algoritmo da busca, fazendo com que a análise seja reiniciada diversas vezes. Apesar da quantidade elevada de reinícios, o processo de busca consegue acelerar a análise e obter resultados satisfatórios. É possível desenvolver, entretanto, modificações no algoritmo para torná-lo mais estável com estruturas fortemente não lineares e, assim, deixar a busca linear mais robusta.

5.3 Sugestões para Futuras Pesquisas

Algumas sugestões de trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Associar a técnica da busca linear ao ciclo iterativo de Potra-Pták;
- Utilizar os algoritmos implementados na análise de estruturas metálicas com outras fontes de não linearidade (efeitos inelásticos e semirrigidez da ligação viga-coluna ou coluna-base);
- Utilizar os algoritmos implementados na análise não linear de estruturas mistas aço-concreto e de concreto;
- Dar continuidade à investigação e ao desenvolvimento de novas estratégias de solução não linear;
- Implementar procedimentos numéricos que consigam determinar, com precisão, pontos críticos (de bifurcação, de máximos e mínimos) ao longo das trajetórias de equilíbrio (Shi e Crisfield, 1994; Crisfield, 1997);
- Realizar estudos adicionais para mensurar a eficiência das diferentes estratégias de incremento de carga e iteração presentes no CS-ASA;
- Utilizar os algoritmos implementados na análise não linear de estruturas reticuladas tridimensionais; e
- Estender os métodos implementados neste trabalho para a análise não linear de placas e cascas.

Referências Bibliográficas

- AISC LRFD, 2016. Specification for structural steel buildings. *American Institute of Steel Construction*, Chicago, IL.
- Argyris, J.H., 1964. Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, London. 187 pp. 60s.
- Babajee, D.K.R. e Dauhoo, M.Z., 2006. An analysis of the properties of the variants of Newton's method with third order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 183, pp. 659-684.
- Barros, R.C., 2016. *Avaliação Numérica Avançada do Desempenho de Estruturas de Aço Sob Temperaturas Elevadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Battini, J.M., Pacoste, C., e Eriksson, A., 2003. Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 2169-2185.
- Bathe, K.J., e Bolourchi, S., 1979. Large displacement analysis of three dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 961-986.
- Batoz, J.L., e Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262-1267.
- Bergan, P.G. e Soreide, T., 1973. A Comparative Study of Different Numerical Solution Techniques as Applied to a Nonlinear Structural Problem. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 2, pp. 185-201.

- Bergan, P.G., 1980. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers & Structures*, vol. 12, pp. 497-509.
- Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Krakeland, B., e Soreide, T., 1978. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 1677-1696.
- Brebbia, C. e Connor, J., 1969. Geometrically Non-Linear Finite Element Analisis. Proc. ASCE, *J. Eng. Mech. Div.*, Proc. Paper 6516.
- Burdakov, O. e Kamandi, A., 2018. Multipoint secant and interpolation methods with nonmonotone line search for solving systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 338, pp. 421-431.
- Cardona, A., e Huespe, A., 1999. Evaluation of simple bifurcation points and post-critical path in large finite rotation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 175, pp. 137-156.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chen, H., e Blandford, G.E., 1993. Work-increment-control method for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 909-930.
- Chun, C., 2007. A family of composite fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, pp. 951-956.
- Clarke, M.J., e Hancock, M.J., 1990. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 1365-1391.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., e Plesha, M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Cordero A., Hueso, J.L., Martínez, E. e Torregrosa, J.R., 2010. New modifications of Potra-Pták's method with optimal fourth and eighth orders of convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, pp. 2969-2976.

- Coulter, B.A., e Miller, R.E., 1988. Numerical analysis of a generalized plane elastica with non-linear material behavior. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 617-630.
- Crisfield, M.A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 52-62.
- Crisfield, M.A., 1982. Accelerated solution techniques and concrete cracking. *Comp. Meth. in Appl. Mech. & Engng.*, vol. 33, pp. 585-607.
- Crisfield, M.A., 1990. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 81, pp. 131-150.
- Crisfield, M.A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 1, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Crisfield, M.A., 1997. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. vol. 2, John Wiley & Sons Inc., USA.
- Crisfield, M.A., e Shi, J., 1994. A co-rotational element/time-integration strategy for nonlinear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 1897-1913.
- Crisfield, M.A. e Shi, J., 1995. Combining arc-length control and line searches in path following. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, pp. 793-803.
- den Heijer C. e Rheinboldt, W.C., 1981. On steplength algorithms for a class of continuation methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18, 925-948.
- Eurocode 2, 2004. Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings. *Comite Europeen de Normalisation (CEN)*, Brussels, Belgium.
- Fafard, M. e Massicotte, B., 1993. Geometrical Interpretation of the Arc-Length Method. *Computers & Structures*, Vol. 46, N° 4, pp. 603-615.

- Feng, Y.T., Perié, D. e Owen, D.R.J., 1996. A New Criterion for Determination of Initial Loading Parameter in Arc-Length Methods. *Computers & Structures*, Vol. 58, Nº. 3, pp. 479-485.
- Feng, Y.T., Perié, D. e Owen, D.R.J., 1997. On the Sign of the Determinant of the Structural Stiffness Matrix for Determination of Loading Increment in Arc-Length Algorithms. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 47-49.
- Fletcher, R., 1987. *Practical methods of optimisation*, 2nd edition. Wiley.
- Fried, I., 1984. Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 47, pp. 283-298.
- Fujiwara, K., Okamoto, Y., Kameari, A. e Ahagon, A., 2005. The Newton-Raphson Method Accelerated by Using a Line Search – Comparison Between Energy Functional and Residual Minimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, Nº. 5.
- Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Galvão, A.S., 2004. *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Galvão, A.S., Gonçalves, P.B., e Silveira, R.A.M., 2005. Post-buckling behavior and imperfection sensitivity of L-frames. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 5, pp. 19-38.
- Geraldin, M., Idelsohn, S. e Hogge, M., 1980. Computational strategies for the solution of large non-linear problems via quasi-Newton methods. *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*, ed. A. K. Noor et al. Pergamon, pp.73-82.

- Gill, P.E. e Murray, W., 1974. *Safeguarded Step-length Algorithms for Optimizations Using Descent Methods*. National Physical Laboratory Report NAL 37.
- Gonçalves, G.A., 2013. *Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço: membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Gummadi, L.N.B., e Palazotto, A.N., 1998. Large strain analysis of beams and arches undergoing large rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 33(4), pp. 615-645.
- Harrison, H.B., 1978. Post-buckling behavior of elastic circular arches. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 65, part 2, pp. 283-298.
- Herceg, D. e Herceg, D., 2015. A family of methods for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 259, pp. 882-895.
- Herceg, D. e Herceg, D., 2018. Eighth order family of iterative methods for nonlinear equations and their basins of attraction. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 343, pp. 458-480.
- Jeremic, B., 2001. Line Search Techniques for Elasto-plastic Finite Element Computations in Geomechanics. *Commun. Numer. Meth. Engng*, 17:115-125.
- Krenk, S. e Hededal, O., 1993. A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. *Engineering Mechanics Comput.* Departamento de Tecnologia da Construção e Engenharia Estrutural, Aalborg University, Denmark, Nº. 12, pp. 01-18.
- Krenk, S. e Hededal, O., 1995. A Dual Orthogonality Procedure for Nonlinear Finite Element Equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 123, pp. 95-107.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, p. 823-839.
- Koiter, W.T., 1967. Post-buckling analysis of simple two-bar frame. *Recent Progresses in Applied Mechanics*, eds. B. Broberg, J. Hult and F. Niordson (Almqvist and Wiksell, Sweden).

- Kouhia, R. e Mikkola, M., (1989). Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 2923-2941.
- Lam, W.F. e Morley, C.T., 1992. Arc-Length Method for Passing Limit Points in Strutural Calculation. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, Nº. 1, pp. 169-185.
- Lee, S.H., 1989. Rudimentary Considerations for Effective Line Search Method in Nonlinear Finite Element Analysis. *Computers & Structures*, Vol. 32, Nº. 6, pp. 1287-1301.
- Lee, S., Manuel, F.S., e Rossow, E.C., 1968. Large deflections and stability of elastic frames. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM2, pp. 521-547.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Lemes, Í.J.M., 2018. *Estudo Numérico Avançado de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Lin, T.W., Yang, Y.B. e Shiau, H.T., 1993. A Work Weighted State Vector Control Method for Geometrically Nonlinear Analysis. *Computers & Structures*, Vol. 46, Nº. 4, pp. 689-694.
- Luenberger, D.G., 1984. *Linear and nonlinear programming*, 2nd edn., Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda-ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Mäkinen, J., Kouhia, R., Fedoroff, A., e Marjamäki, H., 2011. Direct computation of critical equilibrium states for spatial beams and frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 89, pp. 135–153.

- Maximiano, D.P., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Maximiano, D.P., 2018. *Análise Numérica Avançada de Estruturas de Aço e de Concreto Armado em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Maximiano, D.P., Silveira, R.A.M., Silva, A.R.D. e Gonçalves, P.B., 2019. An efficient strategy for solving structural nonlinear equations by combining the Orthogonal Residual Method and Normal Flow Technique. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 19, N°. 4, pp. 1-27.
- Meek, J.L., e Tan, H.S., 1984. Geometrically nonlinear analysis of space by an incremental iterative technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol. 47, pp. 261-282.
- NBR 6118, 2014. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, Rio de Janeiro.
- NBR 8800, 2008. Projeto de estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, Rio de Janeiro.
- Okamoto, Y., Fujiwara, K. e Himeno, R., 2009. Exact Minimization of Energy Functional for NR Method With Line-Search Technique, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, N°. 3, pp. 1288-1291.
- Pacoste, C., e Eriksson, A., 1997. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 163-197.
- Petkovic, L.D. e Petkovic, M.S., 2007. A note on some recent methods for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 185, pp. 368-374.
- Powell, G. e Simons, J., 1981. Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, pp. 1455-1467.
- Potra, F.A. e Pták, V., 1984. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. *Research Notes in Mathematics*, 103.

- Prado, Í.M., 2012. *CS-ASA Preprocessor: Sistema Gráfico Iterativo de Pré-processamento para Análise Avançada de Estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Ramm, E., 1981. *Strategies for Tracing the Non-Linear Response Near Limit-Points, Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89.
- Ramm, E., 1982. The Riks / Wempner Approach — An extension of displacement control method in non-linear analysis. *Non-linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86.
- Reis, R.A., 2019. *Implementação de um código computacional destinado à solução de sistemas de equações lineares e não lineares via métodos iterativos: aplicações em treliças metálicas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Riks, E., 1972. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, pp. 1060-1066.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, pp. 529-551.
- Ritto-Corrêa, M. e Camotim, D., 2007. On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures. *Computers and Structures*, Vol. 86, 1353-1368.
- Rizzi, N., Di Carlo, A. e Pignataro, M., 1980. A parametric post-buckling analysis of an asymmetric two-bar frame. *J. Struct. Mech.* vol. 8, pp. 435-448.
- Rocha, G., 2000. *Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos Metálicos*. Dissertação de Mestrado, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Rocha, P.A.S., 2006. *Análise inelástica de Segunda Ordem de Estruturas Metálicas com Ligações Semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

- Roorda, J., 1965. *The Instability of Imperfect Elastic Structures*, PhD Thesis, University College London, England.
- Roorda, J. e Chilver, A.M., 1970. Frame buckling: An illustration of the perturbation technique. *Int. J. Non-linear Mech*, vol. 5, pp. 235-246.
- Santana, M.V.B., 2015. *Desenvolvimento de sistema computacional via MATLAB/GUI para análise geometricamente não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Schweizerhof, K.H., e Wriggers, P., 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 269-279.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, J.L., 2016. *Formulações Corrotacionais 2D para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas Reticuladas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M. e Gonçalves, P.B., 1997. Solução de Sistemas de Equações Não-Lineares – O Método do Comprimento de Arco. *XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, São Carlos/SP.
- Silveira, R.A.M., 1999. *Estratégias Numéricas para Análise de Elementos Estruturais Esbeltos*. Relatório Técnico-Científico Final. Ref.: TEC 2496/96. Departamento de Engenharia Civil/Escola de Minas – Universidade Federal de Ouro Preto.
- Simo, J.C., e Vu-Quoc, L., 1986. A three-dimensional finite strain rod model: Part 2: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, pp. 79-116.

- Souza, L.A.F., Castelani, E.V., Shirabayashi e Machado, R.D., 2018. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 19, nº 1, pp. 161-179.
- Souza Neto, E.A. e Feng, Y.T., 1999. On the Determination of the Path Direction for Arc-Length Methods in the Presence of Bifurcations and Snap-Backs. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 179, pp. 81-89.
- Soleymani, F., Sharma, R., Li, X. e Tohidi, E., 2012. An optimized derivative-free form of the Potra–Pták method. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 56, pp. 97-104.
- Southwell, R.V., 1941. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, England.
- Wagner, W. e Wriggers, P., 1988. A Simple Method for the Calculation of Post-Critical Branches. *Engng. Comput.*, Vol. 5, pp 103-109.
- Wempner, G.A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pp. 1581-1599.
- Wolfe, M.A., 1978. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization: an Introduction*, Van Nostrand Reinhold.
- Wood, R.D. e Zienkiewicz, O.C., 1977. Geometrically nonlinear finite element analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. *Computers and Structures*, vol. 7, pp. 725-735.
- Xu, Z. e Mirmiran, A., 1997. Looping Behavior of Arches Using Corotational Finite Element. *Computers & Structures*, vol. 62, nº 6, pp. 1059-1071.
- Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.
- Yang, Y.B., e Shieh, M.S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, vol. 28, nº 12, pp. 2110-2116.
- Zienkiewicz, O.C., 1971. *The Finite Element in Engineering Science*. McGraw-Hill, London.

