

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - UFOP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PÓS GRADUAÇÃO EM ECONOMIA APLICADA - PPEA
MESTRADO EM ECONOMIA APLICADA

DIONATAN WILLIAN RODRIGUES OLIVEIRA

**UNIFICAÇÃO DA ESTIMAÇÃO INTERVALAR PARA ABORDAGENS
FREQUENTISTA E BAYESIANA**

MARIANA - MG

2018

DIONATAN WILLIAN RODRIGUES OLIVEIRA

**UNIFICAÇÃO DA ESTIMAÇÃO INTERVALAR PARA ABORDAGENS
FREQUENTISTA E BAYESIANA**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada do Instituto de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador da Dissertação: Prof. Dr. IVAIR RAMOS SILVA.

MARIANA - MG

2018

O482u Oliveira, Dionatan Willian Rodrigues.
Unificação da Estimção Intervalar para Abordagens Frequentista e Bayesiana
[manuscrito] / Dionatan Willian Rodrigues Oliveira. - 2018.
ix, 46f.: Figuras.

Orientador: Prof. Dr. Ivair Ramos Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de
Ciências Sociais Aplicadas. Departamento de Ciências Econômicas e
Gerenciais. Programa de Pós-Graduação em Economia.
Área de Concentração: Economia Aplicada.

1. Estatística - Teses. 2. Hipótese - Teses. 3. Estatística - Teses. 4. Modelos
matemáticos - Teses. I. Silva, Ivair Ramos. II. Universidade Federal de Ouro
Preto. III. Título.

CDU: 330.101.8

DIONATAN WILLIAN RODRIGUES OLIVEIRA

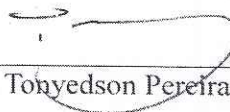
**UNIFICAÇÃO DA ESTIMAÇÃO INTERVALAR PARA ABORDAGENS
FREQUENTISTA E BAYESIANA.**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada do Instituto de Ciências Sociais e Aplicadas (ICSA) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Economia Aplicada, aprovado em 28 de março de 2018.

Banca Examinadora:



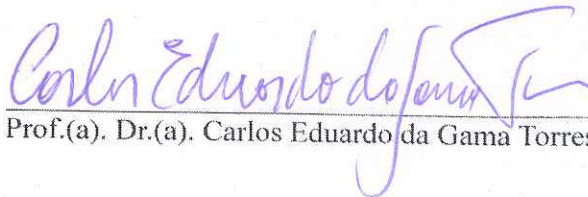
Prof.(a). Dr.(a). Ivair Ramos Silva - Orientador (UFOP)



Prof.(a). Dr.(a). Tonyedson Pereira e Lana (FASAR)



Prof.(a). Dr.(a). Eduardo Bearzoti (UFOP)



Prof.(a). Dr.(a). Carlos Eduardo da Gama Torres (UFOP)

Dedico esta dissertação ao meu pai, minha mãe, minha irmã e meu irmão que sempre me apoiaram, e acreditam na minha capacidade de ir mais além. A minha família por entender e apoiar essa nova etapa. A minha namorada, que me deu força e me ajudou a concluir mais essa etapa da vida.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, irmãos e a toda minha família pela torcida, amor e confiança. Vocês foram fundamentais para mais esta conquista.

Gratidão a minha amada república de Ouro Preto, República Sonegada, pelo apoio e incentivo aos estudos em mais este momento da minha vida.

Agradeço a UFOP, por me proporcionar o conhecimento, e a capacidade de me tornar um ótimo profissional. Agradeço a PROPP/UFOP pelos serviços prestados nesses dois anos e a bolsa concebida, foi de suma importância para a continuidade da minha pesquisa.

Agradeço ao professor Ivair Ramos Silva, pela empenho em contribuir com o meu crescimento pessoal e acadêmico, pela paciência e orientação. Aos professores Carlos Eduardo da Gama Torres, Eduardo Biarzoti e Tonyedson Pereira e Lana por terem aceitado o convite de participar desse momento tão importante. A turma PPEA/UFOP - 2016 por sempre estarem apoiando nos momentos difíceis.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que fizeram parte dessa nova etapa em minha vida.

*Uma resposta aproximada para a pergunta
certa é muito mais valiosa que uma resposta
exata para a pergunta errada*

John Tukey

RESUMO

As abordagens frequentista e Bayesiana para estimação intervalar usualmente produzem estimativas diferentes entre si. O debate acerca da superioridade de uma dessas escolas sobre a outra é controverso, e não há consenso sobre os ganhos práticos em se utilizar apenas uma das abordagens em detrimento da outra. Aliás, a visão de que essas linhas teóricas são concorrentes também não é fato pacificado na literatura. A esse respeito, surge uma questão fundamental: os métodos frequentistas e Bayesianos poderiam, de algum modo, ser usados simultaneamente para estimação intervalar? O objetivo deste trabalho é mostrar que a resposta a essa questão é afirmativa. Para tanto, este trabalho introduz uma forma pioneira e simples de equalizar métodos convencionais para construção de um estimador intervalar sob coeficientes de confiança e de credibilidade arbitrários, o que aqui é chamado de ‘intervalo de confiança-credibilidade’. O método é válido para o caso geral de qualquer distribuição amostral e para qualquer distribuição *a priori*. Exemplos de aplicação são oferecidos para problemas clássicos, como os que envolvem as distribuições normal e *t*-student. Adicionalmente, intervalos de confiança-credibilidade são construídos para os parâmetros de ruído em modelos de espaços de estados no contexto de modelagem econométrica.

Palavras-chave: Estatística Suficiente, teste de hipótese, família exponencial, modelos de espaço de estado.

ABSTRACT

Frequentist and Bayesian approaches for interval estimation usually drive to dissimilar estimates. The debate concerning superiority from one of these schools is controversial, and consensus is lacking about the practical gains if one is inclined to use only one of the approaches in detriment of the other. But, could frequentist and Bayesian methods be somehow reconciled for interval estimation? This work presents an affirmative response for this question. It is shown how to equalize conventional methods for interval estimation under arbitrary confidence and credible coefficients, called ‘confidence-credible intervals’. The method works for the general case of any data and prior distributions. Examples for classical problems such as involving the normal and the t-Student distributions are offered. In addition, confidence-credible intervals are built for nuisance parameters in space state models, which then remark the holes of the proposed method for econometric problems.

Keywords: Sufficient Statistic, hypothesis testing, exponential family, space state models.

Sumário

Sumário	vii
Lista de Figuras	ix
1 INTRODUÇÃO	10
2 VISÃO GERAL DO EMBATE BAYESIANO VERSUS FREQUENTISTA	12
3 DESENVOLVIMENTO	15
3.1 Intervalo de Confiança	15
3.1.1 Intervalo de Confiança para a Média da Normal: variância conhecida	17
3.1.2 Intervalo de Confiança para a Média da Normal: variância desconhecida	18
3.1.3 Intervalo de Confiança para a Média da Poisson	18
3.2 Intervalo de Credibilidade	20
3.2.1 Intervalo de Credibilidade para a Média da Normal: variância conhecida	21
3.2.2 Intervalo de Credibilidade para a Média da Normal: variância desconhecida	23
3.2.3 Intervalo de Credibilidade para a Média da Poisson	24
4 CREDIBILIDADE DO INTERVALO DE CONFIANÇA E CONFIANÇA DO INTERVALO DE CREDIBILIDADE	25
5 INTERVALO DE CONFIANÇA-CREDIBILIDADE	26
5.1 Intervalo de Confiança-credibilidade do Tipo União	27
5.1.1 Intervalo de Confiança-credibilidade do Tipo União para a Média da Normal: variância conhecida	28
5.1.2 Intervalo de Confiança-credibilidade do Tipo União para a Média da Normal: variância desconhecida	29
5.2 Intervalo de Confiança-Credibilidade de Mínima Amplitude	30
5.2.1 Intervalo de Confiança-credibilidade de Mínima Amplitude para a Média da Normal: variância conhecida	32
5.2.2 Intervalo de Confiança-credibilidade de Mínima Amplitude para a Média da Normal: variância desconhecida	33

6 APLICAÇÃO	35
6.1 Intervalo de Confiança-credibilidade para Modelos de Espaço de Estados	35
6.2 Descrição dos dados	37
6.3 Calibração dos Parâmetros e Implementação Computacional	39
6.4 Resultados da análise dos dados	40
7 CONCLUSÃO	41
Referências	42
Apêndices	44
A Códigos	44

Lista de Figuras

1	Estimativas intervalares para a média da normal com $\sigma^2 = 1$ via intervalo de confiança-credibilidade do tipo união para valores de \bar{x} variando entre -10 a 10, de 0,1 em 0,1. Cada estimativa foi obtida para $\gamma_f = \gamma_B = 0,95$ usando hiperparâmetros $\mu_0 = 5, \sigma_0^2 = 1$, e tamanho de amostra $n = 10$	28
2	Estimativas intervalares para a média da normal com σ^2 desconhecida via intervalo de confiança-credibilidade do tipo união para valores de \bar{x} variando entre -10 a 10, de 0,1 em 0,1. Cada estimativa foi obtida para $\gamma_f = \gamma_B = 0,95$ usando hiperparâmetros $n_0 = 10, c_0 = 1, \sigma_0^2 = 4, \mu_0 = 5$, e tamanho de amostra $n = 10$	29
3	Intervalos de confiança, credibilidade e confiança-credibilidade para a média normal com variância igual a 5 e tamanho da amostra de 10. Os intervalos de confiança e credibilidade foram obtidos separadamente sob uma abordagem simétrica baseada nos coeficientes $\gamma_f = \gamma_b = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$. O intervalo de confiança-credibilidade foram calculados para $\gamma_f = \gamma_b = 0.95$	32
4	Intervalos de confiança e confiança-credibilidade para a média normal com variância desconhecida para tamanho amostral de 10, e coeficientes $\gamma_f = \gamma_b = 0.95$	34
5	Série mensal do Índice de Preços ao Consumidor, no período de Janeiro/2016 até Dezembro/2017.	38
6	Série Temporal da variação do Índice de Preços do Consumidor para o período de Janeiro/2016 até Dezembro/2017.	39
7	Posteriori empírica de σ_η^2 para a variação do Índice de Preços ao Consumidor Urbano observado dos EUA no período de Janeiro/2016 até Dezembro/2017	41

1. INTRODUÇÃO

As divergências entre as teorias estatísticas frequentista e Bayesiana são evidentes não somente pela abordagem metodológica que empregam, mas também pelas interpretações que oferecem aos resultados das análises de dados reais. Essa discordância tem como consequência o fato de que, para o mesmo conjunto de dados, resultados contraditórios podem ser obtidos se as metodologias Bayesiana e frequentista são aplicadas simultaneamente. Apesar do confronto histórico entre essas escolas ter gerado um volumoso acervo para debater e comparar os méritos de cada abordagem, ainda não é seguro afirmar que exista uma resposta consensual a respeito de quando usar uma abordagem em detrimento da outra. Mas uma teoria unificada parece possível. Por exemplo, para demonstrar que uma abordagem unificada para testes de hipóteses pode ser formulada, Silva (2017) demonstra uma correspondência unívoca entre os testes de hipóteses Bayesiano e frequentista. Outro exemplo é o trabalho de Berger et al. (1997), o qual forneceu uma abordagem unificada para testar hipóteses precisas.

Nota-se, portanto, que uma unificação voltada a testes de hipóteses já se faz proeminente. Mas não se pode dizer o mesmo sobre os métodos de estimação intervalar atuais, os quais podem ser claramente identificados como pertencentes a apenas umas das duas escolas, frequentista ou Bayesiana, chamados de ‘intervalos de confiança’ e ‘intervalos de credibilidade’, respectivamente. No entanto, apesar de abordagens unificadas para estimação intervalar ainda não serem usuais, um grande número de autores tem se dedicado a discutir e comparar a performance entre essas duas abordagens. Por exemplo, o trabalho de Franco, Gamerman e Santos (2009) compara os intervalos de confiança com os intervalos de credibilidade analisando os resultados obtidos a partir de simulações sobre o Modelo de Espaço de Estados, e posteriormente, aplicando ambos os métodos a dados empíricos. Ao final de sua análise, Franco, Gamerman e Santos (2009) concluem que os intervalos de credibilidade parecem apresentar, em geral, a melhor combinação de resultados comparando a probabilidade de cobertura e de menor amplitude. Morey et al. (2016), por sua vez, afirmam ser um equívoco usar o termo ‘confiança’ para designar a estimação por intervalos de confiança. Eles argumentam que os intervalos de confiança produzem um índice de precisão, e que os valores contidos na estimativa intervalar não são plausíveis, o que torna o intervalo de confiança falacioso. Com isso, Morey et al. (2016) adotam a inferência Bayesiana, o que, segundo os autores, favorece declarações que correspondem aos princípios da precisão e da plausibilidade, sendo assim uma escolha mais adequada.

Pelo lado frequentista, Roazzi, O’Brien e Graça (2003) criticam a variedade de atalhos, não normativos, e inadequados, que informalmente são usados na tomada de decisão Bayesiana, o que o autor denomina por problema dos ‘vieses e da heurística’. Esta crítica é principalmente dirigida à arbitrarie-

dade, e portanto à conveniência, por trás da escolha da distribuição *a priori*. Deste modo, os interesses de analistas maliciosos poderiam guiar a escolha da *priori* de modo a garantir que os resultados possam corroborar tais interesses.

Assim sendo, Roazzi, O'Brien e Graça (2003) afirmam que tais heurísticas são procedimentos não sistemáticos informais, aproximações práticas, ou então apenas estratégias gerais, mas não algoritmos exatos fornecidos pelas teorias normativas. Portanto, Roazzi, O'Brien e Graça (2003) destacam que a subjetividade pode produzir resultados diferentes daqueles que foram obtidos através de uma aplicação das regras probabilísticas normativas. Outra forte crítica à abordagem Bayesiana é oferecida por Berger (2003). Ele compara as abordagens de Fisher, Newman e Jeffreys a fim de obter uma unificação dos testes frequentistas condicionais. Isto, segundo o autor, favoreceria a reconciliação entre os princípios fundamentais de cada uma destas escolas. Berger (2003) também explica que cada uma destas metodologias retrata aspectos filosóficos diferentes. Consequentemente, partindo do mesmo conjunto de dados, podem levar a conclusões diferentes. Berger (2003) defende que a unificação metodológica da estatística deveria ser motivada pela crença de que a melhor metodologia estatística deveria favorecer a interpretação simultânea dos diferentes ângulos filosóficos e dos principais paradigmas estatísticos.

A falta de consenso entre as escolas frequentista e Bayesiana é discutida em uma diversidade de trabalhos, dos quais podemos citar Franco, Gamerman e Santos (2009) e Berger (2003). Portanto, tendo em vista o evidente impasse para se escolher entre intervalos de confiança e intervalos de credibilidade, a presente dissertação defende que a formalização de uma reconciliação pode ser mais útil para a consolidação dos fundamentos estatísticos do que discutir suas divergências metodológicas atuais. Ademais, a definição e a interpretação de intervalo de confiança (abordagem frequentista) não competem com a definição e interpretação do intervalo de credibilidade (abordagem Bayesiana). Na realidade, elas coexistem sem quaisquer falhas lógicas. Previamente à observação dos dados, cada intervalo de credibilidade é de uma certa confiança, e, posteriormente à observação dos dados, cada intervalo de confiança é de uma certa credibilidade. Esse fato é abordado em detalhes na seção 4. Com isso, os autores do presente trabalho sustentam que uma abordagem unificada deveria combinar as preocupações de ambas escolas. Da parte frequentista, o objetivo seria assegurar uma verdadeira gestão da medida de performance pré-experimental, a probabilidade de cobertura. Da parte Bayesiana, o objetivo seria favorecer uma interpretação pós-experimental dos resultados como uma atualização da incerteza do analista sobre o fenômeno estudado.

Visando contribuir para uma futura teoria unificada, as discrepâncias entre as visões filosóficas frequentista e Bayesiana não são exaltadas neste trabalho. Em vez disso, o objetivo principal dessa dissertação é propor uma metodologia unificada para estimação intervalar, o que será chamado de 'intervalo

de confiança-credibilidade'.

Adicionalmente, o presente trabalho também visa exemplificar a utilização do intervalo de confiança-credibilidade em modelos de espaço de estados (HARVEY, 1989; HARRISON; WEST, 1999). Os modelos de espaço de estados são muito utilizados em vários ramos da ciência, mas em especial em econometria. Vale destacar, por exemplo, o estudo de Orair e Silva (2012) que apresentam um arcabouço metodológico tanto para estimação de séries em altas frequências (mensais) quanto para análise do desenvolvimento das séries das finanças públicas subnacionais (estados/municípios), o qual oferece um instrumental útil para monitoramento da política fiscal. De modo análogo, Franco, Gamerman e Santos (2009) utilizam de ajuste em séries temporais através do modelo de espaço de estados para abordagens frequentista e Bayesiana com o objetivo de inferir sobre os parâmetros do modelo e comparar os resultados de cada abordagem.

Os resultados dessa dissertação foram obtidos sob argumentos analíticos, e os exemplos numéricos foram implementados usando o software de programação estatística R (TEAM et al., 2014).

O conteúdo dessa dissertação está distribuído da seguinte forma: o próximo capítulo apresentará um breve embate teórico pelos defensores de cada uma das escolas frequentista e Bayesiana. O capítulo 3 oferece uma visão geral das principais definições de estimação intervalar de ambas escolas. O capítulo 4 será apresentado um exemplo de credibilidade dos intervalos de confiança observados e confiança do estimador do intervalo de credibilidade. Em seguida, o capítulo 5 irá explicitar o principal resultado a que se destina essa dissertação que é a formulação de uma abordagem unificada para estimação intervalar, a qual chamamos de "intervalo de confiança-credibilidade". Para priores arbitrárias, o método proposto é, simultaneamente, um intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ e um intervalo de credibilidade com coeficiente de credibilidade também igual a γ , com $\gamma \in (0, 1)$ arbitrário. O capítulo 6 será destinado a exemplo de aplicação com dados reais para problemas clássicos de estimação intervalar, sendo utilizado o modelo de espaço de estados de nível local. Por fim, o capítulo 7 é dedicado às principais conclusões.

2. VISÃO GERAL DO EMBATE BAYESIANO VERSUS FREQUENTISTA

Como já destacado, a presente dissertação pretende ser isenta de defender que uma das escolas, Bayesiana ou frequentista, seja superior à outra. Mas é útil destacar também que o embate teórico promovido pelos defensores de cada uma destas abordagens está ligado com a contraposição de idéias supostamente contraditórias. Com base neste contexto, esta seção será útil para apresentar algumas discussões ao longo

da história em torno de qual metodologia deveria ser utilizada em detrimento da outra.

A intenção de abranger as discussões históricas tem como intuito apontar as possíveis falhas de interpretações teóricas, de ambas as partes, que possam ter levado ao embate, e evidenciar que uma abordagem unificada é verossímil caso tais falhas de interpretações sejam resolvidas.

Para iniciar o estudo entre as diferentes abordagens, Lindley (1957) propõe discutir as diferentes interpretações entre as escolas frequentista e Bayesiana. Para tanto, o autor utilizou exemplos os quais possuem como principal característica mostrar o paradoxo sobre a caracterização nos testes baseados no teorema de Bayes. Sendo assim, o autor promove um embate teórico sobre as discordâncias entre as abordagens frequentista e Bayesiana. Um dos exemplos que Lindley (1957) aborda é a possibilidade de interpretação equivocada sobre a decisão em rejeitar ou aceitar a hipótese nula, H_0 . Seja x o resultado do experimento. O autor descreve que podem acontecer 2 eventos simultaneamente que são contraditórios, o que ele define como um paradoxo estatístico, sendo eles: o primeiro caso o teste de significância para H_0 mostra que x é significativo ao nível, por exemplo, de 5%; o segundo caso é que a probabilidade a posteriori de H dado x seja elevado de tal forma que seja de 95%, para probabilidades a priori muito pequenas de H . Neste exemplo, onde os eventos acontecem simultaneamente, Lindley (1957) afirma que as interpretações para o primeiro e segundo casos são diretamente conflituosas. Este exemplo é bastante geral com os testes de significância, porém o autor descreve que dúvidas são passíveis de encontrar sobre o significado de um nível de significância em determinadas circunstâncias.

O embate teórico entre as metodologias frequentista e Bayesiana é promovido por vários pesquisadores e de diferentes áreas. Um desses trabalhos que contribui para o debate teórico é o artigo de Solo (1984), onde o autor pretende retratar contradições dentro da abordagem frequentista por meio de uma comparação entre os testes de significância prática e os de significância estatística. Para tanto, Solo (1984) retrata que o principal uso do PST, *Pure Significance Test*, é a capacidade de redução dos dados a evidenciar uma hipótese em um único número, o valor P. Portanto, em seu trabalho, Solo (1984) defende uma alternativa ao PST. Solo (1984) descreve que a principal crítica em relação ao PST decorre sobre dois pontos: *i*) tamanho da amostra; e *ii*) incapacidade de mensuração quantitativa da discrepância ao analisar a hipótese nula.

Tendo em vista a discussão sobre a unificação das abordagens, os autores Bayarri e Berger (2004) apontam cenários mais comuns para a utilização das escolas frequentistas e Bayesiana de modo que a unificação fosse possível. Assim sendo, os autores Bayarri e Berger (2004) defendem a inexistência de informações externas introduzidas na análise, a não ser o próprio modelo e os dados. Segundo os autores, a escola Bayesiana utiliza ‘distribuições a priori objetivas’ para sua análise, de tal modo que estes não se interessam pelas estimações frequentistas e fazem uso da subjetividade, o que os autores chamam de

priori altamente informativas, enquanto que os adeptos da escola frequentista não estão interessados no subjetivo, o que eles chamam de *priori* informativa.

Bayarri e Berger (2004) concluem que a unificação filosófica das escolas Bayesianas e frequentistas não é possível, uma vez que cada abordagem retrata um aspecto diferente da inferência estatística. No entanto, os autores acreditam ser possível obter uma unificação metodológica geral, no qual tanto os frequentistas e Bayesianos concordem com um conjunto de procedimentos estatísticos para uso geral.

Steinhardt (2012) discorre sobre os debates entre frequentistas e Bayesianos, apontando como os embates filosóficos de cada abordagem influenciam no comportamento da análise e tratamento dos dados. Com isso, Steinhardt (2012) reitera que a discussão entre ambas escolas deve se concentrar no emprego prático dos dois métodos, ou caso a teoria for discutida, deve ser claramente separada das decisões práticas. O autor afirma que quando as hipóteses do Teorema de Bayes são válidas e quando a atualização Bayesiana pode ser realizada computacionalmente de forma mais eficiente, então é realmente tautológico que, segundo o autor, Bayes é a abordagem ótima, mesmo quando se tem pressupostos falhos. Porém, Steinhardt (2012), ao trabalhar com pressupostos mais fracos, retrata que a abordagem frequentista pode representar modelos complicados, dado que, realizando suposições mais fracas desde o princípio é necessário fazer menos trabalho para garantir que essas premissas sejam atendidas.

Por outro lado, quando os pressupostos de uma abordagem são realizados erroneamente isso é capaz de caracterizar soluções viesadas em detrimento da outra abordagem. É o caso onde os autores Biller e Oser (2015) retratam sobre unificação dos intervalos de confiança e credibilidade. De fato, os autores definem intervalos de confiança e probabilidade de cobertura de forma equivocada, com isso os problemas para unificação da teoria estão baseados em raciocínios corretos derivados de fundamentação errada. Enquanto isso, os autores não mencionam sobre a medida de performance do intervalo de confiança ser pré-experimental, enquanto que a performance de interesse Bayesiano é pós-experimental.

Considerando as discussões sobre qual abordagem deve ser utilizada em detrimento da outra, trabalhos que promovem a discussão teórica para uma possível unificação da abordagem frequentista e Bayesiana já são proeminentes. Podemos, por exemplo, citar o artigo de Silva (2017) que sugere uma unificação das abordagens Bayesiana e frequentista para testes de hipóteses. Para tanto, Silva (2017) prova que para cada teste Bayesiano sempre existe um teste frequentista equivalente. Reciprocamente, para cada teste frequentista, sempre existe um teste Bayesiano equivalente. Assim, o autor conclui que existe equivalência dos testes de hipóteses frequentista e Bayesiano do ponto de vista matemático. Para Silva (2017), não cabe discutir superioridade entre estes métodos, pois eles sempre podem ser calibrados de modo a apresentarem as mesmas conclusões.

Na mesma linha do trabalho de Silva (2017), que visou a unificação das escolas frequentista e Bayesi-

ana para os testes de hipóteses, o presente trabalho tem como proposta a unificação de ambas abordagens para estimação intervalar.

Para tanto, é fundamental explicar que os conceitos principais de ambas escolas não são contraditórios. Mais especificamente, é crucial destacar que intervalos de credibilidade possuem alguma confiança e, analogamente, intervalos de confiança possuem alguma credibilidade. Portanto, tal discussão será ilustrada no capítulo 4 e via exemplo, no sentido de demonstrar que existe credibilidade dos intervalos de confiança observados e confiança do estimador do intervalo de credibilidade. Contudo, o capítulo a seguir oferece uma visão geral das principais definições de estimação intervalar das abordagens frequentista e Bayesiana.

3. DESENVOLVIMENTO

Seja X_1, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias com uma distribuição de probabilidade comum, $F_X(x|\theta)$, onde θ , desconhecido, é o parâmetro populacional, onde $\theta \in \Theta$ e Θ é o espaço paramétrico. Considere construir um estimador intervalar para θ . Uma estimação intervalar é um par de funções de valores reais do vetor $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, digamos $L(\vec{X})$ e $U(\vec{X})$, de modo que $L(\vec{X}) < U(\vec{X})$, tais que, dada uma amostra observada $\vec{X} = \vec{x}_0$, o intervalo $[L(\vec{x}_0), U(\vec{x}_0)]$ possa conter θ , onde $L(\vec{x}_0)$ e $U(\vec{x}_0)$ são chamados de limites inferior e superior, respectivamente.

3.1. Intervalo de Confiança

O par de variáveis aleatórias, $L(\vec{X})$ e $U(\vec{X})$, é dito formar um intervalo de confiança para θ , com um coeficiente de confiança $\gamma_f \in (0, 1)$, se a probabilidade de cobertura, denotada por $\beta(\theta)$ for maior ou igual a γ_f para cada $\theta \in \Theta$, onde $\beta(\theta)$ é definida por:

$$\beta(\theta) = Pr[L(\vec{X}) \leq \theta \leq U(\vec{X})|\theta].$$

Formalmente, temos um intervalo de confiança γ_f se:

$$\inf_{\theta^* \in \Theta} \beta(\theta^*) = \inf_{\theta^* \in \Theta} Pr[L(\vec{X}) \leq \theta^* \leq U(\vec{X})|\theta = \theta^*] \geq \gamma_f.$$

Um método bastante conhecido para construir intervalos de confiança é o ‘método da quantidade pivotal’, que é apenas um caso particular do ‘método da inversão dos testes de hipóteses’ (LEHMANN; ROMANO, 2006). Com a última abordagem, $T(\vec{X})$ denota uma estatística de teste, e para uma observação \vec{x}_0 , $T(\vec{x}_0) = t_0$ é dito ser um valor realizado de $T(\vec{X})$. Assim, seja $F_T(t|\theta)$ a distribuição

de probabilidade de $T(\vec{X})$. Sem perda de generalidade, suporemos que $F_T(t|\theta)$ é não-crescente em θ para t fixo. Não obstante, o raciocínio é semelhante para o caso em que $F_T(t|\theta)$ é não decrescente em θ . Desta forma, um intervalo de confiança exato para θ é obtido resolvendo:

$$\begin{aligned} L_f(\vec{x}_0) &= \sup\{\theta^* \in \Theta : F_T(t_0|\theta = \theta^*) \geq (1 - \alpha_l)\} \text{ e} \\ U_f(\vec{x}_0) &= \inf\{\theta^* \in \Theta : F_T(t_0|\theta = \theta^*) \leq \alpha_u, \end{aligned} \quad (1)$$

onde α_l e α_u são tais que $(1 - \alpha_l - \alpha_u) = \gamma_f$, e γ_f é o coeficiente de confiança desejado. Essa é a abordagem frequentista para estimação intervalar, aqui denotada por $IF_{\gamma_f}(\theta) = [L_f(\vec{x}), U_f(\vec{x})]$.

Para ilustrar, assumamos que X segue uma distribuição exponencial com parâmetro θ , i.e. a função densidade de probabilidade de X é $f_X(x) = \theta e^{-\theta x} I(x \geq 0)$, onde $I(\cdot)$ é a função indicadora. Para $T(X) = X$, e pela equação (1), o intervalo de confiança é calculado como:

$$[-\ln(1 - \alpha_l)/x_0, -\ln \alpha_u/x_0]$$

onde x_0 denota uma realização de X . Por exemplo, considere um intervalo de confiança simétrico de 95% de confiança, isto é, $\alpha_l = \alpha_u = 0.025$. Se $x_0 = 10$, a estimativa intervalar é

$$IF_{0.95}(\theta) = [0.0025, 0.3689]. \quad (2)$$

Depois de ter uma realização, \vec{x}_0 , apenas um dos dois eventos possíveis ocorreu: o intervalo realizado $[L_f(\vec{x}_0), U_f(\vec{x}_0)]$ contém θ , ou ele não contém θ . Assim, a probabilidade de θ estar contido em $[L_f(\vec{x}_0), U_f(\vec{x}_0)]$ é 0 ou 1, e não γ_f . Veja que a probabilidade de cobertura, por construção, é limitada pela constante arbitrária γ_f , ou seja, cobertura é uma medida de performance pré-experimental.

Inúmeros trabalhos, de grande importância, foram dedicados a discutir o uso da palavra ‘confiança’ para nomear este método (BLAKER; SPJØTVOLL, 2000; KRUSCHKE, 2010; CUMMING; FIDLER, 2009; CUMMING; FINCH, 2005; YOUNG; LEWIS, 1997). Mas a presente dissertação não pretende discutir se o termo ‘confiança’ é adequado ou não para designar a abordagem frequentista para a estimação intervalar. O termo confiança é consolidado e amplamente utilizado, e esse é o motivo pelo qual será adotado adiante.

Observe que, pela equação (1), infinitas soluções podem ser obtidas dependendo da escolha de α_l e α_u , para um dado γ_f . Portanto, condições adicionais, além da confiança podem ser consideradas para a construção do intervalo. Critérios comuns são: (i) intervalos simétricos (i.e. $\alpha_l = \alpha_u$), (ii) limites equidistantes em relação ao ponto central, ou (iii) minimização do comprimento esperado $\mathbb{E}[U_f(\vec{X}) -$

$L_f(\vec{X})|\theta]$.

3.1.1. Intervalo de Confiança para a Média da Normal: variância conhecida

Esta seção é dedicada a ilustrar a utilização do intervalo de confiança para o problema de se construir um estimador intervalar para a média da distribuição normal.

Seja $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ um vetor contendo observações de uma amostra aleatória tomada de uma distribuição normal com média desconhecida e variância conhecida, ou seja, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$. É fato bem conhecido que o estimador de máxima verossimilhança de μ é a média amostral, \bar{X} .

O intervalo de confiança será construído pela técnica da quantidade pivotal. Para tanto, é necessário encontrar uma quantidade pivotal, denotada aqui por $Q(\vec{X}, \theta)$, e definida como qualquer função da amostra que dependa do parâmetro de interesse, θ , mas cuja distribuição de probabilidade, por sua vez, não dependa de θ . Para o caso da média da normal com variância conhecida, uma quantidade pivotal muito utilizada é a padronização de \bar{X} , ou seja:

$$Q(\vec{X}, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Agora, para um coeficiente de confiança $\gamma = (1 - \alpha)$, selecione um $z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$P\left(-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq Q(\vec{X}, \mu) \leq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right) = 1 - \alpha. \quad (3)$$

Substituindo a expressão de $Q(\vec{X}, \mu)$ na expressão acima, obtemos:

$$P\left(-Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \leq Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right) = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Assim, isolando-se μ , encontra-se:

$$P\left(\bar{X} - Z_{((1-\alpha/2))} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \quad (5)$$

Logo, o intervalo de confiança γ 100% para μ é dado por:

$$IC_\gamma(\mu) = \left(\bar{X} - Z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{(1-\alpha/2)} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \quad (6)$$

3.1.2. Intervalo de Confiança para a Média da Normal: variância desconhecida

Novamente, ilustrar-se-á a construção do intervalo de confiança para a média da normal, porém, agora σ^2 será tida como desconhecida. Novamente, a técnica da quantidade pivotal será utilizada, porém, a quantidade usada, visto que σ^2 é desconhecido, é da forma:

$$Q(\vec{X}, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

onde:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Note que $Q(\vec{X}, \mu)$, neste caso, segue uma distribuição *t-Student* com $(n-1)$ graus de liberdade. Com isso, tome uma constante $t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}$ tal que:

$$P\left(-t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \leq Q \leq t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha, \quad (7)$$

ou seja,

$$P\left(-t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \leq \left[\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right] \leq t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha. \quad (8)$$

Após algum algebrismo, obtém-se:

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \quad (9)$$

Portanto, o intervalo de confiança para μ , sob um coeficiente de confiança de $\gamma = 1 - \alpha$, é da forma:

$$IC(\mu, 1 - \alpha) = \left(\bar{X} - t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1; \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right). \quad (10)$$

3.1.3. Intervalo de Confiança para a Média da Poisson

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória tomada de uma população Poisson de parâmetro λ . Tome a estatística $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Sabe-se que Y é uma estatística suficiente para $E[X_i] = \lambda$, $i =$

$1 \dots, n$, e que $Y \sim \text{Poisson}(n\lambda)$, ou seja:

$$F_Y(y_0|\lambda) = P(Y \leq y_0|\lambda) = \sum_{k=0}^{y_0} \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!}.$$

Dada uma observação $Y = y_0$, e usando o fato de $F_Y(y_0|\lambda)$ ser monotonamente decrescente em λ para cada $y_0 \in \mathfrak{R}^+$, um intervalo de $(1 - \alpha)$ de confiança para λ , denotado por $[\lambda_l, \lambda_u]$, pode ser construído pelo método da inversão dos testes de hipóteses resolvendo-se λ_l e λ_u das equações:

$$\sum_{k=y_0}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_l}(n\lambda_l)^k}{k!} = \frac{\alpha}{2}, \quad e \quad (11)$$

$$\sum_{k=0}^{y_0} \frac{e^{-n\lambda_u}(n\lambda_u)^k}{k!} = \frac{\alpha}{2}. \quad (12)$$

Considerando-se a relação existente entre as distribuições qui-quadrado e Poisson, temos que:

$$\sum_{k=y_0}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda_l}(n\lambda_l)^k}{k!} = P(\chi_{2y_0}^2 < 2n\lambda_l), \quad e \quad (13)$$

$$\sum_{k=0}^{y_0} \frac{e^{-n\lambda_u}(n\lambda_u)^k}{k!} = P(\chi_{2(y_0+1)}^2 > 2n\lambda_u), \quad (14)$$

em que $\chi_{2y_0}^2$ segue uma distribuição qui-quadrado com $2y_0$ graus de liberdade. Assim, combinando-se (11) com (13), temos:

$$\lambda_l = \frac{1}{2n} x_{2y_0, 1-\alpha/2}^2,$$

em que $x_{2y_0, 1-\alpha/2}^2$ representa o quantil $(1 - \alpha/2) \times 100$ da distribuição de $\chi_{2y_0}^2$. De modo análogo, como $\chi_{2(y_0+1)}^2$ é uma variável qui-quadrado com $2(y_0 + 1)$ graus de liberdade, o limite superior do intervalo é obtido combinando-se (12) com (14), do que se obtém:

$$\lambda_u = \frac{1}{2n} x_{2(y_0+1), \alpha/2}^2,$$

onde $x_{2(y_0+1), \alpha/2}^2$ representa o quantil $\alpha/2 \times 100$ da distribuição de $\chi_{2(y_0+1)}^2$. Com isso, obtém-se o seguinte intervalo de $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança para λ :

$$\left\{ \lambda : \frac{1}{2n} x_{2y_0, 1-\alpha/2}^2 \leq \lambda \leq \frac{1}{2n} x_{2(y_0+1), \alpha/2}^2 \right\}. \quad (15)$$

3.2. Intervalo de Credibilidade

Sob a abordagem bayesiana, o analista anseia desenhar decisões com base em seu ganho pós-experimental de informações sobre θ . Antes da observação dos dados, o analista pode ter uma idéia dos valores plausíveis para θ . Esta incerteza pré-experimental pode ser descrita subjetivamente através de uma medida de probabilidade, a chamada ‘distribuição a priori’, aqui denotado por $\pi_\theta(\mathbf{y})$, onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$. De modo que, para uma constante arbitrária \mathbf{y}_1 , se $\pi_\theta(\mathbf{y}_1)$ é um valor muito próximo de zero, significa que o analista está muito certo de que \mathbf{y}_1 não deve ser o valor de θ . Por outro lado, se para uma segunda constante \mathbf{y}_2 , $\pi_\theta(\mathbf{y}_2)$ é próximo de 1, então, sob a ótica do analista, θ deve ser um valor muito próximo de \mathbf{y}_2 . Daqui em diante, será adotado por simplicidade que $\pi_\theta(\mathbf{y})$ é uma função contínua em \mathbf{y} . Mas todos os resultados podem ser facilmente generalizados substituindo a integração de Riemann-Stieltjes pela integração de Lebesgue-Stieltjes, nos casos em que $\pi_\theta(\mathbf{y})$ for discreto.

Seja $T(\vec{X})$ uma estatística suficiente para θ com base na amostra aleatória n -dimensional \vec{X} , e seja \mathfrak{N} o espaço amostral de $T(\vec{X})$. $T(\vec{X})$ é uma função da amostra (não envolvendo θ) de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m , com $m \leq n$. Com base nos dados observados, \vec{x}_0 , a incerteza a priori sobre θ pode ser atualizado através da regra de Bayes. Este raciocínio conduz a uma medida de probabilidade condicional chamada ‘distribuição a posteriori’, aqui denotado por $\pi_\theta(\mathbf{y}|T(\vec{x}_0))$, e calculado como se segue:

$$\pi_\theta(\mathbf{y}|T(\vec{x}_0)) = f_T(T(\vec{x}_0)|\mathbf{y})\pi_\theta(\mathbf{y})/m(T(\vec{x}_0)), \quad (16)$$

onde $f_T(T(\vec{x}_0)|\mathbf{y})$ é a função de verossimilhança com relação à distribuição de $T(\vec{X})$ e avaliado em $\theta = \mathbf{y}$, e $m(T(\vec{x}_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(T(\vec{x}_0)|\mathbf{y})\pi_\theta(\mathbf{y})d\mathbf{y}$.

Convencionalmente, a amostra inteira é adotada para compor a parte empírica da distribuição a posteriori, que é $T(\vec{X}) := \vec{X}$. Mas qualquer outra estatística suficiente pode ser usada. Por exemplo, Johnson (2005) discute o uso de estatísticas de teste de valor real para testes de hipóteses Bayesianos. O estimador de máxima verossimilhança de θ é outra boa opção para $T(\vec{X})$. Deste modo, dada a informação observada, $T(\vec{x}_0)$, a distribuição a posteriori fornece um meio para construção do estimador intervalar, que é dado por qualquer par de constantes, digamos que $L_b(\vec{x}_0) < U_b(\vec{x}_0)$, tais que:

$$\int_{L_b(\vec{x}_0)}^{U_b(\vec{x}_0)} \pi_\theta(\mathbf{y}|T(\vec{x}_0))d\mathbf{y} \geq \gamma_b, \quad (17)$$

com $\gamma_b \in (0, 1)$ arbitrário. Um intervalo construído através deste raciocínio Bayesiano, denotado aqui por $I.B_{\gamma_b}(\theta) = [L_b(\vec{x}), U_b(\vec{x})]$, é sugestivamente chamado "intervalo de credibilidade", e γ_b é então chamado "coeficiente de credibilidade".

A probabilidade de credibilidade, ou simplesmente credibilidade, denotada por $\beta[L(\vec{X}), U(\vec{X})]$, é definida por

$$\beta[L_b(\vec{x}_0), U_b(\vec{x}_0)] = \int_{L_b(\vec{x}_0)}^{U_b(\vec{x}_0)} \pi_\theta(\mathbf{y}|T(\vec{x}_0)) d\mathbf{y}.$$

Voltando ao problema da distribuição exponencial com observação única, considere $T(X) = X$ novamente. Suponha que um analista esteja convencido de que θ pode ser apenas um valor no intervalo $(0, c]$, e suponha também que sob sua ótica todos os valores nesse intervalo da reta são igualmente prováveis para θ . Isto conduz à uma *priori* uniforme, isto é, $\pi_\theta(\mathbf{y}) = c^{-1}I(0 < \mathbf{y} \leq c)$, onde $I(\cdot)$ denota uma função indicadora. Conforme a equação (16), a densidade a *posteriori* tem a forma

$$\pi_\theta(\mathbf{y}|x_0) = \frac{\mathbf{y}e^{-\mathbf{y}x_0}}{d_{x_0}} \times I(0 < \mathbf{y} \leq c) \quad (18)$$

e a distribuição de probabilidade a *posteriori* avaliada em um ponto \mathbf{y} arbitrário, é calculada com

$$F_\theta(\mathbf{y}|x_0) = \frac{-[(1/x_0 + \mathbf{y})e^{-x_0\mathbf{y}}]x_0^{-1} + x_0^{-2}}{d_{x_0}} \quad (19)$$

onde $d_{x_0} = -[(1/x_0 + c)e^{-cx_0}]x_0^{-1} + x_0^{-2}$. Para um intervalo de credibilidade simétrico γ_b , i.e.,

$$\int_0^{L(x_0)} \pi_\theta(\mathbf{y}|x_0) d\mathbf{y} = \int_{U(x_0)}^\infty \pi_\theta(\mathbf{y}|x_0) d\mathbf{y} = (1 - \gamma_b)/2 = \alpha,$$

os limites de credibilidade são dados por $L_b(x_0) = F_\theta^{-1}(\alpha|x_0)$ e $U_b(x_0) = F_\theta^{-1}(1 - \alpha|x_0)$. Hipoteticamente, assumamos $b = 5$ e, como antes, $x_0 = 10$. Então, para um coeficiente de credibilidade de 0.95, a estimativa intervalar Bayesiana é:

$$I.B_{0.95}(\theta) = [0.0242, 0.5572] \quad (20)$$

Pelo fato da equação (17) possuir infinitas soluções, algumas das seguintes condições podem ser utilizadas: (i) escolha do menor intervalo de densidade *posteriori*, (ii) intervalos simétricos, ou (iii) intervalos onde a média a *posteriori* seja o ponto central.

3.2.1. Intervalo de Credibilidade para a Média da Normal: variância conhecida

Assim como foi realizado um exemplo para construção do intervalo de confiança na seção 3.1.1, de modo análogo, nesta seção será ilustrado a construção do intervalo de credibilidade aplicado ao exemplo de distribuição normal com variância conhecida. Para tal exemplo, será usada a nomenclatura que os

autores Casella e Berger (2002) utilizam, por ser compatível com a notação geral deste trabalho.

Segundo Casella e Berger (2002), seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória onde X tem distribuição normal com média, θ , e variância, σ^2 , ou seja $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, e que θ tenha a função de probabilidade a priori $N(\mu_0, \tau^2)$, onde μ_0, σ e τ são todos conhecidos. Assim, a distribuição a posteriori de θ também apresenta distribuição normal, com média e variância dados por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta|x) &= \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}x + \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}\mu_0, \\ \text{Var}(\theta|x) &= \frac{\sigma^2\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}\end{aligned}\tag{21}$$

Com isso, Casella e Berger (2002) destacam que a família normal é sua própria família conjugada, ou seja, para qualquer distribuição amostral existe uma família natural de distribuições a priori, o qual é denominada como família conjugada. Logo, temos que o estimador de Bayes de θ é $\mathbb{E}(\theta|X)$.

Assim, fazendo uso da equação (21), dado que $X = \bar{x}$, temos que:

$$\pi(\theta|\bar{x}) \sim n(\delta^B(\bar{x}), \text{Var}(\theta|\bar{x})),$$

onde

$$\begin{aligned}\delta^B(\bar{x}) &= \frac{n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}\bar{x} + \frac{\sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2}\mu_0 \\ \text{Var}(\theta|\bar{x}) &= \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}\end{aligned}$$

Logo, de acordo com a distribuição a posteriori, se obtém:

$$\frac{\theta - \delta^B(\bar{x})}{\sqrt{\text{Var}(\theta|\bar{x})}} \sim n(0, 1)$$

e um coeficiente de credibilidade $1 - \alpha$ para θ é dado por:

$$\delta^B(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\text{Var}(\theta|\bar{x})} \leq \theta \leq \delta^B(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\text{Var}(\theta|\bar{x})}\tag{22}$$

Portanto $(\delta^B(\bar{x}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\text{Var}(\theta|\bar{x})}, \delta^B(\bar{x}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\text{Var}(\theta|\bar{x})})$ é o intervalo de credibilidade, $100(1 - \alpha)\%$ de máxima densidade a posteriori (MDP) para θ .

3.2.2. Intervalo de Credibilidade para a Média da Normal: variância desconhecida

De modo análogo a seção anterior (3.1.2), nesta seção será construído um exemplo do intervalo de credibilidade aplicado a distribuição normal e variância desconhecida. Para tal exemplo, será feita com base na nomenclatura que o autor Ehlers (2011) utiliza em seu trabalho.

Assim, suponhamos uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n com distribuição $N(\theta, \sigma^2)$ com variância desconhecida. Tomamos também a notação da variância desconhecida seja $\phi = \sigma^{-2}$. Considerando que a distribuição *a priori* para ϕ seja uma distribuição Gamma com parâmetros $n_0/2$ e $n_0\sigma_0^2/2$. Pode-se verificar que a densidade conjunta seja

$$\begin{aligned} p(\theta, \phi) &\propto \phi^{1/2} \exp \left\{ -\frac{c_0\phi}{2} (\theta - \mu_0)^2 \right\} \phi^{n_0/2-1} \exp \left\{ -\frac{n_0\sigma_0^2\phi}{2} \right\} \\ &\propto \phi^{(n_0+1)/2-1} \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} (n_0\sigma_0^2 + c_0(\theta - \mu_0)^2) \right\} \end{aligned}$$

Como pode-se escrever que

$$p(\theta, \phi) = p(\theta|\phi)p(\phi)$$

logo podemos obter via integração de θ a distribuição marginal, que é dada por

$$\begin{aligned} p(\theta) &= \int p(\theta|\phi)p(\phi)d\phi \\ &\propto \int_0^\infty \phi^{(n_0+1)/2-1} \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} [n_0\sigma_0^2 + c_0(\theta - \mu_0)^2] \right\} d\phi \\ &\propto \left[\frac{n_0\sigma_0^2 + c_0(\theta - \mu_0)^2}{2} \right]^{-\frac{n_0+1}{2}} \\ &\propto \left[1 + \frac{(\theta - \mu_0)^2}{n_0(\sigma_0^2/c_0)} \right]^{-\frac{n_0+1}{2}} \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos encontrar a distribuição condicional de ϕ dado θ . O núcleo desta distribuição é um *t*-student com n_0 graus de liberdade. Assim podemos escrever a seguinte distribuição

$$\phi|\theta \sim \text{Gama} \left(\frac{n_0+1}{2}, \frac{n_0\sigma_0^2 + c_0(\theta - \mu_0)^2}{2} \right).$$

Obtida pela densidade conjunta pode-se encontrar a distribuição *a posteriori* de θ dado ϕ , ou seja

$$\theta|\phi, x \sim N(\mu_1, (c_1\phi)^{-1}).$$

e utilizando a distribuição a *priori* de ϕ , temos

$$\phi|x \sim \text{Gama} \left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_1\sigma_1^2}{2} \right)$$

onde que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{c_0\mu_0 + n\bar{x}}{c_0 + n} \\ c_1 &= c_0 + n \\ n_1 &= n_0 + n, \quad e \\ n_1\sigma_1^2 &= n_0\sigma_0^2 + \sum (x_i - \bar{x})^2 + \frac{c_0n(\mu_0 - \bar{x})^2}{(c_0 + n)} \end{aligned}$$

Deste modo, a distribuição a *posteriori* de ϕ pode ser escrita como uma distribuição qui-quadrada, tal como $n_1\sigma_1^2\phi \sim \chi_{n_1}^2$. Considerando $t_{\alpha/2, n_1}$ o percentil $100(1 - \alpha/2)\%$ da distribuição $t_{n_1}(0, 1)$ podemos obter este percentil tal qual segue

$$P \left(-t_{\alpha/2, n_1} \leq \sqrt{c_1} \frac{\theta - \mu_1}{\sigma_1} \leq t_{\alpha/2, n_1} \right) = 1 - \alpha$$

e após o uso de álgebra se tem

$$P \left(\mu_1 - t_{\alpha/2, n_1} \frac{\sigma_1}{\sqrt{c_1}} \leq \theta \leq \mu_1 + t_{\alpha/2, n_1} \frac{\sigma_1}{\sqrt{c_1}} \right)$$

Portanto, o intervalo de credibilidade para θ , sob um coeficiente de credibilidade de $\gamma_B = 1 - \alpha$, é da forma:

$$\left(\mu_1 - t_{\alpha/2, n_1} \frac{\sigma_1}{\sqrt{c_1}}, \quad \mu_1 + t_{\alpha/2, n_1} \frac{\sigma_1}{\sqrt{c_1}} \right)$$

3.2.3. Intervalo de Credibilidade para a Média da Poisson

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população Poisson com parâmetro λ . Suponha que a distribuição a *priori* adotada para λ seja uma Gama de parâmetros a e b . Assim, a *posteriori* para λ também é uma Gama, ou seja:

$$p \left(\lambda \mid \sum_{i=1}^n x_i \right) \propto \lambda^{\{2(\sum x_i + a) - 1\}/2} \exp \left\{ -\frac{2\lambda}{2} \left(n + \frac{1}{b} \right) \right\}. \quad (23)$$

Denote a amostra aleatória observada por \vec{x} . É importante notar que:

$$2(n + 1/b)\lambda|\vec{x} \sim \chi_{2(\sum x_i + a)}^2.$$

Para um intervalo de caudas iguais a $\alpha/2$, temos que o intervalo de $(1 - \alpha) \times 100\%$ de credibilidade para λ é da forma:

$$\left\{ \lambda : \frac{b}{2(nb + 1)} \chi_{2(\sum x + a), 1 - \alpha/2}^2 \leq \lambda \leq \frac{b}{2(nb + 1)} \chi_{2(\sum x + a), \alpha/2}^2 \right\}$$

4. CREDIBILIDADE DO INTERVALO DE CONFIANÇA E CONFIANÇA DO INTERVALO DE CREDIBILIDADE

Note que, para o exemplo exponencial, a estimativa do intervalo de credibilidade, $[0.0242, 0.5572]$, obtido com $x_0 = 10$, difere do intervalo de confiança realizado da Seção 3.1, que foi $[0.0025, 0.3689]$. Tendo como base a distribuição a *posteriori* obtida na Seção 3.2, para o intervalo de confiança estimado $[0.0025, 0.3689]$ o coeficiente de credibilidade associado é de 0.8829. O raciocínio inverso também é factível, i.e., podemos calcular o ínfimo da probabilidade de cobertura associada ao intervalo Bayesiano. Lembrando que a probabilidade de cobertura é uma medida pré-experimental, antes de observarmos os dados, o intervalo de credibilidade é um vetor aleatório. Note que, para o exemplo exponencial, $L_b(x)$ e $U_b(x)$ são funções decrescentes de x . Deste modo, para cada θ^* fixo, pode-se resolver

$$\begin{aligned} x_1 &= \sup\{x \in \mathbb{R} : L_b(x) > \theta^*\} \quad \text{e} \\ x_2 &= \inf\{x \in \mathbb{R} : U_b(x) < \theta^*\} \end{aligned}$$

e então a probabilidade de cobertura pode ser calculada da seguinte forma:

$$1 - \{Pr[L_b(X) > L_b(x_1)|\theta = \theta^*] + Pr[U_b(X) < U_b(x_2)|\theta = \theta^*]\}.$$

A probabilidade de cobertura pode ser reescrita como:

$$1 - \{Pr[X < x_1|\theta = \theta^*] + Pr[X > x_2|\theta = \theta^*]\}$$

Por exemplo, para $\theta^* = 0.6$, a probabilidade de cobertura é igual a:

$$\begin{aligned}
&= 1 - \{Pr[X < 0.197|\theta = 0.6] + Pr[X > 9.287|\theta = 0.6]\} \\
&= 1 - \{1 - e^{-0.197 \times 0.6} + e^{-9.287 \times 0.6}\} \\
&\approx 1 - 0.1114817 - 0.003802107 \\
&\approx 0.8847162
\end{aligned}$$

Agora, se tomarmos θ^* maior que 5, então a probabilidade de cobertura associada é igual a zero uma vez que a *priori* coloca a densidade zero no intervalo $(5, \infty)$. Portanto, não é necessário executar este cálculo para outros valores de θ^* para concluir que a confiança deste estimador Bayesiano é igual a zero.

No ensaio acima, apesar de cada abordagem estar em conformidade com os seus respectivos coeficientes de 0,95, eles não apresentam um bom desempenho em relação ao coeficiente alvo de cada um. O intervalo de confiança realizado não é de credibilidade 0.95, na realidade é de credibilidade 0.8829, e, embora o intervalo de credibilidade seja de credibilidade 0.95, é de confiança zero. Mas ambos, pré-experimental (confiança) e pós-experimental (credibilidade), são medidas importantes. Assim, a questão que se coloca neste trabalho é: seria possível construir um método que atinja um coeficiente de confiança-credibilidade comum? A resposta é sim, e este é o assunto do próximo capítulo.

5. INTERVALO DE CONFIANÇA-CREDIBILIDADE

Uma classe abrangente para estimação intervalar, a classe de intervalo de confiança-credibilidade, é definida como se segue.

Definição 5.1. (*Intervalos de Confiança-Credibilidade*) Um estimador intervalar $[L(\vec{X}), U(\vec{X})]$ é um intervalo de confiança-credibilidade, com coeficientes arbitrários de confiança γ_f e credibilidade γ_b , se:

$$\inf_{\theta^* \in \Theta} \beta(\theta^*) \geq \gamma_f, \quad (24)$$

e, para cada observação $\vec{X} = \vec{x}_0$, vale que:

$$\int_{L(\vec{x}_0)}^{U(\vec{x}_0)} \pi_{\theta}(y|T(\vec{x}_0)) dy \geq \gamma_b. \quad (25)$$

O intervalo de confiança-credibilidade é, por definição, um intervalo de $(\gamma_f \times 100)\%$ de confiança e, simultaneamente, é um intervalo de $(\gamma_b \times 100)\%$ de credibilidade. Portanto, pode-se usar o termo $(\gamma_f \times 100)\%$ de confiança para indicar que ele garante o controle da probabilidade pré-experimental,

pois refere-se à variabilidade da amostra, e o termo $(\gamma_b \times 100)\%$ de credibilidade pode ser usado para se referir à medida pós-experimental, a distribuição a *posteriori*, dada uma observação $\vec{X} = \vec{x}_0$.

5.1. Intervalo de Confiança-credibilidade do Tipo União

Começamos por introduzir a classe de intervalo de confiança-credibilidade do tipo união. Esta é uma solução trivial, pois consiste, basicamente, da união do intervalo de confiança com o intervalo de credibilidade como especificado na definição a seguir.

Definição 5.2 (Intervalo de confiança-credibilidade do tipo união) Para um dado intervalo de confiança $[L_f(\vec{X}), U_f(\vec{X})]$, e um intervalo de credibilidade $[L_b(\vec{X}), U_b(\vec{X})]$, o intervalo de confiança-credibilidade do tipo união, denotado por $[L_c(\vec{X}), U_c(\vec{X})]$, é obtido como se segue:

$$\begin{aligned} L_c(\vec{X}) &= \min\{L_f(\vec{X}), L_b(\vec{X})\}, \\ U_c(\vec{X}) &= \max\{U_f(\vec{X}), U_b(\vec{X})\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Note que a **Definição 5.2** exige a existência de um intervalo de confiança, que por sua vez depende da monotonicidade de $F_T(t|\theta)$ em relação a θ para cada t fixo. Para problemas em que a monotonicidade de $F_T(t|\theta)$ não é válida, os intervalos de confiança não podem ser obtidos. Diferentemente, intervalos de credibilidade sempre podem ser construídos independentemente da condição de monotonicidade.

Nos casos em que a monotonicidade de $F_T(t|\theta)$, em θ , não é válida, a solução alternativa é a construção de conjuntos de confiança-credibilidade em vez de intervalos. Nessa direção, a **Definição 5.2** pode ser estendida para conjuntos de confiança do tipo união. Para isto, sejam $S_f(\vec{X})$ e $S_b(\vec{X})$ os conjuntos de confiança e de credibilidade, respectivamente. O conjunto confiança-credibilidade, $S_c(\vec{X})$, é dada por:

$$S_c(\vec{X}) = S_f(\vec{X}) \cup S_b(\vec{X}). \quad (27)$$

Apesar da classe do tipo união ser uma abordagem ingênua, ela define uma metodologia abrangente, pois está bem definida para qualquer problema estatístico. Esta propriedade leva ao fato importante de que os conjuntos de confiança-credibilidade podem sempre ser construídos.

Teorema 5.1 (Existência dos Conjuntos de Confiança-Credibilidade). Para qualquer problema estatístico onde os conjuntos de confiança e credibilidade podem ser calculados separadamente, sempre pode-se construir um conjunto de confiança-credibilidade.

Demonstração. Trivial: Um conjunto de confiança-credibilidade pode sempre ser construído por meio da classe do tipo união de acordo com a expressão (27). \square

Como demonstrado anteriormente nos exemplos 3.1.1 e no 3.2.1, o exemplo a seguir trata da construção de um estimador intervalar para a média da distribuição normal com variância conhecida via método de confiança-credibilidade.

5.1.1. Intervalo de Confiança-credibilidade do Tipo União para a Média da Normal: variância conhecida

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n observações tomadas de uma população $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido. Considere a construção do intervalo de confiança-credibilidade do Tipo União em um cenário em que $n = 10$ e $\sigma^2 = 1$. Suponha também que os hiperparâmetros da distribuição a *priori* conjugada (ver seção 3.2.1) para μ sejam μ_0 e $\sigma_0^2 = 1$.

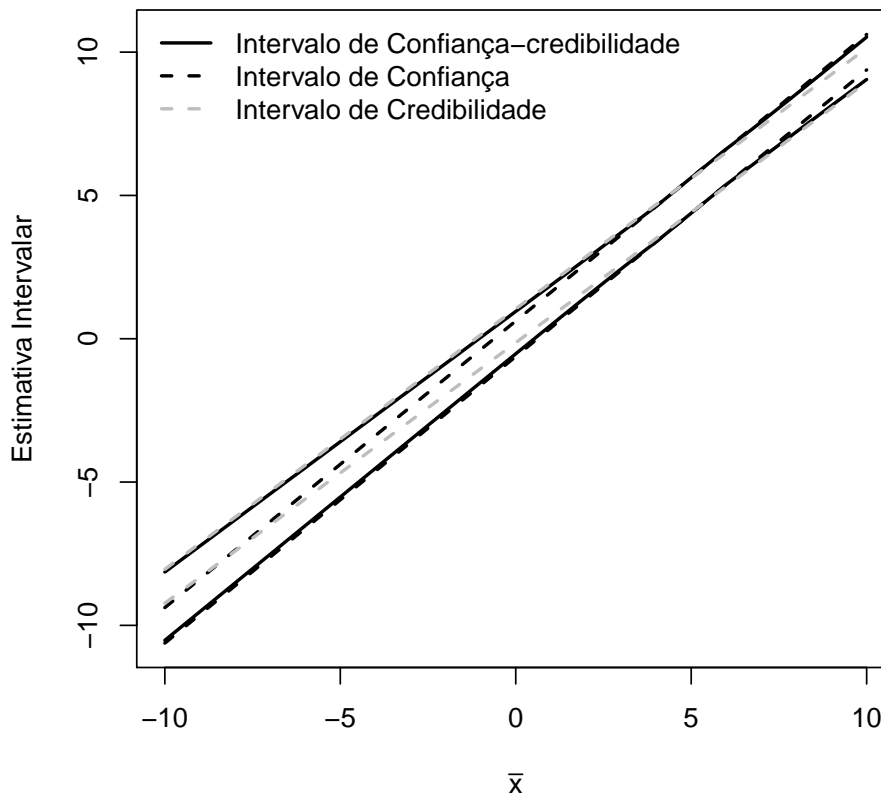


Figura 1: Estimativas intervalares para a média da normal com $\sigma^2 = 1$ via intervalo de confiança-credibilidade do tipo união para valores de \bar{x} variando entre -10 a 10, de 0,1 em 0,1. Cada estimativa foi obtida para $\gamma_f = \gamma_B = 0,95$ usando hiperparâmetros $\mu_0 = 5$, $\sigma_0^2 = 1$, e tamanho de amostra $n = 10$.

A Figura 1 apresenta uma sequência de estimativas intervalares em que cada termo desta sequência foi obtido com base em valor diferente de \bar{x} , com $\bar{x} = (-10, -9, 9, \dots, -0, 1, 0, \dots, 9, 9, 10)$. Todas as estimativas foram calculadas para $\gamma_f = \gamma_B = 0,95$. Esta figura ilustra o fato de que, apesar do intervalo de confiança-credibilidade do tipo união ser ingênuo, apresenta uma estimativa intervalar informativa. Tal como esperado, mas importante destacar, que a menor amplitude ocorre, neste exemplo, para $\bar{x} = 5$, que é o valor da média a priori.

5.1.2. Intervalo de Confiança-credibilidade do Tipo União para a Média da Normal: variância desconhecida

Aqui, o problema de se construir um estimador intervalar para a média da normal com variância desconhecida, já tratado na seção 3.2.2, é revisitado. Para tanto, usaremos $n = 10$ e $\gamma_f = \gamma_B = 0,95$.

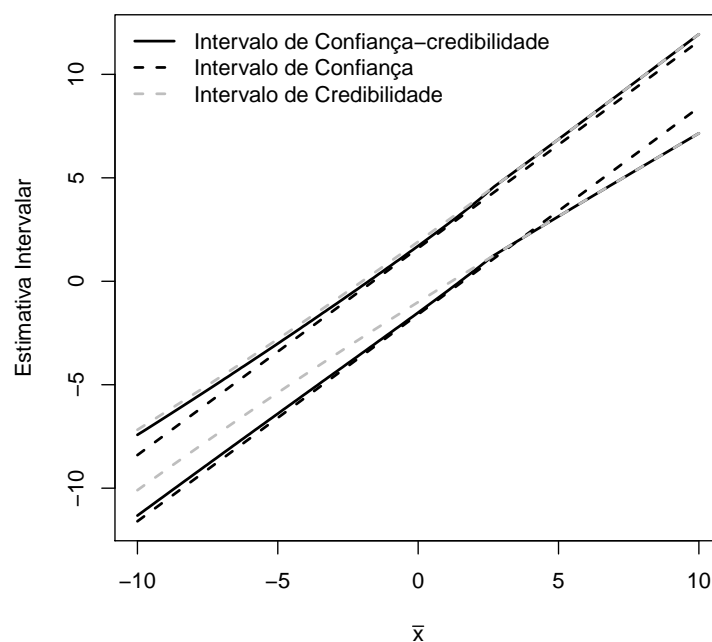


Figura 2: Estimativas intervalares para a média da normal com σ^2 desconhecida via intervalo de confiança-credibilidade do tipo união para valores de \bar{x} variando entre -10 a 10, de 0,1 em 0,1. Cada estimativa foi obtida para $\gamma_f = \gamma_B = 0,95$ usando hiperparâmetros $n_0 = 10, c_0 = 1, \sigma_0^2 = 4, \mu_0 = 5$, e tamanho de amostra $n = 10$.

Para a distribuição a priori de μ , usou-se:

$$\pi(\mu) = \phi^{1/2} \exp \left\{ -\frac{c_0 \phi}{2} (\mu - \mu_0)^2 \right\} \quad (28)$$

e, para $\phi = (\sigma^2)^{-1}$, a priori utilizada foi:

$$\pi(\phi) = \phi^{n_0/2-1} \exp\left\{-\frac{n_0\sigma_0^2\phi}{2}\right\}. \quad (29)$$

A Figura 2 apresenta o intervalo de confiança-credibilidade para valores de \bar{x} variando de -10 a 10 e $n_0 = 10$, $c_0 = 1$, $\sigma_0^2 = 4$, $\mu_0 = 5$. Novamente, tal como no caso em que σ^2 é conhecido, as amplitudes são menores do que aquelas que seriam observadas caso a simples união de intervalos fosse aplicada, porém a menor amplitude não ocorreu para $\bar{x} = \mu$, e isso se deve à variabilidade extra introduzida com a estimação de σ^2 .

Pode-se notar que em ambos os casos, variância conhecida e desconhecida, a classe do tipo união produz intervalos muito conservadores, ou seja, parecem produzir amplitudes maiores do que o necessário. Uma classe mais informativa de intervalos de confiança-credibilidade é introduzida na próxima seção.

5.2. Intervalo de Confiança-Credibilidade de Mínima Amplitude

Usualmente, os limites inferiores e superiores dos estimadores por intervalos são derivados de alguma noção de simetria, como os intervalos de caudas simétricas, por exemplo. Alternativamente, o intervalo pode ser construído de forma a produzir a mínima amplitude para cada amostra fixada.

Definição 5.3. (*Intervalo de Confiança-credibilidade de Mínima Amplitude*) Assuma que $F_T(t|\theta)$ seja decrescente com θ para cada $t \in \mathfrak{R}$. Para uma realização $\vec{X} = \vec{x}_0$, e para dados coeficientes de confiança e credibilidade γ_f e γ_b , respectivamente, a estimativa do intervalo de confiança-credibilidade de mínima amplitude para θ , denotada por $[L_m(\vec{x}_0), U_m(\vec{x}_0)]$, é dado por $L_m(\vec{x}_0) = a$ e $U_m(\vec{x}_0) = b$, onde o par ordenado (a, b) é obtido como se segue:

$$ICC_{\gamma_f, \gamma_b}(\theta) = [a, b] = \operatorname{arg\,inf}_{\{(a^*, b^*) \in \mathfrak{R}^2\}} (b^* - a^*), \quad (30)$$

restrito a:

$$1 - F_T(t_0|\theta = a^*) + F_T(t_0|\theta = b^*) \leq 1 - \gamma_f, \quad (31)$$

$$1 - \pi_\theta(b^*|\vec{x}_0) + \pi_\theta(a^*|\vec{x}_0) \leq 1 - \gamma_b. \quad (32)$$

Para os casos em que $F_T(t|\theta)$ é crescente em θ , a inequação 31 é substituída por:

$$1 - F_T(t_0|\theta = b^*) + F_T(t_0|\theta = a^*) \leq 1 - \gamma_f. \quad (33)$$

Embora o método proposto exija o emprego de métodos de otimização não-linear restrita, uma solução numérica simplificada é sempre possível. Assim, uma busca numérica pode ser aplicada assumindo $F_T(t|\theta)$ decrescente em θ , mas para os casos em que $F_T(t|\theta)$ for crescente em θ , o raciocínio é análogo.

Para coeficientes arbitrários de confiança γ_f e de credibilidade γ_b , defina:

$$\begin{aligned}
a_u^* &= \max \left\{ \theta^* \in \mathfrak{R} : 1 - F_T(t_0|\theta = \theta^*) \leq 1 - \gamma_f \text{ e } \int_{-\infty}^{\theta^*} \pi_\theta(y|\vec{x}_0) dy \leq 1 - \gamma_b \right\}, \\
a_l^* &= \max \left\{ \theta^* \in \mathfrak{R} : 1 - F_T(t_0|\theta = \theta^*) \leq 1 - \epsilon \text{ e } \int_{-\infty}^{\theta^*} \pi_\theta(y|\vec{x}_0) dy \leq 1 - \epsilon \right\}, \\
b_u^* &= \min \left\{ \theta^* \in \mathfrak{R} : F_T(t_0|\theta = \theta^*) \leq 1 - \gamma_f \text{ e } \int_{\theta^*}^{\infty} \pi_\theta(y|\vec{x}_0) dy \leq 1 - \gamma_b \right\}, \\
b_l^* &= \min \left\{ \theta^* \in \mathfrak{R} : F_T(t_0|\theta = \theta^*) \leq 1 - \epsilon \text{ e } \int_{\theta^*}^{\infty} \pi_\theta(y|\vec{x}_0) dy \leq 1 - \epsilon \right\}, \\
D &= b_u^* - a_l^*.
\end{aligned} \tag{34}$$

Para uma precisão decimal desejada $\epsilon > 0$, os quatro passos a seguir podem ser executados para calcular o intervalo de confiança-credibilidade de mínima amplitude:

- Passo (i)- Definida a sequência $a_1 = a_l^* + \epsilon$, $a_2 = a_l^* + 2\epsilon, \dots$, $a_{k_1} = a_l^* + k_1\epsilon$, e $b_1 = b_l^* + \epsilon$, $b_2 = b_l^* + 2\epsilon, \dots$, $b_{k_1} = b_l^* + k_2\epsilon$, onde k_1 é o menor inteiro positivo tal que $b_{k_1} \geq a_u^*$, e k_2 é o menor inteiro positivo tal que $b_{k_2} \geq b_u^*$.
- Passo (ii)- Faça $i = j = 1$.
- Passo (iii)- Se

$$1 - F_T(t_0|\theta = a_i) + F_T(t_0|\theta = b_j) \leq 1 - \gamma_f, \tag{35}$$

e

$$\int_{-\infty}^{a_i} \pi_\theta(y|\vec{x}_0) dy + \int_{b_j}^{\infty} \pi_\theta(y|\vec{x}_0) dy \leq 1 - \gamma_b, \tag{36}$$

então faça $i = i + 1$ e, se $b_j - a_i < D$, atualize $a_l^* = a_i$, $b_u^* = b_j$, e $D = b_j - a_i$. Caso contrário, se (35) ou (36) falhar, e se $j < k_2$, então faça $j = j + 1$, mas faça $i = i + 1$ se $j = k_2$.

- Passo (iv)- Se $i \leq k_1$, volte para o Passo (iii). Caso contrário, o intervalo de confiança-credibilidade de mínima amplitude para θ é dado por:

$$ICC_{\gamma_f, \gamma_b}(\theta) = [a_l^*, b_u^*].$$

5.2.1. Intervalo de Confiança-credibilidade de Mínima Amplitude para a Média da Normal: variância conhecida

Agora será ilustrado o comportamento do intervalo de confiança-credibilidade de mínima amplitude aplicado novamente ao problema emblemático de inferir sobre a média, μ , da distribuição normal com variância, σ^2 , conhecida. Neste caso, o intervalo de $100 \times (1 - 2\alpha_f)\%$ de confiança, simétrico, para μ é dado por:

$$IF_{1-2\alpha_f}(\mu) = [\bar{X} - z_{\alpha_f}\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{\alpha_f}\sigma/\sqrt{n}], \quad (37)$$

onde \bar{X} é a média amostral, e z_{α_f} é o percentil $\alpha_f \times 100$ da distribuição normal padronizada.

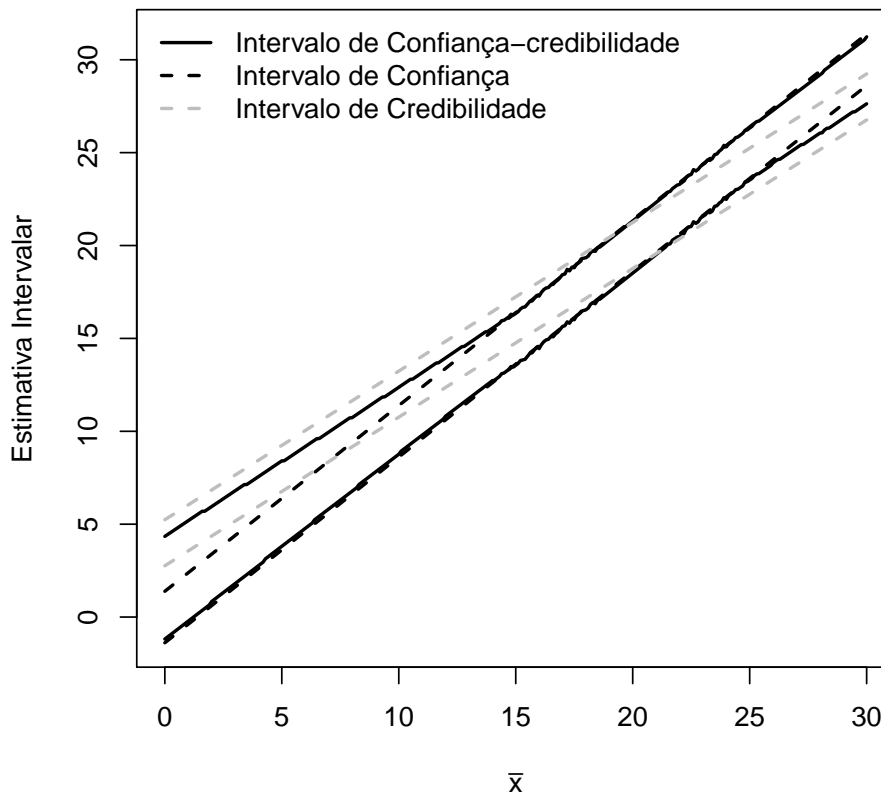


Figura 3: Intervalos de confiança, credibilidade e confiança-credibilidade para a média normal com variância igual a 5 e tamanho da amostra de 10. Os intervalos de confiança e credibilidade foram obtidos separadamente sob uma abordagem simétrica baseada nos coeficientes $\gamma_f = \gamma_b = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$. O intervalo de confiança-credibilidade foram calculados para $\gamma_f = \gamma_b = 0.95$.

Para a abordagem Bayesiana, este exemplo utiliza novamente uma distribuição a priori normal para μ com média μ_0 e variância σ_0^2 . Assim sendo, o intervalo de $100 \times (1 - 2\alpha_b)\%$ de credibilidade,

simétrico, é dado por:

$$IB_{1-2\alpha_b}(\mu) = [\mu_1 - z_{\alpha_b}\sigma_1, \mu_1 + z_{\alpha_b}\sigma_1]. \quad (38)$$

A Figura 3 mostra estes intervalos calculados para uma grade de valores \bar{x} , de 0 a 30 por 0.1, assumindo amostras de tamanho $n = 10$ assumindo uma distribuição normal com $\sigma^2 = 5$. Os cálculos foram baseados em $\alpha_f = \alpha_b = 0.025$, $\mu_0 = 20$, $\sigma_0^2 = 2$, e calculados seguindo os passos (i) a (iv) da Seção 5.2. Os intervalos de confiança são mostrados com a linha preta pontilhada, os intervalos de credibilidade com a linha cinza pontilhada, e o intervalo de confiança-credibilidade é representado pela linha preta sólida.

5.2.2. Intervalo de Confiança-credibilidade de Mínima Amplitude para a Média da Normal: variância desconhecida

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória para uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 , ambos desconhecidos. O intervalo simétrico de $100 \times (1 - 2\alpha_f)\%$ de confiança para μ é dado por:

$$IF_{1-2\alpha_f}(\mu) = \left[\bar{X} - \tau_{n-1, \alpha_f} \sqrt{S^2/n}, \bar{X} + \tau_{n-1, \alpha_f} \sqrt{S^2/n} \right], \quad (39)$$

onde \bar{X} é a média amostral, S^2 é a variância amostral, e τ_{n-1, α_f} é o percentil $\alpha_f \times 100$ da distribuição t -Student com $(n-1)$ graus de liberdade. Para a abordagem Bayesiana, dado $\phi = \sigma^{-2}$, nós assumimos uma distribuição a priori Gamma com média μ_0 e variância $(c_0\phi)^{-1}$ para μ , e para ϕ foi utilizado uma distribuição a priori Gamma com parâmetros $n_0/2$ e $n_0\sigma_0^2/2$. Sob está configuração, a resultante da distribuição marginal a posteriori para μ é uma distribuição t -Student não-central com n_1 graus de liberdade, média μ_1 , e variância σ_1^2/c_1 , onde:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_0 + n, \\ \mu_1 &= (c_0\mu_0 + n\bar{X})/(c_0 + n), \\ c_1 &= c_0 + n, \text{ e} \\ \sigma_1^2 &= n_0\sigma_0^2/n_1 + (n-1)S^2/n_1 + nc_0(\mu_0 - \bar{X})^2/(c_0 + n). \end{aligned} \quad (40)$$

Desta forma, o intervalo simétrico de $100 \times (1 - 2\alpha_b)\%$ de credibilidade é dado por:

$$IB_{1-2\alpha_b}(\mu) = \left[\mu_1 - \tau_{n_1, \alpha_b} \sqrt{\sigma_1^2}, \mu_1 + \tau_{n_1, \alpha_b} \sqrt{\sigma_1^2} \right]. \quad (41)$$

A Figura 4 mostra esses intervalos calculados para uma grade de valores para \bar{x} , de 0 a 30, de 0,1 em

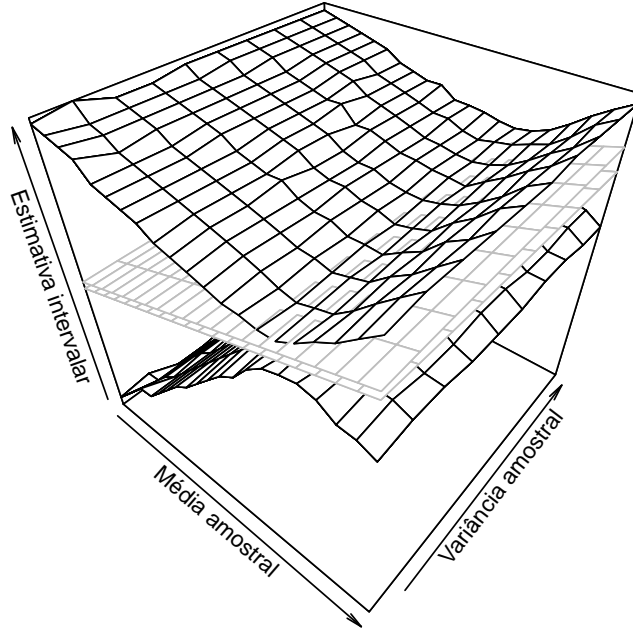


Figura 4: Intervalos de confiança e confiança-credibilidade para a média normal com variância desconhecida para tamanho amostral de 10, e coeficientes $\gamma_f = \gamma_b = 0.95$.

0,1, e valores s^2 , de 0,1 a 10, de 0,1 em 0,1, sob um tamanho amostral $n = 10$. Para cada combinação \bar{x} e s^2 , utilizamos $\alpha_f = \alpha_b = 0.025$, $\mu_0 = 5$, $\sigma_0^2 = 2$, $n_0 = 10$, e $c_0 = 1$. Observe que a área do intervalo de confiança é consistentemente interna ao intervalo de confiança-credibilidade. Isto ocorre porque, para uma escolha específica de hiperparâmetros para a distribuição *a priori*, o intervalo de credibilidade apresenta amplitude maior do que o intervalo de confiança.

As aplicações para inferir sobre a média da normal desempenham um papel fundamental para a prática estatística em geral. A maioria dos estimadores pontuais dos métodos convencionais de modelagem são distribuídos assintoticamente de acordo com a lei Gaussiana. Por isso, esses exemplos ilustram que a abordagem unificada possui apelos tanto teóricos como práticos. No entanto, a independência entre as observações amostrais utilizadas nesses exemplos é uma suposição comum para uma compreensão simplista da teoria de inferência estatística. Naturalmente, muitos outros problemas importantes onde a independência falha são beneficiados por esta nova abordagem unificada. Um exemplo é o problema de inferir sobre os parâmetros dos modelos de espaços de estados para análise de dados em séries temporais, conforme ilustrado na próxima seção.

6. APLICAÇÃO

Apesar de extensamente utilizado, ainda existe um impasse de qual das abordagens, frequentista ou Bayesiana, deve ser utilizada como ferramenta de inferência dos parâmetros de um modelo de espaço de estados. Assim, este exemplo de aplicação do intervalo de confiança-credibilidade a modelos de espaço de estados visa reconciliar o uso de ambas abordagens para essa importante ferramenta econométrica.

6.1. Intervalo de Confiança-credibilidade para Modelos de Espaço de Estados

Esta seção mostra uma aplicação do intervalo unificado para analisar a variação do Índice de Preços ao Consumidor através de uma estrutura do modelo de espaço de estados. Mas, antes de iniciar a análise de dados em si, é oportuno oferecer uma breve descrição sobre os modelos de espaço de estados.

A análise de séries temporais é geralmente dedicada a decompor as principais fontes de variabilidade de um processo estocástico como a soma de componentes fáceis de interpretar, como nível, tendência, e sazonalidade. Deste modo, uma série temporal $\{Y_t\}$, $t = 1, 2, \dots, n$, pode ser modelada da seguinte forma:

$$Y_t = \gamma_t + S_t + \delta_t + \epsilon_t;$$

onde γ_t é interpretado como um termo de tendência, S_t é um termo de sazonalidade, δ_t é um termo de componente cíclico e ϵ_t é um erro aleatório. Em relação ao termo de erro, considera-se que $E[\epsilon_t \epsilon_l] = 0 \quad \forall \quad t \neq l$, com $E(t) = 0 \quad \forall \quad t$, e que $\epsilon_t \sim N[0, \sigma_\epsilon^2]$.

Nesta direção, a classe dos *modelos de espaço de estados* é uma ferramenta poderosa para modelagem de séries temporais (HARVEY, 1989; HARVEY; PIERSE, 1984; HARVEY, 1989; SHUMWAY, 1985). Seguindo a notação de Morettin e Tolo (2006), seja $\{Y_t\}$ uma série temporal q -dimensional, $q \geq 1$. Um modelo de espaço de estados é qualquer sistema de equações que descreve $\{Y_t\}$ como uma combinação de processos estocásticos Markoviano p -dimensionais. Assim, definem-se as duas equações básicas do modelo de espaço de estados, que são denominadas como equação da observação e equação do sistema, respectivamente:

$$Y_t = A_t X_t + v_t, \tag{42}$$

$$X_t = G_t X_{t-1} + w_t, \tag{43}$$

onde temos que: A_t é uma matriz de ordem $(q \times p)$ denominada como *matriz do sistema*; v_t é um vetor de ordem $(q \times 1)$ que denota o vetor dos ruídos das observações, e que são não correlacionadas, com

média zero e matriz de covariâncias R ; G_t é uma matriz de ordem $(p \times p)$ denominada como *matriz de transição*; e w_t é um vetor de ordem $(p \times 1)$ que denota o vetor dos ruídos do sistema, e que são não correlacionados, com média zero e matriz de covariâncias Q .

Pode-se verificar que nas equações (42) e (43) o vetor de estados é observado apenas como uma relação linear do estado em questão somado a um ruído, pois o mesmo não pode ser observado diretamente. Para tanto, no caso onde o modelo é univariado, ou seja, $q = 1$, temos que A_t é um vetor, e v_t é um ruído com média zero e variância σ_v^2 .

Em modelos de espaço de estados, o filtro de Kalman é bastante utilizado, pois o mesmo é um algoritmo de ordem recursiva, de tal modo que propicia estimadores de mínimos quadrados do vetor de estados x_t , aplicado ao vetor de observação $Y_s = (Y_1, Y_2, \dots, Y_s)$. Portanto, o nome aplicado de "filtro" é adequado dado que x_t^s é uma combinação linear de $Y_t = (Y_1, Y_2, \dots, Y_t)$. Vale destacar que o filtro de Kalman oferece as equações *de filtragem*, ($s = t$), e *de previsão*, ($s < t$). Com isso, podemos descrever o filtro de Kalman como:

$$X_t^s = \mathbb{E}(X_t | Y_s), \quad e \quad (44)$$

$$P_{t1,t2}^s = \mathbb{E} [(X_{t1} - X_{t1}^s)(X_{t2} - X_{t2}^s)]. \quad (45)$$

Caso os vetores de ruídos v_t e w_t , da equações (42) e (43) respectivamente, forem utilizados sob a suposição de normalidade nos ruídos, temos:

$$P_{t1,t2}^s = \mathbb{E} [(X_{t1} - X_{t1}^s)(X_{t2} - X_{t2}^s) | Y_s], \quad (46)$$

de modo que, a matriz de covariâncias do erro será uma matriz de covariância condicional. Para obter demonstrações sobre o filtro de Kalman e suas equações, é adequado verificar o estudo de Harvey (1989).

Em particular, quando Y_t é simplesmente descrita com uma soma de um termo de nível, μ_t , com um ruído, ϵ_t , então a abordagem é chamada de *modelo estrutural*, e a sua forma mais simples é chamado de *modelo de nível local*. Para tanto, podemos reescrever as equações (42) e (43) do modelo de espaço de estados como:

$$A_t = 1, \quad X_t = \mu_t, \quad G_t = 1, \quad v_t = \epsilon_t \quad e \quad w_t = \eta_t.$$

Assim, pode-se escrever o modelo de nível local como:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \text{ com } \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2), \quad E[\epsilon_t \epsilon_s] = 0 \quad \forall \quad t \neq s, \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \eta_t, \text{ com } \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \quad E[\eta_t \eta_s] = 0 \quad \forall \quad t \neq s, \end{aligned} \quad (47)$$

e $E[\epsilon_t \eta_t] = 0$ para cada t e s .

As constantes desconhecidas σ_ϵ^2 e σ_η^2 podem ser estimadas por máxima verossimilhança, ou por algum ponto arbitrário de alta densidade a *posteriori*. A estimativa dessas quantidades tem uma importante interpretação prática. Para modelagem de séries temporais econômicas de acordo com (47), a razão $\sigma_\epsilon^2/\sigma_\eta^2$ é uma proxy para o volume de choques causados por variáveis latentes simultâneas/relacionadas que são indiretamente percebidos em η_t . Desta forma, diferentes planos econômicos podem ser estimados nos termos de sua variabilidade implícita adicionada a uma variação de Y_t .

6.2. Descrição dos dados

Na presente dissertação será aplicado o intervalo de confiança-credibilidade de mínima amplitude para analisar a variação observada do índice de preços ao consumidor (IPC, ou também denotado como CPI, *Consumer Price Index*) urbano dos Estados Unidos, no período de Janeiro/2016 a Dezembro/2017. Como uma série temporal mensal, os dados são formados por 24 observações e baixados do *Bureau of Labor Statistics* (<https://www.bls.gov/>). Vale destacar que o objetivo aqui não é oferecer uma modelagem adequada para a variação do IPC com os detalhes que são exigidos, mas apenas para ilustrar como o intervalo de confiança-credibilidade funciona na prática. Uma análise apropriada do IPC, a um assunto de tal importância com a inerente complexidade, é oferecido por Hobijn e Lagakos (2013).

O Índice de Preços ao Consumidor é um dos indicadores econômicos mais relevantes da economia, contendo um amplo número de pesquisas e aplicações empíricas (FOSS; MANSER; YOUNG, 1993; PASTORE; PINOTTI, 1999; RIBEIRO, 2012; MENDONÇA, 2004; DRENNAN; LOBO; STRUMSKY, 2004). Para tanto, como pode se verificar na figura 5, existe um aumento no Índice de Preços ao Consumidor, o mesmo pode caracterizar um aumento contínuo nos valores referente a inflação do país, tornando o IPC um forte componente sobre o estudo dos movimentos da inflação (BRYAN; CECCHETTI, 1993). Ademais, para um aumento do mesmo, podemos destacar artigos relevantes e suas implicações empíricas, sendo que existência de uma inflação alta podem ocasionar distúrbios econômicos no país como: corroborar para a perda de valor da moeda frente aos novos preços elevados, por exemplo; a desvalorização cambial; aumento no dólar e nos preços dos produtos importados; diminuição e alocação dos investimentos para aplicação em bancos; aumento especulativo no sistema financeiro; elevação da taxa de juros; aumento no desemprego; entre outros fatores (SINGER, 1972; FERNANDES; PAIS, 2011; STRACHMAN, 2013; PASTORE; GAZZANO; PINOTTI, 2014).

O IPC mede a variação de preço pago pelos consumidores por serviços e bens. O IPC reflete os padrões de gastos para cada um dos dois grupos populacionais: i) todos os consumidores urbanos; e ii)

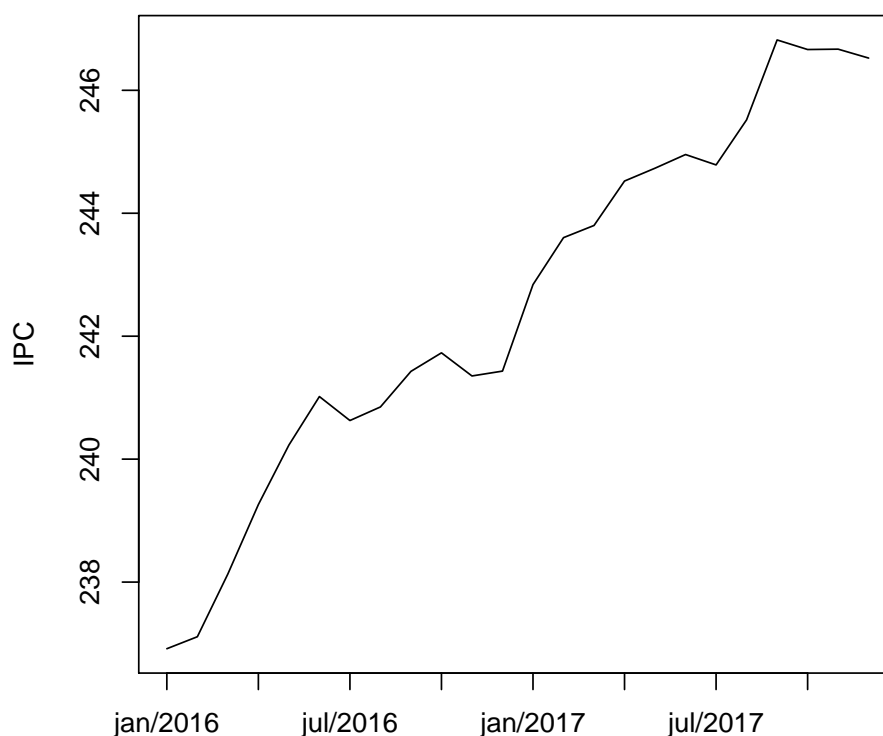


Figura 5: Série mensal do Índice de Preços ao Consumidor, no período de Janeiro/2016 até Dezembro/2017.

os assalariados urbano e trabalhadores "cléricais". O grupo de consumidores urbanos representa cerca de 89% de toda a população dos EUA. Este índice baseia-se nas despesas de quase todos os residentes urbanos ou metropolitanos, incluindo profissionais, trabalhadores independentes, pobres, desempregados e aposentados, como também os assalariados urbanos e trabalhadores "cléricais". Conforme informado pelo *Bureau of Labor Statistics*, o IPC não inclui os padrões de gastos das pessoas que vivem em áreas rurais não-metropolitanas, famílias de agricultores, pessoas nas Forças Armadas e pessoas em instituições como prisões e hospitais psiquiátricos.

Os dados representam a média das cidades dos EUA para todos os consumidores urbanos para todos os itens, não ajustados sazonalmente. Basicamente, o IPC é composta por mudanças nos preços de todos os bens e serviços comprados para consumo das famílias urbanas. Como pode-se verificar pela Figura 5 o comportamento do Índice de Preços ao Consumidor no período de Janeiro de 2016 a Dezembro de 2017. Segundo a Figura 5 podemos verificar que a Índice de Preços ao Consumidor dos EUA apresenta crescimento, deste modo o IPC aponta tendência crescente que pode ser visualizada pela Figura 5. Por outro lado, temos a variação do Índice de Preços ao Consumidor, que pode ser verificada pela Figura 6,

cujo cálculo podemos obter pela seguinte fórmula:

$$\left(\frac{IPC(t) - IPC(t-1)}{IPC(t-1)} \right) \times 100.$$

A Figura 6 mostra a variação do Índice de Preços ao Consumidor, o que facilita perceber o percentual

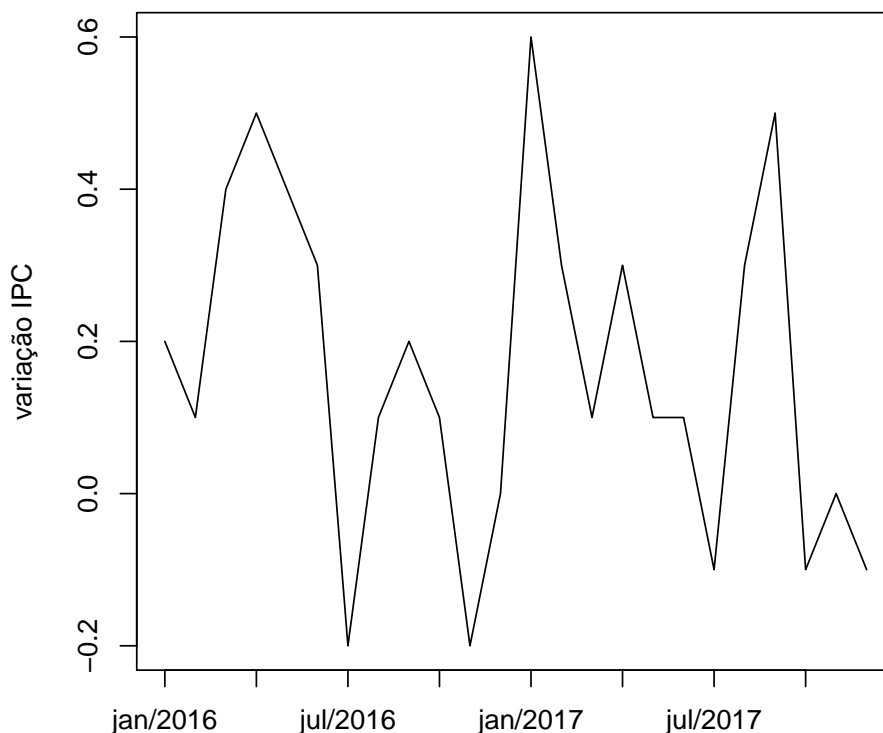


Figura 6: Série Temporal da variação do Índice de Preços do Consumidor para o período de Janeiro/2016 até Dezembro/2017.

de mudanças mensais do IPC. Diferente da Figura 5, a variação do Índice de Preços ao Consumidor, representada pela Figura 6, aparentemente, se comporta como uma série estacionária na média.

6.3. Calibração dos Parâmetros e Implementação Computacional

Esta aplicação foi implementada usando o software R, e fazendo uso dos pacotes *KFAS* e *dlnm*. As linhas de comando usadas para executar este exemplo são anexadas no Apêndice, que foram construídos seguindo as instruções para executar o exemplo do rio Nilo oferecido na página 11 de Petris e Petrone (2011). Como no exemplo do rio Nilo, foram utilizadas distribuições *a priori* Gamma-Inversa independentes para σ_ϵ^2 e para σ_η^2 . Com respeito à escolha dos parâmetros de entrada do intervalo de confiança-

credibilidade, foi utilizado a precisão decimal de 0.01 sob confiança de $\gamma_f = 0.9$ e de credibilidade $\gamma_b = 0.90$.

Embora as linhas de comando para executar este exemplo envolvam muitas etapas para obter as estimativas frequentistas e Bayesianas, os resultados fundamentais são a estimativa pontual de máxima verossimilhança de σ_η^2 , a estimativa associada do desvio padrão, salvo nos objetos *Eta_hat* e *sd_MLE[2]*, respectivamente, e a distribuição a *posteriori* empírica para σ_η^2 , a qual foi salva no objeto *SampledPost*. Estas são informações suficientes para construir o intervalo estimado para σ_η^2 seguindo as etapas (i) a (iv) da Seção 5.2.

Por exemplo, usando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, um intervalo de $(1 - 2\alpha_f)100\%$ de confiança, simétrico, para σ_η^2 é obtido com:

$$Eta_hat \pm z_{\alpha_f} \times sd_MLE[2].$$

Para obter os limites inferior e superior do intervalo de $(1 - 2\alpha_b)100\%$ de credibilidade, tomamos os quantis α_b e $(1 - \alpha_b)$, respectivamente, da amostra a *posteriori* *SampledPost*.

6.4. Resultados da análise dos dados

A Figura 7 tem o histograma dos dados *SampledPost*. Pode-se verificar que a distribuição a *posteriori* atribui uma alta densidade para candidatos σ_η^2 ao redor de 0.05. Para tanto, a média e mediana de *SampledPost* são 0.049 e 0.043, respectivamente, com desvio padrão de 0.026. Assim, sobre a abordagem Bayesiana convencional para estimação intervalar, um intervalo de credibilidade simétrico de 90% para σ_η^2 é [0.0199, 0.0967].

Com respeito a estimação de máxima verossimilhança, a estimativa pontual é 0.0001, sendo menor que a média a *posteriori*. A estimativa do desvio padrão do estimador do MLE é 0.00125. Deste modo, o intervalo de confiança observado e simétrico de 90% para σ_η^2 é [-0.002, 0.0022]. Note que o limite inferior negativo -0.002 não faz sentido, uma vez que σ_η^2 é um parâmetro de variância.

Mas, o foco desta dissertação é a abordagem unificada. Depois de realizar os passos (i) até (iv) da Seção 5.2, foi encontrado um intervalo de confiança-credibilidade observado igual a [0.0137, 0.0829]. O primeiro ganho notável com esta nova estimativa é que, embora ainda tenha a probabilidade de cobertura desejada por trás da sua construção, elimina o limite inferior negativo sem sentido, o que é possível devido à informação a *priori* importante sobre a região admissível para σ_η^2 . Outra característica importante é o equilíbrio aparente entre as magnitudes promovidas pelos intervalos de confiança e de credibilidade. Enquanto o primeiro coloca forte ênfase para o milionésimo valor, e o último coloca para o centésimo, a

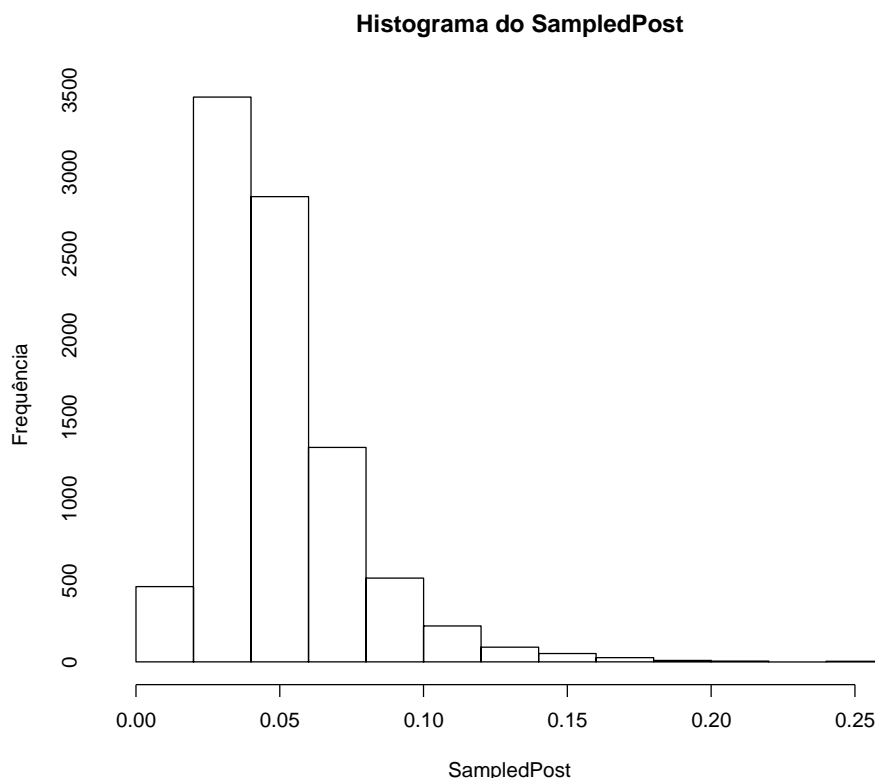


Figura 7: Posteriori empírica de σ_{η}^2 para a variação do Índice de Preços ao Consumidor Urbano observado dos EUA no período de Janeiro/2016 até Dezembro/2017

estimativa confiança-credibilidade informa um tipo de região de interseção, onde estas, diferentes porém ricas fontes de informação, são simultaneamente levadas em consideração.

7. CONCLUSÃO

O raciocínio utilizado para a construção do intervalo de confiança-credibilidade é baseado em equalizar os principais pressupostos das escolas frequentista e Bayesiana, de tal modo que sejam levados em consideração simultaneamente: (i) delimitar a probabilidade (cobertura) de decisões equivocadas devido à variabilidade da amostra e (ii) garantir probabilidades *a posteriori* objetivas para o intervalo observado.

O método proposto é definido sob grande generalidade, pois o mesmo é aplicável para qualquer distribuição de probabilidade dentre as distribuições contínuas, discretas, e mistas entre contínuas e discretas. Além disso, não existem restrições sobre como escolher as distribuições *a priori*. Portanto, os usuários podem escolher uma configuração de distribuição *a priori* preferível de acordo com as especificações, informação *a priori* real, ou que favoreçam conveniências matemáticas.

O intervalo de confiança-credibilidade é um mecanismo para balancear a interpretação *a posteriori*

dos fenômenos analisados, dada uma informação empírica com necessidade de controle de probabilidade de cobertura. Isto é importante porque, apesar do intervalo de credibilidade conter informação suficiente sobre θ , medidas específicas de performance pré-experimental, tal como a probabilidade de cobertura, não são necessariamente garantidos por metodologias Bayesianas. Intervalos de confiança-credibilidade representam a possibilidade de manter os resultados da análise de dados compromissados com os requisitos de performance pré-experimentais, combinados com a interpretação pós-experimental de tomar decisões depois de aprender com os dados.

Referências

- BAYARRI, M. J.; BERGER, J. O. The interplay of bayesian and frequentist analysis. *Statistical Science*, JSTOR, p. 58–80, 2004.
- BERGER, J. O. Could fisher, jeffreys and neyman have agreed on testing? *Statistical Science*, v. 18, n. 1, p. 1–32, 2003.
- BERGER, J. O. et al. Unified frequentist and bayesian testing of a precise hypothesis. *Statistical Science*, Institute of Mathematical Statistics, v. 12, n. 3, p. 133–160, 1997.
- BILLER, S. D.; OSER, S. M. Another look at confidence intervals: Proposal for a more relevant and transparent approach. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, Elsevier, v. 774, p. 103–119, 2015.
- BLAKER, H.; SPJØTVOLL, E. Paradoxes and improvements in interval estimation. *The American Statistician*, Taylor & Francis Group, v. 54, n. 4, p. 242–247, 2000.
- BRYAN, M. F.; CECCHETTI, S. G. *The consumer price index as a measure of inflation*. [S.l.], 1993.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. *Statistical inference*. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002.
- CUMMING, G.; FIDLER, F. Confidence intervals: Better answers to better questions. *Zeitschrift für Psychologie/Journal of Psychology*, Hogrefe & Huber Publishers, v. 217, n. 1, p. 15–26, 2009.
- CUMMING, G.; FINCH, S. Inference by eye: confidence intervals and how to read pictures of data. *American Psychologist*, American Psychological Association, v. 60, n. 2, p. 170, 2005.
- DRENNAN, M. P.; LOBO, J.; STRUMSKY, D. Unit root tests of sigma income convergence across us metropolitan areas. *Journal of Economic Geography*, Oxford University Press, v. 4, n. 5, p. 583–595, 2004.
- EHLERS, R. S. Inferência bayesiana. *Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC-USP*, 2011.
- FERNANDES, A. J.; PAIS, C. A economia brasileira na década de 80: conseqüências da crise da dívida externa, inflação e crise do estado. *Universidade de Aveiro, Departamento de Economis*, p. 1649–038, 2011.
- FOSS, M.; MANSER, M.; YOUNG, A. Introduction to "price measurements and their uses". In: *Price Measurements and Their Uses*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1993. p. 1–16.

- FRANCO, G. C.; GAMERMAN, D.; SANTOS, T. Modelos de espaço de estados: abordagens clássica e bayesiana. *São Paulo: Associação Brasileira de Estatística*, 2009.
- HARRISON, J.; WEST, M. *Bayesian forecasting & dynamic models*. [S.l.]: Springer New York City, 1999.
- HARVEY, A. Forecasting, structural time series models and the kalman filter. Cambridge [etc.]: Cambridge University Press, 1989.
- HARVEY, A. C.; PIERSE, R. G. Estimating missing observations in economic time series. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 79, n. 385, p. 125–131, 1984.
- HOBijn, B.; LAGAKOS, D. Social security and the consumer price index for the elderly. *Current Issues in Economics and Finance. Federal Reserve Bank of New York*, v. 9, n. 5, p. 1–6, 2013.
- JOHNSON, V. E. Bayes factors based on test statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, Wiley Online Library, v. 67, n. 5, p. 689–701, 2005.
- KRUSCHKE, J. K. What to believe: Bayesian methods for data analysis. *Trends in cognitive sciences*, Elsevier, v. 14, n. 7, p. 293–300, 2010.
- LEHMANN, E. L.; ROMANO, J. P. *Testing statistical hypotheses*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- LINDLEY, D. V. A statistical paradox. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 44, n. 1-2, p. 187–192, 1957.
- MENDONÇA, H. F. de. Mensurando a credibilidade do regime de metas inflacionárias no brasil. *Revista de Economia política*, v. 24, n. 3, p. 95, 2004.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. *Análise de séries temporais*. [S.l.]: Blucher, 2006.
- MOREY, R. D. et al. The fallacy of placing confidence in confidence intervals. *Psychonomic bulletin & review*, Springer, v. 23, n. 1, p. 103–123, 2016.
- ORAIR, R. O.; SILVA, W. d. J. Investimentos dos governos subnacionais no brasil: estimação e análise por modelos de espaço de estado. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2012.
- PASTORE, A.; GAZZANO, M.; PINOTTI, M. *Inflação e crises: o papel da moeda*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2014.
- PASTORE, A. C.; PINOTTI, M. C. Inflação e estabilização: Algumas lições da i experiência brasileira. *Revista Brasileira de Economia*, v. 53, n. 1, p. 3–40, 1999.
- PETRIS, G.; PETRONE, S. State space models in r. *Journal of Statistical Software*, v. 41, n. 4, p. 1–25, 2011.
- RIBEIRO, C. H. S. *Números Índice—Uma abordagem à problemática dos índices de Preços no Consumidor (IPC), no quadro do Sistema de Informação sobre a inflação—O caso de Cabo Verde*. Tese (Doutorado), 2012.
- ROAZZI, A.; O'BRIEN, D. P.; GRAÇA, B. Maria da. Sobre o debate freqüentista versus probabilista: “sorte de tolo” torna-se uma explicação plausível. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, SciELO Brasil, v. 16, n. 2, p. 389–402, 2003.
- SHUMWAY, R. H. Time series in the soil sciences: is there life after kriging? In: *Soil Spatial Variability, Proceedings of a workshop of the ISSS and the SSSA. Las Vegas*. [S.l.: s.n.], 1985. p. 35–57.

SILVA, I. R. On the correspondence between frequentist and bayesian tests. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, n. just-accepted, 2017.

SINGER, P. I. *O "milagre brasileiro": causas e consequências*. [S.l.]: CEBRAP, 1972.

SOLO, V. *An alternative to significance tests*. [S.l.]: Purdue University. Department of Statistics, 1984.

STEINHARDT, J. *Beyond bayesians and frequentists*. Citeseer, 2012.

STRACHMAN, E. Metas de inflação no brasil (1999-2012): uma análise institucional. *Ensaio FEE*, v. 34, n. 2, 2013.

TEAM, R. C. et al. R: A language and environment for statistical computing (version 3.0. 2). *R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria*, 2014.

YOUNG, K. D.; LEWIS, R. J. What is confidence? part 1: The use and interpretation of confidence intervals. *Annals of emergency medicine*, Elsevier, v. 30, n. 3, p. 307–310, 1997.

Apêndices

A. Códigos

This function follows the steps suggested by the paper State Space Modelos Using R

```
ConfCredInt<- function(x,year,month,freq,gamma_f,gamma_b,precision)
```

```
# precision: number of decimal places when reporting the interval estimate n<- length(x)
```

```
library(dlm) library(numDeriv) library(TSA)
```

```
# Constructing the information for the frequentist part
```

```
if(is.ts(x)==F)x<- ts(x,start = c(year, month), frequency = freq)
```

```
buildx <- function(theta) dlmModPoly(order = 1, dV = theta[1], dW = theta[2])
```

```
fit <- dlmMLE(x, parm = c(100, 2), buildx, lower = rep(1e-4, 2))
```

```
modx <- buildx(fit$par)
```

```
Eps_hat<- drop(V(modx)) # MLE of epsilon variance
```

```
Eta_hat<- drop(W(modx)) # MLE of eta variance
```

```
hs <- hessian(function(y) dlmLL(x, buildx(y)), fit$par) all(eigen(hs, only.values = TRUE)$values >
```

```
0) aVar <- solve(hs) sd_MLE<- sqrt(diag(aVar)) # Standard deviation of the MLE of epsilon variance and of eta variance.
```

```
# Constructing the information for the Bayesian part:
```

```
gibbsOut <- dlmGibbsDIG(x, mod = dlmModPoly(1), shape.y = 0.1, rate.y = 0.1, shape.theta = 0.1, rate.theta = 0.1, n.sample = 10000, thin = 9) attach(gibbsOut) burn <- 1:1000 SampledPost<- dW[-burn]
```

```

# empirical posterior distribution of the eta variance
#### Auxiliary Functions:
## Confidence Interval IConf<- function(Eta_hat,n,sigma,gamma_f,alpha_f)
alpha_f_2<- (1-gamma_f)-alpha_f
return(c(Eta_hat+qnorm(alpha_f)*sigma, Eta_hat+qnorm(1-alpha_f_2)*sigma))

## Credible Interval
ICred<- function(SampledPost,gamma_b,alpha_b)
alpha2<- 1-gamma_b-alpha_b Lb1<- quantile(SampledPost,alpha_b);
Lb2<- quantile(SampledPost,1-alpha2) return(c(Lb1,Lb2))
#### Finding the confidence-credible interval according to steps (i) to (iv) of Section 3.2.
# Finding the searching limits
res1<- IConf(Eta_hat,n,sigma=sd_MLE[[2]],gamma_f=0.9999,alpha_f=(1-0.9999)/2)
res2<- ICred(SampledPost,gamma_b=0.9999,alpha_b=(1-0.9999)/2)
a<- min(res1[1],res2[1]) b<- max(res1[2],res2[2]) lo<- b-a
## Proceeding to the search
as<- seq(a,b,precision) bs<- seq(a,b,precision)
for(i in 1:length(as)) for(j in i:length(bs))
if(as[i]<bs[j]) Lx<- a+i*(b-a)/100 ;
Ux<- a+j*(b-a)/100 za1<- (Eta_hat-Lx)/sd_MLE[[2]];
za2<- (Ux-Eta_hat)/sd_MLE[[2]] ;
pf<- 1-(1-pnorm(za2)+1-pnorm(za1))
pb<- sum(SampledPost>=Lx&SampledPost<=Ux)/length(SampledPost) lh<- Ux-Lx
if(pf>=gamma_f&pb>=gamma_b&lh<lo)ICC<- c(Lx,Ux); lo<- lh
## Credible interval IB<- ICred(SampledPost,gamma_b,alpha_b=(1-gamma_b)/2)
## Confidence Interval IF<- IConf(Eta_hat,n,sigma=sd_MLE[[2]],gamma_f,alpha_f=(1-gamma_f)/2)
res<- list(ICC,IF,IB,SampledPost,Eps_hat,Eta_hat,sd_MLE)
names(res)<- c("Conf-Cred Interval","Confidence Interval",
"Credible Interval","Empirical Posterior of the Eta Variance","Eps_hat","Eta_hat","sd_MLE") return(res)
##### CLOSE FUNCTION
# Example 1: real data of US Urban Consumer Price Index
setwd("C:/Codes")
inflacao <- read.csv("inflacao.csv",header = T) inflacao <- read.csv("inflacao2.csv",header = T)

```



```

CPI_Var<- as.numeric(inflacao[13:36,7]) CPI_Var<- as.numeric(inflacao[,6])
res<- ConfCredInt(CPI_Var,year=2007,month=1,freq=12,gamma_f=0.9,gamma_b=0.9,
precision=0.01)
SampledPost<- res[[4]]
hist(SampledPost) ##### <== FIGURE 7 OF THE PAPER
median(SampledPost) mean(SampledPost) sd(SampledPost) Lb1<- quantile(SampledPost,0.05); Lb2<-
quantile(SampledPost,1-0.05)
Eta_hat<- res[[6]] ### <== MLE of  $\hat{\sigma}_\eta$  sd_MLE<- res[[7]] ### <== standard deviation
estimate of MLE Eta_hat+qnorm(0.05)*sd_MLE[2]; Eta_hat+qnorm(1-0.05)*sd_MLE[2]

```