Adriana Luziê de Almeida

ENSINANDO E APRENDENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA COM ÊNFASE NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA: UM ESTUDO COM O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS

Adriana Luziê de Almeida

ENSINANDO E APRENDENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA COM ÊNFASE NA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA: UM ESTUDO COM O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação da Profª. Drª. Ana Cristina Ferreira.

Ouro Preto, MG

2010

A447e **Almeida, Adriana Luziê de.**

Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática [manuscrito] : um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio / Adriana Luziê de Almeida. – 2010.

166 f.: il., grafs., tabs.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Teses. 2. Ensino médio - Teses. 3. Análise combinatória - Teses. I. Universidade Federal de Ouro Preto. II. Título.

CDU: 519.1

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio

Autor(a): Adriana Luziê de Almeida
Orientador(a): Profª Drª Ana Cristina Ferreira

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Adriana Luziê de Almeida e aprovada pela Comissão Examinadora.

Data: 23 de agosto de 2010

Assinatura:...
Orientador(a)

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Prof. Dr Vinício de Macedo Santos

____

Profª Drª Roseli de Alvarenga Corrêa

2010

Dedico este trabalho às três pessoas
mais importantes da minha vida:
Rodrigo, Letícia e Pedro.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo exemplo!

Aos meus irmãos, pela amizade!

Aos familiares (sogro, sogra, cunhados, cunhadas, sobrinhas, afilhadas, afilhados, tios, tias, primos, primas, avós,...) pela compreensão!

Aos amigos, pelo apoio!

Aos alunos que participaram deste trabalho e à amiga Luana, pela colaboração!

À professora da turma e à direção da Escola onde realizei a pesquisa, pela confiança!

Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo!

Aos professores do programa, por partilharem seus conhecimentos!

À minha orientadora, Profª Drª Ana Cristina Ferreira, pelos ensinamentos!

Aos professores Roseli de Alvarenga Corrêa, Maria Manuela M. S. David e Vinício de Macedo Santos, por aceitarem o convite, contribuindo para a finalização deste trabalho.

A meu eterno namorado, Rodrigo, pela paciência, pelo carinho, pelo apoio, enfim, pelo amor!

Aos meus filhos, Letícia e Pedro, razão pela qual vivo, por me deixar amá-los!

A Deus, pela VIDA!

RESUMO

A Análise Combinatória é um dos núcleos da matemática discreta e parte importante da Probabilidade. Contudo, percebemos, ao longo de nossas experiências como professoras, no contato com os colegas e na literatura, que é comum o ensino da Análise Combinatória exclusivamente por meio de manipulação de fórmulas ou resoluções padronizadas e que os resultados em avaliações nacionais e regionais não são bons. Por outro lado, existem estudos sobre o desenvolvimento do pensamento combinatório e os principais erros e dificuldades enfrentados por alunos e professores que trazem contribuições para o processo. Aliamos nesta pesquisa um estudo sobre pensamento combinatório e comunicação matemática para construir uma proposta de ensino de Análise Combinatória. Nosso propósito era responder à seguinte questão: "Que contribuições uma proposta de ensino que enfatiza a Comunicação Matemática pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito (MG)?". Para isso, desenvolvemos e aplicamos uma proposta de ensino de Análise Combinatória, fundamentada nos estudos sobre desenvolvimento do pensamento combinatório e um ambiente de estímulo à argumentação e discussão de situações-problema em pequenos e grande grupos. A coleta de dados se deu por meio de notas de campo (diário da pesquisadora), gravações em áudio e vídeo de todas as aulas, registros produzidos pelos alunos ao longo das aulas, questionários e testes diagnósticos. A análise dos resultados evidencia que a maioria dos alunos participou com interesse da proposta e, gradativamente, passou a se expressar mais e com maior segurança e propriedade sobre os conceitos estudados e alcançou uma compreensão mais profunda dos mesmos, desenvolvendo tanto o pensamento combinatório quanto a argumentação. A comparação entre os resultados dos testes diagnósticos evidencia – em todos os participantes do estudo – um significativo crescimento na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas combinatórios. Além disso, a análise revela que a ênfase na comunicação matemática foi fundamental para os bons resultados da proposta. Os dados sugerem que as discussões em pequenos e grandes grupos, quando realizadas de modo organizado e mediadas pelo professor, em um clima de respeito mútuo e estímulo à argumentação, trazem contribuições para o desenvolvimento do pensamento combinatório. Tal estudo gerou um produto educacional – um livreto com a descrição completa e comentada das atividades realizadas – destinado a professores de Matemática.

Palavras-chave: Ensino Médio; Análise Combinatória; Comunicação Matemática.

ABSTRACT

Combinatorial Analysis is one of the central cores of discrete mathematics and an important part of Probability. However, we perceive through our teaching experiences, conversations with colleagues and in the literature; that Combinatorial Analysis is commonly taught exclusively through manipulation of formulas or the resolution of standardized problems and that the results of national and regional assessments do not correspond to our expectations. On the other hand, there are studies, on the development of combinatorial thinking and the principal errors and difficulties faced by students and teachers, which provide contributions to the teaching and learning process. We bring to our study a study on combinatorial thinking and mathematical communication in order to develop a teaching proposal for Combinatorial Analysis. Our purpose was to answer the following question: "What are possible contributions of a teaching proposal that emphasizes mathematical communication for the teaching and learning of Combinatorial Analysis for juniors in a public high school in Itabirito (MG)?. In order to obtain an answer to the question we developed and applied a teaching proposal for Combinatorial Analysis based on studies regarding the development of combinatorial thinking and an environment to stimulate debate and discussion of situated problems in small and large groups. Data collection was realized through field notes (the researcher's diary), audio and video recordings of all classes, notations produced by the students during the lessons, questionnaires and diagnostic tests. The analysis of the results shows that most students participated with interest, gradually came to express themselves more and with more confidence and ownership of the concepts studied; reaching a deeper understanding of the concepts and developing both combinatorial thinking and debating skills. The comparison with the results of the diagnostic tests shows a significant growth in the understanding of the concepts and in solving combinatorial problems for all participants in the study. Furthermore, the analysis reveals that the emphasis on mathematical communication was fundamental to the success of the proposal. The data suggests that the discussions in small and large groups, when performed in an organized manner, mediated by the teacher in a climate of mutual respect, in a way that encourages debate, contributes to the development of combinatorial thinking. This study generated an educational product - a booklet destined for Mathematics teachers with a complete commented description of the activities realized.

Keywords: Secondary Education; Combinatorial Analysis; Mathematical Communication.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Meu interesse pela Matemática e seu ensino não é recente. Desde o segundo ciclo do Ensino Fundamental, incentivada por meus professores, estudava com colegas, da mesma turma ou de séries anteriores, que apresentavam dificuldades para compreender a Matemática escolar, fato que me intrigava.

Concluí o curso de Magistério, tornando-me habilitada a lecionar para turmas da Educação Infantil e do primeiro ciclo do Ensino Fundamental.

Após breve experiência lecionando para uma turma de crianças de oito anos, fui convidada a assumir turmas de 5ª série em uma Escola Estadual e comecei a lecionar também em uma escola particular que iniciava um trabalho com o segundo ciclo do Ensino Fundamental. Em quatro anos, concluí minha licenciatura em Matemática, atuando em turmas de 5ª a 8ª série.

Assim, relacionando o que aprendia na Faculdade com a prática em sala de aula, pude observar que não seria fácil encontrar soluções para os questionamentos que começaram a configurar-se no Ensino Fundamental. Percebi que para ensinar Matemática não basta saber o conteúdo. É preciso considerar variáveis que influenciam os processos de ensino e aprendizagem como, por exemplo, os meios e métodos adotados. Ensinar a memorizar e aplicar fórmulas e regras matemáticas não era o suficiente para formar indivíduos capazes de pensar criticamente e promover mudanças. Não se tratava de adaptar o aluno à Matemática escolar, e, sim, de apoiar este aluno no processo, transformando esta Matemática em um instrumento de crescimento pessoal. A partir dessas reflexões, minhas concepções acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática sofreram alterações que me acompanham até hoje.

Concluída a graduação, passei a lecionar, também, para turmas do Ensino Médio em uma escola particular. No início foi difícil. Além de aprender a lidar com adolescentes foi preciso estudar alguns conteúdos matemáticos que, apesar de constarem dos programas das disciplinas da Faculdade, precisaram ser revistos. A participação em encontros pedagógicos – nos quais se discutia tanto problemas educacionais quanto conteúdos matemáticos propriamente ditos – contribuiu para que eu me estabelecesse como professora de Ensino Médio, nível no qual atuo até hoje.

Ao ingressar no curso de Especialização em Educação Matemática comecei a me interessar por estudos relacionados ao pensamento combinatório, tema que até então era novo para mim.

Entre 2003 e 2007, participei de vários cursos de extensão promovidos pelo Núcleo Interdisciplinar de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (NIEPEM), da Universidade Federal de Ouro Preto. O projeto, intitulado “Repensando o ensino da Matemática no Ensino Médio”, reunia professores da Universidade, alunos de graduação em Matemática e professores de Matemática das escolas da região. A cada semestre, definíamos coletivamente um conteúdo matemático abordado no Ensino Médio para estudar.

Nossos encontros ocorriam todas as semanas, durante uma tarde. Promovíamos discussões sobre textos e atividades propostos por pesquisadores, colegas de profissão e estudantes do curso de Matemática. Como em geral as reuniões aconteciam na quarta-feira, começamos a nos chamar de "grupo da quarta". As atividades discutidas e planejadas durante os encontros eram aplicadas nas nossas salas de aula e, posteriormente, analisadas pelo grupo. Temas como os principais erros apresentados pelos alunos eram discutidos e comparados com informações obtidas em nossas leituras.

Entre os diversos assuntos abordados, o estudo sobre o ensino de Análise Combinatória foi o que mais chamou minha atenção. Na ocasião, fizemos várias leituras envolvendo a história e o ensino deste conteúdo, o que me levou a perceber que os erros descritos por alguns pesquisadores podiam ser verificados nos registros de meus alunos. Já há algum tempo lecionando para o 2º ano, conhecia os problemas gerados pelo ensino desse conteúdo por meio da aplicação de fórmulas e já buscava métodos alternativos. Um desses métodos consistia na introdução do conteúdo a partir da resolução de situações-problema pelos alunos. A participação nesse projeto ajudou-me a repensar minha atuação e a buscar apoio teórico para meu trabalho.

Em 2007, fui aprovada no processo seletivo para o Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP. Iniciei meus estudos em março de 2008. Nesta ocasião, decidi seguir investigando o tema que me inquietava há tempos: o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Uma proposta de ensino baseada na valorização do raciocínio combinatório, no incentivo à investigação e na socialização de ideias pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória na sala de aula. E, para mostrar as contribuições e limitações de uma proposta como esta, realizei um estudo de caso que incentivasse professores a utilizá-la em suas salas de aula, fazendo as adaptações que julgarem necessárias.

Minha hipótese é que é possível ensinar e aprender Análise Combinatória de modo mais interessante e significativo para os alunos, quando se desenvolve uma proposta baseada em situações-problema discutidas coletivamente.

A utilização de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem de diversos conteúdos, inclusive, da Análise Combinatória. Mas somente aprender a resolver os problemas, construindo suas próprias estratégias, não é o suficiente para tornar esta aprendizagem eficaz. Através da discussão em pequenos grupos e da troca de experiências entre o professor e seus alunos ou entre os próprios alunos, a aprendizagem é potencializada pela oportunidade de aprender consigo mesmo e com o outro. Tais ideias vêm tanto de minha prática docente quanto das leituras feitas.

Momentos de partilha de saberes, como a apresentação das estratégias utilizadas para solucionar um determinado problema, nos quais os alunos possam expor suas ideias, propor sugestões, questionar e refletir proporcionam o desenvolvimento das habilidades de expressão e a autoconfiança. Também reduzem a ênfase nos erros cometidos, uma vez que o foco está no processo de elaboração das respostas e no raciocínio utilizado. O processo de ensino e aprendizagem pode ser potencializado pela interação entre os alunos e professores, partilhando diferentes visões e negociando significados.

A partir do exposto, desenvolvi, juntamente com minha orientadora, uma pesquisa norteada pela seguinte questão de investigação: *"que contribuições uma proposta de ensino que enfatiza a Comunicação Matemática pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito (MG)?"*

Nosso objetivo geral era investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Para isso, traçamos alguns objetivos específicos: (1) avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta; (2) identificar as principais estratégias utilizadas; (3) analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo, (4) investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos, e, (5) identificar como os estudantes avaliaram a proposta de ensino. Com a finalidade de alcançar estes objetivos, traçamos uma estratégia de trabalho.

Inicialmente, revisamos a literatura acerca do ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, principalmente, no sentido de identificar os principais obstáculos e formas de enfrentá-los. Quando buscamos um olhar teórico para analisar essa proposta, percebemos que seu diferencial – mais que na estratégia de ensino (resolução de problemas, investigação matemática ou cenários de investigação) – estava no tipo de interação discursiva que se estabelecia na sala de aula, ou seja, no tipo de comunicação. A partir daí, passamos a estudar esse construto, buscando compreendê-lo e aplicá-lo neste estudo. Em seguida, uma proposta de ensino foi elaborada e aplicada em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública, em Itabirito (MG).

Na presente pesquisa, buscamos uma Comunicação Matemática entre alunos e professores que fosse além da mera troca de informações. Nosso propósito era desenvolver uma comunicação que contribuísse para uma compreensão mais profunda dos conceitos relacionados à Análise Combinatória e que estimulasse a argumentação e a expressão. Isso porque nem toda comunicação gera aprendizagem, entretanto, toda aprendizagem é produto de algum tipo de comunicação, a partir da interação de um sujeito com um objeto e/ou com outro sujeito, na medida em que significados são negociados e novos conhecimentos são construídos.

Durante o desenvolvimento da proposta de ensino, procuramos construir um ambiente de aprendizagem no qual todos os alunos eram estimulados a expor suas ideias, apresentar sugestões, argumentar, questionar e refletir. Nesse ambiente, eles se tornaram agentes ativos, co-responsáveis pela própria aprendizagem.

A preocupação com a criação de um espaço de diálogo levou à valorização do trabalho em grupo. Como Carvalho (2009, p. 15), acreditamos que "*interagir com um ou mais parceiros pressupões que se trabalhe em conjunto com outro, e quando se trabalha colaborativamente espera-se que ocorram certas formas de interacções sociais responsáveis pelo activar de mecanismos cognitivos de aprendizagem, como a mobilização de conhecimentos*".

Eles aprendem a questionar, trocam ideias uns com os outros e aprendem a trabalhar coletivamente. A experiência coletiva contribui para o desenvolvimento individual e favorece a cooperação entre indivíduos.

Nesse sentido, organizamos o presente relato da seguinte forma: no 1º capítulo, apresentamos nossa revisão de literatura acerca do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória; no Capítulo 2, discutimos a Comunicação e a sala de aula de Matemática; no Capítulo 3, apresentamos nossas opções metodológicas e principais procedimentos adotados no estudo; no Capítulo 4, descrevemos e analisamos a proposta de ensino. Concluímos apresentando as Considerações Finais, Referências e Apêndices.

Além da Dissertação, uma preocupação que norteou todo o trabalho foi a possibilidade de contribuir de modo efetivo para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Análise Combinatória. Para isso, todo o estudo se orientou no sentido de analisar as contribuições da proposta de ensino construída, com o propósito de, ao final, oferecer uma versão mais sintética, mas não menos cuidada, para os professores, meus colegas.

CAPÍTULO 1:
O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é um dos núcleos da matemática discreta e parte importante da Probabilidade. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1): "o*s problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias*".

Para esses autores, a combinatória constitui-se em um amplo campo de investigação com intensa atividade, devido às numerosas aplicações em diferentes áreas (ex. Geologia, Química, Gestão Empresarial, Informática e Engenharia) e às implicações em outros ramos da Matemática. Por exemplo, quando se descreve o espaço amostral de um experimento, é utilizado raciocínio combinatório. Se o aluno não compreende a Análise Combinatória, provavelmente terá dificuldade para aprender Probabilidade. Muitos modelos de distribuição de probabilidade são expressos por meio de operações combinatórias, por exemplo, a distribuição binomial. Consequentemente, muitas dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem desse conteúdo (ou dessa disciplina) podem estar relacionadas a um raciocínio combinatório pobre ou parcamente desenvolvido.

Existe uma relação entre as duas, contudo, a combinatória não é apenas uma técnica de cálculo de probabilidade. Para os autores, o raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral. E, por estas razões, a combinatória foi incluída nos currículos de Matemática. Contudo, a realidade do ensino e da aprendizagem desse tema, nas classes da Educação Básica, carrega consigo muitos obstáculos.

Roa (2000), em sua tese de doutorado, verificou que, em um grupo de estudantes espanhóis dos últimos períodos de um curso de licenciatura em Matemática, as dificuldades apresentadas para resolver problemas de combinatória considerados, por ele, elementares, estavam, entre outros motivos, na deficiência do ensino oferecido na educação básica, onde a ênfase foi dada ao estudo das fórmulas, em detrimento dos componentes mais primários como a enumeração sistemática e o diagrama de possibilidades.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam, dentre outras coisas, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, professores, devemos ter ao abordá-lo. Segundo esse documento:

> *As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).*

Contudo, embora as orientações sejam claras, percebemos, ao longo de nossa experiência como professoras, no contato com os colegas, que, também em nosso país, é comum o ensino da Análise Combinatória exclusivamente por meio de manipulação de fórmulas ou resoluções padronizadas[1]. Além disso, verifica-se facilmente – nas avaliações escolares e testes nacionais (PROVA BRASIL, por ex.) – que a aprendizagem, muitas vezes, não é alcançada a partir desses métodos. Tal fato aponta para a necessidade de romper com modelos tradicionais e construir e aplicar novas propostas.

A Análise Combinatória vem sendo estudada por alguns autores que evidenciam sua importância como conteúdo escolar. Eles identificam ainda aspectos que podem influenciar o processo de ensino aprendizagem desse conteúdo, como as principais estratégias de resolução, os tipos de problemas e os erros mais frequentes.

Kapur (1970 apud BATANERO, 1997, p 1, tradução livre)[2] descreve as razões que ratificam a importância do ensino de Análise Combinatória.

- *"Uma vez que não depende do Cálculo, permite considerar problemas adequados para diferentes níveis, podendo ser discutidos com alunos problemas ainda não resolvidos, de modo que descubram a necessidade de criar novas matemáticas.*
- *Pode ser usado para treinar os alunos na enumeração, a realização de conjecturas, a generalização, otimização e sistemas de pensamento.*
- *Pode ajudar a desenvolver diversos conceitos, tais como a aplicação, a ordem e as relações de equivalência, função, programa, conjunto, subconjunto, produto cartesiano, etc.*
- *Pode haver muitas aplicações em diferentes campos, tais como Química, Biologia, Física, Comunicação, Probabilidade, Teoria dos números, gráficos, etc. "*

[1] Entendemos como resoluções padronizadas aquelas sugeridas pelo professor como modelo e repetidas pelos alunos nas resoluções dos problemas.

[2] Texto na língua original:*“Puesto que no depende del Cálculo, permite plantear problemas apropiados para diferentes niveles; pueden discutirse con los alumnos problemas aún no resueltos, de modo que descubran la necesidad de crear nuevas matemáticas. Puede emplearse para entrenar a los alumnos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización, la optimización y el pensamiento sistemático. Puede ayudar a desarrollar muchos conceptos, como los de aplicación, relaciones de orden y equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc. Pueden presentarse muchas aplicaciones en diferentes campos, como: Química, Biología, Física, Comunicación, Probabilidad, Teoría de números, Grafos, etc.”*

Nesse sentido, a Análise Combinatória se constitui ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, permite a elaboração de situações-problema que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Apesar do reconhecimento da importância desse tema, o número de pesquisas nessa área ainda é pequeno. Em um levantamento, realizado em 2009, o grupo GERAÇÂO[3] verificou que o número de trabalhos envolvendo o tema raciocínio combinatório apresentado em eventos, tanto em âmbito nacional quanto internacional, nos últimos anos, é muito baixo. Neste arrolamento identificaram que, nos 23 encontros[4] de Educação investigados, ocorridos no período de 2004 a 2008, foram apresentados apenas 28 trabalhos sobre o tema. Em alguns desses eventos, nem mesmo houve a incidência de pesquisas nessa área.

O presente estudo pretende contribuir para o desenvolvimento das áreas de Educação Matemática e Educação estatística, mas, principalmente, para o crescimento profissional de professores que se interessam pelo processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Para tanto, buscamos investigar os aspectos que o influenciam.

Segundo Dubois (1984 apud BATANERO, 1997), os enunciados dos problemas combinatórios simples[5] podem ser classificados em três tipos diferentes: de seleção, de colocação e de partição. O primeiro está relacionado à ideia de amostras que podem configurar agrupamentos ordenados ou não ordenados, com repetição ou sem repetição de elementos. O segundo traz situações onde *n* elementos, diferentes ou não, devem ocupar m lugares. Ao resolver problemas desse tipo, devemos considerar algumas peculiaridades que influenciarão o resultado final, como, por exemplo, se os elementos são iguais ou diferentes, se os lugares possuem uma ordenação, se os elementos serão colocados nesses lugares de acordo com determinada ordem e se existe a possibilidade de algum lugar ficar vazio. Os problemas de partição propõem dividir grupos em subgrupos.

A seguir, apresentamos alguns problemas que Sturm (1999) extraiu do trabalho de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) para exemplificar esses três modelos.

---

[3] Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório. Criado em 2009 na Universidade Federal de Pernambuco.

[4] Psychology of Mathematics Education (2004, 2005 e 2006); International Conference on Teaching Statistics (2006); Conferencia Interamericana de Educación Matemática (2003 e 2007); Reunião de Didática da Matemática do CONESUL (2006); Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (2003 e 2006); Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (2006 e 2008); Encontro Nacional de Educação Matemática (2001, 2004 e 2007); Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (2000 a 2007); Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (2006).

[5] Segundo Roa (2000, p 21), os problemas combinatórios simples são definidos tanto por Gáscon (1988) quanto por Navarro-Pelayo (1994) como sendo aqueles que podem ser resolvidos mediante a aplicação de apenas uma operação combinatória, com ou sem repetição.

Modelo	Exemplos:
Seleção	*"Se quer eleger um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário: Para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Arturo, Basílio, Carlos e David. Quantos comitês diferentes se podem eleger com os quatro candidatos? Exemplo: Arturo como presidente, Carlos como tesoureiro e David como secretário*" (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1996, p 39 apud STURM, 1999, p 33)
Colocação	*"Dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes das cores amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes? Exemplo: Podemos colocar uma carta no envelope amarelo, outra no branco e outra no creme."* (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1996, p 38 apud STURM, 1999, p 33)
Partição	*"Maria e Carmen têm quatro cromos numerados de 1 a 4. Decidem repartí-los entre as duas (dois cromos para cada uma). De quantos modos se podem repartir os objetos? Exemplo: Maria pode ficar com os cromos 1 e 2, e Carmem com os 3 e 4."* (BATANERO, GODINO e NAVARRO-PELAYO, 1996, p 39 apud STURM, 1999, p 33)

Tabela 1: Exemplos de enunciados de problemas combinatórios simples.

Roa (2000, p. 17) chama a atenção para o fato de que o modelo criado por Dubois (1984) restringiu-se a uma esfera teórica, enquanto o trabalho de Navarro-Pelayo (1991) e Batanero e Navarro (1991) avaliaram o efeito que 'o modelo combinatório implícito no enunciado' tem sobre as dificuldades e as estratégias dos alunos.

Tomando como ponto de partida os estudos de Navarro-Pelayo (1994), Roa (2000, p. 22) analisa as categorias propostas como esquemas interpretativos dos enunciados de problemas combinatórios, denominando-os de 'esquemas combinatórios', e propõe subdividi-los segundo algumas condições.

O esquema de seleção[6] foi subdividido considerando o tipo de agrupamentos: se a ordem de seleção é ou não importante na formação de cada grupo e se os elementos se repetem. Do cruzamento entre essas possibilidades, estabeleceram-se os quatro modelos combinatórios: seleção ordenada sem reposição, seleção ordenada com reposição, seleção não ordenada sem reposição e seleção não ordenada com reposição. Esses modelos são comumente denominados, no Ensino Médio, respectivamente, como: Arranjo simples; Arranjo com repetição; Combinação simples e Combinação com repetição. Também no Ensino Médio é trabalhada a Permutação, que nada mais é que um caso especial de Arranjo.

Na figura a seguir, procuramos ilustrar essa ideia.

[6] "Cuando se requiere (o se interpreta el enunciado de esta manera) seleccionar muestras de un tamaño r a partir de un conjunto de n objetos" (ROA, 2000, p 22)

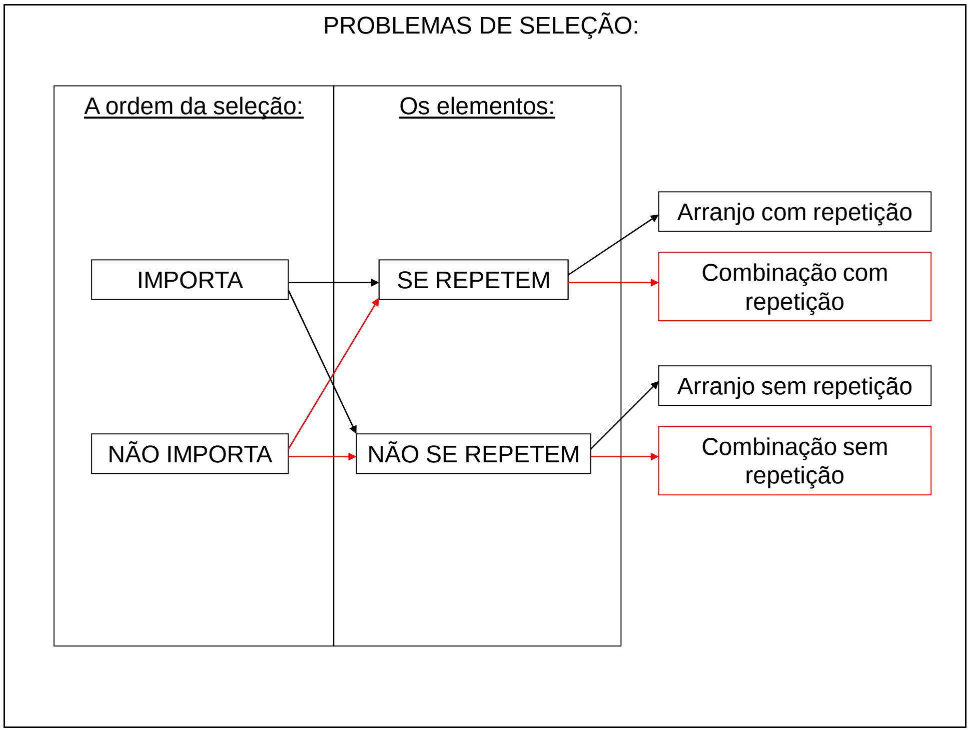


Figura 1: Problemas de seleção

Estes modelos geram as operações combinatórias básicas cujos modelos matemáticos podem ser observados na tabela a seguir.

Modelos combinatórios de seleção	**Modelos matemáticos**[7]
Arranjo simples	$A_{n,r} = n\ (n-1)\ ...(n\text{-}r\text{+}1)$
Arranjo com repetição	$AR_{n,r} = n^r$
Combinação simples	$C_{n,r} = A_{n,r} : P_r$
Combinação com repetição	$CR_{n,r} = C_{n+r-1,r}$.

Tabela 2: Modelos combinatórios de seleção e modelos matemáticos correspondentes.

A permutação (P_r) é um arranjo onde n = r, daí: $P_r = A_{r,r}$.

Tais modelos matemáticos podem e devem ser conhecidos pelos professores. Para os estudantes da Educação Básica, entendemos que a ênfase deve ser dada na resolução de problemas combinatórios, por meio de métodos como o diagrama de possibilidades e a observação de padrões, o que, possivelmente, levará à generalização desses modelos. A linguagem utilizada não precisa ser simbólica, pode apenas descrever o modelo.

Roa (2002) ainda propõe subdivisões para os esquemas de colocação e partição. No presente estudo, utilizaremos principalmente problemas envolvendo o esquema de seleção, visto que o grau de

[7] Nos modelos descritos, n representa a quantidade de elementos disponíveis para a seleção e r, o número de elementos de cada agrupamento.

complexidade que os outros esquemas envolvem está além do que usualmente é desenvolvido em classes do Ensino Médio.

Entendemos que identificar o subesquema de seleção de um enunciado contribui para a correta resolução de um problema, mas, como mostram algumas pesquisas, não é o suficiente. Os alunos apresentam outras dificuldades e podem cometer outros erros que não estejam ligados ao tipo de seleção.

Batanero (1997, p 8-9, tradução livre)[8] enumerou os onze erros mais comuns apresentados pelos alunos ao resolver problemas de combinatória. Na tabela a seguir, procuramos organizá-los.

	Descrição do erro
E_1	*Troca do tipo de modelo matemático do enunciado do problema*
E_2	*Erro de ordem: Este tipo de erro, descrito por Fischbein y Gazit (1988) consiste em confundir os critérios de combinação e arranjo; ou seja, considerando a ordem dos elementos quando é irrelevante ou, ao contrário, não considerar a ordem quando é essencial.*
E_3	*Erro de repetição: O aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando isso é possível ou repete os elementos quando não é possível.*
E_4	*Confundir o tipo de objetos: Considerar que os objetos são idênticos quando são distintos ou que objetos diferentes são análogos.*
E_5	*Enumeração não sistemática: Este tipo de erro foi descrito por Fischbein e Gazit (1988), e consiste em resolver o problema por enumeração, mediante tentativa e erro, sem um processo recursivo que conduza à formação de todas as possibilidades.*
E_6	*Resposta intuitiva errada: Os alunos apenas apresentam uma solução numérica errda, sem justificar sua resposta.*
E_7	*Não recordam a fórmula correta da operação combinatória que identificaram corretamente.*

[8] Texto original

	Descrição do erro
E_1	*Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema*
E_2	*Error de orden: Este tipo de error, descrito por Fischbein y Gazit (1988), consiste en confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial.*
E_3	*Error de repetición: El alumno no considera la posibilidad de repetir los elementos cuando ésto es posible o repite los elementos cuando no es posible hacerlo.*
E_4	*Confundir el tipo de objetos: Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles o que objetos diferentes son indistinguibles.*
E_5	*Enumeración no sistemática: Este tipo de error fué descrito por Fischbein y Gazit (1988), y consiste en resolver el problema por enumeración, mediante ensayo y error, sin un procedimiento recursivo que lleve a la formación de todas las posibilidades.*
E_6	*Respuesta intuitiva errónea: Los alumnos sólo dan una solución numérica errónea, sin justificar la respuesta.*
E_7	*No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente*
E_8	*No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria*
E_9	*Interpretación errónea del diagrama en árbol*
E_{10}	*Confusión en el tipo de celdas (tipo de subconjuntos)*
E_{11}	*en las particiones formadas. Esto puede ocurrir en los dos siguientes casos: a) La unión de todos los subconjuntos en una partición no contiene a todos los elementos del conjunto total. b) Olvidar algunos tipos posibles de partición.*

E_8	*Não recordam o significado dos valores dos parámetros da fórmula combinatória.*
E_9	*Interpretação errada do diagrama de árvore.*
E_{10}	*Confusão quanto ao tipo de agrupamento (tipo de subconjuntos)*
E_{11}	*Formação dos grupos. Isso pode ocorrer em dois casos seguintes: a) A união de todos os subconjuntos em um grupo que não contém todos os elementos do conjunto. b) Esquecer-se de alguns possíveis tipos de grupos*.

Tabela 3: Erros mais comuns apresentados pelos alunos ao resolver problemas de combinatória (extraído de BATANERO, 1997).

Como docentes, observamos que os erros também podem ser do tipo aritmético. Em geral, ocorre quando o número de agrupamentos é grande o suficiente para inviabilizar a enumeração de todos e, neste caso, o aluno precisa generalizar os padrões observados e criar uma estratégia que dependa de operações aritméticas. Acontece de o estudante interpretar o enunciado e definir corretamente as operações necessárias para resolver o problema, mas cometer erros na operação. Neste caso, podemos associar este erro a uma falta de atenção do sujeito ou a dificuldade de resolver operações aritméticas.

Alguns pesquisadores descreveram outras dificuldades além das citadas anteriormente. Hadar e Hadass (1981, apud ROA e NAVARRO-PELAYO, 2001, p 5-6) evidenciam que as dificuldades típicas dos alunos são:

> *a. Reconhecer o conjunto correto a enumerar;*
> *b. Escolher uma notação apropriada, o que é agravado com diferentes textos utilizando diferentes notações;*
> *c. Fixar uma ou mais variáveis;*
> *d. Generalizar a solução.*

Acreditamos que essas dificuldades podem ser minimizadas através de uma dinâmica que valorize as discussões, em pequenos ou grandes grupos, de problemas envolvendo diferentes tipos de situações. Ao propor essas atividades, é necessário considerar o grau de dificuldade que envolvem.

Para Roa e Navarro-Pelayo (2001, p 7), as dificuldades em relação a problemas combinatórios aumentam com o tamanho da solução. Nos problemas mais simples, que necessitam de apenas uma operação combinatória, o índice de acertos é maior. Uma das principais dificuldades é interpretar qual tipo de elementos combinar, qual esquema combinatório utilizar e, assim, ver se a ordem importa e se há repetição.

Em nossa experiência docente, observamos que quando a quantidade de elementos de cada agrupamento é menor, a enumeração, seja ela sistemática ou não, é realizada pelos alunos sem muita dificuldade, mas quando este número aumenta, muitos não são capazes de fazê-la, observação corroborada por Fernandes e Correia (2007, p 1261). Esses autores verificaram, em seu trabalho com

27 alunos do 9º ano de uma escola em Portugal, que o índice de respostas erradas aumenta quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação, principalmente quando se amplia o tamanho da amostra.

Nas discussões entre os participantes do ‘grupo da quarta’, verificamos que nossos alunos cometiam erros similares aos descritos por Batanero (1997) e também apresentavam as mesmas dificuldades enumeradas por Hadar e Hadass (1981), Roa e Navarro-Pelayo (2001) e Fernandes e Correia (2007). Nesse sentido, observamos que as barreiras estabelecidas para a compreensão da Análise Combinatória não obedecem a fronteiras.

É preciso conhecer e entender como se processam os erros mais frequentes apresentados pelos alunos, ao resolver problemas combinatórios, a fim de buscar estratégias para tentar evitá-los ou ainda minimizá-los. Nesse sentido, ao elaborar os problemas que constituirão uma proposta de ensino de análise combinatória, é preciso considerar que os enunciados dos problemas devem ser claros e fornecer os dados necessários para sua solução.

É comum um aluno do 2º ano do Ensino Médio interrogar seu professor de Matemática acerca do tipo de agrupamento envolvido em uma situação, ou mesmo ser capaz de resolver um problema combinatório utilizando a enumeração, quando a questão envolve um número pequeno de agrupamentos, mas com dificuldade de estabelecer padrões ou generalizar soluções para quantidades maiores.

Buscando sanar essas dificuldades, podemos incentivar nossos alunos a utilizar diferentes estratégias de resolução de problemas de combinatória por meio de procedimentos diversos. Incentivar o aluno a elaborar as próprias estratégias por meio da análise e discussão de situações-problema é uma alternativa. Os PCN (1998, p. 266) orientam:

> *Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando de etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.*

Roa (2000, p 15) resumiu as diversas estratégias intuitivas de enumeração, caracterizadas nas obras de diversos autores (MAURY, 1986; MENDELSHON, 1981; SCARDAMALIA, 1977), em cinco tópicos: a) Seleção aleatória dos elementos; b) tentativa de enumerar todos os agrupamentos sem utilizar elementos que já foram utilizados em outros agrupamentos; c) tentativa de encontrar, por meio de um processo sistemático, todos os agrupamentos possíveis (ex. seleção aleatória de elementos e permutação cíclica entre eles para determinar outros agrupamentos); d) uso de um elemento constante que servirá como referencial para a formação dos agrupamentos e, por último, e) a estratégia algorítmica completa que se caracteriza pela aplicação do elemento de referência e de um modo cíclico sistemático e completo.

Dentre as formas apresentadas, a utilização da última estratégia revela a capacidade de encontrar todos os agrupamentos de modo sistemático e, consequentemente, de resolver problemas que envolvem a enumeração de possibilidades. Nessa estratégia, o uso de um elemento de referência facilita o processo de generalização e, ao enumerar de forma sistemática e cíclica, aumentamos a chance de descrever todas as possibilidades.

Roa e Navarro-Pelayo (2001) afirmam que os estudantes são capazes de identificar corretamente o tipo de agrupamentos e a repetição que causa uma interferência. Entretanto, apesar de a maioria dos alunos interpretar a ordem corretamente, muitos cometem erros ligados à combinação ou quando ignoraram a possibilidade de repetição dos elementos. Os métodos mais usados são a enumeração e o uso de fórmulas e, muitas vezes, um método é utilizado para validar o outro. O uso de diagrama de árvores é escasso. Geralmente, são utilizadas técnicas de resolução de problemas como traduzir o problema a outro equivalente, fixar variáveis, regras de soma, produto e quociente, e decompor o problema em subproblemas.

Em sua pesquisa, Fernandes e Correia (2007) identificaram quatro tipos de estratégias utilizadas pelos alunos para resolver os problemas de combinatória: a enumeração, o diagrama de árvore, o uso de fórmulas e a operação numérica, utilizadas de forma isolada ou concomitantemente. O maior índice de acertos nas respostas para os problemas ocorreu quando as estratégias adotadas foram o diagrama de árvores e as operações, seguidas pela enumeração sistemática. Os autores afirmam que: *“a estratégia de enumeração é amplamente utilizada pelos alunos. No entanto, quando aumenta o número de elementos envolvidos na operação combinatória, esta estratégia é geralmente menos usada e diminuiu a sua eficácia em termos de percentagem de respostas correctas”* (FERNANDES e CORREIA, 2007, p 1266).

Segundo Roa (2000), autores como Piaget e Inhelder concordam que, se apresentarmos problemas simples envolvendo raciocínio combinatório a adolescentes, eles serão capazes de resolvê-los utilizando processos também simples como a enumeração. Para eles, esse tipo de raciocínio influencia o desenvolvimento do pensamento formal. Roa (2000) também afirma que, para autores como Fischbein, apesar de os adolescentes apresentarem essa capacidade espontânea, nem sempre é possível alcançar-se um nível mais elaborado de raciocínio combinatório, quando não se tem acesso ao ensino. Nesse sentido, para construirmos uma proposta de ensino de Análise Combinatória eficaz, faz-se necessária, inicialmente, uma investigação sobre o nível de raciocínio combinatório em que os alunos se encontram e o que pode ser feito para que possam alcançar patamares mais elevados.

Entretanto, em muitos casos, as fórmulas são apresentadas sem uma discussão prévia, apesar de, em geral, os alunos já apresentarem um raciocínio combinatório elementar. Esse conhecimento não é considerado e parte-se do princípio do total desconhecimento do assunto em questão. Os problemas propostos transformam-se em atividades cujos objetivos se restringem à aplicação de fórmulas.

Batanero (1997) afirma que, para ensinar Análise Combinatória, deveríamos considerar o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de centrar nossos esforços em aspectos algorítmicos e em definições combinatórias.

Para evitar que os alunos apenas memorizem as fórmulas e, depois de algum tempo, as esqueçam ou não sejam capazes de aplicá-las adequadamente por desconhecer seu sentido, é importante construir todo o processo juntamente com eles, de modo que, efetivamente, compreendam cada ação realizada, refletindo a respeito do problema e analisando a melhor estratégia para resolvê-lo.

Esteves (2001) destaca que o relacionamento dos alunos com o professor, tipos de atividades propostas e o ambiente de trabalho são alguns dos diversos fatores que podem influenciar o aprendizado, visto que as atividades devem ter significado e fazer sentido para os alunos e estes têm de se sentir confiantes perante o professor para que o aprendizado flua de forma favorável. A autora destaca também a importância de valorizarmos os diferentes tipos de representações. Estas facilitam a visualização do processo utilizado para chegar à formalização e facilitam a percepção de objetos abstratos que não são diretamente compreensíveis, pois representam um ambiente próximo do indivíduo.

Segundo Vergnaud (1998, apud ESTEVES, 2001, p 74), a representação é um reflexo da realidade, um meio para prever efeitos reais e calcular as ações que se vão realizar. Nesse sentido, trabalhar com materiais concretos facilita a compreensão por parte do aluno, além de estimulá-lo.

Sendo assim, ensinar Análise Combinatória a partir da aplicação de fórmulas não torna a aprendizagem mais eficiente. O aluno pode até conseguir resolver alguns problemas mais simples, entretanto, provavelmente, terá dificuldades em situações onde os agrupamentos têm alguma particularidade como, por exemplo, formar numerais pares utilizando alguns algarismos, principalmente se entre eles estiver o zero. No sentido contrário, defendemos a ideia de que aulas nas quais são utilizadas dinâmicas que estimulam a interação e o diálogo levam o aluno a buscar estratégias próprias, atribuindo significado ao que está aprendendo, potencializando o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

Nesse sentido, torna-se essencial compreender a natureza da Comunicação Matemática que se estabelece na sala de aula e aspectos que podem potencializá-la. Tais aspectos são centrais na estruturação e desenvolvimento de nossa proposta de ensino. No próximo capítulo, apresentamos os significados atribuídos ao construto neste estudo.

CAPÍTULO 2:

A COMUNICAÇÃO E O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Na presente investigação, buscamos um referencial teórico que nos auxiliasse a construir e analisar uma proposta de ensino na qual, através da discussão de situações-problema, envolvendo alunos e professor, em pequenos e grandes grupos, pudéssemos potencializar o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

A natureza das atividades que vínhamos desenvolvendo com os alunos em sala de aula, ao longo dos últimos anos, nos levou a pensar que, talvez, o referencial estaria relacionado à "Resolução de Problemas", "Investigações na Sala de Aula de Matemática" ou "Cenários para a investigação". Procuramos conhecer cada uma dessas tendências, de modo a evidenciar suas características e distinções, bem como verificar se possuíam os elementos necessários para fundamentar teoricamente nosso estudo.

As leituras mostraram que, apesar de todas essas tendências se relacionarem com a proposta que estávamos desenvolvendo, nenhuma delas atendia totalmente nossas expectativas. Percebemos que o mais importante em nossa proposta não era a natureza das atividades em si, mas a dinâmica na qual eram desenvolvidas. Ou seja, a interação estabelecida entre professor e alunos e aluno-aluno era o ponto central. Nesse momento, começamos a estudar o artigo de Martinho e Ponte (2007a)[9] e estabelecemos nosso primeiro contato com a "Comunicação na sala de Aula de Matemática".

Em experiências anteriores, observamos que a aprendizagem dos alunos não se dava apenas em função da atividade proposta em si. . Era o clima criado na sala que fazia a diferença. Ou seja, eram as discussões em pequenos e grandes grupos, formados por professores e estudantes, e os registros por elas gerados que influenciavam os sujeitos, atribuindo significado ao que estavam aprendendo. Nesse sentido, a Comunicação na sala de aula de Matemática seria o melhor referencial para nosso trabalho.

Apresentamos neste capítulo uma síntese de nossas leituras, destacando alguns aspectos que, além de centrais para a compreensão do tema, revestem-se de significado ao fundamentar nossas escolhas metodológicas e orientar a análise dos dados.

Para a maioria das pessoas, a comunicação é, necessariamente, uma relação dual entre um emissor e um receptor que trocam informações, utilizando-se de determinados códigos.

---

[9] MARTINHO, Maria Helena; PONTE João Pedro da. **Comunicação na sala de aula de Matemática**: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. 2007a.

Comunicamos-nos ao transmitir alguma informação, mas também podemos fazer da comunicação entre duas ou mais pessoas uma situação privilegiada de ensino e de aprendizagem. Para tanto é preciso garantir que o diálogo estabelecido estimule a construção de novos pensamentos e argumentos capazes de validá-los. Em um processo comunicativo no qual indivíduos apresentam suas ideias de modo aberto e sem receios, todas as partes têm a possibilidade de ensinar e aprender um com o outro.

Durante séculos, a comunicação – inicialmente oral e depois, oral e escrita – exerceu o papel de instrumento de perpetuação de costumes de um determinado povo, através dos ensinamentos transmitidos de uma geração para outra, na expectativa de que o conhecimento seja imortalizado através dos tempos. O escritor registra seus pensamentos em um papel que poderá ser lido por outras pessoas e estas construirão seus próprios pensamentos acerca daquilo que acabaram de ler. Entretanto, a comunicação pode, também, exercer um papel controlador dos membros de uma sociedade. Em algumas situações, discursos podem ser utilizados para coagir os sujeitos a agirem, não de forma livre, mas influenciados pelas ideias de outros.

Conversando com outros professores e a partir de nossas experiências como docentes, podemos afirmar que há, em nosso universo escolar, aulas com procedimentos bem variados: de ambientes que incentivam a troca de experiências, através de discussões em pequenos e grandes grupos, a aulas em que o aluno é incentivado a manter-se isolado ou é impossibilitado de expressar suas conjecturas e dúvidas. Em ambientes como este, a interação entre o professor e os alunos baseia-se em uma relação entre um sujeito que informa e outro que recebe a informação.

Durante os anos de docência que precederam este trabalho, observamos que a interação estabelecida entre professor e alunos (bem como entre os alunos), mais especificamente, a forma como se comunicam em sala de aula influencia, significativamente, os processos de ensino e aprendizagem.

Para D'Antonio (2006, p 31), *"de um modo geral, na sala de aula, a Matemática tem se reduzido à memorização de fórmulas, símbolos e a cálculos incessantes"*. Este espaço, aparentemente menos democrático, tende a reforçar o autoritarismo do professor e a criar alunos mais submissos e com dificuldades de argumentação. Nesse contexto, a relação entre professor e aluno segue um padrão hierárquico de manutenção do poder.

Aulas em que o aluno é um mero receptor de informações podem levá-lo a repetir procedimentos sem atribuir-lhes significado. Entretanto, se o ambiente é favorável a discussões que valorizam a argumentação, o aluno constrói seu próprio conhecimento, a partir do que emite e do que recebe. A revisão de literatura vem corroborar e aprofundar essas noções, construídas a partir de nossa experiência como docente.

A forma como o professor se relaciona com seus alunos e a dinâmica que se estabelece na classe relacionam-se com a visão de ensino e de aprendizagem de Matemática que possui esse docente. Cada abordagem traz, em sua essência, ecos dessa visão. Dessa forma, encontramos na literatura diversas abordagens que privilegiam determinados tipos de comunicação que buscam contribuir com o processo de ensino e aprendizagem. A resolução de problemas, por exemplo, privilegia uma relação na qual o aluno não é um simples agente passivo nesse processo. Para Menezes (1999, p.5), as intervenções dos alunos "*dependem em grande medida do espaço discursivo que o professor "reserva", tendo em conta os modelos de ensino/aprendizagem que privilegia. Numa aula de resolução de problemas, por exemplo, será importante que o professor estimule os alunos a mostrarem, dizerem, explicarem e criticarem as várias resoluções*".

Mais do que ensinar a um aluno como resolver problemas, oferecendo-lhe habilidades e técnicas, é necessário garantir o espaço de discussões para que possa aprender consigo mesmo e com os outros. Estabelecer analogias e diferenças entre suas soluções e as dos colegas, aprender com os erros, expressar-se de forma organizada, a fim de defender suas ideias perante os outros, são algumas das contribuições que este espaço pode gerar.

Outra abordagem que destacamos são os cenários de investigação, propostos por Skovsmose (2000)[10]. Para o autor, um Cenário para Investigação se estabelece quando os alunos são convidados e aceitam o convite para participar ativamente em processos de exploração e argumentação justificada. Nesse ambiente de aprendizagem, a comunicação exerce um papel importante. Skovsmose (2000; 2001[11]) vai além, ao propor que a sala de aula – como microssociedade – mostre aspectos de democracia. Assim, em uma sala de aula, tal como em uma democracia, é imprescindível a criação e manutenção de espaços onde todos os indivíduos possam dialogar, em pequenos ou grandes grupos, gozando a liberdade de expressão. Portanto, é necessário garantir que a sala de aula seja um ambiente no qual alunos e professores possam se manifestar, de forma organizada, expondo e defendendo suas ideias. Para que esse meio democrático seja criado, não basta abrirmos espaço na sala de aula para as discussões. É preciso desenvolver nos indivíduos a capacidade de se expressar e ser entendido pelo outro.

Acreditando no valor desse tipo de relação entre professor e alunos (bem como entre alunos), procuramos aprofundar nossa concepção acerca do termo comunicação.

---

[10] SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, ano 13, nº 14, p. 66-91, 2000.
[11] SKOVSMOSE, O. ***Educação matemática crítica:*** A questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

A influência da Comunicação no processo de ensino e aprendizagem é reconhecida como valiosa por vários autores. Em sua tese de doutorado, Martinho (2007) realiza um levantamento da literatura sobre a comunicação no contexto específico da sala de aula de Matemática e nos vários níveis de ensino. Ela evidencia que vários autores (BISHOP e GOFFREE, 1986; VOIGT, 1995; YACKEL e COBB, 1996; HICKS, 1998; WOOD, 1998; PONTE e SANTOS, 1998; PONTE e SERRAZINA, 2000; ROMÃO, 2000, dentre outros) reconhecem a importância da comunicação, destacando os padrões de interação subjacentes e a negociação de significados como essenciais para a aprendizagem de Matemática.

Em alguns países, movimentos educacionais ressaltam a importância de se discutir o tipo de comunicação que se estabelece na sala de aula e seu reflexo no processo de ensino e aprendizagem em diversas áreas, entre elas, a Matemática.

Portugal é um deles. Estudos sobre a comunicação vêm ganhando projeção, desde a década de 1980, quando ocorreu o movimento de reforma no ensino da Matemática (ex. MENEZES, 1999; MARTINHO, 2007). Segundo Romão (1998 apud SANTOS, 2009), a importância atribuída à mudança da comunicação de *caráter unívoco* para o *estabelecimento de comunidades discursivas* na sala de aula exerceu um papel de destaque neste movimento.

Menezes (1999), em uma conferência sobre Matemática, Linguagem e Comunicação, refere-se a três autores que defendem o estudo da comunicação como essencial no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. A tabela a seguir apresenta tais ideias.

Stubbs (1987 apud MENEZES, 1999, p 1)	*“... ensinar e aprender confundem-se com a própria comunicação.”*
Baroody (1993 apud MENEZES (1999, p14)	*“as principais razões para focar o ensino da Matemática na comunicação podem ser sintetizadas em dois pontos: a primeira, é que a Matemática é essencialmente uma linguagem — uma segunda linguagem; a outra, é que a Matemática e o ensino da Matemática são, no seu âmago, actividades sociais".*
Long (1992 apud MENEZES, 1999, p 6)	*“... uma comunicação efectiva na sala de aula contribui para o desenvolvimento da capacidade de pensar e melhora a aprendizagem dos alunos.”*

Tabela 4: A importância da Comunicação no processo de ensino e aprendizagem em Matemática para alguns autores.

No Brasil, no final da década de 1990, os PCN (1999, p 125) sugerem a necessidade de mudanças no processo de ensino-aprendizagem. Dentre estas, propõem um trabalho sistemático e organizado com a linguagem, a fim de desenvolver um conjunto de disposições e atitudes como pesquisar, selecionar informações, analisar, sintetizar, argumentar, negociar significados, cooperar, buscando capacitar o aluno a participar da sociedade como cidadão, sendo capaz de prosseguir seus estudos e preparar-se para o trabalho.

Além disso, vários trabalhos (FANIZZI, 2008; D' ANTONIO, 2006; GOMES, 2007; BENITES, 2006; VACCARI, 2007; SILVA, 2007; FERREIRA, 2007; entre outros), em diversas áreas da Educação Matemática, citam a comunicação como um veículo eficaz no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Em alguns, como em nossa pesquisa, o assunto é tratado, concomitantemente, com conteúdos matemáticos específicos. Seguem alguns exemplos.

Ferreira (2007) investiga as dificuldades que alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio apresentam diante de situações de argumentação e prova, envolvendo o teorema de Pitágoras.

Gomes (2007), ao estudar sobre aulas investigativas na Educação de Jovens e Adultos, afirma que a riqueza das tarefas propostas encontra-se, entre outros motivos, nos processos de argumentação e validação das diversas estratégias de resolução, bem como na comunicação das ideias. Alguns trabalhos dedicam-se a discutir não a Comunicação ou a Comunicação Matemática, mas investigam assuntos correlacionados, como, por exemplo, a argumentação, a linguagem e as interações na sala de aula.

Fanizzi (2008), Vaccari (2007) e Benites (2006), em suas dissertações, evidenciaram a importância das interações entre alunos e professores no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, Silva (2007) reflete sobre como a argumentação pode contribuir no ensino e na aprendizagem de Física.

Outro estudo interessante é o de D'Antonio (2006). Ela investigou se e de que forma as interações estabelecidas entre professor e alunos contribuem para o aprendizado de Matemática. A partir da observação das aulas de duas professoras, verificou-se que os alunos se esforçam em responder o que acreditam que seu professor deseja ouvir e este, por sua vez, influencia as respostas por meio de gestos, entonação de voz, desenhos e questionamentos. Dessa forma, o aluno é induzido a responder como seu professor espera que faça sem, necessariamente, compreender os argumentos que levaram àquela resposta. Segundo a autora, o discurso do professor é muitas vezes usado para impor sua opinião em detrimento das ideias dos estudantes. D'Antônio (2006, p 110-111) afirma que:

> *O professor procura, por meio de seu discurso, convencer seus alunos de que o caminho por ele indicado é o mais correto e seguro. Todavia, tais argumentos são, muitas vezes, mais usados para impor uma opinião do que para contrapor um ponto de vista a partir de um diálogo pretendido pelos alunos, visto que muitas das perguntas levantadas por estes e pelos docentes não são respondidas.*

Por fim, a autora ressalta a necessidade de professores e alunos vivenciarem uma prática dialogada, abrindo espaço para que o aluno participe ativamente do processo de ensino e aprendizagem.

Estes estudos confirmam o interesse de professores e pesquisadores pela investigação da Comunicação Matemática na sala de aula. Entretanto, o que entendemos por comunicação? E comunicação matemática?

Definindo Comunicação e Comunicação Matemática na sala de aula

Comunicação é um termo que apresenta várias definições. No senso comum, a comunicação é entendida como a transmissão de informações entre indivíduos. Para Menezes (1999, p. 3):

> *Quando afirmamos que dois homens comunicam, consideramos duas realidades complementares, entendendo a palavra em dois sentidos: no sentido etimológico, "comunicar" está ligado ao adjectivo comum e ao substantivo comunidade. Comunicar será neste sentido "tornar comum", "pôr em comum", ou ainda, "estabelecer comunidade".*

Segundo Martinho (2007b, p 14), a comunicação, como definição elementar, pode ser entendida como *"mensagem trocada entre um receptor e um emissor"* e, de acordo com os autores Mounier (1960 apud MARTINHO, 2007b) e Kierkegaard (1941 apud MARTINHO, 2007b), como, respectivamente, "*experiência estruturante da pessoa*" ou uma "*relação existencial entre indivíduos singulares e concretos*".

Na presente pesquisa, a comunicação é percebida como um processo mais complexo que uma troca de mensagens ou uma relação entre indivíduos. É um processo capaz de criar interações e influenciar os sujeitos envolvidos.

A comunicação pode ser enfocada de distintas formas, segundo o contexto no qual pretendemos analisá-la. Martinho (2007, p 16) exemplifica os aspectos que são destacados em dois desses contextos, como podemos acompanhar no quadro a seguir.

Contextos:	**Papel da comunicação:**
Psicolinguística	*"... é vista como um intercâmbio de mensagens informativas, analisando-se principalmente a actuação dos intervenientes sobre os significados. Assim, as características pessoais dos intervenientes, os seus modos de percepção, as formas como processam informação, as expressões mais utilizadas, são consideradas muito relevantes"* (MARTINHO, 2007, p 16).
Semiótica	*"Ao colocar a comunicação exclusivamente ao nível do signo, esta torna-se num*

	objecto, independente do contexto, dos intervenientes e da relação entre eles estabelecida. No entanto, por si só, esta visão é limitada" (MARTINHO, 2007, p 16).

Tabela 5: O papel da comunicação nos contextos da Psicolinguística e da Semiótica.

A comunicação no contexto da Semiótica contrapõe-se à Psicolinguística, quando deixa de considerar quem são e o meio em que os interlocutores estão inseridos. No ambiente de sala de aula, o processo comunicativo não apresenta características relacionadas exclusivamente a apenas um destes contextos. Utiliza-se daqueles aspectos que podem contribuir para a educação como, por exemplo, a linguagem e as características dos sujeitos envolvidos no intercâmbio de informações.

Para Menezes (1999), apesar de as interações na aula de Matemática e a Comunicação apresentarem zonas de interseção, são conceitos diferentes. A interação pode ser entendida como "*ações que indivíduos exercem sobre outros*" (MENEZES, 1999, p 2), sem, necessariamente, apresentar finalidades comunicativas do tipo que transferem alguma informação, enquanto a Comunicação tem essa transferência como objetivo. Entretanto, o autor afirma que o intercâmbio acontece em vários meios, inclusive meios além do sistema linguístico, e as informações recebidas pelo receptor podem não ter origem linguística. Dessa forma, entende a comunicação humana como uma forma de interação social entre indivíduos.

Para Saramona (1987 apud MARTINHO, 2007b, p. 16), comunicação e transmissão são conceitos diferentes. A primeira ocorre quando a informação é significativamente interiorizada pelo receptor, e a segunda, quando não é atribuído nenhum significado.

Na sala de aula, professores e alunos estabelecem relações e estas geram consequências que tanto podem contribuir quanto prejudicar o desenvolvimento do processo comunicativo. É evidente que os profissionais da educação não têm interesse em influenciar negativamente o aprendizado de seus alunos e alunas, mas, sem uma reflexão adequada sobre o tipo de comunicação que se pretende promover no ambiente da sala de aula, podem, involuntariamente, cometer este erro.

Nesse sentido, uma comunicação capaz de influenciar os sujeitos positivamente pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Para Martinho e Ponte (2007, p 2): *"a comunicação constitui um processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente"*. Nessa perspectiva, os sujeitos, ao participarem do processo comunicativo, interagem trocando informações e sendo influenciados por elas. Nesse sentido, alunos e professores poderiam ser incentivados a dialogar e a desenvolver argumentos consistentes, mostrando-se capazes de defender suas ideias e construir o próprio conhecimento.

Influenciados por Martinho (2007), entendemos a Comunicação Matemática como sendo a Comunicação estabelecida nas aulas de Matemática, envolvendo, especificamente, saberes matemáticos ou a eles relacionados.

No presente estudo, investigamos a Comunicação e a Comunicação Matemática no ambiente específico da sala de aula. Para tanto, adotamos a definição utilizada por diversos autores e compilada por Santos (2009, p 117), "*na aula de matemática, a comunicação pode ser entendida, com diferentes autores que têm se ocupado dela, como todas as formas de discursos, linguagens utilizadas por professores e alunos para representar, informar, falar, argumentar, negociar significados*".

Tais ações têm influência direta no processo de ensino e aprendizagem e podem potencializá-lo na medida em que são direcionadas para a aprendizagem.

Em uma aula na qual se deseja promover a Comunicação Matemática, capaz de levar o estudante a apropriar-se de conhecimentos através de questionamentos acerca do que pensa saber e das novas informações que lhe são oferecidas, é essencial promover momentos de discussão de ideias entre os sujeitos. Ao expressar-se, elaborando argumentos, o indivíduo atribui significado e se apropria do conhecimento, potencializando assim maior autonomia no processo de ensino e aprendizagem.

Para D'Antonio (2006, p 27), "*um grande número de educadores defende, se fundamentando em diferentes enfoques teóricos, que a atividade do sujeito é essencial para a construção de seus saberes*". Quando o estudante tem a oportunidade de elaborar suas conjecturas acerca de determinado assunto e defender suas ideias perante outros indivíduos, torna-se intelectualmente mais autônomo, portanto, torna-se capaz de construir estratégias próprias de resolução de problemas, ao invés de repetir aquela ensinada pelo professor, aprende a reconhecer diferentes resoluções, compará-las e adquirir um conhecimento com significado.

Aspectos essenciais da comunicação: interação e negociação de significados

Martinho (2007) destaca dois aspectos essenciais: a interação e a negociação de significados. A interação constitui a dinâmica do processo comunicativo entre os presentes na sala de aula e a negociação de significados, o modo como estes sujeitos partilham, desenvolvem, ajustam e apropriam-se de conceitos e processos matemáticos.

Segundo Menezes (1999, p 4),

> *a qualidade do trabalho desenvolvido por uma turma, e consequentemente o tipo de linguagem e a qualidade da comunicação, depende, em grande medida, da forma como o professor organiza as situações de ensino/aprendizagem, da forma como organiza o trabalho dos alunos, de como os orienta e das tarefas que apresenta.*

Contudo, no cotidiano escolar

> *o livro e o professor são as fontes donde brotam correntes de palavras, muitas delas com pouco significado para os alunos; a comunicação dos alunos, nas aulas, restringe-se a respostas curtas a perguntas formuladas oralmente pelo professor e a exercícios escritos modelados anteriormente. Nestas aulas, os alunos não são chamados a explicar as suas ideias, nem a confrontá-las com as dos colegas. Apesar de os alunos estarem agrupados em turmas com duas a três dezenas de elementos, a aprendizagem faz-se no mais perfeito isolamento, como se aqueles não tivessem condições físicas de estabelecer comunicação (*MENEZES, 1999, s/n)[12].

Dificilmente, em uma aula em que prevalece a exposição de conteúdo pelo professor e uma atitude passiva por parte dos alunos, pode-se encontrar um ambiente propício para uma relação que privilegia a negociação de significados. Em contrapartida, aulas investigativas ou de resolução de problemas que instigam os estudantes a criarem estratégias, a trabalhar em grupos, nos quais estas estratégias são partilhadas e discutidas, exigem um esforço maior na direção de criar argumentos consistentes.

Concordamos com Menezes (1999, p 14): *"a comunicação entre os alunos, tanto oral como escrita, constitui um aspecto que o professor deve incrementar, porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos"*. Dessa forma, é essencial estabelecer uma interação entre professor e alunos na qual exista espaço para a troca de saberes, a argumentação e a construção coletiva de conhecimento, mais que a transmissão de informações. Ou seja,

> *a interação, além de uma fonte para a aprendizagem da cooperação, torna-se uma fonte de construção de conhecimentos compartilhados, visto que quando professor e alunos colaboram e interagem no debate de assuntos e problemas, diferentes pontos de vista podem surgir e serem negociados* (D'ANTONIO, 2006, p 17).

Na sala de aula são desencadeados vários processos interativos. Os contextos em que ocorrem são diversos e as formas de expressão também. As relações professor/aluno e aluno/aluno processam-se de forma diferente. Na primeira, existe uma assimetria que pode ser (e, muitas vezes, tem sido) acentuada pela forma como muitos de nós, professores, conduzimos nossa aula. Em geral, o professor

---

[12] MENEZES, Luis. Matemática, linguagem e comunicação. **Ata do PROFMAT 99**, 1999, Lisboa, APM, Disponível em http://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm

começa a aula explicando o conteúdo aos alunos e, em seguida, propõe uma série de exercícios para serem resolvidos de acordo com os modelos apresentados anteriormente. O aluno não tem a oportunidade de utilizar seus conhecimentos prévios e, em alguns casos, nem mesmo pode questionar as informações transmitidas pelo professor que, nesse contexto, é o único detentor de conhecimento.

Em discussões envolvendo professor e aluno, este tende a submeter-se ao discurso do primeiro e esforçar-se menos para julgar até que ponto a ideia apresentada é significativa. Para o professor, muitas vezes, é difícil ouvir sem interferir no discurso do aluno, visto que, habitualmente, define o que está certo ou errado na sala de aula. Mas essa relação pode ser mais democrática quando professor e alunos, juntos, buscam aprender, utilizando recursos que possibilitem uma interação capaz de gerar conhecimento. As interações estabelecidas na sala de aula podem interferir positivamente no processo de ensino e aprendizagem, na medida em que tornam possível aprender com o outro.

Na relação estabelecida entre estudantes podemos ainda observar certa hierarquia. Em grupos de alunos resolvendo determinada atividade proposta pelo professor, é possível verificar que alguns assumem o papel de líder, enquanto outros preferem seguir as orientações. Essa divisão de funções não é necessariamente prejudicial ao processo, mas é preciso garantir que todos tenham a oportunidade de participar, expondo suas ideias. Um líder pode organizar a dinâmica do grupo, mas não deve assumir para si toda a responsabilidade de resolver a atividade proposta.

Em geral, em grupos de alunos, a comunicação flui com mais facilidade, visto que a linguagem utilizada é comum aos indivíduos e a força da hierarquia é menor. As discussões costumam ser mais independentes quando o grupo é formado por crianças. Elas geralmente resolvem suas diferenças sem a necessidade da intervenção de um adulto. Estes é que insistem em participar e muitas vezes interferem de forma negativa, inibindo a criatividade dos estudantes. Com o tempo, os alunos perdem a habilidade de procurar aprender com o outro e começam a buscar o professor para “saber a resposta certa”. Assim, ao trabalharmos com adolescentes, precisamos levar em consideração que uma relação de dependência já foi estabelecida anteriormente e modificá-la não é uma tarefa fácil.

É no trabalho cooperativo estabelecido nas relações em sala de aula que as interações acontecem e contribuem para a aprendizagem. A partir das discussões, os indivíduos constroem argumentos, conhecem as ideias defendidas por outros e negociam significados. Para Martinho (2007b, p. 36), “*quando o aluno se envolve no processo de explicar as suas ideias aos outros e com o objectivo de ser entendido, ele próprio pode sentir uma evolução nas suas compreensões*”.

Espera-se, portanto, que a comunicação estabelecida contribua para o processo de ensino e aprendizagem e que as relações entre professores e alunos tenham um aspecto cooperativo, tornando a interação entre as partes mais produtiva.

Carvalho (2009, p. 15) argumenta que

> *Quando se realizam tarefas de forma colaborativa na sala de aula, mais facilmente se discutem e explicam ideias, se expõem, avaliam e refutam pontos de vista, argumentos e resoluções, ou seja, criam-se oportunidades de enriquecer o poder matemático dos alunos pois cada um dos parceiros está envolvido na procura da resolução para a tarefa que têm em mãos.*

Martinho (2007b, p. 21), apesar de considerar a existência de sete possíveis pares de interação em uma sala de aula (professor-aluno, professor-grupo, professor-turma, aluno-aluno, aluno-grupo, aluno-turma, grupo-turma, bem como os seus simétricos), enfatiza apenas as relações que envolvem o professor por considerar que "*o cerne das questões que se colocam em Educação Matemática passa essencialmente pelo professor*".

Concordamos com a autora quanto à importância das interações envolvendo o professor no desenrolar do processo de ensino e aprendizagem, contudo, acreditamos que as relações que se estabelecem apenas entre os alunos também exercem uma influência considerável nesse desenvolvimento. Os estudantes aprendem com seus pares ainda que não haja a intervenção do professor.

Para Carvalho (2009, p. 18), a interação na sala de aula pode ser vertical ou horizontal. A primeira acontece quando um sujeito, em geral, o professor, conduz o processo interativo em sua relação com os alunos. É ele quem decide quando uma atividade deve ser realizada, quem vai falar e até mesmo o grau de importância das intervenções dos alunos. Na interação horizontal, os indivíduos reconhecem em si e nos outros a mesma capacidade e conhecimento, o que facilita a aceitação das ideias de seus pares como sendo significativas. Acostumados a vivenciar uma interação vertical, os alunos sentem dificuldade em trabalhar no modelo horizontal, mesmo quando organizados em grupos menores.

Segundo Martinho (2007), Brendefur e Fykholm (2000) propõem *um modelo de quatro níveis de comunicação na sala de aula: uni-direcional, contributiva, reflexiva e instrutiva.* O quadro a seguir apresenta os padrões de interação subjacentes a cada um destes níveis de comunicação.

Níveis de comunicação	Padrões de interação
Padrão uni-direcional	*o professor fala quase sempre só, coloca questões fechadas e não dá oportunidade aos alunos para exprimirem as suas ideias, estratégias ou pensamentos.*
Padrão contributivo	*já se verifica alguma partilha de ideias, soluções e estratégias embora sem grande exigência cognitiva. As interacções entre alunos são aqui mais comuns.*
Padrão reflexivo	*para além da partilha, são estabelecidas conversas em torno dos conteúdos e dos próprios discursos. As diferentes falas são utilizadas como apoio para novas e mais profundas explorações. As reflexões não surgem de forma espontânea por parte do aluno mas são proporcionadas pela participação na construção do discurso da aula.*
Padrão instrutivo	*o professor para além de encorajar a reflexão, procura modificar as compreensões matemáticas dos alunos bem como a sua própria prática. O facto de o pensamento do aluno se tornar público, torna o professor consciente dos processos de pensamento, limitações e capacidades dos alunos e isso afecta a sua própria prática.*

Tabela 6: Os níveis de Comunicação e as interações subjacentes segundo Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007b, p. 25).

Para esses autores, a comunicação no padrão instrutivo só é alcançada após uma longa experiência gerada por aulas de nível reflexivo.

Considerando nossa experiência docente, reconhecemos que o primeiro nível proposto nesse modelo, além de ser o mais comum, como também ressalta Martinho (2007), é aquele em que o professor se julga mais protegido, por considerar que possui o controle total da aula.

Alguns professores podem sentir-se inseguros, ao propor atividades potencialmente geradoras de discussões. Em escolas com um número maior de docentes na área de Matemática, esse problema poderia ser resolvido com a criação de um grupo de estudos, no qual atividades seriam propostas e analisadas previamente. Em escolas menores, onde, muitas vezes, apenas um professor leciona para todas as turmas, um grupo de estudos não seria viável dentro da instituição, mas, com o avanço dos meios de comunicação, outros grupos podem ser criados e o conhecimento, partilhado.

A Comunicação estabelecida entre os alunos através da interação é um aspecto importante. Segundo Martinho (2007), em geral, esse tipo de interação tem uma carga menor de formalidade, sendo essencial para estimular a descoberta e a crítica, assim como a elaboração de sínteses pessoais de significados. A autora ressalta que esse tipo de interação depende do contexto em que ocorre, da mesma forma que a qualidade das interações estabelecidas entre o professor e os alunos também dependem desse aspecto.

No contexto da sala de aula, professor e aluno envolvem-se no processo comunicativo, estabelecendo uma relação que tanto pode acontecer em um nível pessoal quanto coletivo. Pequenos e grandes grupos de discussão podem ser formados e é preciso garantir que todos tenham a oportunidade de se manifestar.

Segundo Martinho (2007), a negociação de significados requer uma participação ativa dos sujeitos. Tende a diminuir quando existe um elemento controlador porque significado não pode ser transmitido, entretanto, também não pode ser construído de forma autônoma.

Nesse sentido, é interessante, quando se deseja promover a confrontação de ideias na busca pela construção de novos conhecimentos, propor, inicialmente, atividades em grupos com um número reduzido de componentes e garantir a todos a oportunidade de se expressar. Nos pequenos grupos, os alunos tendem a expor suas ideias com mais segurança, por acreditarem que estão em um meio sem hierarquia.

Nossa experiência docente sinaliza que as interações dos alunos, quando divididos em grupos, nem sempre são harmoniosas. Nesse sentido, a interferência do professor na organização dos grupos e no desenvolvimento do trabalho é necessária, a fim de garantir que a interação entre os membros do grupo aconteça em um ambiente colaborativo.

Cabe ao professor propor atividades que possibilitem a realização de discussões, além de acompanhá-las, sempre que possível, observando e, se necessário for, intervindo em alguns diálogos. É necessário incentivar aqueles alunos mais tímidos a conquistarem seu espaço nas discussões, valorizando a participação de cada um.

O trabalho em pequenos grupos pode ser bastante produtivo, entretanto, podemos potencializar a aprendizagem quando expandimos a discussão para um grande grupo, formado por todos os alunos e o professor. As ideias não ficam restritas a um número reduzido de indivíduos e os alunos aprendem com outros colegas, através da observação de diferentes estratégias.

O papel do professor é o de organizar e conduzir as apresentações, bem como garantir a participação do maior número possível de estudantes. Alguns alunos manifestam-se naturalmente nas discussões em sala de aula, independentemente do número de pessoas presentes. Outros apresentam alguma dificuldade ao falar para um grande público. É preciso que o professor tenha a habilidade de introduzir todos na discussão sem gerar constrangimento. Para tanto, algumas dinâmicas podem ser utilizadas como, por exemplo, o sorteio do representante do grupo que apresentará as ideias discutidas.

A interação entre professor e alunos está diretamente ligada à imagem que estes têm daquele. Essa representação, por sua vez, depende do perfil que o docente assume em sala de aula que, segundo D’Antonio (2006, p 23-24), pode ser descrito por três modelos propostos por Echeita e Martín (1995). O primeiro é o do professor ‘organizador-interventor’ que “*considera-se um transmissor de conhecimento que planeja e organiza as atividades, sob as quais o aluno tem uma total falta de autonomia, limitando-se a seguir as instruções do professor*” (p. 23). Nesse modelo, o docente aparenta ser o único responsável pelo processo de ensino e aprendizagem. É ele quem decide o que vai ser estudado e quando o será. Exclui o estudante do processo de construção de conhecimento e faz dele um repetidor de algoritmos. Dificilmente, ao assumir esse perfil, o professor formará alunos intelectualmente autônomos.

O segundo modelo é o de ‘observador-facilitador’ que *“permite uma atividade totalmente livre entre os alunos, os quais decidem o quê, como e quando o processo de aprendizagem deverá ser realizado”* (D’Antonio, 2006, p. 23-24). Neste caso, são os estudantes que assumem a responsabilidade pela própria aprendizagem e o professor passa a ser um coadjuvante, que tem sua função submetida às demandas geradas pelos alunos. Esse perfil deixa o processo de ensino e aprendizagem sem uma linha norteadora e dificilmente poderia ser adotado nas escolas brasileiras, onde há programas a cumprir. Outra dificuldade é a variedade de interesses que podem surgir em uma única classe, impossibilitando que se alcance um consenso.

O professor que *“cria situações de aprendizagem que fornecem condições necessárias para que o aluno consiga construir seus conhecimentos*” (D’Antonio, 2006, p. 24) constitui o perfil do terceiro modelo proposto: “observador-interventor”. Como D’Antonio, também consideramos este modelo o mais indicado para o docente que deseja estabelecer em sua sala de aula uma comunicação no nível reflexivo.

D’Antonio (2006, p 32) descreve o “*espaço reservado ao desenvolvimento de uma comunicação interativa na sala de aula*” como sendo aquele no qual

> *os alunos possam interpretar e descrever ideias matemáticas, verbalizar os seus pensamentos e raciocínios, fazer conjecturas, apresentar hipóteses, ouvir as ideias dos outros, argumentar, criticar, negociar o significado das palavras e símbolos usados, reconhecer a importância das definições e assumir a responsabilidade de validar seu próprio pensamento.*

D’Antonio (2006, p 29) afirma que o ambiente comunicativo[13] de sala de aula diferencia-se dos demais, na medida em que as regras que governam a interação entre professores e alunos são diferentes daquelas existentes em outros grupos. Para a autora,

> *... as exigências e as obrigações que as estruturas de participação impõem a uns e outros, sua localização no meio do caminho entre os ambientes ritualizados e previsíveis e os ambientes totalmente abertos e imprevisíveis, bem como as características dos contextos de referência, que permitam ou não interpretar e negociar significados a partir de uma multiplicidade de informações são, entre muitos outros, alguns traços que permitem diferenciar o contexto da sala de aula de outros ambientes comunicativos* (D’ANTONIO, 2006, p 29).

[13] Entendemos como “ambiente comunicativo” todo meio em que seja possível estabelecer comunicação.

O ambiente comunicativo da sala de aula é influenciado por diversos fatores sociais, econômicos e culturais e, portanto, apresenta-se bastante heterogêneo. Além disso, um mesmo ambiente pode modificar suas características ao longo do tempo.

A preparação do ambiente de aprendizagem envolve a elaboração de atividades que possibilitem o debate. O problema (situação-problema)[14] proposto deve trazer situações conhecidas dos alunos para que estes não julguem impossível resolvê-lo, mas não deve ter uma resposta imediata, pois perderia sua função de gerar debates entre os indivíduos do grupo e, consequentemente, sua função comunicativa. Segundo Martinho (2007b, p. 48), *"para que uma tarefa seja bem sucedida é necessário, embora não suficiente, que o professor esteja de facto convencido que esta pode dar origem a uma actividade de aprendizagem para os seus alunos".*

A exposição e discussão das ideias é um componente importante no processo de construção de conhecimento. Nesse contexto, as perguntas feitas pelo professor assumem um papel muito importante no processo comunicativo da sala de aula, visto que podem influenciar o processo de construção de conhecimento. Love e Mason (1995 apud MARTINHO, 2007) relacionam três tipos de perguntas: de focalização, de confirmação e de inquirição. Os dois primeiros tipos são utilizados quando se deseja manter a atenção do aluno (focalização) ou verificar se o aluno compreendeu o que está sendo explicado (confirmação). O último tipo é utilizado quando o professor deseja conhecer o que o aluno pensa.

Uma aula em que se pretende valorizar a troca de experiências e a argumentação deve privilegiar as perguntas inquiridoras, uma vez que estas enriquecem o processo de ensino e aprendizagem, promovendo a interação e ajudando os estudantes a atribuírem significado ao conhecimento discutido.

Emília Pedro (1982 apud MENEZES, 1999) destaca que: *"o tipo de perguntas que o professor seleciona para formular na aula determina não só as respostas dos alunos, mas também e em grande medida o seu conteúdo."*

Entendendo o papel importante que as perguntas têm no desenvolvimento da comunicação na sala de aula de Matemática, organizamos em uma tabela alguns benefícios que podem gerar em uma aula de Matemática de acordo com os estudos de Menezes (1999, p 5-6).

[14] Nesse estudo, entenderemos "problema" e "situação-problema" como aqueles nos quais os alunos se confrontam com uma situação nova cuja solução não pode ser encontrada de imediato e que exigirá um esforço intelectual para ser resolvido.

Autores:	Finalidades das perguntas
Sadker e Sadker (1982)	*"o questionamento permite ao professor detectar dificuldades de aprendizagem, ter feedback sobre aprendizagens anteriores, motivar o aluno e ajudá-lo a pensar."*
Pereira (1991)	*"— Centrar a atenção dos alunos em aspectos que o professor considera relevantes;* *— Provocar efeitos positivos na participação dos alunos (fazê-los falar);* *— Promover no aluno uma atitude intelectual menos passiva (fazê-los pensar);* *— Minimizar os efeitos da indisciplina."*
Cohen e Manion (1992)	*"(i) fazer pensar os alunos;* *(ii) testar o conhecimento dos alunos (antes e após novas aprendizagens)."*
Baroody (1993)	*"As perguntas podem gerar a discussão na sala de aula, promovendo o desenvolvimento de capacidades (como o raciocínio e a comunicação) e de atitudes."*
Polya (1978)	*"... é através da pergunta que o professor auxilia os alunos, desbloqueando impasses e colocando questões que poderiam ter surgido aos mesmos."*

Tabela 7: Finalidades das perguntas segundo alguns autores.

As perguntas feitas pelo professor aos alunos podem trazer benefícios, como os descritos no quadro anterior, contudo, também podem servir como mais um instrumento de perpetuação da hierarquia que estabelece o professor como o principal detentor do saber e o aluno, simples receptor de informações. Portanto, é preciso preparar-se para utilizar os questionamentos e ter clareza sobre o tipo de interação que se deseja estabelecer na sala de aula.

Diversos autores descrevem ações que podem orientar o professor no sentido de tentar obter um bom questionamento. Na tabela a seguir, indicamos algumas dessas orientações, pesquisadas por Menezes (1999, p 7-8).

Autores:	Orientações:
McCullough e Findley (1983); Cohen e Manion (1992)	*"— Preparar algumas questões antecipadamente;* *— Fazer questões claras e concisas;* *— Variar o nível de dificuldade, tentando envolver a maioria dos alunos da turma;* *— Promover um tempo de pausa a seguir às questões;* *— Colocar as questões a todo o grupo e só depois individualizá-las;* *— Colocar questões que proporcionem ao professor feed-back sobre a aprendizagem dos alunos."*
Johnson (1982)	*"— Evitar fazer um grande número de perguntas cuja resposta é um simples "sim" ou "não";* *— Evitar responder às perguntas formuladas;* *— A seguir à resposta de um aluno, perguntar "porquê?";* *— Evitar a formulação de um grande número de perguntas que apelem sobretudo para a memória;* *— Tentar que os alunos se pronunciem sobre as respostas dos colegas;* *— Evitar fazer perguntas que contenham a resposta;* *— Fazer perguntas abertas."*
Hargie (1983)	*"— É necessário que os professores fomentem a formulação de um maior número, de perguntas de nível superior relativamente às perguntas factuais;*

	— Na sala de aula, as perguntas orais mostram-se mais eficazes do que as perguntas escritas; *— O uso de actividades de investigação é um bom meio de promover o questionamento;* *— Os professores devem reenviar à turma as questões colocadas pelos alunos;* *— É necessário fomentar o tempo de pausa após as questões e a seguir às respostas."*

Tabela 8: Orientações no sentido de obter um bom questionamento.

A presente pesquisa interessa-se pela possibilidade de construir um espaço no qual o ato de comunicar seja capaz de gerar interações que desenvolvam um raciocínio combinatório mais elaborado e favoreçam uma participação mais ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento.

Nesse sentido, destacamos o papel importante que a linguagem exerce na construção desse espaço comunicativo.

Para Santos (2009), na sala de aula, professores e alunos utilizam uma linguagem própria que é um misto de linguagem corrente e linguagem matemática. Para Menezes (1999, p. 3), "*a linguagem matemática dispõe de um conjunto de símbolos próprios, codificados, e que se relacionam segundo determinadas regras, que supostamente são comuns a uma certa comunidade e que as utiliza para comunicar*". Dessa forma, percebemos que a linguagem matemática está diretamente associada às características dos sujeitos que a utilizam. A linguagem dos cientistas, por exemplo, difere da linguagem matemática utilizada em sala de aula. Esta diferença pode ser verificada principalmente no grau de complexidade e formalismo.

Segundo Menezes (1999, p. 1), "*a linguagem é um aspecto central em todas as actividades humanas e em particular nas aulas*". Porém, a linguagem formal da matemática não é naturalmente desenvolvida pelo ser humano. É ensinada e aprendida na escola e, portanto, está sujeita a fatores culturais e sociais como, por exemplo, em que região a instituição de ensino está localizada ou mesmo em que turno de aulas os alunos estudam. Para ele,

> *A linguagem, em sentido lato, corresponde a um "meio de comunicação" utilizado por uma comunidade (...) para transmitir mensagens. Em sentido mais estrito, a linguagem é vista como um sistema de signos directos ou naturais e pressupõe um sujeito falante e implica fenómenos ligados à transmissão da mensagem dentro de um contexto espacio-temporal e cultural chamado situação (MENEZES, 1999, p. 2).*

Na sala de aula, a linguagem assume o papel de intermediar o processo de ensino e aprendizagem. Ao professor cabe utilizar uma linguagem acessível a seus alunos, inserindo, em suas falas, elementos próprios da linguagem matemática, a fim de facilitar o acesso dos discentes a determinados conhecimentos matemáticos.

Segundo Menezes (1995 apud SANTOS, 2009), a Comunicação na aula de Matemática abarca todas as interações (orais e escritas) que alunos e professores podem estabelecer recorrendo à língua materna e à linguagem matemática. Para esse autor, a linguagem matemática pode ser oral, dado que professores e alunos são dotados da capacidade de falar; e escrita, que, em geral, tem um aspecto universal (MENEZES, 1999, p. 3-4). Autores como Usiskin (1996) acrescentam ainda que a linguagem matemática pode ser pictórica, expressa, por exemplo, a partir de gráficos, diagramas e desenhos.

Em geral, a linguagem oral é diferente da linguagem escrita. Na primeira a expressão é mais livre, sem tanta preocupação com o emprego das palavras. A linguagem escrita costuma ser mais formal. Pensa-se mais sobre o quê e o como se escreve. Nesse sentido, além de incentivar o uso da linguagem oral, também devemos fazê-lo quanto à linguagem escrita, contribuindo, dentre outros aspectos, para a formalização das conjecturas.

A linguagem pictórica pode ser bastante útil no processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, visto que podemos utilizá-la em muitas estratégias de resolução, como por exemplo, o diagrama de possibilidades.

No caso específico da linguagem oral, o professor pode auxiliar os alunos na aquisição de um vocabulário mais rico em expressões próprias da linguagem matemática, possibilitando sua inserção no ambiente restrito das conversações matemáticas e ampliando sua forma de interpretar as experiências vividas. Entretanto, essa capacitação é muito mais que a memorização de termos matemáticos. Passa pelo conhecimento e compreensão dos verbetes, em geral, particulares desta disciplina. É fácil identificar, em salas de aula de Matemática, alunos que solicitam o auxílio do professor para entender o enunciado de um problema. Esta ajuda, muitas vezes, chega sob a forma de uma explicação do professor de como utilizar um algoritmo e, assim, os alunos continuam dependendo do raciocínio de outra pessoa e incapazes de criar as próprias estratégias.

Para D'Antonio (2006, p. 16), *"o papel do professor e sua conduta em sala de aula são de estrema importância não só para detectar as lacunas e retirar as dúvidas referentes ao entendimento da linguagem matemática, como para sua compreensão e o estabelecimento de significado e relação com os problemas do dia-a-dia"*. Só é possível atribuir significado àquele conteúdo que foi compreendido e, para tanto, é preciso participar da elaboração das conjecturas e sua posterior validação. O professor assume um papel importante nesse processo. Para D'Antonio (2006, p. 29-30):

> *o professor tem a responsabilidade de organizar ambientes interlocutivos nos quais os conteúdos se tornem significativos, ao gerir as atividades da sala, quando avaliar os progressos e as dificuldades de seus alunos no transcurso das atividades, necessitando para tal de interagir com seus alunos e permitir que interajam entre si, de forma a que possam compartilhar conceitos e significados, promovendo, assim, a aprendizagem. E*

> *para tanto, deve envolver-se, necessariamente, em um processo de comunicação rico com seus alunos.*

Cabe ao professor fornecer ao estudante a oportunidade e a condição de negociar significados e assim adquirir novos conceitos. Aos alunos compete aceitar o convite para participar desse processo que pode ser intermediado pela argumentação.

A argumentação na aula de Matemática

A comunicação e a argumentação relacionam-se de forma reflexiva. É através da comunicação que os estudantes explicam e justificam suas ideias. Em contrapartida, é a argumentação que permite que esse processo evolua. Portanto, ao refletir sobre uma é imprescindível refletir, ainda que de forma breve, também sobre a outra.

Segundo Boavida (2005, p 21), em filosofias tradicionais da Matemática, "*a validade dos enunciados deriva de fundamentos absolutos e auto-evidentes através de encadeamentos de raciocínios dedutivos*". Ela declara que essa visão reducionista vem sendo questionada e a busca por abordagens filosóficas mais flexíveis tem ganhado projeção e inspirado os trabalhos de diversos autores como Carrilho (1992); Coelho (1999), Grácio (1992, 1993), Oléron (1996) e Plantin (1990) que pesquisaram sobre a argumentação ou Balacheff (1999), Boero (1999), Duval (1999), Krummheuer (1995) e Pedemonte (2002), sobre, especificamente, a argumentação na aula de Matemática.

Para Van Eemeren, Grootendorst e Kruiger (1987 apud VIEIRA e NASCIMENTO 2009, p.445) a argumentação é "*uma atividade social, intelectual e verbal, consistindo em uma constelação de proposições dirigida no sentido de obter a aprovação de um auditório sobre um determinado assunto por meio de argumentos colocados para justificar ou refutar uma ou várias opiniões*". Devido à natureza das atividades que pretendemos desenvolver, adotaremos, em nosso estudo, esta definição.

De forma geral, todo ser humano, capaz intelectualmente, utiliza a argumentação no dia a dia quando deseja convencer uma plateia através de argumentos. Nosso interesse por esse tema, neste estudo, limita-se ao ambiente específico da sala de aula e, em particular, à argumentação na aula de Matemática.

Para Boavida (2005b, p 7), *não existe um quadro de referência unanimemente aceito que permita fixar um conceito de argumentação*. Nesse sentido, a autora optou por articular os pensamentos de Perelman e Toulmin com o de autores que se debruçaram especificamente sobre a argumentação na aula de Matemática e designar, em seu estudo, a expressão *argumentação matemática* como *argumentação na aula de Matemática*, definida como

> *conversações aí desenvolvidas cujo foco é a Matemática e que assumem a forma de raciocínios de caráter explicativo e justificativo destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições, pela indicação de razões* (BOAVIDA, 2005b, p 7).

Para o ambiente específico da sala de aula de Matemática, adotaremos esta última definição, quando nos referirmos à argumentação Matemática, entretanto, como Boavida (2005), destacamos três ressalvas. A primeira diz respeito ao fato de a argumentação poder se valer de elementos não discursivos (figuras, dados numéricos ou algébricos, etc.). A segunda ressalta a possibilidade de um aluno deliberar consigo mesmo, portanto, não necessariamente, é preciso a presença de um auditório. Por último, destaca que, apesar da argumentação em Matemática não garantir conclusões verdadeiras, quem argumenta subentende que são. Desta última ressalva surge a necessidade de discutir o que é uma justificação matemática aceitável.

A argumentação nas aulas de Matemática é uma faceta da dinâmica que se pode estabelecer na sala de aula. Dessa forma, está intrinsecamente relacionada ao desenvolvimento da autonomia por parte dos alunos, mas também de normas sociais específicas que a referenciem.

Yackel e Cobb (1996)[15], em seu estudo sobre normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em Matemática, propõem interpretar a vida da sala de aula focando sua atenção nas normas gerais que se estabelecem neste ambiente (*normas sociais*) e, de forma específica, em aspectos normativos de discussões matemáticas (*normas sociomatemáticas).* Na tabela a seguir podemos acompanhar dois exemplos propostos pelos autores a fim de esclarecer a diferença entre normas sociais e normas sociomatemáticas.

São normas sociais:	**São normas sociomatemáticas:**
A compreensão de que se espera que os alunos expliquem as suas soluções e os seus modos de pensamento.	A compreensão do que é considerado, para o grupo, como uma explicação matemática aceitável.
A compreensão de que quando se discute um problema os alunos devem apresentar soluções diferentes das já apresentadas.	A compreensão do que é considerado, para o grupo, a diferença matemática (o que torna uma resolução diferente de outra).

Tabela 9: Comparativo entre normas sociais e normas sociomatemáticas.

A partir das ideias de Yackel e Cobb (1996), Martinho (2007, p12) afirma:

> *Como exemplos de normas sociomatemáticas, referem a explicação, justificação ou argumentação matematicamente aceitáveis, a eficácia matemática, a elegância e*

---
[15] YACKEL, Erna; COBB, Paul. Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em Matemática. Tradução do artigo publicado no *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458 – 477 (1996).

> *sofisticação matemáticas bem como aquilo que se pode considerar matematicamente diferente. Estas normas têm um carácter subjectivo e são construídas na sala de aula desta disciplina num ambiente de interacção. Daí que em salas de aula distintas o significado de cada norma pode ser também variável.*

Em geral, quem determina estas normas é o próprio professor. Entretanto é preciso envolver os estudantes nesse processo. A negociação das normas da sala de aula contribui para o ensino e a aprendizagem na medida em que os sujeitos precisam desenvolver, em um processo dinâmico, suas compreensões pessoais bem como avaliá-las, comparando-as com outras. Para Yackel e Cobb (1996, p 11), *"surgem oportunidades de aprendizagem adicionais quando as crianças procuram dar sentido às explicações dadas pelos outros, comparar as soluções dos outros com as suas, e fazer julgamentos sobre semelhanças e diferenças"*.

É o professor quem inicia e conduz o desenvolvimento das normas sociais. Ele exerce o papel de representante da comunidade matemática entre os alunos. Juntos, podem elaborar as normas sociomatemáticas e usufruir da oportunidade de aprender defendendo ideias próprias e analisando as dos outros. Professor e alunos podem negociar o que será considerado como uma resolução matematicamente aceitável ou como verificar se as estratégias apresentadas são diferentes ou não.

O processo de negociação das normas sociomatemáticas e os sujeitos que dele participam influenciam-se mutuamente. Para Yackel e Cobb (1996, p.4):

> *o que se torna matematicamente normativo numa sala de aula é determinado pelos objectivos, crenças, suposições e pressupostos presentemente assumidos pelos participantes na aula. Ao mesmo tempo, estes objectivos e as compreensões largamente implícitas são eles próprios influenciados pelo que é legitimado como actividade matemática aceitável.*

Nesse sentido, as normas sociomatemáticas podem variar de uma região para outra, de uma cidade para outra, ou até mesmo de uma turma para a outra. Um argumento explicativo pode ser considerado matematicamente aceitável para um grupo de indivíduos e não ser para um outro. Destacamos, portanto, a importância do papel do docente na coordenação desse processo comunicativo.

Como Yackel e Cobb (1996, p.5), percebemos que "*o professor pode ser um representante da comunidade matemática na sala de aula onde os alunos desenvolvem os seus modos de conhecimento pessoalmente significativos*".

Para esses autores, a noção de normas sociomatemáticas como, por exemplo, o que constitui uma solução matemática eficaz, pode ser um subsídio na formação inicial e continuada de professores uma vez que evidenciaram, em sua pesquisa, que, durante o processo, o nível de discurso e aprendizagem individual dos alunos progrediu.

Mesmo com a negociação das normas sociomatemáticas, é razoável esperar que os alunos tenham alguma dificuldade em participar das discussões. Muitas vezes, eles não estão habituados a expor suas ideias. Com o tempo, estímulo e o acompanhamento do professor, os argumentos utilizados tendem a se tornar mais sofisticados (argumentos que apresentam um grau de complexidade maior do que o básico) e a participação dos alunos mais consistente (participações em momentos adequados de acordo com as normas sociomatemáticas negociadas no grupo).

O processo evolui quando os argumentos dos outros e os próprios passam a ser objeto de reflexão para o estudante. Ao argumentar em Matemática, experimentamos a oportunidade de participar de momentos de aprendizagem que envolvem a observação e generalização de padrões, bem como a análise, avaliação e prova de conjecturas.

A negociação das normas sociomatemáticas pode contribuir para a determinação de como e em qual momento seria mais apropriado participar de uma discussão e, dessa forma, criar um espaço seguro para o aluno manifestar-se.

Vislumbramos um campo rico para o desenvolvimento da argumentação matemática, em particular, no ensino e na aprendizagem de Análise Combinatória. Da mesma forma, acreditamos que a Comunicação Matemática que privilegia a argumentação pode colaborar de forma significativa para a compreensão desse conteúdo matemático. Podemos citar como exemplo uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos: a identificação do tipo de agrupamento (ordenados ou não ordenados) envolvido no problema. Ao elaborar argumentos para justificar sua estratégia de resolução, o estudante precisa analisar a situação e, a partir de suas observações, distingui-los. Nesse processo, não é o professor quem determina as regras a serem seguidas, é o estudante quem constrói seu conhecimento.

Utilizaremos, neste estudo, uma noção de argumentação matemática que a distingue de prova ou demonstração matemática. Consideraremos como argumentação matemática a defesa de conjecturas, através da exposição de ideias, com o intuito de convencer o outro ou a si próprio.

Quando se propõe a trabalhar em um ambiente que privilegia a argumentação, o professor precisa se preparar para analisar e compreender as estratégias desenvolvidas pelos alunos e buscar caminhos para capacitá-los a avaliar suas conjecturas. Mas esta não é uma tarefa fácil. Acostumados a terem a confirmação da veracidade ou não de suas respostas através de seus professores ou manuais, os estudantes comumente apresentam resistência ao convite de pensar sobre o processo que os levou até aquele resultado. Faz-se necessária a criação de um espaço onde professores e alunos, intermediados pela linguagem, sejam corresponsáveis pela construção de conhecimento. Nesse sentido, é relevante refletir sobre a linguagem matemática e sua contribuição para o processo de ensino e aprendizagem.

No presente trabalho, procuramos explorar a linguagem em três aspectos distintos: a linguagem oral (por meio da observação dos diálogos dentro de cada grupo e das discussões geradas pelas apresentações), e as linguagens escrita e pictórica (a partir dos registros produzidos pelos alunos).

Historicamente, as aulas de Matemática são quase exclusivamente expositivas, entretanto, a compreensão do aluno depende também de outros fatores como, por exemplo, os conhecimentos *a priori* e o grau de importância que atribui ao estudo daquele conteúdo. Ao elaborar as atividades que foram propostas durante o trabalho de campo, buscamos conhecer os interesses dos sujeitos e utilizamos as informações coletadas para criar situações que, de alguma forma, representassem cenários conhecidos, mas, ao mesmo tempo, instigassem os alunos a resolvê-las.

Concordando com Martinho, (2007a, p. 4) em que *"ao professor compete ... assegurar uma atmosfera de respeito mútuo e de confiança, de modo a que os alunos se sintam confortáveis para argumentar e discutir as ideias uns dos outros"*, procuramos, na presente pesquisa, tornar a sala de aula um espaço no qual os alunos se sentissem à vontade para se expressar acerca dos conceitos em estudo. Nesse sentido, valorizamos cada participação e nos dedicamos a aprofundar cada resposta por meio de questionamentos que conduzissem o(s) aluno(s) a refletir sobre a própria fala e a repensá-la, ampliando seus conhecimentos. E, gradativamente, procuramos contribuir para um contínuo aprimoramento das justificativas e da argumentação dos alunos, mobilizando-os no sentido de desenvolver a linguagem matemática e assimilar os conceitos estudados de modo profundo e significativo.

Contudo, como Boavida (2005b), sabemos que ensinar a avaliar, reconhecer e produzir argumentos matematicamente válidos, de acordo com o grau de maturidade do estudante, não é uma tarefa fácil. Trata-se de um processo complexo e desafiador e que não acontecerá caso a ênfase seja colocada na aprendizagem de técnicas e procedimentos ou se o controle do discurso durante a aula e o poder decisório sobre o valor matemático desse discurso sejam, exclusivamente, do professor.

Apesar dos desafios, desenvolvemos este estudo por acreditar, como Yackel e Cobb (1996, p 12) que, quando os professores começam a ouvir seus alunos, eles *"capitalizam as oportunidades de aprendizagem [...] O modo crescentemente sofisticado como seleccionam tarefas e respondem às soluções das crianças, mostra o seu próprio desenvolvimento da compreensão da actividade matemática e do desenvolvimento conceptual dos alunos"*.

Com este trabalho pretendemos promover a Comunicação Matemática na sala de aula. Por meio da interação e do diálogo, privilegiar o pensamento e os argumentos construídos pelos alunos, orientados pelo professor. Para tanto, os questionamentos devem representar mais do que uma forma de confirmar se o aluno compreendeu o que foi explicado pelo professor, sendo mais importante sua capacidade de garantir a compreensão do que está sendo discutido. Também é necessário incentivá-los a analisar criticamente suas conjecturas, bem como aquelas apresentadas por seus colegas e pelo professor. Tudo isso em um espaço de respeito mútuo, no qual a participação é sempre valorizada e não há erros, mas aproximações mais ou menos adequadas a cada discussão.

A seguir, apresentamos, de uma perspectiva metodológica, a proposta desenvolvida e analisada na presente pesquisa.

CAPÍTULO 3

CONTEXTO DA PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A partir das leituras sobre o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória e sobre Comunicação Matemática, elaboramos nossa proposta de ensino. Pretendíamos verificar que contribuições sua aplicação poderia trazer para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Embora represente os resultados encontrados no desenvolvimento da proposta em apenas uma classe, esta experiência pode contribuir para a reflexão dos docentes sobre sua prática pedagógica. Segundo Yackel e Cobb, (1996, p 2), "*a selecção de casos particulares para considerar reflecte uma orientação teórica*". Mais que uma orientação teórica, esperamos que o presente estudo possa servir como incentivo a outros professores que desejam ensinar Análise Combinatória, enfatizando a Comunicação Matemática na sala de aula.

Desse modo, como citamos na introdução, recortamos a seguinte questão norteadora:
"que contribuições uma proposta de ensino que enfatiza a Comunicação Matemática pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito (MG)?".

Nosso propósito era investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Para isso, traçamos alguns objetivos específicos:

(1) avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta;

(2) identificar as principais estratégias utilizadas;

(3) analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo;

(4) investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos;

(5) identificar como os estudantes avaliaram a proposta de ensino.

Neste capítulo, pretendemos familiarizar o leitor com nossa pesquisa, descrevendo os elementos que a compõem: o estudo piloto, o contexto, o local, os sujeitos, o ambiente de sala de aula, a dinâmica da proposta, as atividades, a coleta de dados e algumas considerações sobre como pretendemos proceder a análise.

3.1 O Estudo Piloto[16]

A realização de um projeto piloto, ou seja, a aplicação e análise de uma primeira versão da proposta de ensino permitiu a verificação da receptividade dos alunos, bem como a análise do potencial de cada tipo de atividade, possibilitando uma reorientação da proposta, se necessário. Com esse objetivo, o piloto foi realizado em uma turma de 2º ano de Ensino Médio, em uma escola privada da cidade de Itabirito, Minas Gerais, na qual a mestranda era a docente responsável.

Ao final da execução do projeto piloto, concluímos que, no grupo estudado, houve contribuições significativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e da comunicação. O trabalho foi bem aceito pela maioria dos alunos que aprovou a metodologia adotada. Eles demonstraram interesse, entusiasmo pelas atividades propostas e gosto em desempenhar um papel mais ativo em sala de aula. Também percebemos que precisaram se esforçar muito, mas o trabalho em grupo contribuiu para que os esforços fossem maximizados e a comunicação possibilitou uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

Contudo, uma parcela significativa dos alunos afirmou que o trabalho ficou cansativo devido ao tempo gasto nas apresentações das resoluções. Essa observação foi considerada na construção da nova proposta e a forma de apresentação dos registros foi reformulada.

Depois de vencidas todas as etapas propostas para o estudo piloto, concluímos que a execução do projeto era viável.

3.2 O contexto da pesquisa:

O trabalho de campo foi realizado em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Itabirito (MG). A opção pela escola pública vem do conhecimento das características da maioria das escolas públicas brasileiras (evidenciadas pelo desempenho alcançado nos exames regionais e nacionais), bem como das dificuldades enfrentadas pelos alunos que estudam no noturno, e da intenção de efetivamente contribuir para a melhoria do ensino da Matemática.

Inicialmente fizemos um levantamento das escolas de Itabirito (MG) que ofereciam o Ensino Médio e dos docentes que lecionavam Matemática para as turmas de 2º ano. Em seguida, entramos em contato com a direção de uma das escolas e nos foi dada a permissão de contatarmos a professora de Matemática responsável pelas turmas de 2º ano. Nesta primeira tentativa não obtivemos sucesso. A

[16] Para saber mais sobre o piloto leia ALMEIDA, Adriana Luziê; FERREIRA, Ana Cristina. Aprendendo análise combinatória através da Resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. Anais do VIII **Encontro Brasileiro de estudantes de pósgraduação em Educação Matemática. VIII EBRAPEM**. Rio Claro, SP. 2008.

docente entendeu que o trabalho de campo inviabilizaria o cumprimento do planejamento anual que havia preparado para o curso.

Em nossa segunda tentativa, seguimos a mesma ordem de abordagem do contato anterior e obtivemos a autorização da direção e o consentimento de uma das professoras para a realização do trabalho em uma de suas turmas do noturno.

3.2.1 A escola, a professora e os alunos.

A escola A – nome que daremos à escola na qual realizamos o presente estudo – foi fundada em 1965 e oferecia, inicialmente, apenas o Ensino Fundamental de 5ª a 8ª série. De 1984 a 1996 passou a oferecer também o Ensino Médio profissionalizante com os cursos de Eletrônica, Mecânica e Processamento de Dados. Em 2008, com 1356 alunos, contava com turmas de Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano e de Ensino Médio do 1º ao 3º ano. Apenas outras duas escolas oferecem o Ensino Médio na cidade, sendo uma particular e outra pública como a escola A.

Podemos verificar na tabela seguinte que a quantidade de turmas de Ensino Médio é significativamente superior ao número de turmas do Ensino Fundamental.

Série:	ENSINO FUNDAMENTAL					ENSINO MÉDIO			
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	**Total:**	1º ano	2º ano	3º ano	**Total:**
Nº de turmas:	02	02	02	02	**8**	10	09	07	**26**
Nº de alunos:	48	62	58	61	**229**	375	347	271	**993**

Tabela 10: Número de alunos por turma. Escola A. 2008

Além das turmas de ensino regular citadas na tabela 10, a Escola também oferecia três turmas de PAV[17], com 96 alunos no total.

Pela manhã, estudavam 487 alunos distribuídos em três turmas de 1º ano do Ensino Médio, seis de 2º ano e quatro de 3º ano. À tarde, além de todas as turmas do Ensino Fundamental, funcionavam quatro turmas de 1º ano do Ensino Médio e uma do PAV, totalizando 406 alunos. No noturno, existiam três turmas de cada série do Ensino Médio e duas do PAV e, dessa forma, o último turno de aulas contava com 425 estudantes.

Segundo o relato de alguns professores que trabalhavam no Ensino Médio da Escola A, o perfil dos alunos do turno matutino e do noturno dessa Escola são diferentes. Afirmam que o aluno do noturno, em geral, tem algum tipo de vínculo empregatício, tem idade acima da faixa etária esperada

[17] Projeto Acelerar para Vencer: Projeto da Secretaria do Estado de Minas Gerais destinado a alunos que possuem dois ou mais anos de diferença entre a idade cronológica e o ano de escolaridade.

para a série em que está matriculado, é menos frequente e precisa de uma atenção maior durante as aulas. Os docentes usam esses argumentos para defender a necessidade de um trabalho diferenciado nos dois turnos.

A Escola contava com três orientadoras educacionais, uma para cada turno. A profissional do noturno declarou ser sua primeira experiência trabalhando nesse turno e reforçou a afirmação dos docentes sobre as diferenças entre a realidade do discente do diurno para o do noturno.

No período em que realizamos o trabalho de campo, a Escola passava por mudanças administrativas. Um diretor interino, auxiliado por três vice-diretores, administrava os três turnos.

Localizada em uma das principais avenidas da cidade, possui um prédio com uma biblioteca, uma secretaria, uma sala de professores, uma sala da diretoria, uma cozinha, um auditório, uma oficina, um depósito de ferramentas, treze salas e seis banheiros. Estes espaços são distribuídos em três níveis. No primeiro, ficam três salas de aula, a biblioteca, a sala dos professores, a secretaria, a diretoria e dois banheiros. No último, as dez salas de aula restantes e no intermediário os demais espaços. A área externa possui um pátio que os alunos utilizam durante os intervalos de aulas, um estacionamento e uma quadra coberta com dois banheiros.

Todas as salas que estão localizadas no terceiro pavimento possuem grandes janelas voltadas para a avenida e uma porta para um corredor coberto de onde se avista o pátio e o auditório. O barulho dos veículos que passam pela movimentada avenida onde se localiza a Escola é percebido dentro das salas de aula. Próximo ao prédio encontra-se uma área destinada a eventos de grande porte como shows musicais, rodeios e festas culturais que, em geral, acontecem durante a noite. É comum esses eventos acontecerem nos finais de semana, mas podem ocorrer também em quintas-feiras e sextas-feiras e, nesses dias, o som das festas impede que se ouça o professor ou os colegas e prejudica a concentração dos alunos, logo, impossibilita a realização de aulas.

Nos três turnos, os alunos têm cinco aulas por dia. Existe uma tolerância de dez minutos, nos turnos diurnos, e de vinte, no noturno, caso haja atraso para a primeira aula. Após o período de tolerância o portão é fechado e o aluno só pode sair com autorização da direção da Escola. Alguns estudantes do noturno afirmaram, em conversa informal, que é comum a saída não autorizada de alguns alunos através de um caminho alternativo.

À noite trabalhavam dois professores de Matemática. Uma professora lecionava para as turmas de 1º ano e duas turmas de 2º ano. Um professor lecionava para todas as turmas do 3º ano e para uma turma de 2º ano.

A professora que colaborou com a pesquisa tem dezoito anos de magistério, sendo três destes na instituição participante deste estudo, lecionando para o Ensino Médio no terceiro turno. Nos anos de 2007 e 2008 trabalhou apenas com turmas de 1º ano e, em 2009, assumiu também duas turmas de 2º ano. Trabalhava ainda em uma escola municipal da cidade, pela manhã, lecionando matemática para o Ensino Fundamental. É formada em Matemática e Ciências através de um curso de licenciatura oferecido por uma Universidade Federal da região, em parceria com a Prefeitura Municipal. Declara participar de cursos de aperfeiçoamento oferecidos por instituições públicas e gostar de sua profissão.

A turma de 2º ano que acompanhamos durante esta pesquisa foi descrita por seus professores como sendo ‘uma boa turma’. Quando questionados sobre o porquê dessa afirmação, justificavam que os alunos não eram indisciplinados e demonstravam interesse em aprender. Observamos, no período de ambientação, que esses alunos ouviam as explicações de seus professores, geralmente, sem questionar. Muitos demonstravam cansaço, possivelmente provocado pelas atividades exercidas durante o dia.

Quanto ao sexo, os estudantes se distribuem da seguinte forma: aproximadamente 52% dos alunos são do sexo feminino e 48% do sexo masculino. As idades variam de quinze a vinte e sete anos, sendo que aproximadamente 60% dos alunos tem menos de dezoito anos. Aproximadamente, 35 % possuem uma atividade remunerada. Duas alunas têm filhos e precisam faltar às aulas com alguma frequência para cuidar deles. Outra aluna é casada e um aluno trabalha em escala de turno, o que inviabiliza sua presença em todas as aulas.

A turma possuía quarenta e três alunos matriculados, mas apenas trinta e um compareciam às aulas e, dentre estes, treze eram frequentes[18]. O espaço da sala de aula era suficiente para acomodar todos os alunos sem aglomeração. As carteiras, por sua vez, não ofereciam conforto, eram pequenas e mal conservadas. O quadro de giz era novo, quadriculado, verde. Ao chegarmos, no início do horário letivo, encontrávamos a sala limpa e com as carteiras organizadas em filas. Durante as aulas, as carteiras eram movimentadas e ficavam aleatoriamente dispostas na sala. Os alunos costumavam escolher os lugares mais próximos da janela e do corredor. Poucos alunos, três ou quatro, sentavam-se em lugares centrais. Cerca de um terço das carteiras ficavam vazias. O sinal que informava o início das aulas tocava às 18h45min, mas apenas quatro ou cinco alunos já estavam em sala nesse horário. Um número maior de alunos, dentro de sala, podia ser percebido a partir das 19h10min. A última aula terminava às 22h50min.

---

[18] Alunos com, no máximo, quatro faltas durante o período da implementação da proposta.

3.2.2 O período de Ambientação

Carvalho (2009, p. 16) evidencia que, entre outros elementos, *"a pessoa que propõe a tarefa ao aluno (o próprio professor, um outro professor, um colega, um investigador que o aluno conhece pela primeira vez naquele momento ou que já conhece por ter estado em outras situações como observador na sala de aula)"* influencia na forma como ele a realiza. Dessa forma, procuramos conviver um pouco com a classe antes de iniciarmos as atividades. Durante aproximadamente um mês acompanhamos as aulas de Matemática.

Nosso objetivo era conhecer sobre a realidade social, cultural e econômica dos alunos; observar a dinâmica comunicativa estabelecida no grupo de alunos e entre a professora e seus alunos; familiarizar-nos com o ambiente de sala de aula e acostumá-los com nossa presença, a fim de preparar o ambiente para as intervenções que pretendíamos realizar. Julgamos que uma aproximação inicial seria importante para que se estabelecesse uma relação de confiança e respeito mútuo.

Nesse período inicial, apresentamos a proposta aos alunos, convidando-os a participar[19].

3.2.3 A dinâmica

Buscamos selecionar dinâmicas que favorecem uma comunicação nos padrões contributivo e reflexivo. Nesse sentido, propomos que as atividades fossem resolvidas em pequenos grupos de alunos e discutidas em um grande grupo formado por todos, inclusive a pesquisadora.

Foi dada aos alunos a liberdade de definir quantos e quais seriam os membros de cada grupo. Essa dinâmica de distribuição e seleção foi adotada porque percebemos que a turma estava dividida em pequenas comunidades que, em geral, não interagiam. Atribuímos esse fato a pouca frequência de muitos alunos e, possivelmente, ao período do ano letivo em que o trabalho foi realizado. Era o primeiro semestre e muitos alunos não sabiam os nomes de alguns colegas. Optamos por buscar uma maior interação entre eles através das discussões nos grandes grupos e da elaboração conjunta de normas sociais para regê-las. Essas normas, construídas durante a implementação da proposta, determinavam que deveria haver uma relação de respeito mútuo tanto nas interações professor/aluno quanto aluno/aluno.

A maior parte das atividades foi realizada em grupos de quatro alunos. Algumas utilizaram, além dos materiais usuais de sala de aula (lápis, borracha e caneta), outros, como peças de um jogo de Dominó convencional, transparências e canetas próprias, cola, tesoura, cartolina (disponibilizados pelas pesquisadoras).

---

[19] O projeto de pesquisa foi aprovado no Comitê de Ética da UFOP. Alunos e pais (no caso de menores de 18 anos) assinaram um termo de consentimento autorizando a utilização dos dados nessa pesquisa.

É comum no trabalho em pequenos grupos que alguns alunos deixem as tarefas por conta do restante do grupo e não permanecem ativos nas atividades. Algumas vezes por dificuldade de se expressar perante outras pessoas, outras vezes por comodismo. Entretanto, na implementação desta proposta, buscamos garantir a participação de todos acompanhando o trabalho dos grupos e intervindo através de questionamentos direcionados a determinados alunos.

O estudo individual também foi valorizado para que o aluno desenvolvesse a capacidade de trabalhar por si só. Portanto, em alguns momentos, os estudantes foram incentivados a participar individualmente expondo as próprias ideias e não as ideias de seu grupo.

As situações-problema propostas foram resolvidas e discutidas (em grupo) para posteriormente serem apresentadas aos colegas. Isso por que, citando Carvalho (2009, p. 17), quando um sujeito confronta suas respostas com as respostas dos outros, aprende a gerir aspectos relacionais que a autora nomeia de interindividual (quando suas ideias são confrontadas com as do seu parceiro) e intra-individual (quando questiona as próprias ideias).

O presente estudo buscou criar espaços nos quais os alunos, principais atores da pesquisa, apresentassem aos colegas suas estratégias de resoluções para as atividades propostas e aprendessem a argumentar. Durante as apresentações, variamos as estratégias. Às vezes, utilizávamos um retro-projetor e transparências, outras, o quadro, giz branco e colorido e, em uma das atividades, foram confeccionados cartazes utilizando-se grandes folhas de papel pardo e canetas hidrocor.

Ao longo do desenvolvimento da proposta, buscamos incentivar os alunos a interpretar, criar estratégias, argumentar, trabalhar em equipe, explicar de modo claro e justificar suas ideias. Acompanhamos os grupos questionando suas conjecturas; verificando como o trabalho estava sendo realizado; observando os sinais não verbais dos alunos como, por exemplo, cansaço ou desânimo, buscando atuar de forma a garantir a continuidade do trabalho; dando-lhes autonomia e valorizando suas ideias.

3.2.4 As atividades

A partir de leituras e experiências realizadas em sala de aula nos últimos anos, percebemos que seria necessário desenvolver uma proposta de ensino cujo foco não se concentrasse nas definições formais, mas considerasse os diferentes problemas da combinatória, as estratégias e modos de registro para alcançarmos o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Cohen (1994, apud MENEZES, 1999, p.8) considera que:

> *... a qualidade da comunicação é influenciada pela natureza das tarefas que são propostas. Adianta que as interacções verbais entre os alunos e o professor atingem níveis de qualidade mais elevados se forem observados alguns aspectos: as tarefas devem apresentar um certo grau de familiaridade, mantendo no entanto a incerteza quanto à solução; as tarefas deverão ter um pendor aberto, permitindo uma ou várias soluções; as tarefas devem, sempre que possível, ser acompanhadas de objectos concretos que os alunos possam manipular.*

Na construção das atividades, procuramos inserir situações que se mostrassem interessantes e desafiadoras para os alunos, tendo em vista as observações feitas durante o período de ambientação e contemplando o conteúdo referente ao raciocínio combinatório.

Quanto ao nível de dificuldade, inicialmente, buscamos uma graduação crescente e, em seguida, variamos, alternando questões com graus diferentes de complexidade. Iniciar com questões mais simples ajuda a motivar a realização da atividade e a variação do grau de dificuldade busca promover sua continuidade. Se o aluno percebe que o grau de complexidade está aumentando, é possível que se sinta desmotivado a tentar resolver a próxima se não tiver sido bem sucedido em uma questão, mas se o grau de dificuldade é desconhecido é possível que ele, pelo menos, tente.

Essas atividades, idealizadas antes do trabalho de campo, serviram como base inicial para a discussão do projeto. Várias adaptações foram realizadas influenciadas pelas observações durante a implementação da proposta.

Segundo Menezes (1999, p.8),

> *as tarefas rotineiras, vulgarmente designadas por exercícios, não são, normalmente, geradoras de grande discussão entre os alunos, uma vez que o modo de resolução assenta num algoritmo já conhecido destes. As tarefas demasiado difíceis para os alunos – sem nenhum tipo de familiaridade – são, no outro oposto, inibidoras do desencadear da comunicação, que na maior parte dos casos bloqueiam totalmente. Por isso, é preciso encontrar tarefas que sejam equilibradas para cada tipo de alunos, ou seja, que sejam abordáveis por estes mas, ao mesmo tempo, desafiantes.*

Nesse sentido, ao elaborar as atividades desta proposta, buscamos propor problemas que envolvessem elementos conhecidos, como por exemplo, futebol, com o objetivo de promover a autonomia e a autoconfiança. A partir de situações diversas foram convidados a desenvolver a capacidade de buscar, aprender e criar.

3.2.5 A coleta de dados

Durante o período de ambientação e implementação da proposta, registramos os acontecimentos da sala de aula e algumas observações em um diário de campo.

Durante as discussões internas de cada grupo, procuramos registrar, sempre com permissão dos alunos, em áudio, as conversas e, em vídeo, as apresentações. Utilizamos um aparelho de MP3 em cada grupo, para a gravação das discussões internas, e uma máquina filmadora, para registrar as imagens e sons produzidos nos momentos de partilha de ideias em um grande grupo, formado por pesquisadoras e estudantes.

Após cada atividade, os registros escritos dos alunos foram coletados. A identificação dos sujeitos nesses registros foi feita a partir dos pseudônimos escolhidos[20] e utilizados no teste diagnóstico inicial.

Ao final da proposta, os alunos foram convidados a responder a um questionário semi-aberto, anônimo (ninguém precisava se identificar), cujo objetivo era verificar como avaliam a proposta, sua própria aprendizagem, participação e interesse pelo trabalho realizado.

Além disso, aplicamos alguns testes diagnósticos cujo objetivo era analisar como os conceitos estavam sendo assimilados pelos participantes do estudo (ver anexos).

A preocupação com a elaboração, a aplicação e avaliação de testes diagnósticos também foi um aspecto importante na elaboração da proposta. Utilizamos essa ferramenta em três momentos. No primeiro, como um pré-teste, aplicado antes da realização das atividades, com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios, ou seja, verificar como se processa o raciocínio combinatório desses alunos que ainda não entraram em contato com o conteúdo de Análise Combinatória no 2º ano do Ensino Médio.

O segundo foi aplicado durante a realização do trabalho, com o intuito de verificar se já havia ocorrido alguma contribuição ao processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Por último, como um pós-teste, ao final do desenvolvimento do trabalho, incluindo as apresentações e discussões das resoluções das questões propostas, a fim de verificar se houve contribuições decorrentes da realização das atividades e, em acaso afirmativo, quais foram.

Segundo Roa (2000), psicólogos como Piaget e Inhelder afirmam que os esquemas cognitivos combinatórios emergem, naturalmente, em adolescentes, capacitando-os a descobrir, espontaneamente, processos sistemáticos de enumeração e contagem que os habilitam a resolver problemas simples de combinatória, sem recorrer a um conhecimento teórico sobre esse assunto.

Aplicamos o pré-teste com a finalidade de verificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca do tema em questão (Análise Combinatória). Procuramos elaborá-lo de forma simples e relativamente fácil, uma vez que podem ser utilizados conhecimentos já desenvolvidos pelos alunos no Ensino

[20] No dia em que o projeto foi apresentado aos estudantes, cada um foi convidado a escolher um pseudônimo que deveria utilizar como identificador nos registros escritos.

Fundamental para solucionar as questões. Buscamos, através das questões propostas, abranger situações diversas envolvendo os princípios de contagem, arranjos e combinações. Sua função foi, além de criar uma referência do estágio inicial de conhecimento dos alunos, servir de base para a construção de atividades dentro da proposta de ensino.

Os alunos foram identificados a partir de pseudônimos por eles escolhidos.

O teste intermediário mostrou os pontos fortes e os pontos fracos da proposta até o momento de sua aplicação, ajudando no redirecionamento de algumas atividades.

O teste final ofereceu a possibilidade de analisar se houve o desenvolvimento de estratégias mais eficientes como a enumeração sistemática, o uso de padrões, a observação do tipo de agrupamento e se é ou não permitida a repetição de elementos. Também permitiu evidenciar os tipos de estratégias mais utilizados, a interpretação dos enunciados das questões, as justificativas para os cálculos e os principais erros cometidos.

3.3. A análise

Uma vez concluído o trabalho de campo (desenvolvimento da proposta), reunimos e organizamos todas as informações coletadas e construídas ao longo do processo.

Procedemos à análise do material produzido a partir de duas perspectivas: uma relacionada ao pensamento combinatório expresso nos diversos registros produzidos pelos alunos, visando a verificar em que medida os alunos (ou alguns alunos) mobilizaram seus conhecimentos e assimilaram conceitos matemáticos, ampliando seu raciocínio combinatório; e, outra, voltada para a relação que se estabeleceu na sala de aula entre alunos e professora e entre os alunos, objetivando, pela perspectiva da Comunicação Matemática, analisar como o processo se dá, qual o nível e as características da interação inicial, e o que ocorre ao longo do tempo.

Analisamos os diálogos e os registros escritos a fim de evidenciar as contribuições da nossa proposta para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Na perspectiva do raciocínio combinatório, procuramos comparar os conhecimentos *a priori* e *a posteriori* dos alunos, por meio da análise dos resultados dos testes diagnósticos inicial e final, bem como o desenvolvimento das estratégias durante a realização das atividades. Comparamos os erros apresentados pelos alunos sujeitos desta pesquisa com aqueles que foram identificados em outros estudos. Procuramos identificar se, ao resolver os problemas propostos, os alunos desenvolveram a capacidade de identificar o tipo de agrupamento e escolher uma estratégia eficaz. Analisamos também se, ao eleger uma estratégia, são capazes de desenvolvê-la corretamente.

Na perspectiva da Comunicação Matemática, procuramos analisar os tipos de interações estabelecidas e como se processaram, as influências geradas por essas interações, se e como ocorreu a negociação de significados, as normas sociais construídas e comparamos os argumentos apresentados no início e ao final da implementação da proposta. Investigamos se fomos capazes de assumir o papel de professor observador-interventor e promover a comunicação nos níveis contributivo, reflexivo e instrutivo. Observamos o tipo mais frequente de perguntas que dirigimos aos alunos e como foram influenciados por elas.

Apresentamos, a seguir, uma descrição detalhada do processo vivido, bem como uma análise do mesmo.

CAPÍTULO 4:
DESCRIÇÃO DO PROCESSO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo relatamos os eventos ocorridos, descrevemos alguns diálogos e apresentamos alguns registros, procurando identificar evidências de desenvolvimento do pensamento combinatório, bem como analisar as dificuldades enfrentadas ao longo do desenvolvimento da proposta.

Iniciamos o trabalho de campo a partir do contato com a direção, a orientação e a docente responsável pela turma na qual a pesquisa foi desenvolvida. Para cada uma dessas autoridades, foi disponibilizada uma cópia de nosso projeto de pesquisa onde apresentamos, além das referências teóricas, as atividades que pretendíamos desenvolver, bem como as dinâmicas que adotaríamos. Esclarecemos ainda que, se necessário fosse, realizaríamos alterações a fim de adaptar a proposta aos alunos.

A professora da turma demonstrou interesse em acompanhar o desenvolvimento da proposta e combinamos encontros semanais, nas quartas-feiras, à tarde, para discutir as etapas realizadas na semana anterior e planejar as etapas seguintes. Devido a diversos contratempos, esses encontros nunca aconteceram, assim, a análise dos eventos ocorridos em cada aula e o planejamento das aulas seguintes ficaram apenas sob nossa responsabilidade.

Elaboramos esta proposta em conjunto: mestranda e orientadora discutindo cada etapa já realizada ou a realizar. O trabalho efetivo em sala de aula ficou a cargo apenas da mestranda que aparecerá nos diálogos nomeada como ‘pesquisadora’. Entretanto, por considerarmos que todas as ações foram realizadas tendo como base as discussões e crenças da mestranda e da orientadora, utilizaremos, nas demais partes do texto, a primeira pessoa do plural.

Na data combinada comparecemos à escola e fomos apresentadas aos alunos pela professora que, em breve discurso, explicou aos alunos que, inicialmente, iríamos acompanhar algumas aulas para, em seguida, implementar uma proposta de ensino. Em breve explanação, esclarecemos que nosso objetivo era aprender com eles e buscar maneiras eficazes de ensinar Matemática. Nenhum aluno se manifestou, mas, observando suas expressões faciais, foi possível perceber que nossa presença era bem-vinda.

Ocupamos uma das últimas carteiras na fila próxima à parede do corredor. Desse lugar poderíamos visualizar os alunos e a professora e, ao mesmo tempo, ficar menos visíveis com o objetivo de diminuir o impacto de nossa presença no comportamento deles. Durante o período de ambientação procuramos manter a mesma localização.

Na primeira aula e nas que se seguiram no período de ambientação, nossa aproximação dos alunos deu-se através de pequenos diálogos durante as aulas. Com o tempo, éramos procuradas pelos alunos e esclarecíamos dúvidas com relação aos exercícios que a professora propunha em sala. Durante o intervalo, conversamos com alguns alunos sobre família, profissão e escola.

Nesse período, que se prolongou por, aproximadamente, um mês, acompanhamos um total de nove aulas. Ao final desse período, já estávamos familiarizados com a turma. Já não nos procuravam tanto com o olhar como nos primeiros dias e pareciam não se importar com nossa presença.

Procurando observar como os alunos se comportavam durante as aulas de Matemática e como estas se processavam, verificamos que a dinâmica mais utilizada foi a explanação do conteúdo pela professora, usando o quadro de giz como recurso para registrar por escrito suas afirmações orais. Os alunos raramente questionavam o que estava sendo exposto e copiavam no caderno o que a professora escrevia no quadro. Em alguns momentos de sua explanação, a professora dirigia aos alunos algumas perguntas que, em sua maioria, eram de confirmação ou de focalização, como podemos acompanhar no trecho do diário de campo a seguir.

Ela pede para copiarem. Pega um livro e escreve no quadro:
Fórmula geral da P.G.: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$ *Soma da P.G.:* $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$
Os alunos copiam. Alguns conversam, mas a maioria fica em silêncio.
Ela faz perguntas: O que a fórmula do termo geral da P.G. tem de diferente da fórmula da P.A.?
Ninguém responde.
Pergunta o que é o "q".
Um aluno responde: - Quociente!
Ela diz que não. Um aluno novato responde que "q" indica a razão. (Ele me contou que já viu esta matéria em outra escola).
Ela explica como aplicar as fórmulas. Reforça o que cada letra representa. Ela pergunta e a maioria responde. Ela escreve um exemplo no quadro e pede que tentem fazer.
Uma aluna pergunta o por que de "n ≥ 2". A professora explica que não precisa usar "isto" na fórmula, é só para indicar que n tem que ser maior ou igual a 2. A aluna agradeceu e foi tentar fazer a questão.

Figura 2: Trecho do Diário de Campo (2º dia de observação)

A primeira questão proposta pela professora exige um maior esforço intelectual dos alunos, que precisam recordar a fórmula do termo geral da Progressão aritmética e, em seguida, compará-la com a fórmula de Progressão geométrica fornecida. Nenhum aluno respondeu ao questionamento e a professora, aparentemente, percebendo a dificuldade dos alunos para responder à questão anterior, procura conduzi-los a comparação pretendida, iniciando outro questionamento: “O que é q?”. Até então, as informações fornecidas aos alunos sobre P.G. restringiam-se a um exemplo escrito no quadro e uma explicação afirmando que, para construir uma P.G., começamos com um termo e vamos multiplicando sempre pelo mesmo número para encontrar os demais elementos da progressão. A fórmula foi escrita no quadro sem nenhum tipo de informação que esclarecesse sua origem e o significado de suas variáveis. Ainda assim, não foram feitos questionamentos por parte dos alunos.

Quando um dos alunos responde que “q” significa quociente, a professora poderia aproveitar a oportunidade para lançar mão de uma pergunta inquiridora: “Por que você acha que o “q” indica quociente?” e a partir da resposta investigar o que este aluno pensou ao responder, o que poderia desencadear outros questionamentos e ajudá-los a construir seu conhecimento sobre Progressão Geométrica.

O mesmo fato acontece com o aluno que responde que “q” indica a razão. A professora acata a resposta do aluno, mas não o questiona sobre a origem do seu conhecimento e passa adiante, esclarecendo o significado de cada variável envolvida na fórmula.

Em seguida, percebe-se que a professora deseja verificar a atenção de seus alunos, com relação à explanação que acabou de realizar. Para tanto, utiliza-se de perguntas focalizadoras, convocando-os a repetir o significado de cada letra que aparece na fórmula.

Além da situação descrita anteriormente, em outras passagens de sala de aula foi possível observar que as questões mais frequentes nas aulas de Matemática eram de confirmação ou de focalização, e que o nível de comunicação se insere no padrão unidirecional.

Quando a professora pediu aos alunos que aplicassem a fórmula em uma questão escrita no quadro, uma das alunas[21] questionou sobre a expressão $n \geq 2$ e, apesar de não receber os esclarecimentos que solicitou, não continuou a questionar e resolveu facilmente a questão, descartando a expressão, como sugeriu a professora.

Verificamos em nossas observações que os alunos não tinham o hábito de avaliar criticamente os métodos utilizados por seus professores e a dinâmica utilizada nas aulas de Matemática não favorecia o diálogo entre os alunos e, nem mesmo, entre eles e a professora. Prevaleciam questões no *nível de comunicação unidirecional*[22] que, segundo Martinho (2007), é o mais comum.

[21] Esta aluna é considerada pela professora como uma das melhores alunas da turma por participar das aulas, fazer todos os exercícios e obter boas notas nos testes escritos.
[22] Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).

Quanto aos registros escritos dos alunos, verificamos que se restringiam aos trechos de livros didáticos que a professora transcrevia no quadro. Eles não possuíam livros de Matemática e faziam as transcrições no caderno. Após cada conteúdo estudado, a docente trazia para seus alunos cópias de uma lista de exercícios para serem resolvidos em sala de aula. Não havia orientação para que fizessem em grupo. Alguns alunos se agrupavam e outros resolviam individualmente.

Nos grupos formados, as discussões eram, quase exclusivamente, sobre assuntos alheios ao conteúdo das questões e, quando um dos componentes tinha uma dúvida, recorria ao auxílio da professora, deslocando-se até sua mesa.

Em um desses momentos, duas alunas comentaram que os alunos não costumam trabalhar juntos em sala de aula.

Sarah: aqui é assim: o lado A e o lado B.

(Sarah falou apontando os dois cantos da sala)

Denise: Não nos misturamos!

P: Por que?

Denise: Ah! Sei lá! Elas não conversam com a gente e a gente não conversa com elas.

P: Talvez isso mude. Vocês ainda estão no início do ano.

Sarah: É!

(A aluna respondeu com uma expressão de descrença)

Sarah e Denise eram alunas que se sentavam mais próximas da parede do corredor e procuravam sempre conversar conosco, de assuntos relacionados ao conteúdo de Matemática que estavam estudando até assuntos pessoais. Assim como outras colegas que se sentavam próximas delas, eram mais velhas que as meninas do ‘lado A’. Sarah mora em Itabirito com o namorado e sua mãe reside em outra cidade. Denise tem duas filhas e quase sempre não pode comparecer às aulas para ficar com as crianças. Denise abandonou a escola antes de terminarmos a implementação da proposta de ensino. Segundo Sarah, a falta de uma pessoa de confiança para ficar com suas filhas foi o que motivou Denise a deixar os estudos. Apesar de estas histórias conterem episódios de vida adulta, essas meninas tinham aproximadamente dezoito anos, Denise tinha completado há pouco e Sarah completaria no segundo semestre de 2009.

As meninas do ‘lado A’ eram mais novas e mais agitadas. Sentavam-se perto da janela e não se cansavam de observar o que se passava do outro lado. Pouco conversamos durante o período de ambientação. Contudo, no decorrer do trabalho, nossos diálogos foram constantes e bastante produtivos, sendo que o grupo por elas formado foi um dos dois que se manteve com os mesmos componentes durante todo o período de desenvolvimento da proposta, gerando materiais explorados mais adiante neste capítulo.

A maioria dos meninos se acomodava em carteiras que ficavam próximas do centro da sala com uma tendência para o lado do corredor.

Nesse sentido, observamos que, entre esses alunos, existe uma norma social vigente que estabelece uma divisão em três grupos distintos, percebida, principalmente, através da disposição de seus componentes no espaço físico da sala de aula. Durante o trabalho de campo, tivemos poucas oportunidades de observá-los fora da sala de aula. Nesses escassos momentos, foi possível perceber que essa norma social também prevalecia em outros ambientes dentro da escola.

Outra norma social percebida foi a crença difundida entre os estudantes e a professora de que ‘alunos inteligentes’ são aqueles que obtêm as melhores notas nos testes escritos, aplicados em sala de aula, e que conseguem reproduzir, com certa facilidade, os modelos apresentados pela professora. Nesse sentido, acreditam que alguns alunos são mais inteligentes que outros. No período de ambientação, foi possível acompanhar os alunos em dois momentos de avaliação escrita. Essas avaliações foram previamente marcadas com, aproximadamente, uma semana de antecedência.

O primeiro momento aconteceu no primeiro dia de observação. As carteiras foram organizadas em fileiras pela professora, com a ajuda de alguns alunos, e uma lista com problemas envolvendo Progressão Aritmética foi entregue para que resolvessem individualmente. A professora informou que seria permitida a cada aluno a consulta ao seu caderno, entretanto, não consentiu que usassem a calculadora durante a avaliação. Mesmo assim, alguns alunos conversavam entre si, buscando saber a resposta de alguma questão. A professora, quando solicitada, procurava orientá-los quanto à resolução das questões. Em vários momentos, ela pediu que recorressem aos exercícios de revisão que haviam sido corrigidos na aula anterior e, por diversas vezes, verificou que alguns alunos não possuíam os registros.

Na aula seguinte, as avaliações corrigidas foram devolvidas para os alunos. Segundo a professora, a maioria das notas estava acima de sessenta por cento do valor total, sendo que este é o mínimo exigido pela Escola. Após trabalhar o conteúdo Progressão Geométrica, outra avaliação escrita foi realizada. Duplas foram formadas de acordo com as preferências dos alunos. A consulta ao caderno novamente foi permitida, bem como o uso da calculadora. A professora esclareceu que a avaliação foi formulada pelo outro professor que também leciona para o segundo ano, nesse mesmo turno. Segundo ela, ficou definido que cada professor formularia uma avaliação para todos os alunos, buscando uniformidade no trabalho, independentemente de ser ou não professor regente da turma.

Percebemos aqui uma norma sociomatemática relacionada à avaliação: os alunos esperam que as questões da avaliação sejam similares às que foram resolvidas em sala de aula.

A professora e os alunos, tanto na avaliação escrita quanto nas questões resolvidas em sala de aula, esperam que as resoluções gerem respostas corretas e sigam o modelo ensinado, modelo este que, além de não ser questionado, é considerado pelos alunos como único. Essa norma sociomatemática precisou ser modificada ao longo do nosso trabalho. Primeiramente, porque não apresentamos resoluções pré-determinadas e, portanto, não havia modelo a ser seguido. As atividades propostas geraram diferentes estratégias de resolução, bem como maneiras diferentes de registro, desmentindo o mito de que só existe uma maneira correta de se resolver um problema em Matemática.

Após algumas semanas acompanhando as aulas, foram apresentadas aos alunos informações sobre o registro dos diálogos e das imagens. Após esses esclarecimentos, foram convidados a participar da pesquisa e todos aceitaram.

Inicialmente, ficou combinado que a professora acompanharia todo o trabalho realizado dentro de sala, mas, alguns eventos, como por exemplo, assumir aulas em outra turma, a pedido da orientação, substituindo algum professor que por algum motivo não pôde comparecer, impossibilitaram sua presença nas primeiras aulas. Segundo relato da própria professora, após participar de uma das aulas, alguns alunos afirmaram que se sentiram inibidos com sua presença na sala e, portanto, alegando estar preocupada com a possibilidade de prejudicar o desenvolvimento do trabalho, resolveu afastar-se, deixando-nos responsáveis por toda a dinâmica das aulas. A professora se manteve informada de todos os acontecimentos, através de conversas informais conosco e com seus alunos.

Acatamos a decisão da professora de não se fazer presente durante as aulas, apesar de considerarmos que as discussões sobre os eventos ocorridos em sala de aula poderiam enriquecer esta pesquisa e contribuir para o desenvolvimento profissional de todas nós.

O desenvolvimento da proposta ocorreu durante as aulas de Matemática que, no caso da Escola A, restringem-se a três por semana: o primeiro horário de quarta-feira e o primeiro e o segundo horários de sexta-feira. Desde o início, foi possível contar com mais uma aula por semana, totalizando, portanto, quatro aulas semanais. A aula extra foi cedida por um professor que leciona no segundo horário de quarta-feira. Inicialmente nosso contato com este docente restringiu-se a um pedido de uma aula da primeira semana, para que os alunos terminassem o teste diagnóstico inicial. Após tomar ciência de nosso projeto, o professor se mostrou bastante interessado sobre o tema e afirmou que as investigações sobre Comunicação Matemática na sala de aula têm reflexo sobre todos os conteúdos. Então, por considerar a proposta relevante e não perceber prejuízo em ter uma aula a menos semanalmente, ofereceu o segundo horário de quarta-feira para que pudéssemos desenvolver nossa pesquisa.

A professora nos apresentou como Planejamento Anual de Matemática uma lista de conteúdos construída em conjunto com o professor que leciona para a outra turma do 2º ano, no mesmo turno. Nesse planejamento, o conteúdo Análise Combinatória não é citado, entretanto, encontramos referências sobre Problemas de Contagem, princípio Multiplicativo e Aditivo. O planejamento restringia-se à listagem dos conteúdos sem, contudo, apresentar sugestões pedagógicas como dinâmicas, bibliografia básica ou avaliação.

A professora relatou que o conteúdo Análise Combinatória não figura no Programa de disciplina da série anterior, ou seja, do 1º ano do ensino Médio. Também afirmou que, durante este ano, nenhuma questão envolvendo esse assunto foi por eles estudada. Aproximadamente 83% dos alunos afirmaram, ao responder ao questionário proposto ao final do trabalho de campo, que nunca haviam resolvido questões similares. Essas afirmações e a proporção apresentada nos questionários nos levam a concluir que as atividades foram propostas sem que os alunos tivessem um contato prévio com o conteúdo escolar: Análise Combinatória.

Após coletarmos essas informações, iniciamos o desenvolvimento da proposta. Nos trechos a seguir, descrevemos suas etapas, dividindo-as em encontros[23], bem como analisamos os dados coletados.

O teste diagnóstico[24] Inicial

Este teste foi realizado com o objetivo de observar as estratégias de resolução de problemas, envolvendo Análise Combinatória, que os estudantes apresentavam *a priori*.

A atividade continha quatro questões similares às encontradas nos livros didáticos do segundo ano do Ensino Médio. Os problemas contemplavam os princípios de contagem, arranjo simples e combinação simples. Para ilustrar as questões e com o intuito de deixar o teste menos formal, acrescentamos figuras com o objetivo de remeter o leitor ao conteúdo do enunciado.

Minutos antes de entregarmos a folha com as questões aos vinte e três alunos presentes naquela ocasião, esclarecemos que aquelas questões faziam parte do estudo e que não estavam sendo avaliadas para a nota escolar. Mas, apesar dessa informação, esse momento não foi bem recebido pelos alunos,

---

[23] Período de duas aulas de 50 min cada.
[24] Teste diagnóstico inicial (Apêndice 1, pág. 148)

que pouco se empenharam, intelectualmente, para resolver as questões propostas. A maioria dos alunos entregou o teste rapidamente, deixando questões em branco ou com respostas sem nenhum registro que as justificassem. Não observamos alunos conversando sobre as questões propostas após a realização do teste, apenas registramos conversas paralelas durante a avaliação.

O ‘fazer prova’ e ‘ter uma nota’ associada ao número de respostas certas é uma norma social estabelecida entre os estudantes. E essa situação gera um desconforto visível na maioria dos alunos pesquisados na Escola A. O teste diagnóstico inicial foi recebido como uma ‘prova’ e, portanto, também causou a mesma sensação. Essa norma social exerce uma influência tão significativa sobre os alunos que, mesmo esclarecendo que o objetivo do teste diagnóstico inicial era verificar seus conhecimentos prévios e não atribuiríamos notas às respostas e resoluções, estes se comportaram como se estivessem fazendo uma avaliação escrita como as que usualmente realizam.

Esse momento da pesquisa configurou um dos primeiros desafios que iríamos enfrentar. A evidente falta de motivação para resolver situações consideradas novas por não dispor, *a priori*,de modelos a serem seguidos gerou uma ansiedade quanto ao sucesso da proposta. Percebemos que solicitar àquele grupo de alunos, acostumados a seguir modelos, a resolução de questões sem uma explicação prévia do conteúdo não seria uma tarefa fácil.

Ainda assim, como podemos verificar no diálogo descrito a seguir, alguns alunos, como, por exemplo, Alice, mantinham a vontade de aprender.

Alice: Você vai corrigir a prova?
P[25]: Que prova?
Alice: Esta que fizemos?
P: Por que você quer saber?
Alice: Porque quero saber se acertei?
P: Por que? Você acha que tem que acertar?
Alice: Não. É que estou curiosa!
P: Curiosa sobre o que?
Alice: Pra saber como faz?
P: Que bom! A curiosidade nos faz aprender!

Ao responder a questão: *Você acha que tem que acertar?* Alice, aparentemente, responde ‘não’ por considerar que esta era a resposta que esperávamos dela, uma vez que, nos esclarecimentos sobre o teste diagnóstico inicial, informamos aos alunos que estávamos mais interessados nas estratégias de resolução utilizadas do que na resposta da questão. Quando questionados com relação a sua resposta, muitos estudantes tendem a considerá-la incorreta, mudando para uma resposta contrária à anterior. Em

[25] P: pesquisadora

nossa experiência docente, verificamos que essa norma social é vigente para a maioria dos estudantes. Durante o desenvolvimento da proposta, essa norma foi trabalhada a fim de levá-los a pensar sobre sua resposta e não abandonar suas convicções sem analisá-las mais profundamente.

As estratégias de resolução encontradas no teste diagnóstico inicial se restringiram a tentativas de enumerar todas as possibilidades e cálculos, envolvendo os valores numéricos apresentados nos enunciados dos problemas.

Consideramos que a primeira questão era a mais simples, porque envolvia apenas a aplicação dos princípios de contagem. Essa questão foi resolvida por todos os alunos. O índice de acerto foi de 57%, aproximadamente.

Na segunda questão, o índice de acertos ficou reduzido a um valor próximo de 9%. As demais questões foram deixadas sem qualquer tipo de resolução ou resposta por 10 alunos. Dentre as respostas apresentadas, nenhuma estava correta.

Observando a questão 2, foi possível identificar as estratégias intuitivas de enumeração descritas por Roa (2000), em sua tese de doutorado.

A figura 3 mostra a resolução apresentada por um aluno que, segundo nossa análise, interpretou o enunciado de forma diferente da esperada e utilizou uma das estratégias de resolução descritas por Roa (2000): tentativa de enumerar todos os agrupamentos sem, entretanto, utilizar elementos que já foram utilizados em outros agrupamentos. Para esse aluno, numerais que utilizam os mesmos algarismos são iguais e, dessa forma, não seria possível formar numerais distintos de quatro algarismos, com os quatro algarismos 0, 2, 5 e 7, porque os algarismos seriam os mesmos.

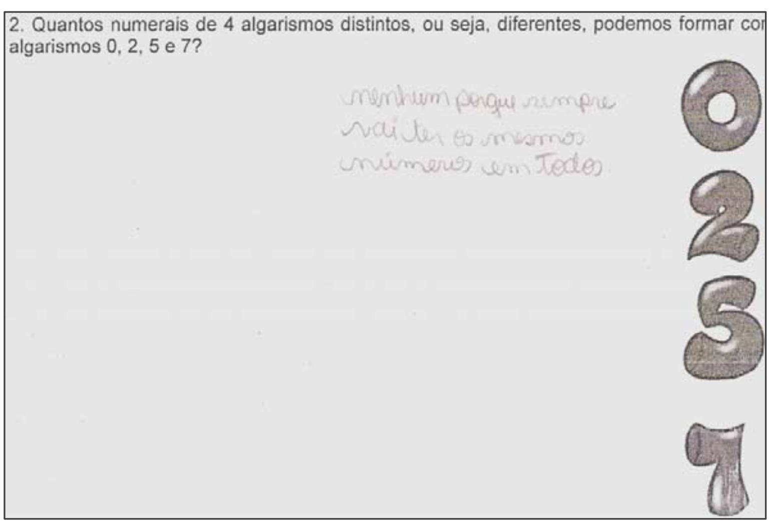
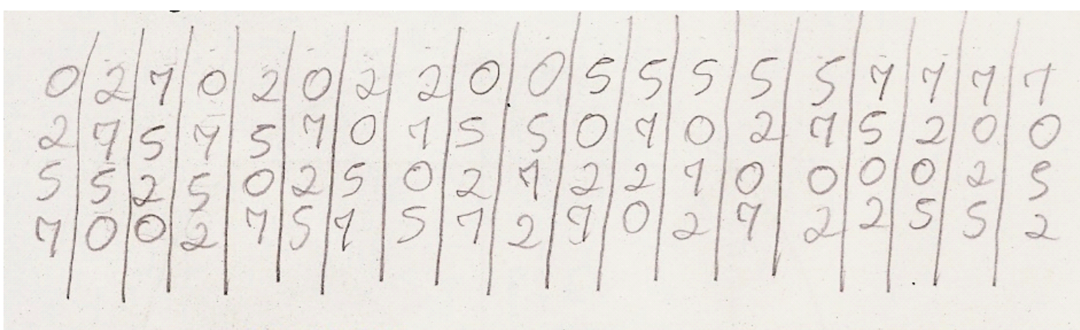
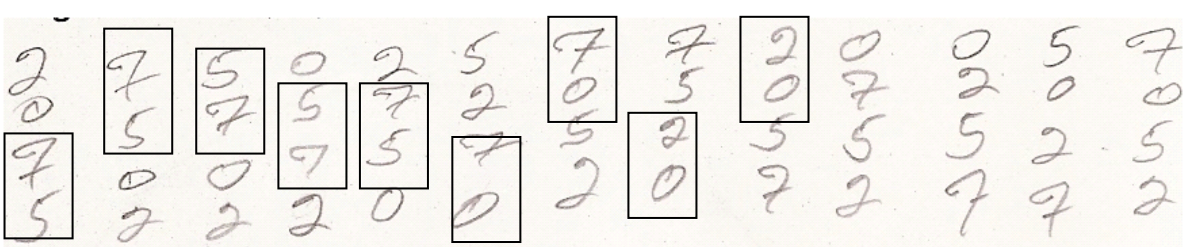


Figura 3. Resolução apresentada pelo aluno Vítor Hugo para a questão 2 do teste diagnóstico inicial

O caso descrito a seguir não ocorreu de forma isolada. Outros alunos também consideraram que, quando os algarismos são utilizados em um numeral, não poderão ser utilizados em outro, e assim, respostas como: “1520” e “apenas um número” foram encontradas. Não houve registros dessa estratégia nos testes diagnósticos intermediário e final, o que nos leva a considerar que durante o desenvolvimento da proposta os alunos compreenderam como os numerais são formados, bem como o papel de cada elemento dentro de um agrupamento.

O aluno que respondeu “1520”, aparentemente, buscou subsídios para resolver a questão na figura impressa no canto esquerdo, abaixo do enunciado da questão, e considerou os algarismos de baixo para cima. Ele também confundiu o algarismo sete (descrito no enunciado) com o algarismo um. Atribuímos esse fato à semelhança que nossa figura representativa do algarismo sete tem em relação ao algarismo um. Nesse caso, a informação gerada pela figura foi mais eficaz que a do enunciado da questão.

No quadro a seguir, trazemos algumas resoluções encontradas em testes relacionados com as estratégias intuitivas de enumeração descritas por Roa (2000).

Estratégias intuitivas de enumeração descritas por Roa (2000) e Resoluções apresentadas pelos alunos para a questão 2 do teste diagnóstico aplicado no início do trabalho
(1) Seleção aleatória dos elementos:  Figura 4: Resolução apresentada pelo aluno Jangada, para a questão 2 do teste diagnóstico inicial
(2) Tentativa de encontrar através de um processo sistemático todos os agrupamentos possíveis:  Figura 5: Resolução apresentada pelo aluno Grafite, para a questão 2 do teste diagnóstico inicial (Destacamos algumas partes para ajudar o leitor a visualizar a tentativa do aluno para encontrar um processo sistemático.)

(3) Uso de um elemento constante que servirá como referencial para a formação dos agrupamentos

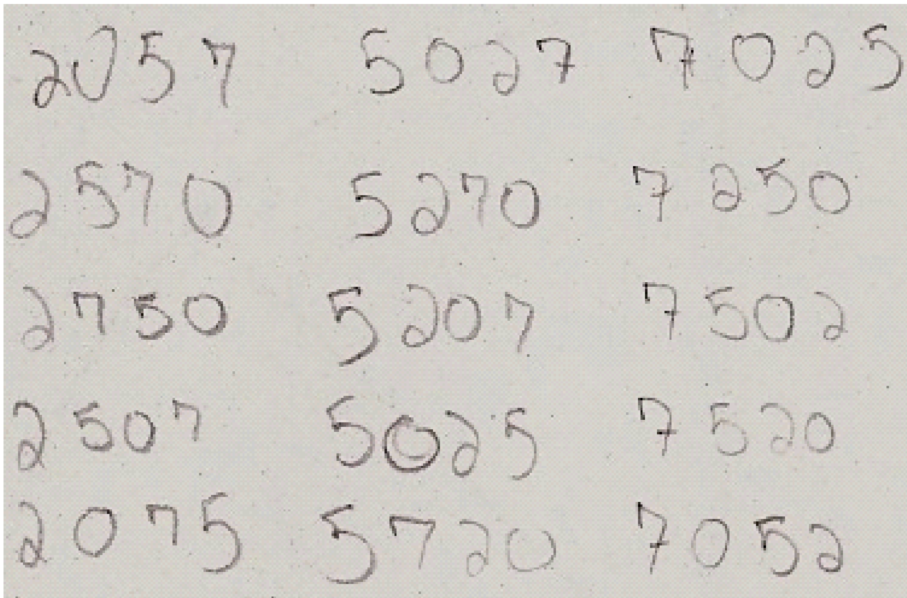


Figura 6: Resolução apresentada pelo aluno Dan, para a questão 2 do teste diagnóstico inicial

(4) A estratégia algorítmica completa que se caracteriza pela aplicação do elemento de referência e de um modo cíclico sistemático e completo.

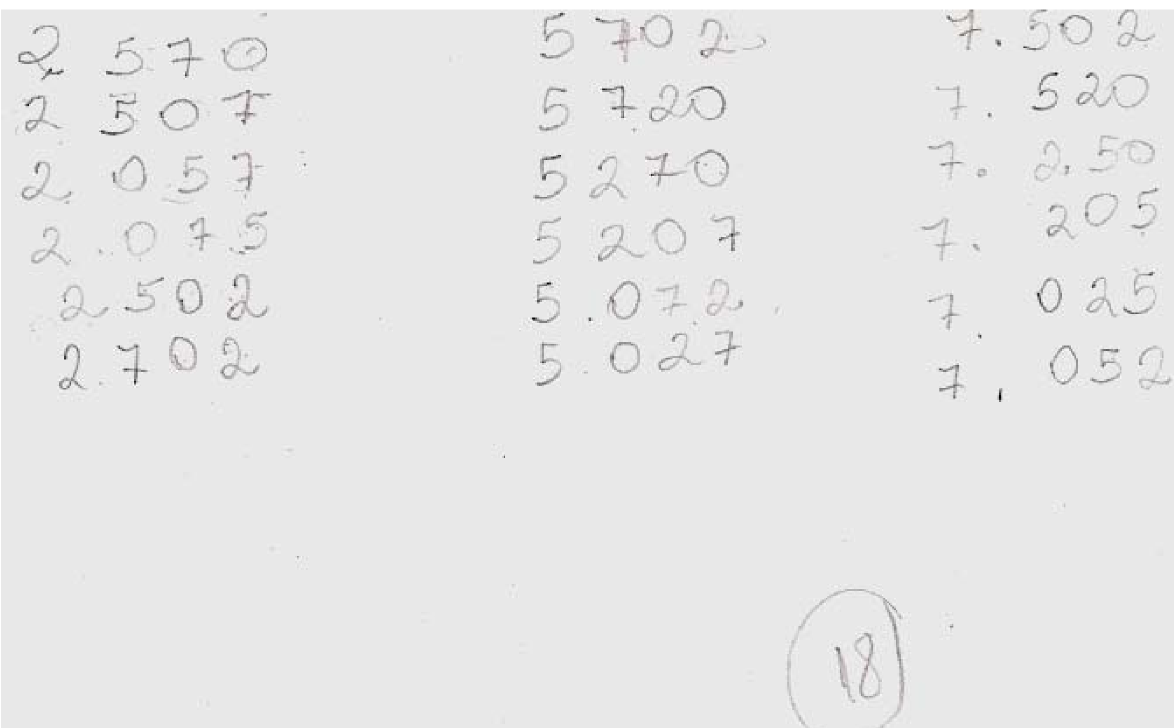


Figura 7: Resolução apresentada pela aluna Cla, para a questão 2 do teste diagnóstico inicial

Em sua maioria, os alunos apresentaram resoluções próximas do que foi exemplificado nas figuras 3 a 5. Nessas resoluções, utilizaram estratégias intuitivas de enumeração não sistemáticas ou parcialmente sistemáticas e não foram capazes de determinar todos os agrupamentos. Podemos encontrar a descrição desse mesmo erro nos estudos de Batanero (1997).

Na quase totalidade das resoluções, observamos que os alunos consideraram o algarismo zero como possível valor para a quarta ordem. Apesar de considerarmos que esse erro não está diretamente relacionado ao estudo de Análise Combinatória, reconhecemos que poderá refletir de forma negativa na determinação de todos os algarismos possíveis e, consequentemente, na obtenção do resultado esperado. Portanto, trabalhar o conceito de numeral, enquanto exploramos situações que envolvam raciocínio combinatório, passou a ser nosso primeiro objetivo relacionado ao conteúdo matemático que desejávamos desenvolver.

Dez alunos deixaram de fazer as duas últimas questões e acreditamos que tal fato ocorreu devido ao maior grau de complexidade desses problemas, quando comparados com os dois primeiros, pois exigiam mais que uma simples enumeração. Esse fato já era esperado, uma vez que autores como Roa e Navarro-Pelayo (2001) já haviam verificado essa dificuldade em seus estudos.

A partir da análise desse teste verificamos que, apesar de autores como Inhelder e Piaget terem afirmado que adolescentes são capazes de resolver problemas simples de combinatória, utilizando processos também simples como a enumeração, esses estudantes não demonstraram a habilidade de enumerar ou o fizeram de forma ineficaz. Constatamos também que alguns conceitos matemáticos básicos não faziam parte do conhecimento adquirido por esses estudantes ao longo de sua vida escolar. Essas constatações configuraram mais um dos desafios que enfrentamos ao longo de nossa pesquisa. A partir daí, foi necessário repensar a utilização das atividades planejadas inicialmente para o desenvolvimento da proposta de ensino. Decidimos construir, semanalmente, as atividades que utilizaríamos na proposta, a partir das observações feitas durante o processo. Esse replanejamento ocorreu durante todo o período de realização do trabalho.

Primeiro encontro

Na semana seguinte à aplicação e análise do teste diagnóstico inicial, implementamos a primeira atividade que foi construída e aplicada com o objetivo de familiarizar os estudantes com o conceito de numeral.

Iniciamos esclarecendo, ainda que de forma breve, como os algarismos podem formar numerais quando dispostos lado a lado. Em seguida, utilizamos uma urna de bingo e três bolas numeradas com os algarismos 9, 7 e 1, para analisar quais e quantos numerais podem ser formados com esses dígitos. Foram exploradas situações em que o algarismo sorteado era devolvido ou não à urna; sorteio com apenas um algarismo, com dois algarismos e com três algarismos. Em seguida acrescentamos a bolinha que representava o algarismo zero e passamos a discutir o que é um numeral com um, dois ou três algarismos, distintos ou não.

P: Eu vou fazer o seguinte: dentro do globo eu vou colocar apenas um algarismo, o nove. Apenas um algarismo, o nove.
(A bola com o número nove foi colocada na urna anteriormente vazia enquanto os alunos observavam em silêncio.)
P: Se você tivesse que apostar neste sorteio que eu vou fazer aqui em qual número você apostaria?
(Os alunos responderam em voz baixa e demonstraram insegurança)
A[26]*: Nove.*
P: Alguém aqui apostaria no oito?
(Mais uma vez os alunos responderam com receio:)
A: Não!
P: Não! Né? Só tem o nove lá dentro, né? Se eu tenho uma bolinha só e essa bolinha tem o número nove a única possibilidade de formar numeral é formar o nove.
No quadro, registramos o seguinte esquema:

1 algarismo	
algarismo	numeral
9	9

P: E se eu colocar duas bolinhas? Eu vou colocar as bolinhas nove e sete. Quantos resultados serão possíveis agora?
(Os alunos responderam todos ao mesmo tempo e usaram um tom de voz mais alto do que o inicialmente utilizado até aquele momento da aula. Como não seguiram uma ordem para dizer os números, as respostas se misturavam, mas foi possível identificar que diziam noventa e sete e setenta e nove.)
P: Bom, são muitas vozes e eu não consigo entender bem o que vocês estão dizendo então para facilitar a compreensão vou perguntar a um de vocês e se alguém não concordar com a resposta do colega é só se manifestar.
(Apontando para Mariana, perguntamos:)
P: Quais numerais podemos formar?
(A aluna respondeu com desenvoltura, mas manteve um tom de voz baixo:)
Mariana: nove e sete.
P: Nove e sete.
(Reforçamos usando um tom alto de voz.)
P: Que numeral podemos formar com estes algarismos nesta ordem?
Mariana : Noventa e sete.
P: Algum outro?
Mariana: Setenta e nove.
P: Isto mesmo! Setenta e nove, sete e nove.

[26] A: alunos

No quadro registrou-se o seguinte esquema:

1 algarismo		2 algarismos	
algarismo: 9	numeral: 9	algarismos: 7 e 9	numerais: 97 e 79

P: Agora vamos sortear?

O diálogo, parcialmente descrito nesse quadro, foi o primeiro a ser realizado em um grande grupo. Escolhemos essa dinâmica por entendermos que esses alunos estavam acostumados a acompanhar a exposição oral da professora. Não queríamos causar desconforto quanto ao tipo de aula neste momento, pois, de certa forma, assumíamos a responsabilidade pelo processo de ensino e aprendizagem desses alunos, visto que a professora efetiva nos havia confiado a regência da turma.

Ainda assim, procuramos introduzir alguns elementos que foram sugeridos pela literatura, como, por exemplo, a urna de bingo. Esse material ajudou a tornar a situação-problema mais familiar, além de servir de atrativo por se tratar de um objeto diferente daqueles usualmente utilizados nas aulas de Matemática.

Optamos, inicialmente, por questões de fácil resolução, com o intuito de criar um ambiente onde os alunos se sentissem mais seguros e, em consequência, mais receptivos aos questionamentos que planejávamos introduzir nos diálogos a partir daquele encontro. Entretanto, observamos que, apesar de as primeiras questões serem bastante simples, houve um receio por parte dos alunos em não conseguir responder aquilo que imaginavam ser o correto. Interpretamos as respostas em um tom de voz baixo como um sinal de insegurança que não estava relacionada diretamente com o conteúdo da pergunta e sim com o medo de errar.

Nesse sentido, procuramos valorizar as respostas dadas, repetindo-as e verbalizando argumentos que as justificavam, utilizando uma linguagem mais simples. Os registros no quadro foram utilizados para que os alunos pudessem visualizar e, através de outro sentido além da audição, perceber todas as possibilidades.

Nosso intuito era o de construir um ambiente propício para a criação de conjecturas, pelos alunos, sobre quantos numerais podem ser formados a partir de um grupo de dígitos.

Quando percebemos que esse ambiente estava começando a se configurar, utilizamos uma questão inquiridora para provocar a elaboração de ideias.

P: E se eu colocar duas bolinhas?

Nesse momento, foi possível perceber que os alunos começaram a construir a ideia de formação de todos os numerais possíveis, a partir de algarismos distintos. Consideramos esse fato um avanço, ainda que singular, no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Através do tom de voz, mais alto que aquele utilizado anteriormente, e do número de alunos que responderam à questão, podemos perceber o interesse em participar do diálogo.

Ao responder que numerais podemos formar com 7 e 9, a aluna Mariana não foi capaz de construí-los, apenas citou os algarismos, demonstrando que ainda não havia compreendido o conceito de numeral. Procuramos, então, explorar sua resposta dirigindo a ela outro questionamento. Esse é um dos momentos onde o papel do professor é muito importante. Nossa postura de não ressaltar o fato de a resposta dada ser diferente da esperada promoveu a continuação do diálogo e foi possível orientar Mariana e, provavelmente, outros alunos a compreender o que estava sendo questionado e também o conceito de numeral. Sabemos que a compreensão de um conceito tão complexo como o de numeral não necessariamente foi formado naquele momento, entretanto, é possível verificar através das atividades seguintes que houve uma negociação de significado capaz de orientá-los na direção da compreensão desse conceito.

Os registros escritos coletados nesta atividade evidenciam esse fato.

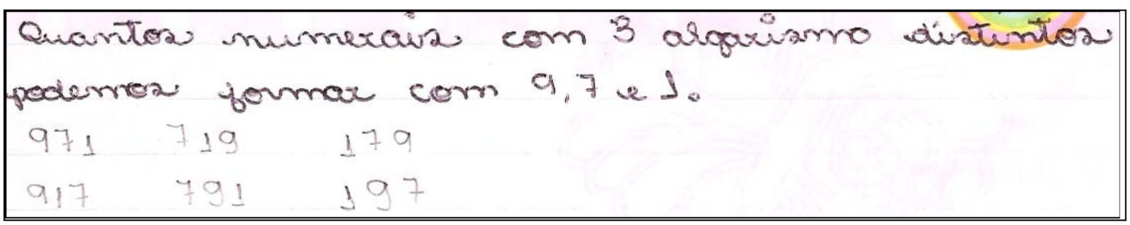

Quantos numerais com 3 algarismo distintos podemos formar com 9, 7 e 1.
971 719 179
917 791 197

Figura 8. Resolução apresentada pela aluna Jéssica para uma questão de formação de numerais.

Nesse registro, bem como em muitos outros, observamos o desenvolvimento do raciocínio combinatório no que se refere à enumeração sistemática de todos os arranjos possíveis. Essa é uma estratégia bastante eficaz quando o número de agrupamentos é pequeno (FERNANDES e CORREIA, 2007). Nossa experiência docente mostra que, mesmo quando a quantidade de agrupamentos é grande, a enumeração sistemática de alguns deles pode auxiliar na observação de padrões e orientar sobre qual operação deve ser realizada.

Entretanto, observamos que a maioria dos alunos não respondeu “quantos numerais” como solicitava o enunciado e sim “quais numerais” podemos formar. Se voltarmos ao período de ambientação, verificaremos que a informação verbalizada pela professora era valorizada, em detrimento do registro por ela escrito no quadro, e o foco das discussões, naquele momento, estava em como podemos formar numerais a partir de algarismos dados e não na quantidade de numerais formados. Aparentemente, o que estava sendo verbalizado teve maior influência sobre a interpretação dos estudantes do que o enunciado escrito da questão. Esse fato só foi verificado quando analisamos os registros escritos e a gravação do encontro. Decidimos, então, que no momento oportuno, trabalharíamos a valorização tanto das informações verbalmente comunicadas quanto das escritas.

No decorrer desse primeiro dia, aos poucos, os alunos foram demonstrando segurança para responder às questões tanto individualmente, quando algum aluno era solicitado, quanto coletivamente, quando a pergunta era destinada ao grupo.

Após o primeiro diálogo, que se iniciou como um monólogo e, gradativamente, foi ganhando a adesão de mais estudantes, e a realização e discussão de outras possibilidades de formação, ficou claro que os alunos haviam compreendido como podemos organizar algarismos para formar numerais.

Quando planejamos as atividades para este dia pretendíamos: trabalhar a ideia de algarismo e numeral, o significado da expressão ‘algarismos distintos’, a competência de enumerar, de forma correta e organizada, todas as possibilidades de se escrever numerais, dados os algarismos que os formam, e incentivar a participação, tanto individual quanto coletiva, dos alunos.

Observando-se os registros dessa aula, tanto escritos quanto em áudio e vídeo, foi possível verificar que todos os objetivos foram alcançados. Verificamos a compreensão do conceito de numeral e a evolução do raciocínio combinatório, através da capacidade de enumerar sistematicamente todos os agrupamentos possíveis.

Na perspectiva da Comunicação Matemática adotada na presente pesquisa, observamos avanços na criação de um espaço onde o aluno não é apenas um receptor de informações. Se, no início, poucos alunos se manifestavam quando questionados, ao final do período de aula, todos queriam expressar o que haviam pensado. Se, nas aulas observadas durante o período de ambientação, os alunos respondiam em coro às perguntas da professora, a partir dessa aula foi possível observar uma mudança de comportamento. Os estudantes já não conseguiam responder em coro uníssono, pois as respostas às questões colocadas poderiam variar na ordem. Esse fato gerou, inicialmente, algum ruído na comunicação. Não era possível entender o que diziam, visto que cada um falava os numerais em uma ordem diferente. Mas, apesar de não fornecerem respostas idênticas, todos respondiam corretamente. Essa foi uma oportunidade para valorizar a capacidade individual desses estudantes e mostrar que é possível encontrar resultados em Matemática que, apesar de diferentes em algum aspecto, estão simultaneamente corretos.

Após a análise desse primeiro encontro, prosseguimos elaborando a atividade para o próximo, de acordo com os objetivos que pretendíamos alcançar.

Durante o período de ambientação, foi possível verificar que os alunos conversavam, frequentemente, sobre futebol. Essa informação foi considerada na elaboração de algumas das atividades seguintes, com o objetivo de motivá-los, uma vez que se tratava de um assunto familiar e de interesse comum, sobre o qual é possível aplicar a Análise Combinatória. Estávamos convencidos de que, ao explorar esse tema nas próximas atividades, poderíamos criar situações de aprendizagem para os alunos e, consequentemente, obter o sucesso desejado para as tarefas propostas como declarou Martinho (2007b) em sua tese. Nesse sentido, as propostas das quatro semanas seguintes basearam-se em situações-problema que envolviam, de alguma forma, o futebol.

Segundo encontro

Decidimos não trabalhar com interpretação de enunciado escrito, para deixar que o foco da atividade ficasse nas discussões em grupo e no desenvolvimento da ideia de agrupamento ordenado. Portanto, as informações sobre a questão foram fornecidas verbalmente.

P: Um campeonato municipal de futebol de salão amador será disputado por cinco times: Bola Murcha Esporte Clube; Tabajara Futebol Clube, Clube de Regatas Falência; Perna de Pau Futebol Clube e Saci Pererê Esporte Clube. Qual é o número de resultados possíveis para os três primeiros lugares?

Após a explicação oral, foram distribuídos os nomes dos times separados em tiras de papel[27].

Os alunos dividiram-se em grupos com, no máximo, quatro componentes. A divisão foi aleatória, mas a disposição dos alunos na sala influenciou a escolha dos componentes de cada grupo. Alunos que estavam sentados próximos uns dos outros procuraram se agrupar. O sexo pareceu ser outro fator determinante. Apenas um grupo foi formado heterogeneamente.

Inicialmente demonstraram pouca motivação para realizar a tarefa solicitada, mas aos poucos foram se envolvendo e as discussões dentro de cada grupo começaram a surgir. Algumas dificuldades inerentes ao trabalho em grupo, já descritas em algumas pesquisas, começaram a surgir, como, por exemplo, alunos que monopolizam a responsabilidade de resolver a questão, deixando os colegas do mesmo grupo sem função, e alunos que não se envolvem e conversam sobre outros assuntos. Em um dos grupos, observou-se que um aluno procurava organizar a resolução e explicava para os colegas suas conjecturas. Nos demais grupos, parte dos componentes estava envolvida, enquanto a outra parte

[27] Apêndice 2, pág. 150.

apenas acompanhava as discussões sem expressar suas ideias. Nesse momento, foi necessária uma intervenção no sentido de estimular mais alunos a participarem da atividade.

Durante a realização dessa atividade, as discussões geradas aconteceram internamente nos grupos e também entre grupos diferentes. Os alunos discutiam entre si e com a pesquisadora.

Acompanhando o trabalho dos grupos, verificamos que alguns alunos não entenderam a questão apenas com a explicação verbal. Para ajudá-los a compreender o que estava sendo solicitado, alguns exemplos foram dados.

P: Existem vários resultados possíveis. Veja bem! O Bola Murcha pode ser o primeiro, o Falência, o segundo e o Perna de Pau, o terceiro. Outro resultado seria: o Bola Murcha primeiro, o Perna de Pau, o segundo e o Falência, o terceiro. E assim muitos outros resultados são possíveis.

Thales: Então tem um monte!

P: Vocês é que vão dizer! Bom trabalho!

Nos dois agrupamentos apresentados como exemplos utilizamos, intencionalmente, o mesmo time no primeiro lugar e mudamos o segundo com o terceiro, a fim de levá-los a pensar em fixar um elemento e variar ciclicamente os outros. Em um primeiro momento, esse padrão não foi percebido, mas, acompanhando o trabalho dos grupos, foi possível verificar que a ideia de enumeração sistemática com elemento de referência e variação cíclica, desenvolvida no encontro anterior, foi compreendida pelos alunos. Entretanto, eles desejavam um caminho mais direto e perguntavam por maneiras mais rápidas de resolver o problema. Nesse momento, o papel do professor é bastante importante. Ele pode escolher entre ensinar o processo mais rápido ou deixar que o desejo de encontrá-lo mobilize os alunos a observar padrões e usá-los, corretamente, a fim de reduzir o tamanho da resolução. Apesar de a primeira opção ser a mais fácil para o professor, é na segunda que o aluno tem mais chances de atribuir significado às operações que realiza.

O exemplo também buscava contribuir para o desenvolvimento da ideia de agrupamento ordenado. Verificamos, através dos registros escritos, que esse conceito, apesar de não ter sido explicado diretamente para os alunos, foi compreendido.

A princípio, os alunos demonstraram dificuldade em organizar as ideias e expressá-las corretamente. Apresentavam pouca habilidade para a argumentação. A ideia mais recorrente era a de que, para resolver um problema envolvendo matemática, é preciso realizar operações com os números citados, ainda que a estas não sejam atribuídos significados. Foi preciso incentivá-los a utilizar outra estratégia, transformando o problema em outro similar, mas com uma quantidade menor de dados, para que, fazendo analogias, pudessem validar ou refutar sua primeira hipótese de resposta.

Essas observações podem ser corroboradas pelo diálogo a seguir.

Célio: São estas quatro possibilidades. São cinco lugares. Então daria...

(O aluno completa a frase usando um tom de voz mais baixo que o início da frase enquanto olha para a pesquisadora)

Célio: vinte?!

(E o diálogo com Célio continua enquanto os outros componentes do grupo observavam atentamente.)

P: Bom, vamos conferir o número que você está pensando nele aí. Vamos supor que não fossem cinco, apenas três. Quantas seriam?

(Separamos três tiras com nomes de times.)

Jussara: Quatro!

P: Por que?

Jussara: Ah! Porque este aqui pode ocupar a primeira, a segunda ou a terceira.

(Jussara movimenta uma das tiras em cima da carteira simulando as três classificações possíveis para o time.)

Jussara: Simultaneamente com os outros dois também. Entendeu?

P: Vamos testar, né?! Se o Tabajara Futebol Clube for o primeiro colocado, O Clube de Regatas pode ser o segundo e o Perna de Pau, o terceiro. Seria uma possibilidade. Agora podemos trocar os dois últimos e teríamos uma outra possibilidade.

Jussara: Ah! É verdade!

P: Vai contando aí para mim. Já temos quantas?

(Célio e a Jussara falam juntos, mas a voz que sobressai é da aluna.)

Alunos: Duas.

(Jussara continua.)

Jussara: Tipo assim, o Tabajara pode ficar cinco vezes consecutivas no primeiro lugar e os outros?

Celio: Os outros dois trocam. É só inverter!

(Maria que, apesar de fazer parte do grupo, até então apenas observava sem se manifestar, comenta:)

Maria: É! Dá pra trocar o segundo e o terceiro e depois o primeiro e o segundo, ...

P: Bom, acho que dá pra gente pensar um pouquinho mais, né?! Pensa para estes três e depois para estes quatro. Daqui a pouco eu volto.

(Outra aluna, Patrícia, que, inicialmente, também só observava resolve oferecer-se para fazer o registro.)

Patrícia: Vou começar a anotar.

No diálogo acima e nos que se seguem, nas oportunidades em que participamos com questionamentos, buscamos estabelecer uma comunicação no *padrão reflexivo*[28]. Nossa intenção era provocar reflexões acerca dos argumentos eram apresentados, tanto no conteúdo quanto na forma.

Em situações como essa, em que o professor conhece a resposta e um caminho mais rápido e fácil para chegar até ela, é muito difícil para ele assumir o perfil de 'observador-interventor'[29], ou seja, ser o educador que cria situações de aprendizagem que possibilitem aos alunos construírem as próprias conjecturas e validá-las. Nesse momento, destacamos a importância do papel do professor para o processo de ensino e aprendizagem. Nem sempre a maneira mais fácil de ensinar algo a um estudante é a mais eficaz, quando queremos que ele atribua sentido ao que está aprendendo.

Apesar de as respostas dadas pelos alunos, em vários momentos, não serem aquelas por nós esperadas, não ressaltamos o erro nem mesmo informamos que alguma afirmação não estava correta. Procuramos, através de novos questionamentos, incentivá-los a buscar estratégias para validar ou refutar suas conjecturas.

Procuramos introduzir as ideias de aplicação de um elemento de referência e de um modo cíclico sistemático e completo de enumeração das possibilidades. Para tanto, sugerimos que o problema fosse substituído por outro similar, mas com um número menor de elementos, para que padrões pudessem ser observados. Esse mesmo procedimento foi incentivado em outros grupos que apresentaram dificuldades similares.

No diálogo descrito anteriormente é possível observar que, gradativamente, todos os componentes do grupo participaram da construção da estratégia. Em outros grupos também foi observada essa mudança de postura e, portanto, não consideramos este como um fato isolado. Nesse sentido, avaliamos que a atividade contribuiu para a criação de um espaço de interação, negociação de significados e, consequente, construção de conhecimento.

A atividade durou, aproximadamente, uma hora e dez minutos. Nesse período, os alunos discutiram e todos os grupos chegaram a um resultado para a questão proposta. Diferentemente do que havia ocorrido no primeiro encontro, em que a estratégia adotada por todos foi basicamente a mesma, nessa atividade surgiram esquemas distintos.

Aproveitamos a oportunidade para expor as resoluções de cada grupo para toda a turma. Os alunos foram convidados a apresentar suas estratégias no quadro de giz. Houve muita hesitação. Após um período de espera, dois alunos aceitaram o convite.

---

[28] Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).
[29] D'Antonio (2006).

O quadro foi dividido em duas partes. Na primeira, Daniel, representante do grupo 1, usou a enumeração sistemática, organizando os dados em uma tabela como a registrada abaixo.

B, T, F B, T, P B, T, S	T, B, F T, B, P T, B, S	F, B, T F, B, P F, B, S	P, B, T P, B, F P, B, S	S, B, T S, B, F S, B, P
B, F, T B, F, P B, F, S	T, F, B T, F, P T, F, S	F, T, B F, T, P F, T, S	P, T, B P, T, F P, T, S	S, T, B S, T, F S, T, P
B, P, T B, P, F B, P, S	T, P, B T, P, F T, P, S	F, P, B F, P, T F, P, S	P, F, B P, F, T P, F, S	S, F, B S, F, T S, F, P
B, S, T B, S, F B, S, P	T, S, B T, S, F T, S, P	F, S, B F, S, T F, S, P	P, S, B P, S, T P, S, F	S, P, B S, P, T S, P, F

Figura 9. Reprodução da tabela apresentada pelo grupo 1 como estratégia de resolução da atividade proposta na 3ª semana.

Concluiu o registro escrevendo ao lado da tabela: 60 possibilidades

Explicou que em cada coluna fixou o time que estaria no primeiro lugar, em cada "bloquinho" fixou os dois primeiros lugares e variou o terceiro. Quando questionado, esclareceu que a letra B representava o Bola Murcha Esporte Clube; o T, Tabajara Futebol Clube e o F, Clube de Regatas Falência. Nessas representações pode-se observar que esses alunos identificaram no nome de cada time o que o diferenciava dos demais, enquanto expressões como "Esporte Clube", "Futebol Clube" e "Clube de Regatas" foram reconhecidas como indicativo do tipo de instituição, nesse caso, associações esportivas. O fato de estarem familiarizados com essas expressões colaborou para a atribuição de significado às palavras.

Após uma apresentação como essa, um professor cujo perfil é de "organizador-interventor"[30] diria se a resposta encontrada pelo grupo está correta ou não, enquanto os demais alunos corrigiriam as suas. Possivelmente, esses estudantes não questionariam a resolução exposta e copiariam o modelo no caderno, preocupando-se basicamente com o resultado final.

Como nosso objetivo neste estudo é desenvolver estudantes intelectualmente autônomos, após a explicação de Daniel, buscamos explorar as diferenças entre as estratégias e os resultados encontrados

[30] D'Antonio (2006).

pelo grupo dele e por outros. Procuramos construir, conjuntamente com os alunos, as normas sociomatemáticas do que são estratégias válidas e resoluções diferentes.

Nesse sentido, buscamos assumir o papel de professor "observador-interventor". E, apesar de conhecer a resposta correta, deixamos que analisassem suas estratégias e as comparassem com aquela apresentada pelos colegas.

Mas essa atitude não aconteceu naturalmente, apesar de as duas resoluções apresentadas no quadro apresentarem resultados e estratégias diferentes. E, mais uma vez, fez-se necessária nossa intervenção através de uma questão inquiridora:

P: Outros grupos acharam menos que sessenta. Vocês acham que tem alguma sobrando aí?

(Questionamos apontando para a resolução apresentada na figura 9)

A questão foi direcionada para toda a turma e não apenas para os componentes do grupo que havia apresentado aquela resolução.

Observamos três atitudes diferentes entre os alunos. Alguns procuravam em suas resoluções as diferenças, outros olhavam atentamente para o quadro, enquanto outros ficaram distraídos e não se envolveram.

Temendo que o interesse pela questão acabasse, depois de um longo silêncio, procuramos iniciar um novo diálogo:

P: E aí? Vocês concordam ou discordam?

Paulo: "Tá" errado!

P: Por que está errado?

Paulo: Por que o meu "tá" certo!

P: E como foi que você fez?

Paulo havia registrado sua resolução na outra parte do quadro e o resultado encontrado foi 45.

T F B	T F P	T F S	T P B	T P F	T P S	T S B	T S F	T S P

9 x 5 = 45 possibilidades

Paulo não quis explicar sua resolução. Pediu a outros membros do grupo que o fizessem, mas nenhum deles atendeu ao pedido.

P: O que aquele T significa?

Paulo: O Tabajara Futebol Clube.

P: E por que você começou escrevendo nove vezes o T?

Paulo: Porque queria escrever todos os resultados onde T é o primeiro.

P: Então vocês fixaram o Tabajara no primeiro lugar. E depois?

Paulo: Depois a gente escreveu o resto.

P: Deixa eu entender! Primeiro vocês fixaram o primeiro colocado. Depois, fixaram o segundo e variaram o terceiro. É isso mesmo?

Paulo: É!

P: E por que você multiplicou nove por cinco?

Paulo: Porque são cinco times, uai!

P: Ah! Entendi! Com cada time no primeiro lugar são nove resultados possíveis e como são cinco times, então, nove vezes cinco são quarenta e cinco ao todo.

Paulo e os outros integrantes do grupo demonstraram segurança em relação à resposta que haviam obtido, entretanto, não foram capazes de argumentar explicando porque a resolução do outro grupo não estava correta. Apesar de verificarmos que a estratégia utilizada por esse grupo apresenta um avanço no raciocínio combinatório, quando encontra a quantidade total de agrupamentos sem a necessidade de enumerar todos, os alunos ainda demonstraram dificuldade em argumentar e expor suas ideias. Com o objetivo de orientá-los na construção desses argumentos, fizemos algumas perguntas e, aos poucos, eles foram descrevendo o processo adotado. Ainda assim, as respostas curtas mostraram a necessidade de trabalhar a argumentação nos encontros seguintes, tendo em vista a dificuldade por eles apresentada em justificar suas conjecturas. Entretanto, podemos observar que, para esses alunos, sua resolução garantia a validade de sua resposta.

Então, Alice, que não fazia parte do grupo de Paulo, levantou-se e perguntou se podia mostrar porque a resposta do 2º grupo estava errada.

Perguntamos mais uma vez aos responsáveis pela resolução se gostariam de defender suas ideias. Nesse momento foi possível observar que os componentes do grupo de Paulo já não estavam tão seguros quanto à correção de sua resolução e, portanto, abdicaram do direito de defendê-la. Como ninguém se manifestou, Alice recebeu a autorização para falar.

Ela explicou que eles se esqueceram de contar com a possibilidade do time B ocupar o segundo lugar e, portanto, deixaram de considerar três resultados possíveis. Completou o esquema no quadro.

T F B	T F P	T F S	T P B	T P F	T P S	T S B	T S F	T S P	T B F	T B P	T B S

12 x 5 = 60 possibilidades

Todos concordaram com Alice e as resoluções dos dois grupos foram validadas pela turma.

Aproveitando a aceitação das duas estratégias, utilizamos os registros no quadro para trabalhar a importância da observação e utilização de padrões na resolução de problemas como o que foi proposto.

P: Se T é o primeiro, quantas opções temos para o segundo lugar?

(Alguns alunos responderam:)

Alunos: quatro.

No esquema do grupo 2, com giz colorido, reforçamos os possíveis times que ocupariam o segundo lugar caso o primeiro fosse ocupado por T.

T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	P	P	P	S	S	S	B	B	B
B	P	S	B	F	S	B	F	P	F	P	S

P: Fixado o segundo lugar, quantas opções temos para o terceiro lugar?

Alunos: Três.

P: Então são três para cada.

(Apontando para cada grupo representado no quadro, alunos e pesquisadora concluíram, oralmente, que se são três para cada e são quatro agrupamentos fixando o segundo termo, então são doze ao todo, ou seja, doze agrupamentos onde T ocupa a primeira colocação.)

P: E se no primeiro lugar não estivesse o T e sim o S? Quantos seriam?

Alice: doze.

P: Doze também? Como é que você tem certeza disso?

(A aluna apontou para a primeira parte do quadro onde estava a tabela registrada pelo grupo 1 onde figuravam todas as possibilidades.)

Nesse momento, verificamos que a enumeração de todos os agrupamentos realizada pelo primeiro grupo ajudou na validação da operação utilizada pelo segundo. A maioria dos alunos acompanhou o diálogo e concordou com a Alice.

Poderíamos ter explorado mais essa situação, discutindo sobre as diferenças e semelhanças entre as duas resoluções apresentadas. Mas só percebemos isso quando analisamos os registros em áudio e vídeo. Aparentemente, aqueles alunos consideraram as duas resoluções como distintas porque, enquanto uma delas enumerou todas as possibilidades, a outra encontrou parte dos agrupamentos e usou uma operação para encontrar a resposta. Uma norma sociomatemática construída ao longo deste trabalho, sobre como definir o que são resoluções diferentes, começou a tomar corpo. Para eles, pequenas mudanças na forma de registrar uma estratégia significava uma maneira diferente de resolver uma questão.

Outra norma sociomatemática que teve início nessa atividade e perdurou até o final do trabalho de campo foi a validação das respostas através da enumeração, parcial ou completa, de possibilidades.

Apesar das dificuldades demonstradas no início da aula, aos poucos, os alunos foram se organizando e criando estratégias de resolução como, por exemplo, tabelas e enumeração sistemática.

Sob o viés da Matemática, podemos observar nas duas apresentações um avanço no desenvolvimento do raciocínio combinatório. A enumeração foi realizada de maneira sistemática, usando um elemento de referência e uma variação cíclica, o que, para autores como Roa (2000), aumenta a chance de se encontrar a quantidade correta do total de agrupamentos possíveis. O segundo grupo ainda mostrou mais um elemento de evolução no raciocínio combinatório, quando foi capaz de observar padrões e encontrar uma resposta para a questão proposta através de uma operação justificada.

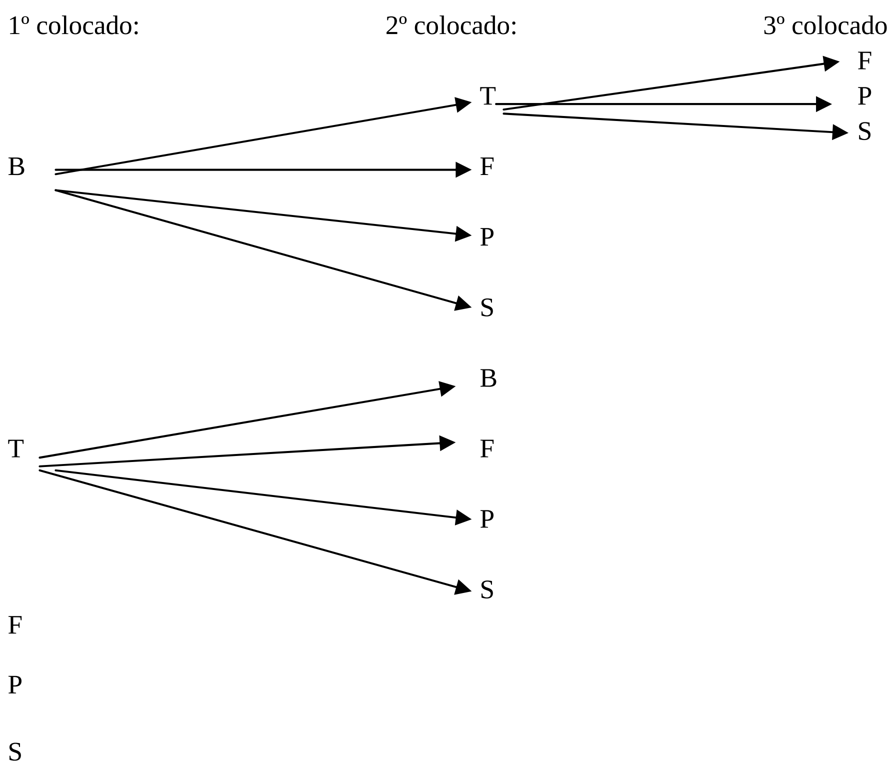
Entretanto, alguns alunos expressaram sua vontade de encontrar uma maneira mais rápida para resolver a questão.

Mônica: "Fessora", não tem uma fórmula para resolver isto mais rápido?

P: Fórmula tem, mas nem sempre é mais fácil resolver por ela. Se pararmos para pensar, podemos observar alguns padrões que podem nos ajudar. Neste caso, por exemplo, nós tínhamos, inicialmente cinco times. Nós fixamos um para ser o primeiro colocado. Passamos então a ter quatro opções para o segundo colocado. E assim que fixamos o segundo passamos a ter três opções para o terceiro em cada agrupamento com o primeiro e o segundo colocados fixados o que nos faz concluir que são doze grupos para cada time classificado no primeiro lugar.

Aproveitamos, então, o envolvimento dos estudantes, e apresentamos outras duas estratégias de resolução que até aquele momento não haviam sido utilizadas: a árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo.

Com a ajuda de alguns estudantes, construímos a árvore de possibilidades a seguir, procurando observar padrões a fim de não ter que construí-la inteira.



Os alunos pareceram entender a ideia do princípio multiplicativo, através da comparação com a árvore de possibilidades. Entretanto, não demonstraram interesse em utilizá-la. Inferimos que esse fato ocorreu porque essa estratégia não foi construída por eles e sim apresentada pronta. É interessante observar uma mudança de comportamento desses estudantes visto que, até então, o modelo fornecido pela professora era a única forma aceita como correta e, a partir daquele momento, a estratégia construída por eles prevalecia no grupo como a mais eficiente.

Terceiro encontro

Esta atividade dava continuidade ao trabalho com o tema futebol. A questão propunha investigar a quantidade de uniformes diferentes que poderiam ser formados com as opções oferecidas por um patrocinador: quatro de camisas: branca, preta, vermelha e listrada; duas de shorts: vermelho e preto, e três opções de meiões: branco, preto e vermelho.

Mais uma vez as informações pertinentes à questão foram fornecidas verbalmente. Os alunos dividiram-se em grupos de três ou quatro componentes cada.

A seguir, apresentamos um trecho da discussão de um dos grupos.

Arlindo: Eu pensei em fazer desenho. A gente faz o uniforme; a camisa, embaixo o short e o meião. Aí faz as opções de cores pra ele. Tem essas opções aqui, pra poder escolher.

João: É.

Arlindo: Você pensou como?

João: Eu pensei em fazer a tabela assim com short. Não. Camisa, short e meião. Aí a camisa branca. Aí vai fazer, camisa branca, short vermelho e meião branco. Aí depois teria que fazer camisa. Aí repete, camisa branca, meião preto e... e com meião branco. Entendeu?

Arlindo: Entendi.

Pedro: Você está falando só.. só escrever?

João: Só escrever.

Pedro: Só escrever?

João: É.

Pedro: É. Desenhar é mais complicado.

Arlindo: Desenhar não é mais complicado. É mais complicado de desenhar. Mas pra você entender, pra você ver a opção certa eu prefiro desenhar.

Pedro: Não.

Arlindo: Você vai ver que é mais fácil.

[...]

Arlindo: Preta.

João: Vermelho e preto. Vai ser tudo assim. Tudo... Vai ser tudo igual a primeira aí.

Pedro: Branco.
Arlindo: Olha pra você ver. Quando tem uma cabeça às vezes até pensa, mas quando tem quatro cabeças pensa muito mais né? Você viu que eu comecei a dar uma ideia, você já teve outra melhor e mais fácil pra entender. Se fosse eu ia estar pelejando até agora com aquele branco, preto, não sei o que.
João: Duas pensam melhor que uma.
Arlindo: Então. É o que eu estou falando. Quatro ainda pensam melhor ainda.

Nesse trecho, podemos observar que, inicialmente, os alunos buscam estratégias individuais e, após uma breve negociação, elegem a que consideraram mais eficiente: a tabela. Demonstram reconhecer o valor do trabalho em grupo. Arlindo e João demonstraram mais desenvoltura para dialogar, enquanto Pedro participa algumas vezes e um quarto aluno em nenhum momento manifestou-se.

Arlindo é considerado por todos os colegas da sala e pela professora como um dos alunos mais inteligentes. Apesar de empenhar-se em participar de todas as atividades propostas até aquele momento, mostrou alguma resistência à dinâmica adotada nas discussões. Estava sempre perguntando sobre a resposta certa e se irritava quando esta não lhe era fornecida.

Assim que o trabalho do grupo se inicia, Arlindo sugere uma estratégia de resolução. No começo não é questionado, uma vez que existe uma norma social estabelecida de que ele é mais inteligente e, portanto, provavelmente sabe chegar à resposta correta. Entretanto, um outro componente do grupo, João, apresenta outra sugestão que, depois de ser explicada para o restante do grupo, é eleita como a mais eficaz. É interessante observarmos que João só expôs sua ideia depois que Arlindo o incentivou. A norma social vigente o fez pensar que, por considerar-se menos inteligente que Arlindo, sua ideia não seria aceita pelo grupo. Arlindo, também acostumado com essa norma, resistiu por algum tempo em aceitar a ideia de João, mas, com o apoio de um outro membro do grupo, todos concordaram em utilizá-la.

No decorrer do trabalho de campo, tanto João, quanto outros alunos que se sentiam menos preparados que os alunos considerados como os mais inteligentes, passaram a perceber que era possível participar das discussões e propor boas ideias.

Podemos observar no mesmo diálogo e nos que foram estabelecidos nos demais grupos uma comunicação no nível *contributivo*[31]. Os alunos interagem trocando algumas ideias.

[31] Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007, p. 25).

Todos os grupos chegaram ao resultado esperado. Várias estratégias foram utilizadas como, por exemplo, tabelas, árvores de possibilidades e o princípio multiplicativo. Dois grupos desenharam todos os conjuntos possíveis. Um deles coloriu as peças de roupa do uniforme e o outro identificou as cores através da primeira letra de cada palavra que a designava. Outros dois grupos construíram tabelas e enumeraram as possibilidades de forma sistemática. Apesar de os alunos não terem demonstrado muito interesse pela árvore de possibilidades apresentada no encontro anterior, quatro grupos a utilizaram. Construíram a árvore e, em seguida, usaram o princípio multiplicativo para registrar o resultado. Um último grupo resolveu a questão na ordem inversa: primeiro utilizou o princípio multiplicativo e depois construiu a árvore de possibilidades para comprovar o resultado encontrado.

Nenhum grupo resolveu a questão utilizando apenas o princípio multiplicativo. Uma nova norma social foi estabelecida: quando se resolve um problema, sua resposta deve ser justificada e validada.

Além de terem resolvido a questão em menos tempo, também mostraram segurança ao apresentar o resultado. Apesar de as estratégias adotadas terem sido variadas, nenhum aluno achou que a resolução do colega estava incorreta. A norma social que estabelece que um mesmo problema pode ser resolvido, corretamente, de formas diferentes, estava consolidada.

O tempo gasto por cada grupo variou muito. Não houve discussão no grande grupo, mas as resoluções e respostas foram discutidas entre os grupos na medida em que iam terminando a atividade.

Os alunos pareciam estar mais seguros e motivados a tentar estratégias diferentes e começavam a argumentar com mais desenvoltura.

Preparando-os para uma atividade que seria realizada em algumas semanas, cada grupo recebeu um jogo completo de dominó, com a tarefa de jogar prestando atenção nas peças que iam sendo dispostas na mesa e naquelas que ainda possuíam como possibilidade de jogada.

Um evento que adiou a realização de uma atividade

Além dos vários encontros adiados por motivo de eventos noturnos na cidade, como, por exemplo, festas que impediam a realização das aulas, descrevemos a seguir um fato que repercutiu de forma significativa no trabalho de campo.

Os alunos começavam a realizar uma atividade, quando foram interrompidos pela professora de Matemática da turma que trazia um recado da direção da escola. Como havia sido avisado anteriormente, o aluno que não estivesse com a camisa da Escola não poderia assistir às aulas.

Praticamente todos os estudantes não estavam uniformizados e aquela situação gerou muito desconforto. Alguns alunos que tinham condição de providenciar a camisa de uniforme o fizeram, mas outros, incomodados com a proibição, organizaram uma manifestação contra a atitude tomada pela direção e do lado de fora do prédio da Escola reivindicavam o direito de assistir às aulas. Apesar da permanência de alguns alunos em sala de aula, não foi possível conseguir que se dedicassem à realização da atividade.

Um dos grupos tentava me explicar porque achavam que impedir a permanência dos alunos sem uniforme na escola era errado. Argumentavam que os professores e o diretor também deveriam usar uniforme. Conversei com elas e disse que não podemos justificar uma quebra de regras jogando a atenção para outra situação. Expliquei que regras precisam ser criadas para garantir a boa convivência social e devem ser respeitadas e para isso precisam ser construídas em conjunto e não impostas. Sugeri que incentivassem os representantes de turma a se reunirem com a direção para discutirem o assunto sem desordem.

Figura 10. Trecho do diário de campo (5ª semana)

É interessante observar que esses alunos não costumam questionar seus professores em relação ao conteúdo ensinado, entretanto, criam argumentos que julgam consistentes para reivindicar o que julgam ser um direito adquirido: não usar uniforme.

Esse evento nos levou a pensar sobre a necessidade de ouvir esses alunos para conhecer suas expectativas em relação ao trabalho que estávamos realizando.

Promovemos, então, no encontro seguinte, um momento de avaliação do que havia sido realizado até aquele momento.

As carteiras foram reorganizadas de modo a formar uma circunferência imaginária, com o objetivo de criar um espaço para que o trabalho fosse avaliado, oralmente. Nossa intenção era diminuir a imagem da sala de aula como um espaço hierárquico, onde o professor posiciona-se na frente dos alunos e é o detentor da verdade absoluta, enquanto os alunos sentam-se uns atrás dos outros sem que possam observar as expressões faciais de seus colegas. Queríamos promover uma conversa aberta e franca.

Perguntamos aos alunos como avaliavam a realização do trabalho até aquele momento. No início, nenhum aluno se manifestou, até que alguns começaram a falar. Uma aluna afirmou que havia gostado muito de trabalhar em grupo. Ela argumentou que quando discute com outros colegas entende melhor o enunciado da atividade. Ficou definido que, na medida do possível, continuaríamos realizando atividades em pequenos ou grandes grupos.

Alguns alunos aproveitaram o espaço de diálogo para expressar suas opiniões sobre as aulas de outros professores. Sem inibi-los, mas buscando manter o foco na avaliação parcial do projeto, por diversas vezes foi necessário conduzir novamente a discussão para o assunto proposto.

Um aluno, que não estava presente no dia em que o convite foi feito à turma, perguntou por que estávamos realizando este projeto. Ele queria saber o que ganharíamos com este trabalho. Argumentamos que a crença em um processo de ensino e aprendizagem onde professores e estudantes aprendem, através das interações que podem ser geradas por momentos de criação e discussão de estratégias de resolução para situações diversas, moveu a criação deste projeto. Esclarecemos que aquela turma foi escolhida para experimentar essa nova metodologia. Reiteramos a intenção de divulgar os resultados para professores que se interessassem em adotar esta estratégia de ensino e aprendizagem em suas aulas.

> *P: Vocês são pessoas inteligentes e podem mostrar à sociedade que são capazes de aprender e de ensinar!*

Flávia manifestou-se, dizendo que todos estavam gostando de participar do projeto. Outros alunos concordaram com palavras ou gestos de confirmação.

Thiago disse que gostaria que mais alunos participassem das discussões e Mariana solicitou que a metodologia adotada fosse partilhada com outros professores, para que eles também pudessem utilizá-la.

Quarto encontro

Ainda explorando o tema futebol e com o objetivo de trabalhar o conceito de agrupamento não ordenado elaboramos uma atividade

Até então, as informações sobre as questões eram fornecidas verbalmente, visto que a interpretação incorreta do enunciado poderia influenciar negativamente a realização das atividades e, consequentemente, impedir que os objetivos propostos fossem alcançados. Considerando que os alunos já estavam preparados para iniciar uma fase de discussão de enunciados de problemas, propomos a atividade a seguir.

O Saci-Pererê Futebol Clube já está no campeonato regional juntamente com outros 11 times. Segundo o regulamento da competição, na primeira fase, cada time deve jogar com todos os outros adversários.

Fui eleita como organizadora do calendário esportivo do evento e preciso determinar quantos jogos serão ao todo nesta primeira fase. Prepare um "esquema" para apresentá-lo a fim de explicar como posso determinar o total de jogos.

Os estudantes reuniram-se em grupos e a atividade foi resolvida rapidamente por todos, sem que demonstrassem qualquer tipo de dificuldade.

As estratégias usadas foram: a árvore de possibilidades, a enumeração sistemática e a tabela, sendo esta a mais utilizada. Os formatos da tabelas variaram. Alguns grupos fizeram mais de uma.

Apesar de a natureza dos agrupamentos formados nessa atividade ser diferente do tipo trabalhado até então, nenhum grupo demonstrou dificuldade em reconhecer que a ordem em que os elementos são dispostos dentro do agrupamento não é importante e, portanto, trocar elementos dentro de um mesmo grupo não constitui a determinação de um agrupamento diferente do anterior.

As estratégias foram transcritas para a transparência pelos alunos e, à medida que um grupo terminava a transcrição, seus registros eram expostos para o restante da turma. Os alunos ainda não estavam sentindo-se à vontade para comentá-los, mas já aceitavam sua exposição.

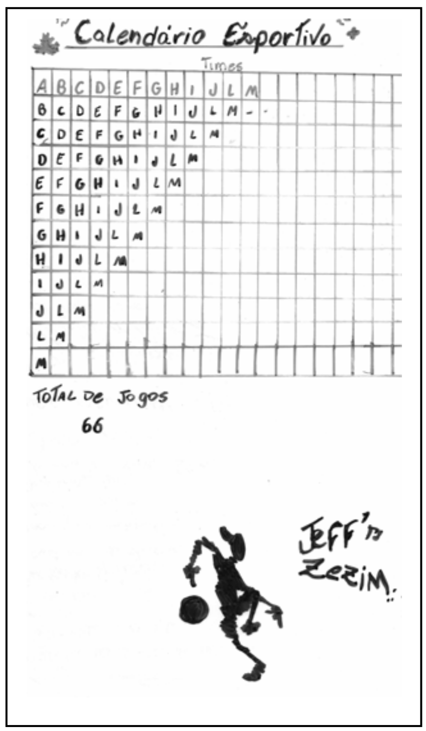


Figura 11: Resolução do grupo 1 para a questão do calendário esportivo.

A questão proposta nessa atividade não constituiu um problema para esses alunos. A resolução foi considerada fácil e não exigiu empenho intelectual para ser resolvida.

O objetivo de trabalhar a ideia de agrupamento não ordenado não foi alcançado, porque os alunos não precisaram pensar sobre esse assunto para resolver a questão. Procuramos desenvolver esse conceito através de questionamentos sobre o porquê de não considerarmos o mesmo agrupamento em uma outra ordem. Mas nossa tentativa foi frustrada porque, ao responder, eles pensavam no jogo e respondiam que era o mesmo. Não pensavam, por exemplo, nos agrupamentos AB e BA que, por serem iguais, são contados apenas uma vez.

Em nenhum momento compararam essa atividade com as anteriormente realizadas. Não perceberam que nas primeiras, agrupamentos como, por exemplo, AB e BA eram considerados diferentes e, portanto, deveriam ser contados como dois agrupamentos distintos.

Esse cenário começou a mudar quando a segunda atividade deste encontro foi proposta.

Cada time de futebol de salão é formado por 5 jogadores (4 na linha e 1 no gol). O Saci-Pererê Futebol Clube ainda conta com 5 jogadores na reserva. Em um determinado jogo todos os atletas do clube compareceram. Destes atletas, três serão selecionados para fazer o exame anti-doping. Existem várias possibilidades de formação deste grupo. Identifique quantas são, mostrando como vocês chegaram a este resultado.

Essa questão foi percebida pelos estudantes como sendo similar à primeira, mas demonstraram mais dificuldades para resolvê-la.

O conceito de agrupamento não ordenado começou a ser discutido, quando alguns componentes dos grupos questionavam a enumeração das possibilidades e percebiam que alguns grupos já haviam sido registrados e, portanto, não precisavam ser escritos novamente.

As resoluções apresentadas forma variadas. Alguns fizeram a enumeração completa das possibilidades; outros registraram apenas parte da enumeração e, a partir dos padrões observados, chegaram ao resultado esperado. O grupo 1 resolveu a questão usando somente operações.

As resoluções de cada grupo foram apresentadas para o restante da turma, inclusive, a estratégia do grupo 1(figura 12) que gerou discussões entre os estudantes

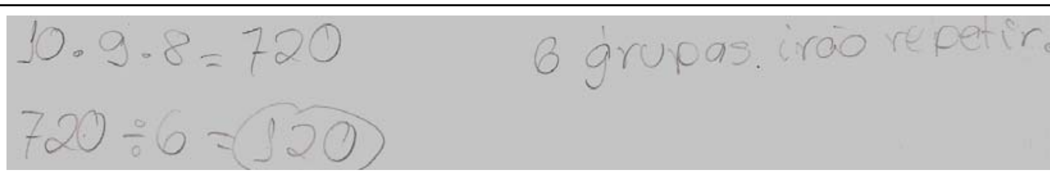


Figura 12: Resolução do grupo 1 para a questão do exame anti-doping.

Apesar de a estratégia apresentada pelo grupo 1 se mostrar “mais rápida”, como muitos solicitavam, e apresentar o mesmo resultado encontrado pelos outros grupos, foi bastante criticada pelos colegas. Eles não compreenderam o processo e não o validaram. Podemos observar nesse evento uma mudança de postura. A norma social anteriormente vigente declarava que bastava ter a resposta correta para que um processo fosse validado. Agora, além da resposta, era preciso também que a estratégia fosse compreendida por todos. Essa nova norma contribuiu para o desenvolvimento da argumentação, porque exigia dos estudantes não apenas uma resposta certa, mas a habilidade de defender suas ideias e convencer um auditório através de uma argumentação consistente.

Podemos acompanhar as argumentações de uma das alunas que formavam o grupo 1 no diálogo a seguir.

Paula: São dez atletas que podem ser chamados primeiro. Depois são nove e por último oito. Aí a gente multiplicou.
P: por que?
Paula: Ah! Porque nos numerais a gente multiplicou.
P: E por que você acha que esta questão é parecida com a questão em que você formou numerais?
Paula: Ah! Porque deu certo, uai!
(José que não fazia parte do grupo que estava apresentando a resolução, questionou:)
José: Por que você está sempre perguntando "por que"?
(Todos riram.)
P: Porque gosto de aprender e acho que para aprender precisamos saber o por que das coisas. Você não acha?
José: Eu não acho nada!
(Todos riram novamente.)
P: E por que vocês dividiram este produto por seis?
Paula: Porque cada um vai repetir seis vezes, olha só...
(Ela mostra um esquema como o registrado a seguir.)

ABC	ABD	ABE
ACB	ADB	AEB
BAC	BAD	BAE
BCA	BDA	BEA
CAB	DAB	EAB
CBA	DBA	EBA

(Informei que não precisava escrever todos porque só com aqueles já era suficiente para pensar em todos.)

A apresentação de Paula demonstra uma evolução no raciocínio combinatório. Ela foi capaz de fazer analogias entre essa atividade e as anteriores, compreender as diferenças e utilizar suas observações para encontrar o resultado esperado.

Quanto ao processo de argumentação, consideramos que houve uma evolução até esse momento. Entretanto, assim como Paula, os alunos ainda têm dificuldade de expressar suas ideias de forma clara e convencer seus colegas.

Apesar de todo o esforço de Paula para justificar a estratégia adotada, seus colegas dos outros grupos se manifestaram dizendo que não gostaram da estratégia que ela usou. Segundo eles, a enumeração era melhor porque permitia que as possibilidades fossem visualizadas. A estratégia não foi validada pelo grupo nesse encontro.

No meio do diálogo, cujo assunto era a estratégia adotada pelo grupo 1, a prevalência de perguntas inquiridoras foi percebida pelos alunos e questionada. Apesar de não admitirem publicamente, eles também queriam saber o ‘porquê das coisas’ e demonstravam isso, buscando justificativas para suas estratégias e procurando entender as de seus colegas.

A seguir apresentamos uma resolução apresentada por outro grupo e validada pela turma.

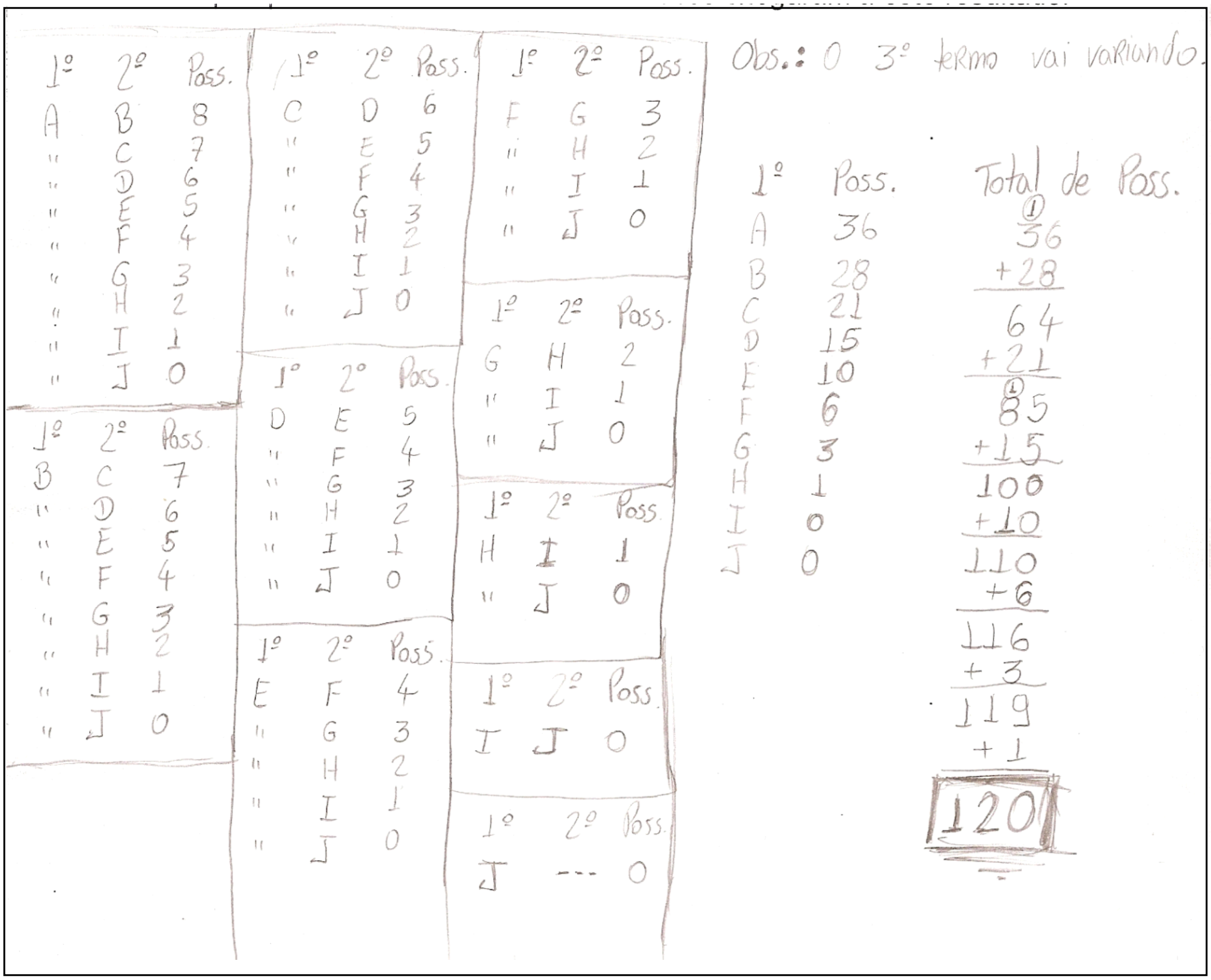


Figura 13: Resolução do grupo 2 para a questão do exame anti-doping

A enumeração utilizada nessa estratégia foi utilizada de forma similar por muitos outros grupos. Os alunos foram capazes de enumerar de forma sistemática, utilizando um elemento de referência e uma variação cíclica. Não precisaram enumerar todos os agrupamentos, porque foram capazes de observar padrões e utilizá-los de forma a generalizar a quantidade de possibilidades. Identificaram o tipo de agrupamento envolvido sem, entretanto, terem recebido qualquer informação sobre a classificação em ordenado ou não ordenado.

Os alunos já estavam analisando as resoluções de seus colegas. Um exemplo é a intervenção de Arlindo. Ele afirmou que a resolução de seu grupo foi semelhante à apresentada pelo grupo 2, mas fez uma observação adicional:

Arlindo: Diminuindo sempre desde a possibilidade nº 1, na sequencia, a diferença dará a sequencia numérica "8, 7, 6, 5, 4, 3, 2". Assim sendo. Ex.: 36 – 28 = 8. Ex.: 28 – 21 = 7. Assim não há necessidade de calcular todas. A soma é: 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 sendo no total 120 possibilidades.
(Ele explicava enquanto apontava os valores na transparência do grupo 2.)
P: E por que primeiro diminui 8, depois 7 e assim sucessivamente?
(Durante algum tempo todos ficaram em silêncio)
Arlindo: Espera aí!
(Mais uma vez ficaram todos em silêncio)
Arlindo: É por que no primeiro tem 8 e no segundo não tem?
P: O que o primeiro e o segundo tem em comum?
Arlindo: A gente tá somando os mesmos números. Quer dizer, quase todos os mesmos números. De um pro outro diminui um e o primeiro é 8.
P: por que será que o primeiro é o 8?
Arlindo: Espera!
José: Tá ficando cansativo!
Arlindo: Calma Cara! Eu tô pensando!
(Todos ficaram m silêncio)
Arlindo: É por que eram 10 e eu já tenho dois?
P: O que você acha José?
José: Acho que tá certo!
P: Por que?
José: Ih! Lá vai você de novo que esse tal de por que.
(Todos riram)

Arlindo observou um padrão, entretanto, não sabia explicar por que ele ocorria. Com alguns questionamentos bem direcionados, foi possível auxiliá-lo na construção de conjecturas sobre a origem desse padrão. Ele demonstrou interesse em investigar a situação, mas pareceu inseguro quando respondia na forma de afirmações interrogativas, ou seja, para tentar descobrir se sua resposta estava correta, transformava-a em uma pergunta que pode ser respondida através de um sim ou um não. Entretanto, optamos em fazer questões que o fizeram pensar e construir as próprias conclusões.

Todos já sabiam que iríamos perguntar 'por que'. Nos primeiros encontros, esse questionamento gerava desconforto, mas, nesta fase do trabalho, já era percebido como algo natural e, de certa forma, eles já estavam se preparando para responder ‘por que’ quando registravam suas estratégias.

A questão similar a essa no teste diagnóstico inicial não foi resolvida por nenhum aluno. Entretanto, a atividade em questão foi solucionada corretamente por todos.

Quinto encontro

Esta atividade foi elaborada com o intuito de comparar agrupamentos ordenados e não ordenados. Foram utilizadas duas situações que, apesar de muito similares, levam a interpretações opostas no que diz respeito ao tipo de agrupamento.

Na primeira, selecionamos cinco voluntários entre os alunos. Em seguida, mostramos cinco presentes iguais (mesmo tipo de objeto embrulhado do mesmo jeito com papéis da mesma cor). Explicamos que os presentes seriam distribuídos a três voluntários.

P: Estes presentes são todos iguais. Posso entregar o primeiro para o Adriano, o segundo para o Bruno e o terceiro para o Carlos. Mas também posso entregar o primeiro para o Bruno, o segundo para o Carlos e o terceiro para o Adriano. Fará alguma diferença?
Alice: Como assim?
P: Se eu mudar a ordem de entrega alguém receberá algum presente diferente?
Alice: Não!
P: Então! O que vocês acham?
(Os alunos ficam em silêncio)
(Pedimos ao Pedro para escolher três entre os cinco voluntários e entregar o presente)
P: Vejam só! Agora ficaram apenas dois sem presente: o Carlos e o Adriano. Vamos entregar os outros dois? Pedro, entregue primeiro para o Carlos e depois para o Adriano.
Enquanto Pedro ia entregar os presentes, interrompemos:
P: Não! Mudei de ideia. Primeiro Adriano e depois Carlos.
(Pedro entregou os presentes e eles foram abertos)
P: Escuta! Fez alguma diferença a ordem de entrega?
Alunos: Fez!
P: Por que?
Sarah: Porque cada hora entregou para um primeiro.
P: Então vamos fazer um teste. Pedro, pegue os presentes de volta e troque-os. O que era de Carlos agora será de Adriano e vice-versa.
(Pedro fez a troca)
P: Carlos, você não se incomodou com a troca. Por que?
Carlos: Uai! Continuei com a mesma coisa.
P: Por que?
Alunos: Porque são iguais!
P: Ah, tá! Os presentes são iguais então entregar na ordem C, A ou A, C não altera o grupo. Thiago, quem recebeu a caneta de presente?
Thiago: Carlos e Adriano.

P: Se eu perguntasse a mesma coisa para outra pessoa ela poderia responder Adriano e Carlos?
Alunos: Pode!
P: Por que?
Alunos: Porque é a mesma coisa.
Depois deste diálogo, dispensamos os cinco voluntários e convocamos outros cinco. Utilizamos os mesmos pseudônimos da dinâmica anterior. Apresentamos cinco presentes distintos (objetos diferentes embrulhados em papéis de cores diferentes). Determinamos a ordem de entrega dos presentes: primeiro o de embrulho cinza, depois o vermelho e por último, o azul.
P: Se o Pedro escolher o Adriano primeiro qual presente ele vai receber?
Alunos: o primeiro!
P: Se ele escolher Adriano, Bruno e Carlos, nesta ordem, quais presentes cada um vai receber?
Alunos: O cinza, o vermelho e o azul.
P: E se o Pedro escolher o Bruno primeiro, depois o Carlos e por último o Adriano? Quem vai receber o presente cinza? Será a mesma pessoa de antes?
Alunos: Não!
Sarah: Dependendo da ordem que ele escolher vai sair um presente diferente.

Observamos que as respostas dos alunos restringiram-se a algumas exclamações. Nossa experiência docente e a literatura evidenciam que uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos é a definição do tipo de agrupamento envolvido. Quando optamos por transmitir esse conhecimento para o aluno, este passa a se preocupar em definir o tipo de agrupamento através das características descritas pelo professor e, muitas vezes, não obtém sucesso nesta tarefa. Investimos na construção desse conceito pelos próprios alunos, através de perguntas inquiridoras e de mudança para agrupamentos menores.

Depois deste e de outros diálogos envolvendo os presentes e sua distribuição, solicitamos aos alunos que determinassem de quantas formas diferentes poderíamos distribuir três presentes, iguais ou diferentes, para três pessoas.

Até o presente momento, os estudantes mostraram um desenvolvimento considerável no que diz respeito aos esquemas de resolução, envolvendo o raciocínio combinatório. Entretanto, ainda demonstram dificuldade em registrar suas conjecturas através de pequenos textos. Com o intuito de desenvolver essa habilidade, propomos aos alunos que relatassem, com detalhes, os eventos ocorridos naquele encontro através de uma carta endereçada a um amigo.

Arlindo foi responsável pela descrição mais rica em detalhes. Este registro pode ser observado na figura 14.

Vagner Ruido.

Olá meu caro amigo, hoje recebi a incumbência de lhe passar em detalhes o que ocorreu durante um trabalho dentro de sala de aula, tarefa difícil e ao mesmo tempo fácil, porque como você sabe minha paixão por matemática e foi justamente durante esta aula meu trabalho.

Vamos lá:

Durante a aula a professora selecionou 05 alunos para ir até a frente. E pediu a todos que fizessem o seguinte: Ela deu nomes fictícios a todos para que pudesse ser mais organizado, ficando assim:

Adriano
Bruno
Carlos
Daniel
Euler, dentre estes 05 alunos seriam distribuídos 05 presentes iguais, foi escolhido primeiramente 03 alunos, e pedido a toda a classe que calculassem as possibilidades de escolha para entrega dos presentes na sequência. Seu assistente Pedro então entregou os 3 primeiros presentes. Sendo...

ABC ACD ADE BCE CDE DEB BCD
ABD ACE
ABE

(Escolhas dos 3 primeiros que receberiam presentes iguais portanto a sequência não importava).

Estas são as possibilidades possíveis de distribuição para os três primeiros alunos, logo após este teste a professora, chamou mais 5 alunos revezando com os anteriores. E deu a seguinte questão.

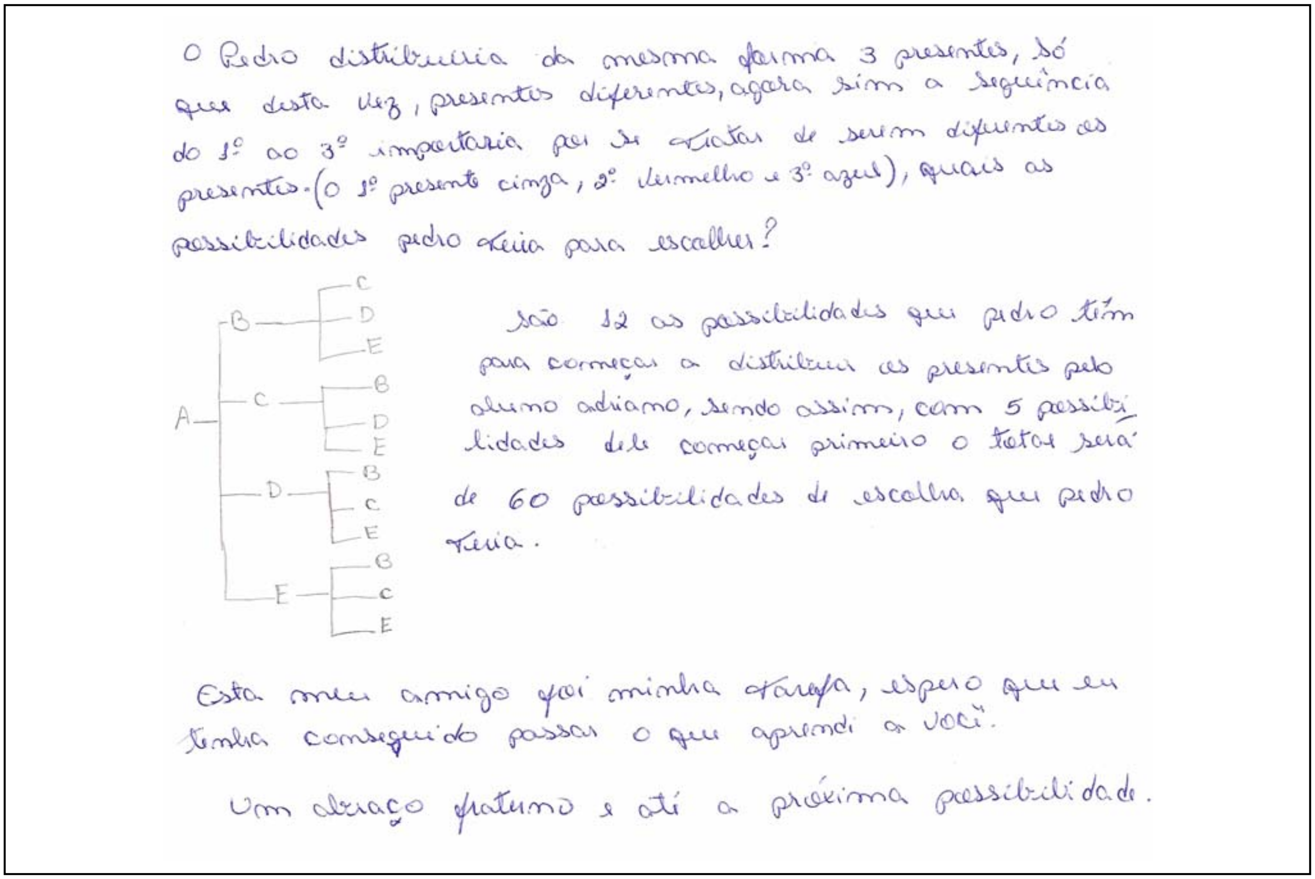


Figura 14: Texto do aluno Arlindo

No texto, Arlindo descreve a atividade e demonstra ter compreendido que o fato dos objetos serem iguais ou diferentes influencia o tipo de agrupamento formado e, consequentemente, a quantidade total de possibilidades. No relato, ele utiliza a palavra “sequência” com o sentido de ordenação de elementos, o que não prejudicou sua análise da situação.

Outros alunos também foram capazes de elaborar bons relatos dos acontecimentos. Entretanto, quase todos privilegiaram os esquemas em detrimento do texto.

Nos registros escritos foi possível observar que os alunos compreenderam o que, nessa situação, faz um agrupamento ordenado ser diferente de um não ordenado, quando afirmaram que se os presentes são iguais não importa a ordem em que são distribuídos. Isso porque todos receberão o mesmo presente e, se os presentes são diferentes, mudar a ordem de entrega pode fazer com que uma pessoa receba um presente diferente do que receberia em outra ordem.

Essa atividade foi muito bem recebida pelos vinte e dois estudantes presentes que participaram ativamente de todas as discussões geradas.

Consideramos que, como uma primeira discussão sobre agrupamentos ordenados e não ordenados, a atividade cumpriu bem seu papel de chamar a atenção para as características que diferenciam esses dois tipos de agrupamentos. Quanto aos registros escritos, percebemos que esses alunos ainda necessitam de outros momentos para desenvolver a habilidade de registrar suas ideias através de textos. Entretanto, entendemos que não tínhamos tempo suficiente para trabalhar essa habilidade nesta pesquisa. Esse deve ser um trabalho conjunto entre todos os professores de todas as áreas e esta pode ser uma proposta a ser discutida quando este projeto for apresentado à comunidade escolar, como solicitado pela direção, orientação e alunos. Portanto, optamos por buscar desenvolver nesses alunos a capacidade de justificar suas resoluções não apenas na forma de esquemas, mas também em pequenos parágrafos, incentivando-os a escrevê-los nas próximas atividades.

Sexto encontro

Até este momento, estávamos trabalhando com, no máximo, duas situações-problema por encontro. A partir do sexto encontro, aumentamos o número de situações-problema. Nossos objetivos eram: permitir que tivessem contato com situações diversas (similares às encontradas em livros didáticos), e torná-los mais ágeis na resolução das tarefas propostas.

Os problemas envolviam arranjos simples, combinações simples e permutações. Os enunciados eram simples e diretos.

Os alunos dividiram-se em apenas quatro grupos. A quantidade de componentes de cada grupo variou de quatro a seis alunos, totalizando 20 alunos presentes. Inicialmente, eles foram informados sobre a dinâmica do dia que envolveria um maior número de problemas [32] que lhes seriam entregues um a um, tão logo conseguissem apresentar uma resolução.

Essa proposta alterou de forma significativa a dinâmica à qual se haviam habituado, pois o tempo dedicado à resolução de cada questão precisou ser redimensionado.

A primeira situação proposta – “Quantas e quais são as peças de um jogo de dominó?” – foi resolvida utilizando-se as estratégias: árvore de possibilidades incompleta e enumeração das peças.

Nessa atividade, pretendíamos trabalhar a ideia de agrupamento não ordenado, de modo que os alunos fossem capazes de enumerar as possibilidades de forma sistemática, a fim de garantir que nenhuma peça deixaria de ser considerada. No diálogo a seguir, verificamos que a aluna Jussara, apesar da timidez para se expressar, elaborou um raciocínio a partir dos questionamentos feitos pela pesquisadora. Também é possível verificar que outra aluna, componente do mesmo grupo, beneficiou-

[32] Apêndice 3, pág. 151.

se do diálogo e foi capaz de chegar a uma conclusão própria, inferindo a partir do que havia feito em outras atividades.

P: Bom! Deixa eu aproveitar pra perguntar.

Alunas: Ah!!!!!!!!!!!!

P: Essa aqui é a peça ...

Jussara: zero três.

P: Essa aqui é a peça ...

Jussara: três zero.

P: A peça zero três e a peça três zero são peças iguais ou diferentes?

Jussara: Diferentes porque se esta é a pecinha zero três, esta aqui é a pecinha três... Ah, não. É a mesma coisa. (risos). É a mesma coisa.

Paula: Então a gente vai diminuindo, vai diminuindo.

(Enquanto falava, Paula mostrava um esquema onde seu grupo havia esboçado parte de uma árvore de possibilidades)

Não foi necessário explicar à Jussara que as peças eram iguais. Os questionamentos levaram-na a refletir sobre suas ideias iniciais e proporcionaram uma observação crítica capaz de levá-la a compreender por si só que se tratava de agrupamentos não ordenados.

Apesar de não ter sido solicitada a justificar sua resposta, Jussara o fez. Ao verbalizar sua ideia, buscando argumentos para validá-la, percebeu que se equivocara e foi capaz de reconstruir seus conhecimentos a partir de suas observações.

Nesse episódio, percebe-se a importância do papel do professor como observador-interventor. Ao observar que as alunas não haviam compreendido que a situação envolvia um agrupamento não ordenado, interferimos, criando uma situação de aprendizagem por meio de *perguntas inquiridoras*[33], a fim de levá-las a avançar na compreensão dos conceitos.

Em nenhum momento afirmamos que o grupo havia encontrado a resposta certa, quando definiu que se tratava de uma situação envolvendo agrupamentos ordenados e revisou o esquema que haviam construído.

Entretanto, a resolução foi validada pelo novo esquema apresentado pelo grupo (figura 15) e pela interação entre seus componentes.

[33]Love e Mason (1995 apud MARTINHO, 2007)

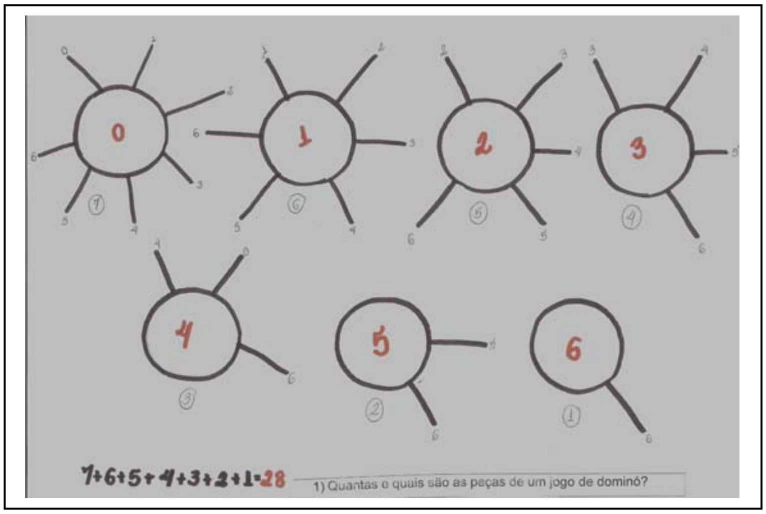


Figura 15: Resolução apresentada pelo grupo das alunas Paula e Jussara para a questão das peças de um dominó.

É importante ressaltar que descobrir os padrões dos agrupamentos durante as discussões gerou tal satisfação nas alunas que as mesmas se sentiram estimuladas a resolver as outras questões.

Nos outros grupos não houve dúvidas quanto à natureza dos agrupamentos. Ressaltamos aqui a diversidade de resoluções e a norma social construída e aceita de que não é preciso que todos resolvam a mesma questão através de uma estratégia única.

Três dos quatro grupos utilizaram a árvore de possibilidades para resolver esse problema. Essa estratégia havia sido apresentada por alguns grupos em atividades anteriores, porém, com menor aceitação pelos outros estudantes. A partir desta atividade, a árvore de possibilidades passou a ser utilizada por mais alunos e a enumeração sistemática deixou de ser a única estratégia aceita, unanimemente, para validar uma resposta.

Nos registros escritos foi possível observar variações nas árvores de possibilidades construídas. Na resolução a seguir, observamos que os alunos não utilizaram a árvore com uma ideia de sequência de elementos, e, sim, para agrupá-los de forma organizada e que permitisse a obtenção de todas as possibilidades.

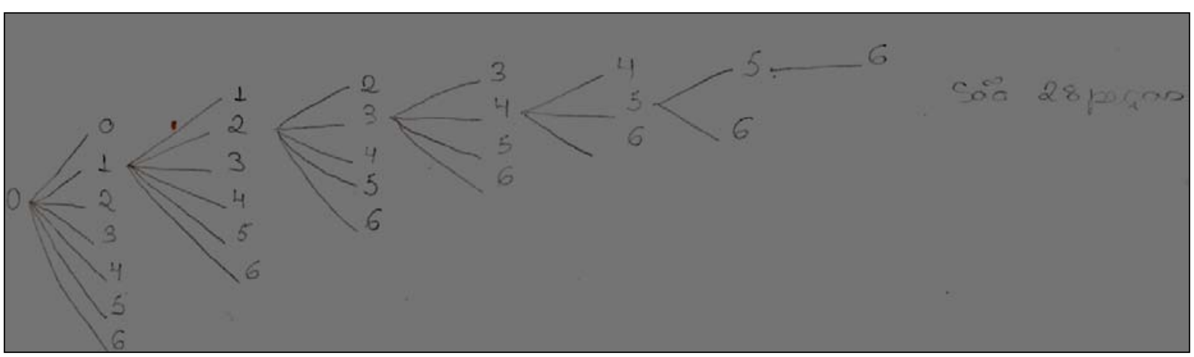


Figura 16: Resolução apresentada pelo grupo 1 para a questão das peças de um dominó.

Um dos grupos apresentou uma resolução mais elaborada ao determinar a quantidade de agrupamentos possíveis sem enumerá-los. Esse registro representa um avanço no pensamento combinatório desses alunos porque, mesmo sem visualizar todas as possibilidades, eles foram capazes de inferir sobre a quantidade total a partir da observação de padrões. Segundo nossa experiência docente e alguns autores consultados[34], quando o número de agrupamentos é maior, torna-se difícil sua enumeração. Nesse sentido, ser capaz de definir a quantidade de agrupamentos possíveis por meio de uma estratégia que dispense a enumeração completa pode ser considerado um avanço ao aumentar a chance de encontrarmos o número total de agrupamentos.

Como podemos acompanhar na figura 17, os alunos, após identificar o número de agrupamentos possíveis em que zero é um dos elementos, inferiram a quantidade dos demais agrupamentos, considerando corretamente a não importância da ordem em que esses elementos são considerados.

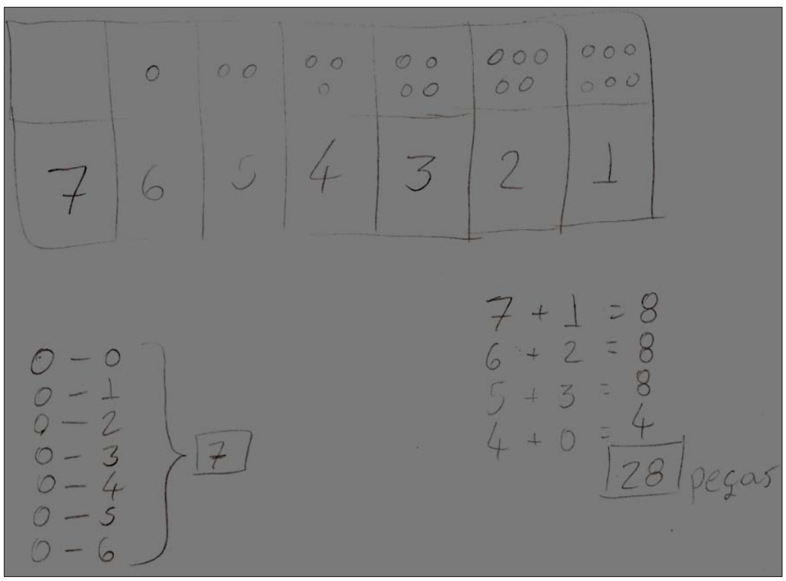


Figura 17: Resolução apresentada pelo grupo 2 para a questão das peças de um dominó.

A questão envolvendo a quantidade de peças de um jogo completo de dominó foi resolvida por todos os grupos sem que apresentassem dificuldades. Com exceção do grupo de Jussara e Paula, que precisaram de uma intervenção, todos os demais reconheceram o tipo de agrupamento envolvido e foram capazes de criar e validar uma estratégia eficaz para encontrar a resposta esperada.

A segunda questão foi entregue aos grupos quase simultaneamente. Os grupos gastaram, aproximadamente, o mesmo período de tempo que gastaram para resolver a primeira questão.

[34] Fernandes e Correia, 2007.

A questão envolvia uma situação em que seria necessário identificar o número de permutações possíveis de seis elementos. “De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?”

Foi possível observar, acompanhando as discussões nos grupos e os registros escritos, que o fato de termos que considerar a ordem dos elementos dentro de cada agrupamento surgiu naturalmente. Não houve discussões sobre a classificação dos agrupamentos como sendo ordenados ou não.

Mais uma vez, a árvore de possibilidades foi a estratégia mais adotada, entretanto, dessa vez, apenas parte da árvore precisou ser construída. A partir da fixação da primeira pessoa da fila e da utilização da árvore de possibilidades, os estudantes descobriram que poderiam utilizar o princípio multiplicativo para determinar o número total de maneiras diferentes que podemos colocar seis pessoas em fila.

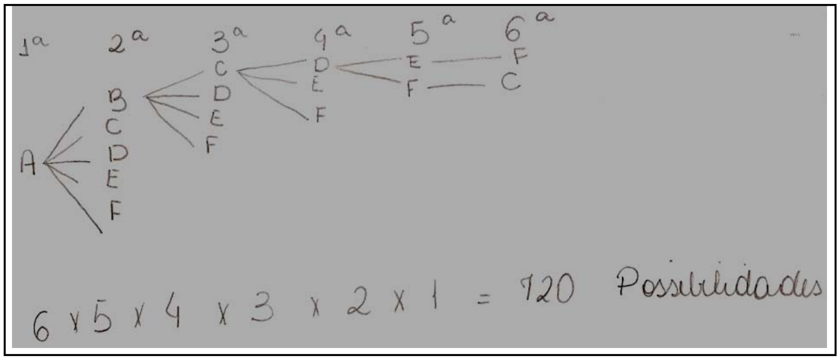


Figura 18: Resolução da questão 2 da atividade proposta na 7ª semana apresentada por um grupo.

A terceira questão trazia o seguinte enunciado: “Num grupo de sete alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. A foto será deles sentados em fila. De quantos modos eles poderão sentar, respeitando essa incompatibilidade?”.

Todos os grupos usaram as sete primeiras letras do alfabeto para identificar as pessoas e as letras A e B para denominar as pessoas que não poderiam ficar juntas. Esse episódio sugere que entre esses alunos foi criada uma norma sociomatemática: ‘representar os elementos através de letras é uma escolha eficaz na medida em que auxilia na estruturação da resolução’.

Apesar da diversidade de formas de registro, as resoluções dos grupos dividiram-se em dois tipos. Dois grupos utilizaram uma estratégia nova até aquele momento.

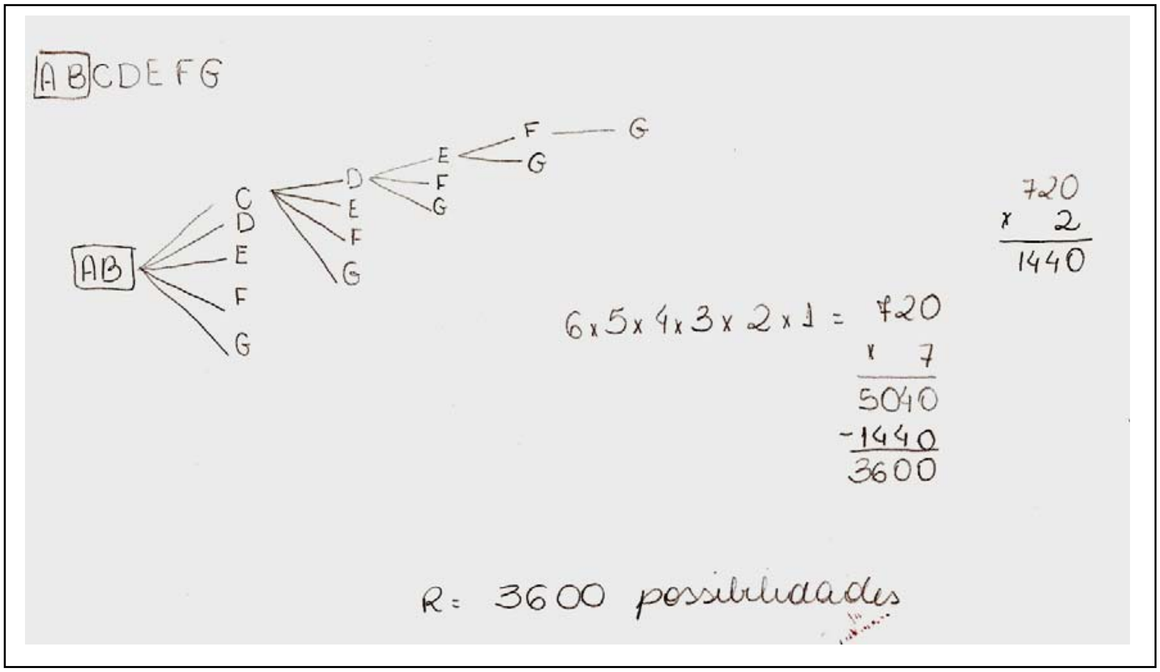


Figura 19: Resolução da questão 3 da atividade proposta na 7ª semana apresentada pelo grupo 1

Os grupos calcularam inicialmente todas as maneiras possíveis de as sete pessoas ficarem enfileiradas. Depois, calcularam em quantos casos as pessoas que não se toleram ficariam juntas e, em seguida, encontraram a diferença entre esses dois valores, chegando à quantidade de agrupamentos em que não ficam juntas, como solicitava a questão.

Um dos alunos do grupo, ao ser questionado sobre a necessidade de multiplicar 720 por dois, antes de subtrair a quantidade encontrada de 3600, justificou:

- *“Uai, Fessora! Pode ser AB ou BA, 720 para cada!”*

Nenhum grupo registrou suas observações por escrito, através de pequenos textos justificando as operações, como solicitamos. Entretanto, quando questionados verbalmente, foram capazes de argumentar, mostrando que compreendiam o que estavam registrando através dos esquemas.

Os dois grupos se encontravam em posições próximas dentro da sala e, apesar de não haver registros que comprovem, acreditamos que se estabeleceu uma interação entre eles capaz de influenciar a resolução da questão. Entretanto, quando questionamos os membros de ambos os grupos, todos demonstraram, através de suas respostas, que compreenderam e validaram a resolução apresentada.

O terceiro grupo apresentou uma resolução que estabeleceu a posição da pessoa A e estudou as possíveis colocações das demais pessoas, inclusive da pessoa B. Esse grupo observou que se A está nas extremidades (primeiro ou último lugar), o número de possíveis agrupamentos é igual a 600, mas, se A está do 2º ao sexto lugar, a quantidade é 480.

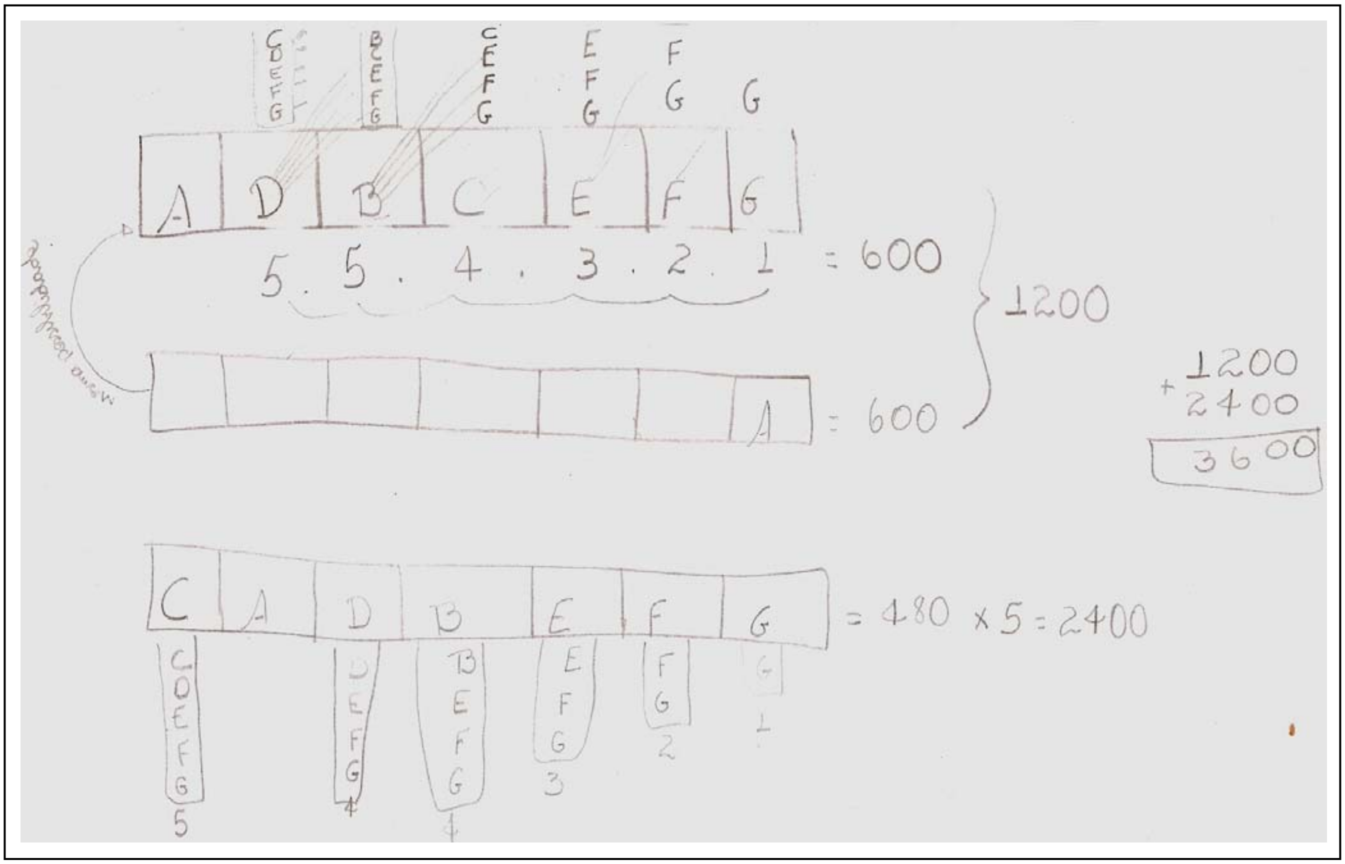


Figura 20: Resolução da questão 3 da atividade proposta na 7ª semana apresentada pelo grupo 3

O quarto grupo, através da árvore de possibilidades, tentou resolver a questão usando a mesma ideia do grupo anterior, mas cometeu um erro de cálculo e, portanto, não encontrou o resultado esperado.

A partir da observação dos registros escritos e dos diálogos internos dos grupos, verificamos que, apesar do nível de dificuldade dessa questão ser um pouco maior que o da anterior, os alunos demonstraram interesse e conhecimento suficiente para resolvê-la.

Até aquele momento, todas as situações haviam gerado grandes discussões nos grupos. Os alunos se empenhavam em resolver as questões, apresentando um esquema que fosse validado por todos os componentes. O tempo gasto pelos grupos nas questões 2 e 3 foi distinto e a diferença entre o primeiro grupo a entregar e o último foi de, aproximadamente, 20 minutos. Entretanto, todos já demonstravam fadiga, possivelmente provocada pela intensidade das discussões e o cansaço acumulado da semana. É preciso recordar que era sexta-feira à noite.

Percebendo esse fato e prevendo uma queda de rendimento, optamos por trabalhar a quarta e última questão no grande grupo. Mais uma vez, o papel do professor mostrou-se essencial para perceber os sinais não verbais que os alunos fornecem. Apesar de defendermos a ideia de que o professor deve planejar suas aulas com antecedência, é preciso ser flexível, observador e estar preparado para eventuais mudanças de acordo com as necessidades. Precisamos ser resilientes.

Os dois grupos que terminaram a questão antes dos demais passaram para a questão seguinte: "*De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?*". Eles usaram o princípio multiplicativo, por meio de uma multiplicação 5. 4. 3. 2. 1 = 120, sem o auxílio da árvore de possibilidades. Quando solicitado a justificar esse cálculo, o primeiro grupo a apresentar esta resolução explicou:

Jussara: Olha! As pessoas são A, B e C e os vazios são V1 e V2. Então, temos cinco opções para a primeira cadeira: A, B, C, V1 ou V2; quatro para a segunda,...

P: Por que?

Maria e Jussara: Porque já escolheu uma pra primeira, ora!

P: Ah! Entendi!

Jussara: Continuando, três, dois, um e pronto é só multiplicar!

P: Por que multiplicar?

Jussara: Ah! Sei lá!

Maria: Porque a gente multiplicou na outra e você falou que tava certo.

P: Mas na outra questão vocês fizeram um esquema que nos levava a multiplicar para encontrar o resultado e neste caso, por que multiplicar?

Jussara: Ih! Ta ficando complicado!

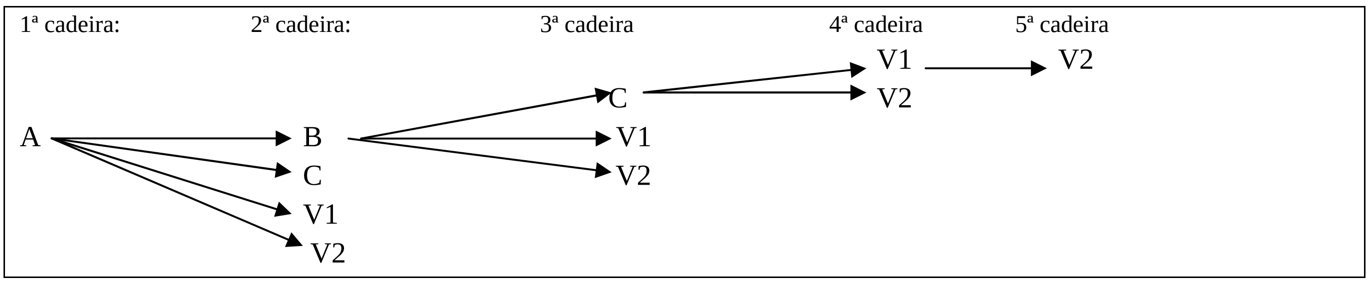
P: Vocês já resolveram questões mais complicadas que esta. Mas estavam menos afobadas para resolver. Que tal tentar com um pouco mais de calma?

Jussara: Tá!

Apesar de ter concordado, a aluna não demonstrou interesse em resolver a questão. Como podemos observar no diálogo, as discussões não estavam muito ricas. Os alunos começaram a supor resultados sem muito rigor e pareciam irritados quando eram questionados sobre o porquê da escolha de uma determinada estratégia ou operação. Tal fato não havia acontecido até aquele momento. Antes, eles demonstravam ter receio de errar e, portanto, tinham dificuldade de se expressar ao serem questionados. Agora, demonstravam claramente que estavam cansados. Era imprescindível que alguma atitude fosse tomada.

Cinco cadeiras foram colocadas enfileiradas de frente para os alunos. Foram solicitados três voluntários. Poucos alunos se ofereceram, mas foi possível selecionar três. Um quarto aluno se ofereceu para fazer os registros no quadro.

Ficou combinado que as pessoas seriam representadas pelas letras A, B e C, como todos os grupos já estavam fazendo. Um dos alunos lembrou que precisaríamos representar as cadeiras vazias e deu a ideia de representá-las por V1 e V2, como o outro grupo já havia feito. A árvore de possibilidades, que já está validada pelos estudantes como uma estratégia capaz de identificar todas as possibilidades, foi a estratégia escolhida. Ao serem questionados sobre que opções havia para a primeira cadeira, responderam A, B, C, V1 e V2, e assim foi registrado no quadro e parte da árvore de possibilidades foi construída.



Realizamos uma simulação dessas opções com o auxílio dos alunos voluntários. Primeiro Lucas ocupou a primeira cadeira, depois Bruno, a segunda, e por último João, a terceira cadeira. A sequência formada foi registrada no quadro: A, B, C, V1 e V2. Em seguida, foi solicitado que trocassem V1 por V2 e Pedro escreveu: A, B, C, V2 e V1. Os alunos foram questionados se essas duas sequências eram diferentes e alguns responderam que sim, mas outros não se manifestaram. Aos voluntários foi pedido que se reorganizassem de acordo com a segunda sequência e os alunos ficaram agitados, mas não saíram do lugar. Alguns começaram a dizer:

Alunos: É a mesma coisa! É a mesma coisa!

(Solicitamos a um deles que explicasse sua ideia.)

João: Vazio é vazio, uai! Não importa qual vazio é!

P: Então a sequência A, B, C, V1 e V2 é igual à sequência A, B, C, V2 e V1?

Todos: É!

P: Então temos que reorganizar nosso esquema de resolução.

Não enfatizamos o erro. Nossos questionamentos e a simulação das duas possibilidades fizeram os alunos pensarem sobre o agrupamento não ordenado (V1V2) dentro dos agrupamentos ordenados formados pelas pessoas enfileiradas.

A árvore de possibilidades foi refeita com todas as sequências possíveis num total de 60 agrupamentos. Os estudantes reclamaram, dizendo que fazer a árvore foi muito cansativo e perguntaram se não tinha um jeito mais rápido.

Pedimos a eles que observassem os dois resultados: 120, quando consideraram que V1 e V2 eram diferentes e, portanto, o agrupamento V1V2 era diferente do agrupamento V2V1, e o resultado 60, encontrado quando percebemos que os agrupamentos eram iguais. Muitos responderam que o segundo era a metade do primeiro. Então um deles perguntou:

Daniel: É só dividir por 2?

P: Bom, aqui daria certo, mas será que é sempre assim? Por que dividir por 2?

Luana: Porque temos dois iguais: V1 e V2?

O sinal tocou anunciando o término da aula.

P: Observamos que V1V2 é igual a V2V1 e portanto temos dois agrupamentos iguais que devem ser contados apenas uma vez, mas se fossem três: V1, V2 e V3 teríamos seis grupos iguais: V1V2V3; V1V3V2; V2V1V3; V2V3V1; V3V2V1; V3V1V2 e portanto teríamos que dividir por seis como no problema do anti-doping, lembra?

Esse tipo de problema envolve tanto arranjo simples como combinação simples e, portanto, pode ser considerado como um problema mais elaborado. Observando os registros em vídeo, percebemos que os alunos ainda demonstram mais dificuldade em compreender a ideia e desenvolver estratégias para resolver questões envolvendo agrupamentos não ordenados. Como Roa e Navarro-Pelayo (2001) verificaram em seus estudos, também observamos no grupo estudado maior dificuldade nos problemas envolvendo combinação.

Observando os registros em vídeo, verificamos também que as respostas dos alunos para nossos questionamentos poderiam ter sido mais exploradas. No diálogo descrito anteriormente, por exemplo, poderíamos ter lançado uma questão onde duas pessoas deveriam ocupar duas cadeiras enfileiradas ou algo similar para que eles buscassem a resposta para a pergunta: *É só dividir por 2?* Entretanto, o fato de as perguntas terem surgido sugere que os alunos estavam observando a situação e criando suas conjecturas. Apesar de essas ideias terem sido apresentadas na forma de questionamento e, portanto, demonstrarem certa insegurança dos alunos, também indicam um avanço na direção da perda do receio de se expor para o auditório formado pelo grande grupo. De modo geral, até este momento, já era possível perceber que todos se sentiam à vontade para se expressar nas discussões em pequenos grupos, entretanto, no grande grupo, esse receio ainda permanecia muito forte.

Nessa atividade, os alunos reconheceram a tabela, a árvore de possibilidades e a enumeração sistemática como ferramentas úteis para definir todas as possibilidades de agrupar elementos e resolver situações envolvendo o cálculo combinatório, mas apresentaram dificuldade em generalizar os padrões observados e estabelecer estratégias mais diretas para resolver problemas como o que constituiu a questão 4. A estratégia de construção da árvore de possibilidades foi a mais utilizada pelos grupos, tanto para resolver problemas quanto para validar outras formas de resolução encontradas.

A interação entre os alunos de cada grupo é capaz de gerar bons produtos. Alguns alunos exercem a função de líder, porém, todos discutem buscando validar as estratégias adotadas. A interação entre professor/aluno alcançou um nível de cooperação. Os alunos não esperam mais que a professora valide suas conjecturas.

Ainda que um aluno não seja o autor direto de uma resolução elaborada dentro de seu grupo, ele participa, questionando os outros sobre a estratégia escolhida e aprendendo com a troca de ideias. Ele também precisa validá-la para que seja considerada como correta. A norma social vigente na classe, nesse momento, estabelecia que todos os componentes do grupo deveriam estar de acordo com a resolução a ser apresentada. Ressaltamos que nessa dinâmica não é mais o professor quem determina se a resposta está certa, são os próprios componentes do grupo.

O teste diagnóstico intermediário

Pensando em avaliar o impacto da proposta até aquele momento, aplicamos um teste diagnóstico intermediário[35]. Informamos aos alunos que se tratava de uma verificação de aprendizagem e que não havia necessidade de se identificar. Esclarecemos ainda que não seriam atribuídas notas às questões e a correção serviria apenas para a verificação do que já havia sido aprendido e do que ainda precisava ser trabalhado no tempo que dispúnhamos.

Entretanto, esse teste não foi bem recebido pelos alunos. Eles demonstraram insegurança e solicitavam, a todo momento, nossa presença. Fato similar foi observado em uma avaliação que acompanhamos durante o período de ambientação. Muitos alunos chegaram atrasados e se sentiram incomodados com a atividade proposta.

O teste continha cinco questões: a primeira envolvia o princípio multiplicativo de contagem, a segunda e a terceira, permutação, a quarta questão era de combinação simples e, a última, de arranjo simples. No teste também havia uma questão desafio que ocupava a última página da avaliação.

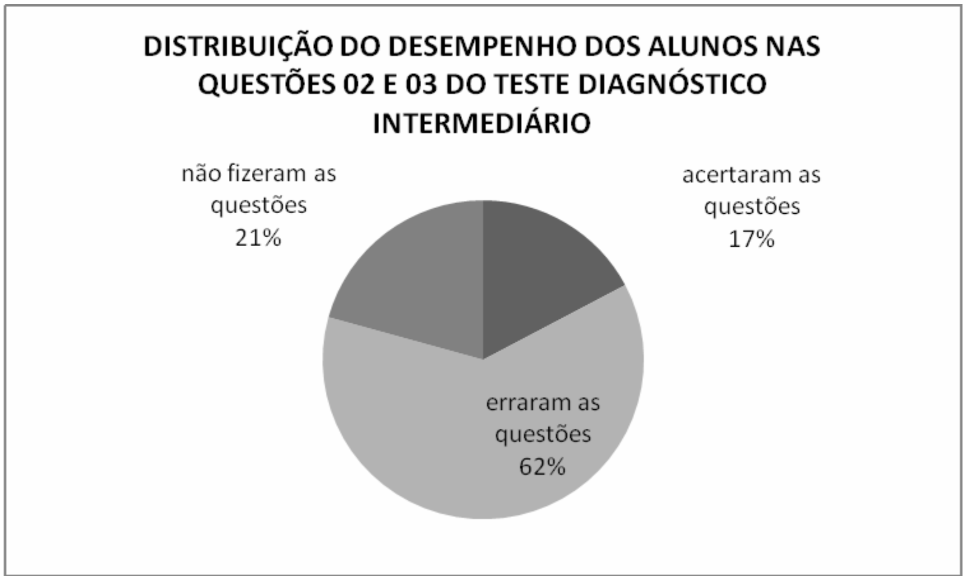
Dos vinte e nove alunos presentes, apenas um[36] deixou a primeira questão em branco e dois alunos erraram. O restante resolveu corretamente, justificando a resposta através da enumeração ou do diagrama de possibilidades.

---

[35] Apêndice 4, pág. 152

[36] Este aluno não era frequente nas aulas de Matemática. Ele deixou todas as questões em branco

Entretanto, o percentual de acerto da segunda e da terceira questões foi significativamente baixo.



Dos alunos que resolveram corretamente as questões dois e três, quatro utilizaram parte do diagrama de possibilidades e um utilizou a enumeração sistemática parcial. Todos os cinco inferiram o resultado a partir do padrão observado.

Dos dezoito alunos que erraram, apenas sete tentaram resolver as questões através do diagrama de possibilidades, os demais utilizaram a enumeração sistemática ou não. No teste diagnóstico inicial, vários alunos também tentaram resolver uma questão similar através da enumeração.

Falhamos em não questioná-los sobre esse fato durante o trabalho de campo. Posteriormente, ao analisar o material, baseados na experiência adquirida no desenvolvimento da proposta e nos relatos obtidos em conversas informais com os estudantes, inferimos que esse fato ocorreu porque, apesar de as últimas atividades terem sido resolvidas através do diagrama de árvores, os alunos ainda não consideravam esse processo eficaz para a determinação de todas as possibilidades, uma vez que não podiam visualizá-las.

Nas questões seguintes nenhum aluno conseguiu chegar ao resultado esperado.

Esse episódio gerou em nós um desconforto e a certeza de que esses alunos têm grandes problemas envolvendo a avaliação. Como ocorrido anteriormente, entre o terceiro e o quarto encontro, percebemos a necessidade de criar um momento de reflexão sobre o projeto.

Analisando os encontros anteriores ao teste diagnóstico intermediário, avaliamos que os alunos estavam desenvolvendo o raciocínio combinatório e a capacidade de argumentação. Entretanto, o resultado da análise do teste não condiz com nossa avaliação. Nosso objetivo ao propor esta ‘assembleia’ era entender o que havia acontecido.

As carteiras foram dispostas ao redor de uma ‘quase’ circunferência e todos foram convidados a se expressar sobre a avaliação intermediária.

Ao contrário do que ocorreu anteriormente, muitos alunos se manifestaram. Afirmaram que, apesar de terem sido informados da natureza apenas investigativa do teste proposto, a disposição das carteiras enfileiradas uma atrás da outra e o pedido para resolverem as questões individualmente fizeram com que a atividade fosse entendida como uma das avaliações para nota que estavam acostumados a realizar. Essas avaliações formais costumam trazer certo pânico aos alunos e, portanto, são temidas por todos.

Entretanto, no período de ambientação, foi possível observar que esses alunos fizeram um teste durante uma das aulas observadas e não demonstraram esse pânico que descreveram. Quando questionados sobre esse fato, Paula respondeu:

Paula: mas neste a gente tem que pensar!

Procuramos esclarecer à Paula e aos demais alunos que todos eles são capazes de pensar, mas também precisam acreditar em si mesmos. Em momentos como esse é preciso que o professor ajude seus alunos a se sentirem intelectualmente competentes.

Esclarecemos a eles que a avaliação em questão buscava verificar o que já foi aprendido e o que ainda precisa ser desenvolvido, quais as principais estratégias de resolução, quais foram os erros cometidos, o quê e como podemos aprender com esses erros.

Os alunos defenderam a realização de atividades em grupo e justificaram sua opinião de diversas maneiras. Afirmaram que gostaram de debater as questões com os colegas; que se sentiam mais seguros quando podiam dividir com outro a responsabilidade de resolver um problema; que consideravam mais fácil compreender o enunciado quando podiam discutir suas dúvidas em grupo.

Um aluno afirmou que percebeu uma falta de envolvimento de alguns colegas que não participam das discussões dentro do grupo. Esse aluno foi convidado a nos ajudar a envolver mais seus colegas nos debates.

Outro aluno declarou ter dificuldade de expressar suas ideias para um grupo maior. Esclarecemos que, apesar de ser natural nos sentirmos um pouco desconfortáveis nas primeiras experiências de exposição em público de nossas ideias, cada um de nós faz parte de um grupo de pessoas que estão aprendendo juntas. Defendemos as discussões no grande grupo, exemplificando que algumas resoluções inéditas foram apresentadas e que a socialização das ideias possibilitou que todos conhecessem diversas maneiras de resolver o mesmo problema.

Os estudantes se mostraram satisfeitos com o diálogo estabelecido, pois puderam expressar suas ideias, foram ouvidos e ouviram.

Sétimo encontro

Neste encontro, discutimos algumas resoluções apresentadas para as questões um e dois do teste diagnóstico. Selecionamos algumas resoluções dos alunos e as reproduzimos em transparências. Apresentamos as resoluções para os alunos utilizando um retroprojetor. Ficou combinado que esperaríamos algum tempo pela explicação do autor da resolução, a fim de esclarecer à turma como havia pensado para resolver aquele problema. Caso ele não se manifestasse, qualquer um poderia se manifestar.

Quando informamos qual seria a dinâmica adotada, percebemos que os alunos estavam receosos de se expor diante da turma e muitos demonstravam, através de gestos como, por exemplo, ficar encolhido na carteira, que não gostariam de participar da discussão.

As luzes foram apagadas para que pudéssemos visualizar melhor as projeções. Foram apresentadas três resoluções de cada questão. Ressaltamos a diversidade de soluções e enfatizamos a criatividade, a organização e o raciocínio elaborado capaz de validar o resultado encontrado através de estratégias de resolução.

Ao apresentar cada resolução, questionávamos como aquele estudante havia resolvido a questão proposta. Apesar de terem demonstrado receio em um primeiro momento, vários alunos se manifestaram procurando explicar suas resoluções.

A terceira questão foi resolvida no grande grupo. Os alunos sugeriram duas estratégias de resolução: a construção de parte da árvore de possibilidades e a utilização do princípio multiplicativo. Em uma transparência, acompanhadas pelos alunos, resolvemos a questão de acordo com as sugestões e foi possível ouvir vários estudantes afirmando que a questão era muito fácil.

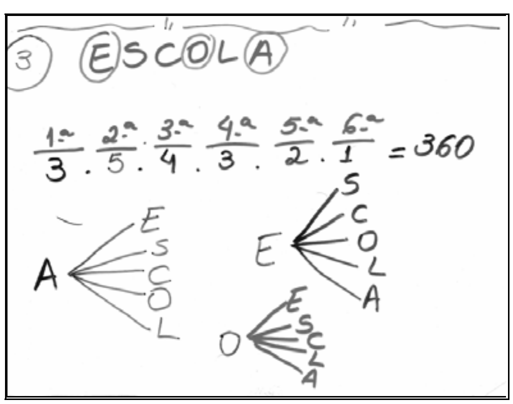


Figura 21: Resolução, construída coletivamente, da questão 3 do teste diagnóstico

Ao final da aula, os alunos e alunas mostraram-se entusiasmados com as apresentações e as discussões geradas. A utilização do retroprojetor foi elogiada por muitos. Além de ser uma novidade para esses estudantes, também permitia apresentar as resoluções criadas pelos alunos da forma como haviam sido registradas para serem conhecidas e discutidas por todos, sem que suas identidades precisassem ser reveladas. A utilização do retroprojetor como ferramenta auxiliar nas discussões em sala de aula se mostrou bastante eficaz.

Oitavo encontro

Considerando o sucesso alcançado com a estratégia utilizada no encontro anterior, resolvemos no grande grupo, com o auxílio do retroprojetor, transparências em branco e canetas coloridas para escrita em transparências, as demais questões do teste diagnóstico.

O diálogo a seguir aconteceu quando construíamos juntos a resolução da questão quatro: *'Uma escola possui 12 professores de Matemática. Serão escolhidos três para participarem de um congresso. De quantas formas diferentes este grupo poderia ser formado?'*

Começamos convidando os alunos a pensarem em uma estratégia para resolver a questão. A princípio, ninguém se manifestou. O diálogo teve início com o questionamento de Juliana.

Juliana: Professora, podemos fazer doze vezes três?

P: Por que doze vezes três?

João: Porque são doze professores e você quer grupos com três.

P: Bom! O problema é que pra gente fazer uma conta, a gente tem que ter uma justificativa para esta conta. E até agora a única justificativa que a gente teve foi que doze é o número total de professores e três é a quantidade de cada grupo. Mas, por que multiplicar?

Alice: Acho que a gente pode ir escrevendo os grupos, assim: ABC, ABD e continuando.

P: Gostei da ideia. Vamos devagar! Vamos começar a escrever e depois vamos procurar um padrão. Vamos ver o que vai acontecer para depois a gente procurar a conta. É uma boa ideia!

Alice: Vamos fixar os dois primeiros.

P: É uma boa ideia! Vamos chamar os professores de A, B, C e assim por diante como Alice sugeriu, ok?

P: Vamos começar fixando A e B. Pode ser assim Alice?

Alice: Pode!

P: Se eu fixar o A e o B, o terceiro componente deste grupo pode ser quem?

(A maioria permanece em silêncio. Alguns sussurram:)

Alunos: C.

P: Pode ser C?

Alunos: Pode!

P: Pode ser D?

Alunos: Pode!

P: Pode ser E?

Alunos: Pode!

P: Quem mais pode ser?

Alunos: F, G, H, I, J, K, L.

P: quantos grupos podem ser formados aqui?

Alunos: dez!

P: Eram doze professores, mas nós fixamos dois. Se nós fixamos dois e eram doze, esses dois poderão formar grupos com os outros dez.

P: Preciso escrever todos?

Juliana: Precisa!

Preenchemos a coluna com todas as possibilidades.

P: E agora?

Vários alunos e alunas: AC!

P: Boa ideia! Já fizemos com AB então agora vamos fazer com AC.

P: AC, fixei o AC.

Thiago: B, D, ...

P: Ah! Tá! Então vamos fazer juntos!

Alice: Não! Não pode!

Juliana: B, ...

P: B? A Alice tem uma opinião diferente. Ela disse que o B não pode. Vocês sabem porque ela disse que o B não pode?

Thiago: Aqui já tem esse grupo.

P: Onde?

Juliana: No ABC.

P: Ah! Você está formando um grupo, né?! Esse grupo tem três pessoas. Tanto faz A, B e C ou A, C e B, Eu, Sílvia e Luciano ou Luciano, eu e Sílvia, tanto faz. Então se eu colocar o B aqui vou ter de novo este grupo aqui! (A pesquisadora aponta para o grupo ABC já formado)

P: Então vai ser quem?

Alunos: D, E, F, ...

P: Preciso escrever todos? Serão quantos?

Alguns alunos: Nove!

P: Quantos?

Alunos: Nove!

P: Preciso escrever os nove?

Alunos: Não!

P: E agora? Quem vamos fixar?

Vários alunos: AD

P: AD! Fixando o AD quem pode formar grupo com ele e ainda não formou?

Joaquim: E, e assim por diante.

P: E vão ser quantos?

Alunos: oito!

P: Qual é o próximo que eu vou fixar então?

Juliana: AE! Sete!

P: AE e depois?

Alunos: AF, AG, AH, AI, AJ e AL.

P: Estes são os que eu vou fixar, então, me ajuda aqui. Quantos são com AE?

Alunos: Sete!

P: Sete! E com AF?

Alunos: Seis!

P: Alguma dúvida quanto a isso?

Alunos: Não!

P: E aqui?

Alunos: Cinco, quatro, três, dois, um, zero.

Diego: Explodiu!

(Risos!)

P: Zero, né?! Por que AE já formou grupo com todos.

P: Observem que o A apareceu em todos os grupos. Contendo o A, são quantos grupos?

Juliana: Onze!

P: Por que onze?

Juliana: Uai, AB, AC, AD e assim por diante. São onze!

P: E quantos grupo de três professores podemos formar com AB e alguém?

Thiago: dez!

P: E com AC e alguém?

Alunos: Nove!

P: E assim sucessivamente, não é?! Então em quantos grupos ao todo o A aparece?

Juliana: É só somar, não?!

P: Somar?Por que somar?

Diego: cinquenta e cinco é o total. Você tá procurando o total.

P: Cinquenta e cinco é o total?

Juliana: Não. É o total que o A aparece.

P: É verdade! Em todos eles o A aparece. Mas, eu posso formar o grupo, por exemplo, BCD?

Alunos: Pode!

P: Cinquenta e cinco com o A. E sem o A? Vamos fazer? Vocês me ajudam?

P: B com A?

Alice: Não porque você já tem A com B.

P: A com B foram dez depois foi diminuindo. Agora vou fazer B com C.

Tomás: Agora vão ser nove, né!?

P: Por que?

Tomás: Porque tirou o A.

P: É mesmo! Bem pensado!

P: BCD, E, F, G, H, I, J, K, L, nove! Será que eu preciso fazer os outros?

Alunos: Não!

Vários alunos: oito, sete, seis, cinco, ...
P: Então como é que vai ficar estes contendo BC, BD, BE, ... ?
Joaquim: Nove, oito, sete, seis,...
P: Nove, oito, sete, seis,..., então como é que vou determinar a quantidade total destes grupos?
Alunos: Somando!
Thiago: É só diminuir dez?
P: Por que?
Thiago: Porque tem dez a menos que o primeiro.
P: Vocês concordam?
Alguns alunos: É mesmo!

Neste diálogo, como nos anteriores, procuramos privilegiar as questões inquiridoras. Alguns alunos participaram mais que os outros, entretanto, todos estavam atentos às discussões. A maioria se ateve a responder as questões apenas com respostas curtas. A quantidade de alunos que justificaram suas ideias no grande grupo foi menor do que esperávamos para esa fase da proposta. Mesmo tendo nos esforçado para criar um ambiente onde os alunos sintam-se livres para expressar suas conjecturas, existe um receio muito grande de se expor diante dos colegas e da professora. Com medo de errar, calam-se ou esperam outra questão que possa conduzi-los a uma resposta correta.

A questão proposta envolvia a ideia de agrupamento não ordenado. Essa classificação foi percebida pelos alunos mesmo sem nossa interferência. A enumeração continua sendo a estratégia com a qual os alunos mais se identificaram. Entretanto, não demonstram a necessidade de enumerar todas as possibilidades. São capazes de fazer a enumeração parcial de forma sistemática e cíclica e observar padrões, utilizando-os, corretamente, para fazer inferências.

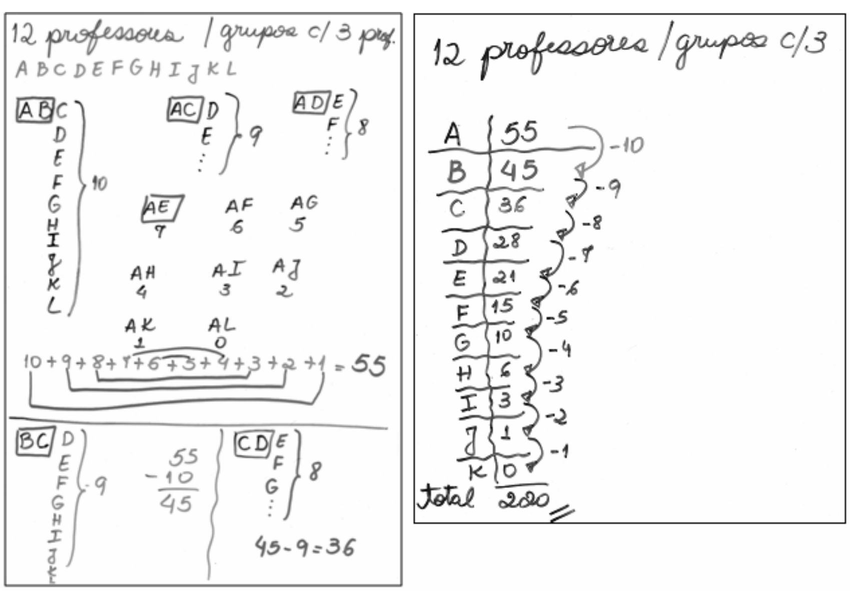


Figura 22: Resolução, construída coletivamente, da questão 4 do teste diagnóstico

A existência de uma maneira mais rápida de resolver esta questão foi questionada pelos alunos, após o diálogo descrito anteriormente. Começamos então a trabalhar a ideia de comparação entre o número de agrupamentos ordenados e não ordenados. Das discussões estabelecidas surgiu a resolução: $\frac{12.11.10}{3.2.1}$, ou seja, o quociente entre o total de agrupamentos ordenados ($A_{12,3}$) e a quantidade de misturas possíveis entre os elementos de cada agrupamento (P_3), entretanto, a estratégia sugerida pelos alunos, apesar de necessitar de mais tempo para ser aplicada, é aquela na qual conferem significado ao que estão construindo. Nesse sentido, muitos afirmaram que, apesar de terem compreendido o segundo processo, preferem o primeiro porque nele podem visualizar melhor todos os grupos. Mais adiante poderemos verificar que esse processo passou a ser utilizado por alguns alunos que, provavelmente, conseguiram atribuir um significado a essas operações, entretanto, muitos continuaram utilizando a enumeração para resolver situações similares.

No episódio, foi possível perceber que conseguimos mudar a norma social que versa que o professor deve definir o modelo a ser utilizado por seus alunos. Apesar de terem solicitado uma 'maneira mais fácil de resolver a questão', muitos não validaram o segundo processo e optaram por não utilizá-lo.

Nono encontro

Iniciamos este encontro discutindo a questão cinco do teste diagnóstico intermediário: '*Quantos* ***numerais pares*** *diferentes, de quatro algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?*'

Como a dinâmica da aula anterior havia sido bem-sucedida, optamos por mantê-la neste encontro, com algumas alterações. Primeiro, solicitamos aos alunos que sugerissem uma estratégia de resolução. Eles escolheram o diagrama de possibilidades. Pedimos a eles que resolvessem primeiro no caderno e depois faríamos juntos. Alguns hesitaram, mas, após algum tempo, todos estavam fazendo.

Eles escreviam no caderno, discutiam com os colegas mais próximos e mostravam suas resoluções. Por diversas vezes foi possível escutar a interjeição: *Ah! Tá!* Interpretamos essa expressão como indicativa do momento em que o aluno validava os argumentos utilizados por seu colega para convencê-lo. A negociação de significados gerou um conhecimento significativo para os alunos que participavam do debate.

Ainda que não tenhamos sugerido que discutissem com os outros colegas, o diálogo surgiu como um caminho natural para chegarem ao objetivo definido: a construção do diagrama. A comunicação através de diálogos repletos de argumentação gerava conhecimento.

Quando percebemos que muitos alunos haviam terminado a construção da árvore de possibilidades, procedemos à construção na transparência. Fomos acompanhados pelos alunos que respondiam prontamente aos questionamentos que lhes eram dirigidos. Quando terminamos, foi possível perceber a satisfação de muitos com a confirmação do resultado encontrado.

Aproveitando o entusiasmo dos estudantes passamos a discutir a questão desafio:

A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?
(ATENÇÃO! COMISSÃO É UM GRUPO DE PESSOAS ONDE TODOS TÊM AS MESMAS FUNÇÕES)

Desta vez optaram pela enumeração sistemática. Da mesma forma que na questão anterior, pedimos que tentassem resolver antes da construção coletiva. Muitos reclamaram afirmando que este problema era mais difícil.

P: Por que é mais difícil?

Muitos falavam ao mesmo tempo.

P: Por que você acha que é mais difícil, Saulo?

Saulo: Eu? Por que eu?

P: Se não quiser responder a minha pergunta, tudo bem. Eu só gostaria de saber o que você pensou.

Saulo: É que é diferente da outra. Tem muito!

P: Como assim?

Saulo: Ah! Sei lá! Tipo assim, tem que escrever mais coisas.

P: Que bom, Saulo. Você e seus colegas perceberam que este problema é diferente do outro. Vamos combinar assim: começamos juntos e vocês terminam.

Percebendo que a dificuldade da questão poderia desmotivá-los, optamos por iniciar o processo juntamente com o grupo. Essa atitude foi tomada para que os alunos não perdessem a motivação conquistada com a discussão da questão cinco. É preciso que o professor perceba a necessidade de alterações em um planejamento e tenha coragem de fazê-las.

Apesar de demonstrarem insegurança para iniciar a resolução da questão, observamos que os estudantes foram capazes de perceber que a ordem de seleção dos elementos não é importante, quando afirmam que este problema é diferente do anterior e escolhem a enumeração sistemática como estratégia de resolução.

Observamos, até este momento do trabalho de campo, que os alunos elegeram a árvore de possibilidades acompanhada do princípio multiplicativo como estratégia principal para a resolução de problemas envolvendo agrupamentos ordenados e a enumeração sistemática, nos casos de agrupamentos não ordenados. Esse episódio sugere que a árvore de possibilidades foi validada como processo eficaz de resolução apenas para situações em que a ordem dos elementos deve ser considerada.

Na literatura consultada não observamos casos semelhantes. Autores como Roa e Navarro-Pelayo (2001) e Fernandes e Correia (2007) identificaram as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas de combinatória. Entretanto, não se referem a nenhum tipo de relação dessas estratégias com o fato de a ordem importar ou não na seleção dos elementos de cada agrupamento.

Através das respostas obtidas a vários questionamentos dirigidos aos alunos, começamos a construir a resolução da questão. Em seguida, deixamos que terminassem em seus cadernos.

Repetiram o procedimento da questão anterior: procuraram validar suas respostas dialogando com os colegas que estavam sentados mais próximos.

Tanto na resolução da questão cinco quanto no desafio, éramos solicitadas pelos alunos a escutar seus argumentos. Eles já sabiam que não validaríamos suas respostas e que iríamos questioná-los quanto à consistência das ideias apresentadas. Nesse sentido, nos procuravam para discutir suas conjecturas e não para saber se a resposta encontrada estava certa ou errada.

Depois de algum tempo, todos os alunos já haviam validado suas resoluções e suas respostas. Decidimos, então, modificar a dinâmica inicial mais uma vez. Combinamos com os alunos que iríamos resolver e apresentar uma resolução para a questão sem fazer perguntas. Eles deveriam observar e tentar explicar o que foi feito.

A figura 23 apresenta nosso registro escrito.

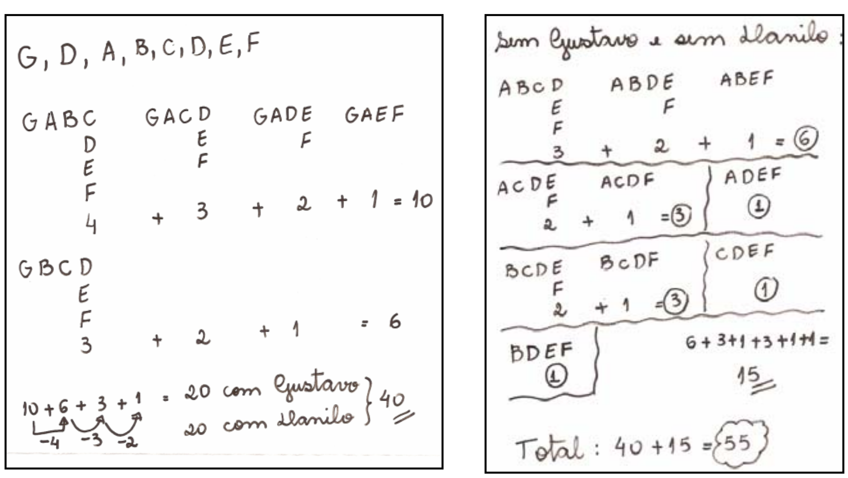


Figura 23: Resolução, construída coletivamente, da questão “desafio” do teste diagnóstico

Alguns alunos manifestaram o interesse em explicar a nossa resolução. Estabelecemos, juntos, uma norma que definia que ouviríamos um aluno de cada vez, mas essa regra não foi respeitada. Muitos queriam falar. Nesse momento verificamos uma mudança de comportamento dos alunos. Se antes evitavam responder questões feitas para o grande grupo, agora todos queriam responder.

Combinamos que escolheríamos um aluno para explicar e os demais poderiam complementar a explicação. E assim foi feito. Foram capazes de identificar que os agrupamentos formados poderiam ser de três tipos: com Gustavo e sem Danilo, Com Danilo e sem Gustavo e sem os dois. Inferiram ainda que o número de agrupamentos do segundo tipo era igual ao do primeiro. Identificaram a soma como ferramenta para calcular o total de possibilidades sem dificuldade. Nos primeiros problemas os alunos apresentavam dificuldade em identificar a operação aritmética que deveria ser utilizada para resolver a situação.

Décimo encontro

Os alunos receberam uma lista[37] com dez questões variadas. Nesta atividade puderam escolher se queriam trabalhar em grupo ou individualmente. Muitos optaram pelo trabalho coletivo.

Informamos aos estudantes que os registros desta atividade não seriam recolhidos para que pudessem guardá-los, mas deveriam escolher uma das questões para, individualmente ou em grupo, apresentar para os colegas.

Durante as discussões, uma situação imprevista aconteceu. João quis vender uma rifa no valor de um real.

P: Compro a rifa se você me disser quantos bilhetes foram colocados à venda?
João: Sei lá? Por que você quer saber?
P: Para saber qual é a minha chance de ganhar.
(Outros alunos se interessaram pela conversa.)
João: Como?
P: Se são 100 bilhetes eu tenho uma chance em 100, ou seja, um por cento.
João: Ah! Mas como é que eu vou saber quantas rifas são?
P: quantas rifas cada aluno deve vender?
João: Vinte.
P: Cada aluno vende 20 rifas. São trinta alunos por turma e 36 salas.
20 x 30 x 36 = 21600. Supondo que só metades das rifas sejam vendidas: 21600 ÷ 2 = 10800. Se eu comprar 12 rifas terei 12 chances em 10800, ou seja
12/10800 = 0,00111 x 100 = 0,1%.
(Conclui a pesquisadora utilizando uma calculadora e registrando os dados no quadro)

[37] Apêndice 5, pág. 153.

João: E quem comprar vinte rifas?

P: Me responda você!

João: São 20 chances em... 10800?

P: Isso mesmo! Você aprendeu depressa.

P: Se jogarmos par ou ímpar você acha que quem escolhe par tem a mesma chance de quem escolhe ímpar?

(A partir deste momento todos os alunos estavam atentos ao diálogo entre João e a pesquisadora)

P: quais quantidades você pode colocar?

João: Posso usar as duas mãos?

P: Se quiser ...

João: Então pode ser zero, um, dois e assim por diante até dez.

P: Eu também poderei escolher entre estas mesmas quantidades de dedos.

(A pesquisadora registra no quadro:)

João:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eu:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

P: São onze possibilidades pra cada um. Pra cada um dos onze que você colocar, eu posso colocar onze, resultando assim em 11 x 11 = 121 possibilidades de somas. Acontece que 121 é um número ímpar então não podemos dividi-lo exatamente por 2. logo ou as somas pares aparecem mais vezes ou são as somas ímpares. Alguém tem mais chances que o outro.

João: Não entendi!

P: vamos escrever todas as somas possíveis. Você me ajuda?

João: Tenho outra opção?

(Todos riem)

(Registramos no quadro:)

somas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
quantidade	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

somas	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
quantidade	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Somas pares: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 61
Somas ímpares: 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 60

P:Portanto, temos mais somas pares que ímpares. A chance de sair soma par é um pouco maior que a chance de sair soma ímpar.

João: Legal!

P: João, o que posso fazer para que o jogo do par ou ímpar dê chances iguais para os dois jogadores?

João: Sei lá! Tem jeito?

P: Tem.

João: Como?

P: Tenta descobrir.

João: Não sei!

P: Você nem tentou e já está dizendo que não sabe.

(Alice pede para explicar sua ideia)

Alice: E se não puder usar o zero?

P: O que acontece?

Alice: Serão cem somas.

P: Por que?

João: Porque são dez de cada.

P: E como vocês sabem que a quantidade de par e ímpar ficará igual?

Alice: Porque quando podia o zero ficou quase igual.

P:É, você tem razão. Vamos combinar o seguinte: em casa vocês analisam todas as possibilidades e depois me contam se deu certo.

No mesmo dia, Alice e João apresentaram um quadro similar ao construído pela pesquisadora e mostraram que a ideia de excluir a possibilidade de usarmos o zero realmente igualava as chances de vencer o jogo.

Terminada a discussão sobre a rifa, os alunos se organizaram e iniciaram a resolução das questões da lista. Acompanhamos o trabalho e percebemos que já não era necessário questioná-los para que justificassem suas conjecturas. Cada vez menos precisávamos interferir nas discussões internas dos grupos. Negociavam o tipo de estratégia a ser adotada, defendiam suas ideias através de argumentos e questionavam os colegas e a si próprios sobre a consistência das conjecturas apresentadas.

Os últimos encontros

No antepenúltimo encontro, os estudantes continuaram a resolver as questões da lista de problemas.

No penúltimo e no último, realizamos as apresentações das estratégias de resolução, projetando-as com o auxílio do retroprojetor ou escrevendo no quadro com gizes brancos e coloridos.

A seguir, transcreve-se um diálogo que ocorreu no episódio da apresentação da aluna Flávia:

Flávia: No começo quando você escreve a palavra sementes você tem oito letras. Aí quando você vai para a segunda letra pode sete. Para a terceira pode seis e assim por diante. Aí você faz oito vezes sete vezes seis vezes cinco vezes quatro vezes três vezes dois e vezes um.

(A aluna explica enquanto aponta os cálculos na transparência.)

Flávia: Aí você vai encontrar um total de 40320. Só que aí você "taria" considerando as letras E e S que se repetem. O E que repete três vezes e o S que repete duas vezes. Então se você colocar o E na primeira posição você vai encontrar seis misturas. Aí o S tem duas. Aí você vai pegar o resultado 40320 e vai dividir por seis por causa do E e por dois por causa do S. E dá 3360.

P: Bom! Agora eu vou fazer aquela perguntinha que vocês adoram.

(João usa um tom de voz irônico, mas sem sarcasmo:)

João: Poooooor que!

P: Isso mesmo: Por que?

Flávia: Eu sei mas não sei explicar.

P: Por que você não começa explicando porque você multiplicou oito por sete e assim sucessivamente.

Flávia: Ah! Porque são oito letras pra começar e depois que eu escolho uma, cada uma tem sete e assim por diante.

P: Entendi. Para cada letra que ocupar a primeira posição você tem outras sete que podem ocupar a segunda posição e assim sucessivamente.

Flávia: E eu dividi por três e depois por dois porque tem letra que repete.

P: Qual é o problema das letras repetirem?

João: É que mudando as duas de lugar fica igual.

Flávia: As duas não. As três e as duas.

João: Ah! Você entendeu!

P: Tudo bem, mas ainda não entendi porque dividir.

(Os alunos ficam em silêncio durante algum tempo até que Alice se manifesta)

Alice: É igual àquele das cadeiras vazias. Tem que dividir.

P: Por que?

João: Você gosta mesmo desse "por que", né?!

P: Gosto mesmo. Com ele aprendo muita coisa, sabia?

Flávia: Sei lá! Tem haver com misturas, mas não lembro bem.

Alice: É que a gente "tá" contando mais de uma vez o mesmo grupo que é o mesmo grupo porque trocar duas letras iguais não muda.

P: Faz sentido!

A figura 24 traz a transparência utilizada por Flávia durante sua apresentação.

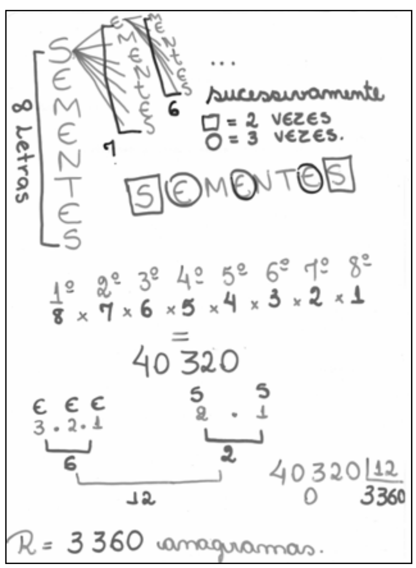


Figura 24: Resolução apresentada pela aluna Flávia

Neste diálogo e no registro escrito podemos observar que o problema foi resolvido a partir de um modelo matemático implícito na descrição dos alunos. Esse modelo não foi imposto e sim construído coletivamente ao longo do trabalho.

Durante o restante deste encontro, os estudantes apresentaram resoluções para todas as questões. Os diálogos aconteceram de forma similar ao transcrito. Alguns estudantes explicaram suas estratégias com maior desenvoltura e outros precisaram de ajuda, mas todos, de alguma forma, expuseram suas ideias. As estratégias utilizadas apresentaram características comuns. Alguns estudantes que estavam acompanhando as apresentações fizeram observações que complementavam as apresentações dos colegas. Em geral, utilizaram o diagrama de possibilidades e o princípio multiplicativo para resolver problemas envolvendo agrupamentos ordenados e a enumeração sistemática para aqueles em que os agrupamentos eram não ordenados. Em alguns casos, também utilizaram tabelas para organizar os agrupamentos.

Poucos alunos se manifestaram comentando os erros cometidos. Em sua maioria, se deviam a fatores tais como identificação errada do tipo de agrupamento, enumeração incompleta, erros aritméticos, etc.

Comparando as explanações dos alunos no início da proposta com aquelas geradas nesta fase final do trabalho, verificamos que o discurso passou de frases curtas para pequenos parágrafos. Antes, demonstravam alguma dificuldade para justificar a escolha de uma estratégia e as operações que utilizavam para resolver o problema. Agora, não apenas apresentavam a resolução, mas explicavam cada passo. Entretanto, entre os alunos persiste a crença de que não são capazes de fazê-lo. Nesse sentido, ainda se faz necessária a utilização de questionamentos para orientá-los nessa tarefa.

Apesar de mostrarem através das respostas às questões que compreenderam a resolução que apresentavam, tinham dificuldade de expressar-se utilizando a linguagem. As frases não eram bem construídas e os gestos mostravam que eles queriam explicar o que pensavam, mas não encontravam as palavras corretas. Entretanto, a solução para esse problema passa por uma mudança que não deve restringir-se às aulas de Matemática. O incentivo à leitura, à comunicação oral e escrita poderia auxiliá-los na construção de argumentos e desenvolvimento de uma linguagem mais adequada ao ambiente acadêmico.

Os registros escritos apresentavam detalhadamente a estratégia adotada. Eles foram capazes de identificar diferentes formas de registrar a resolução de um mesmo problema. Em vários momentos, alunos diferentes solicitaram a oportunidade de apresentar seu registro.

Ao longo do desenvolvimento da proposta, observamos que a interação entre os alunos modificou-se significativamente. Além de acompanhar as apresentações com atenção, alguns estudantes se manifestavam, analisando criticamente os argumentos utilizados pelos colegas.

Nesta fase, encerramos a realização das atividades. Gostaríamos de prosseguir por mais tempo, entretanto, já havíamos utilizado muitas aulas. Os docentes que as haviam cedido precisavam retomá-las para continuar a seguir o planejamento anual de conteúdos.

O questionário

Com o objetivo de avaliar a proposta de ensino na perspectiva dos alunos, aplicamos um questionário[38]. Vinte e nove estudantes responderam as questões.

Vinte e oito afirmaram que gostaram muito ou gostaram da dinâmica das aulas. As justificativas mostraram que os alunos reconheceram o trabalho em grupo como uma oportunidade de discutir e aprender com os colegas. Muitas justificativas ressaltavam que a dinâmica foi diferente e alguns chegaram a afirmar que foi divertida.

O único aluno que assinalou a alternativa: “nem gostei nem desgostei”, justificou: “*apenas sou muito difícil de "pegar as coisas", então não entendi muito bem*”. Essa resposta sugere que ele não confia na própria capacidade de aprender e a dinâmica utilizada não foi capaz de mudar este autoconceito.

Vinte e um alunos afirmaram que costumam trabalhar com dinâmicas similares em outras disciplinas. Essa informação nos surpreendeu visto que, no início da implementação da proposta, esses estudantes apresentaram muita dificuldade de trabalhar em grupo de forma colaborativa e apresentar suas resoluções para os colegas e a pesquisadora. Em uma conversa informal, muitos afirmaram que seus professores não tinham o hábito de utilizar o retroprojetor. Esta última afirmação foi corroborada pela dificuldade que enfrentamos para encontrar e utilizar o aparelho da escola.

Vinte e quatro alunos disseram que nunca haviam resolvido problemas como os que foram propostos. Dos cinco que responderam que já haviam resolvido, dois afirmaram ter sido no Ensino Fundamental e três no ano passado, mas acrescentaram que não se lembravam mais e que o método adotado para ensinar foi diferente.

Vinte e seis alunos consideraram que alguns problemas propostos foram fáceis e outros difíceis. Justificaram afirmando que uns precisavam de mais esforço intelectual que outros.

---

[38] Apêndice 6, pág. 155.

Dezesseis alunos disseram que aprenderam muito com o trabalho e treze assinalaram a alternativa “mais ou menos”.

> *Q3: “Aprendemos a raciocinar melhor e trabalhar em equipe”.*
>
> *Q11: “Há algumas coisas que eu não consegui aprender”*
>
> *Q17: “Porque eu aprendi mais, sabendo as outras resoluções, assim aprendi de mais maneiras.”*

Sessenta e nove por cento dos alunos consideraram as atividades interessantes e setenta e nove por cento, divertidas.

> *Q8: Pois todos tinham liberdade para expressar o que "aprendeu" da maneira que sabia.*
>
> *Q21: As aulas sempre alegres todos interessados, atentos, apresentar trabalho nunca foi tão bom.*

Trinta e um por cento acharam “às vezes interessante, às vezes cansativas”.

> *Q10: Interessantes pelo modo de ensino e divertidas pelo modo de resolução. Às vezes cansativas porque a professora (às vezes) andava um pouco lento com certas resoluções.*
>
> *Q11: Foram aulas bem diferentes as vezes nem parecia aula mas havia vezes que tava cansativa mas acho que não era a aula mas sim eu "q já tava" cansada.*

Quando questionados sobre o conteúdo matemático estudado, várias respostas apareceram, mas nenhuma indicava Análise Combinatória. As mais frequentes foram: raciocínio e probabilidade.

Para a maioria dos alunos o trabalho não precisa ser melhorado. Alguns sugeriram um maior tempo de aula, mais exercícios e a utilização de fórmulas para simplificar as resoluções.

Vinte e seis alunos responderam que se envolveram muito ou mais ou menos na realização das atividades.

As respostas dos vinte e nove alunos que responderam ao questionário sugerem que a proposta foi bem aceita pela maioria. As atividades despertaram o interesse pelo tema e a dinâmica auxiliou no processo de aprendizagem.

O teste diagnóstico final

Finalizamos a proposta aplicando um teste diagnóstico final[39] para os trinta e dois alunos presentes. O teste continha seis questões envolvendo os dois tipos de agrupamentos: ordenados e não ordenados. A escolha das questões foi influenciada por livros didáticos de 2º ano do Ensino Médio e pelas atividades que realizamos.

---

[39] Apêndice 7, pág. 156.

Ao contrário do que havia acontecido nos dois testes anteriores, os alunos participaram da avaliação sem demonstrarem desconforto. Mantivemos a dinâmica do trabalho em grupo, propondo que as questões fossem resolvidas em duplas. Entendemos que seria coerente avaliá-los mantendo a maneira como estavam trabalhando em sala.

Analisando as resoluções dos alunos para a questão 1, observamos que, das dezesseis duplas, quinze resolveram a questão e chegaram ao resultado esperado. Uma cometeu um erro aritmético. A estratégia mais utilizada foi a árvore de possibilidades para validar os princípios multiplicativo e aditivo. Alguns resolveram a questão enumerando as possibilidades de forma sistemática. Alguns reconheceram que a questão era idêntica à primeira do teste diagnóstico inicial e fizeram comentários a respeito.

A partir da análise dos registros, podemos afirmar que esse tipo de problema, considerado mais simples por envolver um pequeno número de agrupamentos facilmente enumeráveis, não constitui um desafio para esses alunos. Se compararmos com a questão idêntica proposta no teste diagnóstico inicial, podemos verificar que o índice de acertos passou de 57% para 94%. Ainda que não tenhamos utilizado ferramentas estatísticas para testar esses valores, é possível inferir que o aumento no número de questões certas é bastante significativo. Se compararmos as justificativas apresentadas no teste final com as do teste inicial, podemos verificar que a proposta foi capaz de auxiliá-los no desenvolvimento de argumentos mais consistentes, tanto no conteúdo quanto na linguagem matemática.

No quadro a seguir comparamos as resoluções da aluna Jussara, no teste diagnóstico inicial e no final[40], para a questão 1.

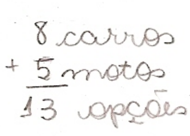
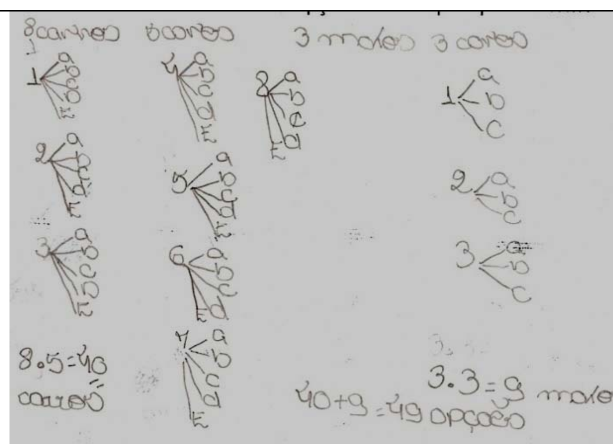
Resolução no teste diagnóstico inicial:	**Resolução no teste diagnóstico final:**
	

Figura 25: Resoluções da aluna Jussara para a questão 1 dos testes diagnósticos inicial e final

40 Realizado em dupla com a aluna Paula.

Nestes registros podemos observar que no teste inicial a aluna procurou encontrar uma operação matemática para resolver o problema. Acreditamos que ela não havia compreendido o enunciado e, como outros alunos, utilizou os números que apareciam no problema para realizar uma operação sem, entretanto, atribuir-lhe significado. No teste final, apesar de não haver uma exigência formal de justificativa, a questão foi resolvida através de operações justificadas, utilizando-se parte de um diagrama de possibilidades.

A questão 2: ‘*O sistema de numeração na base 10 utiliza, normalmente, os dígitos de 0 a 9 para representar os números naturais, sendo que o zero não é aceito como o primeiro algarismo da esquerda. Pergunta-se: Quantos são os números naturais de cinco algarismos formados por cinco dígitos diferentes?*’ foi resolvida por quatorze duplas que chegaram ao resultado esperado e por duas que consideraram a existência de nove algarismos e não de dez. Esse tipo de erro nos parece ter sido gerado pela dificuldade de identificar os algarismos do sistema de numeração decimal, ou seja, um erro que não está diretamente ligado ao raciocínio combinatório.

A estratégia mais utilizada foi o princípio multiplicativo. Muitos alunos, além de registrar esquemas e cálculos, também redigiram pequenos parágrafos explicando suas ideias, como podemos observar na figura 26 que apresenta a resolução do aluno Thiago para a questão 2.

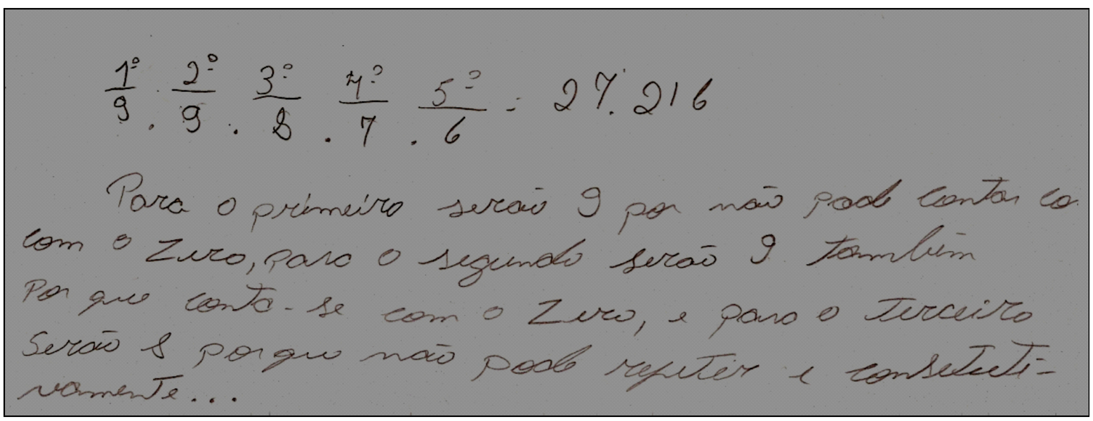


Figura 26: Resolução do aluno Thiago

Esta questão é similar ao problema 2 do teste diagnóstico inicial. Naquela oportunidade, apenas 9% dos alunos encontraram a resposta esperada. No teste final, o índice de acertos foi de 88%. A comparação entre esses índices e a observação das justificativas apresentadas nos registros escritos dos alunos nos levam a inferir que compreenderam que os numerais são agrupamentos ordenados formados por algarismos e que a utilização do princípio multiplicativo é uma estratégia eficaz para a obtenção da quantidade de numerais.

A terceira questão foi resolvida através do princípio multiplicativo, da divisão e da árvore de possibilidades. No teste diagnóstico inicial não constavam questões sobre anagramas. Entretanto, no teste diagnóstico intermediário, duas questões envolviam esse conteúdo. Naquela oportunidade, apenas cinco dos vinte e nove alunos presentes apresentaram a resposta esperada, também usando o princípio multiplicativo.

No item a, o índice de acertos foi maior que o verificado no item b. Aproximadamente, 63% dos alunos encontraram a resposta esperada no item a, enquanto apenas 50% o fizeram no item b. Os erros estão relacionados à construção incorreta da árvore de possibilidades e à falta de atenção a restrições como, por exemplo, ter que começar com consoante ou ter letras iguais na mesma palavra.

Observando as resoluções, verificamos que os alunos compreenderam o que é um anagrama, entretanto, os erros sugerem que tiveram dificuldades para interpretar o enunciado e utilizar as informações na solução do problema.

Também não encontramos nenhuma resolução que utilizasse a enumeração das possibilidades. Inferimos que isso ocorreu porque foram capazes de identificar que o número de agrupamentos possíveis era grande o suficiente para dificultar a enumeração de todos.

Na quarta questão, buscávamos investigar como os alunos analisam as resoluções de outras pessoas e como utilizam argumentos para validá-las ou refutá-las.

Apenas seis das dezesseis duplas escolheram a alternativa correta e argumentaram como esperado. As justificativas foram similares a que apresentamos na figura 27.

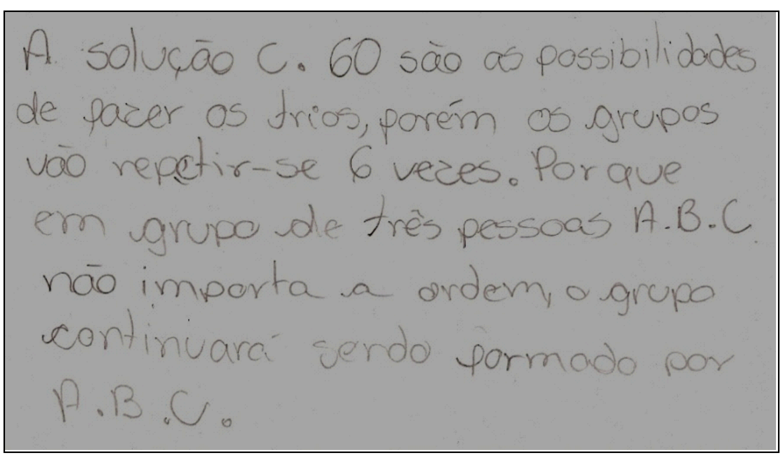

A solução C. 60 são os possibilidades
de fazer os trios, porém os grupos
vão repetir-se 6 vezes. Porque
em grupo de três pessoas A.B.C
não importa a ordem, o grupo
continuará sendo formado por
A.B.C.

Figura 27: Resolução da aluna Alice para a questão 4 do teste diagnóstico final

Observando as justificativas, destacamos quatro erros que levaram as dez duplas a escolherem uma alternativa diferente da esperada. São eles:

(1) Reconheceram que a ordem dos elementos em cada agrupamento não importa, entretanto, não utilizaram a divisão para reduzir a quantidade encontrada através do princípio multiplicativo.
(2) Reconheceram que os elementos não se repetem dentro de cada agrupamento, entretanto não identificaram corretamente o tipo de agrupamento.
(3) Reconheceram corretamente o tipo de agrupamento, entretanto, dividiram pela quantidade de elementos de cada grupo e não pela quantidade de misturas possíveis.
(4) Usaram o diagrama de possibilidades de forma incorreta.

Os erros descritos nos itens (2) e (3) foram os de maior incidência.

Inferimos que um número significativo dos estudantes ainda não compreendeu a relação entre o número de agrupamentos ordenados e de agrupamentos não ordenados que permite que calculemos este a partir daquele.

A quinta questão também foi reproduzida do teste inicial, entretanto, ao contrário do que ocorreu com a questão um, os alunos não identificaram a correspondência.

As resoluções apresentadas para esta questão nos permitem inferir que quanto maior o número de informações a serem consideradas, menor é o índice de acertos. Das nove duplas que resolveram a questão, mas não apresentaram o resultado esperado, cinco erraram porque consideraram a possibilidade de repetição de algarismos na formação da senha. Essas duplas foram capazes de identificar a quantidade de algarismos que formavam o numeral, bem como quais eram os dígitos que poderiam ocupar a ordem dos milhares. As demais duplas cometeram erros similares, quando deixaram de considerar uma das restrições impostas para a formação da senha.

As seis duplas que concluíram a questão como esperado utilizaram o princípio multiplicativo e a árvore de possibilidades para justificar suas conjecturas.

No teste diagnóstico inicial nenhum aluno foi capaz de resolver esta questão. Naquela oportunidade, poucos alunos deixaram algum registro de sua tentativa de resolver a questão e a enumeração aleatória ou operações sem justificativa foram as estratégias utilizadas.

Ainda que o índice de acertos desta questão no teste diagnóstico final tenha sido baixo (40% dos que resolveram), se comparado com o teste inicial, houve um acréscimo significativo no número de resultados esperados.

A seguir comparamos as resoluções do aluno Daniel, apresentadas no teste diagnóstico inicial (figura 28) e no final[41] (figura 29), para a questão das senhas[42].

---

[41] Realizado em dupla com o aluno José.
[42] Questão 3 do teste diagnóstico inicial e questão 5, do teste final.

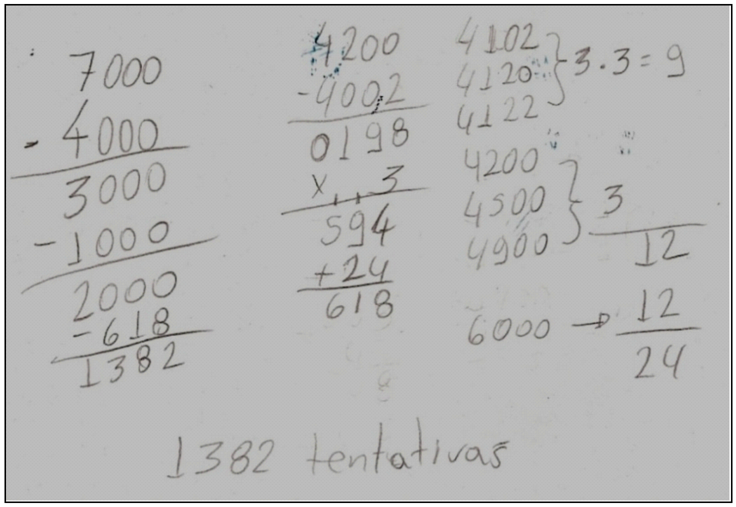


Figura 28: Resolução do aluno Daniel para a questão 3 do teste diagnóstico inicial

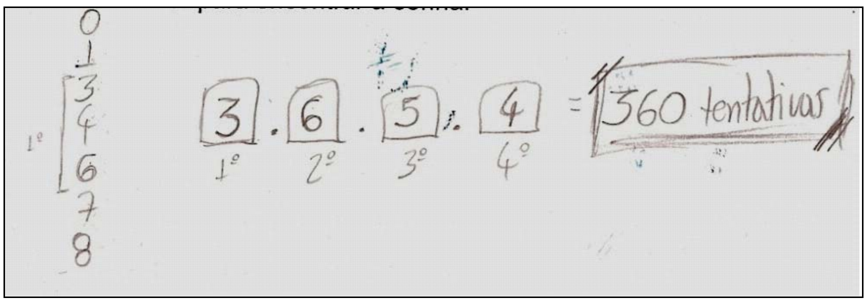


Figura 29: Resolução do aluno Daniel para a questão 5 do teste diagnóstico final

Comparando as duas resoluções, podemos observar que na primeira o aluno tentou resolver utilizando operações e a enumeração de algumas senhas possíveis. No teste final, a estratégia usada foi o princípio multiplicativo, respeitando as restrições impostas pelo enunciado da questão.

A questão seis foi similar à última questão do teste inicial quanto ao tipo de agrupamento, entretanto, trazia alguns elementos que tornavam sua resolução mais complexa.

Ao contrário do que ocorreu na questão 4, onde o tipo de agrupamento também era não ordenado, o índice de acertos foi superior a 50%. Entretanto, apenas oito duplas apresentaram uma justificativa que consideramos aceitável. Das demais, três acertaram na escolha da alternativa e não justificaram ou justificaram parcialmente, uma acertou na opção, mas justificou com argumentos que não consideramos válidos, duas erraram e não justificaram e duas apagaram os registros e não optaram por nenhuma das alternativas.

Ao observarmos as resoluções apresentadas para esta questão, verificamos que ao escolher um grupo com dois homens e duas mulheres dificultamos nossa análise. A partir dos registros não é possível determinar se a divisão por dois foi realizada em função da quantidade de misturas possíveis ou da quantidade de elementos em cada grupo. Nesse sentido, não foi possível verificar, a partir da análise da questão, se os alunos compreenderam a necessidade de dividir a quantidade de agrupamentos ordenados pelo número de misturas possíveis em cada agrupamento, quando a ordem dos elementos não importa. Entretanto, a comparação com a questão 4 nos leva a conjecturar que nem todos os alunos que escolheram corretamente a alternativa compreenderam esta ideia, portanto, mas acertaram devido à igualdade entre estas duas quantidades.

Nos registros, como exemplificado na figura 30, os estudantes usaram o princípio multiplicativo e a divisão, entretanto, a necessidade desta última operação e o porquê do divisor ser igual a quatro não foram justificados.

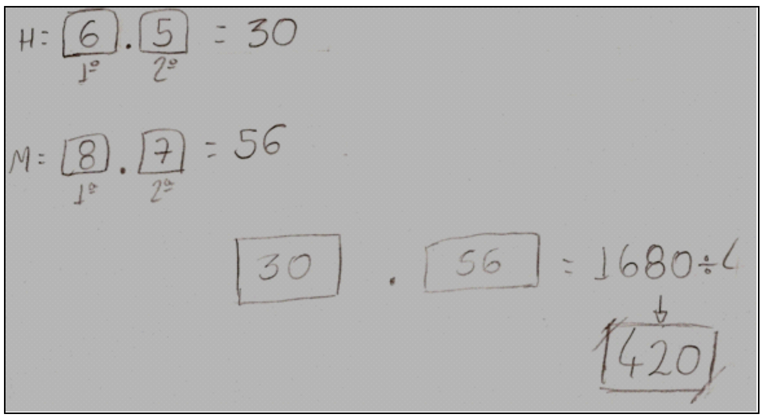


Figura 30: Resolução apresentada pelos alunos Daniel e José para a questão 5 do teste diagnóstico final

Analisando o teste diagnóstico final, observamos que estratégias construídas durante o trabalho apareceram nas resoluções das questões propostas. Entretanto, a mais utilizada foi o princípio multiplicativo acompanhado de diagramas ou tabelas para justificar os cálculos apresentados. A enumeração sistemática – tão frequente nas primeiras atividades – foi utilizada apenas parcialmente na forma de diagrama de possibilidades.

Mesmo quando a resposta encontrada não era a esperada, evidenciamos que os estudantes procuravam utilizar argumentos para justificar suas ideias, de forma clara e organizada. Com exceção da questão 4, na qual as operações já estavam registradas, os alunos utilizaram a linguagem pictórica (diagramas) para justificar as operações realizadas. Em poucos casos, a justificativa foi feita através da linguagem escrita, utilizando pequenos parágrafos a fim de defender suas ideias. No teste final, observamos a utilização de uma linguagem matemática mais elaborada que aquela observada no teste diagnóstico inicial.

Ao contrário do que ocorreu na aplicação do teste diagnóstico inicial, quando a maioria dos alunos entregou rapidamente, deixando várias questões em branco, no teste final, utilizaram quase a totalidade do período destinado à realização do teste, resolveram todas as questões e justificaram as respostas encontradas.

No teste diagnóstico inicial, poucos alunos justificaram suas resoluções. Comparando essas justificativas com aquelas utilizadas no teste final, é possível verificar que houve um avanço na direção da construção de argumentos mais consistentes, ou seja, proposições apresentadas de forma organizada e clara no sentido de obter a validação para a resposta fornecida.

Essas e outras observações proporcionadas pela comparação entre os testes diagnósticos inicial e final, bem como o acompanhamento do processo, nos auxiliaram na construção de inferências que apresentaremos no próximo capítulo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema para alunos do 2º ano do Ensino Médio, estruturamos a presente pesquisa visando a: (1) avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo da proposta; (2) identificar as principais estratégias utilizadas; (3) analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo, (4) investigar o papel das discussões em pequenos e grandes grupos, e, (5) identificar como os estudantes avaliaram a proposta de ensino.

A partir da comparação entre os registros escritos dos alunos no teste diagnóstico final e no teste diagnóstico inicial, encontramos indícios que evidenciam que esta proposta de ensino contribuiu efetivamente para o desenvolvimento do pensamento combinatório da maioria dos alunos que participaram do estudo.

As resoluções apresentadas *a posteriori* evidenciam estratégias de resolução mais elaboradas[43] que as apresentadas nas primeiras atividades. No teste diagnóstico final, por exemplo, os alunos inferiram a quantidade de agrupamentos, mesmo construindo apenas parte da árvore de possibilidades. Entretanto, ainda existia uma dificuldade de cálculo quando o problema envolvia os agrupamentos não ordenados. Para sanar essa dificuldade, seria necessário prolongarmos a implementação por mais algum tempo, o que, neste caso, tornou-se inviável.

Em relação ao conteúdo de Análise Combinatória, verificamos que um percentual significativo dos estudantes que participaram da pesquisa mostrou-se capaz de resolver problemas envolvendo os princípios de contagem, discernir se a situação envolvia agrupamentos ordenados ou não ordenados e qual estratégia utilizar em cada caso, observando se havia ou não repetição de elementos dentro de cada agrupamento. A comparação entre os índices de acertos das questões dos testes diagnóstico inicial e final corroboram essa afirmação.

Ao contrário do que verificaram Roa e Navarro-Pelayo (2001) em suas pesquisas, a árvore de possibilidades foi uma estratégia frequente nas resoluções dos alunos durante o trabalho e no teste diagnóstico final. Já as dificuldades crescentes, observadas por Fernandes e Correia (2007), quando o número de agrupamentos possíveis aumenta, também foram evidenciadas nos relatos dos estudantes. Estes afirmaram que os problemas foram ficando mais difíceis na medida em que o trabalho avançava.

---

[43] Consideramos como mais elaboradas aquelas estratégias que exigem maior esforço intelectual.

Em sua pesquisa, Roa (2000) apresentou os erros mais significativos que Fischbein e Gazit (1988) observaram em crianças de 11 a 14 anos, quando solicitadas a resolver problemas envolvendo o raciocínio combinatório. Não ser capaz de identificar se a ordem é ou não relevante para a resolução do problema é um deles. Verificamos, nos registros, que esse erro também ocorreu nas primeiras atividades. Entretanto, após várias discussões promovidas dentro de cada grupo de trabalho ou no coletivo da turma com a pesquisadora, foi possível verificar que esse erro quase não mais ocorria.

O outro erro descrito é o desenvolvimento incorreto das fórmulas. No trabalho desenvolvido não houve a preocupação de construção e utilização de fórmulas. Os estudantes foram incentivados a criar as próprias estratégias de resolução. Através da observação das resoluções dos colegas, os estudantes elegeram as que consideraram mais viáveis. Através da análise da árvore de possibilidades e da comparação entre agrupamentos ordenados e não ordenados, alguns alunos criaram as próprias regras, seguindo os padrões observados. O desenvolvimento desta habilidade contribuiu para a resolução de problemas envolvendo arranjos com repetição e combinação.

Atividades que envolviam objetos mais conhecidos dos alunos como, por exemplo, o jogo de Dominó e o bingo, facilitaram o reconhecimento do fato de a ordem dos elementos importar ou não na formação do agrupamento. Atividades envolvendo assuntos de interesse dos alunos como, por exemplo, o futebol, colaboraram para motivá-los, trazendo o conteúdo para um ambiente familiar que inspirou mais segurança na discussão do assunto.

Nas primeiras atividades, os estudantes buscavam resolver os problemas através de operações com os dados numéricos informados, mas não demonstravam ter conhecimento sobre o significado das operações. Os estudantes mostraram conhecer os fatos fundamentais e os algoritmos para resolver as quatro operações básicas, mas não compreendiam o seu significado. Ao serem incentivados a construir representações esquemáticas da situação descrita no problema, começaram a rever criticamente as operações que haviam feito, criando novas ideias e atribuindo significado aos cálculos realizados.

A enumeração sistemática foi uma estratégia bastante utilizada nas primeiras atividades. Posteriormente, essa técnica, tão importante para o entendimento do cálculo combinatório, também foi usada para justificar as operações selecionadas e, dessa forma, validar a resolução e a resposta de diversos problemas propostos.

Observando os registros produzidos durante o desenvolvimento das atividades, verificamos que nas atividades que envolviam agrupamentos ordenados, a estratégia mais utilizada era a árvore de possibilidades. Aos poucos, passaram a reconhecer padrões e utilizar apenas parte do diagrama como justificativa para o princípio multiplicativo. Nas questões envolvendo agrupamentos não ordenados, inicialmente, enumeravam o maior número possível de combinações. Durante o desenvolvimento das atividades, passaram a enumerar apenas algumas possibilidades e inferir sobre as operações a serem realizadas. Entretanto, no teste diagnóstico final não utilizaram essa estratégia. Optaram pela tentativa de associar o número de agrupamentos ordenados com a quantidade de não ordenados.

Quando uma nova estratégia era apresentada, a primeira reação de alguns alunos refletia uma não aceitação desse novo conhecimento. Entretanto, nas atividades seguintes, outros alunos além dos autores da nova estratégia começam a utilizá-la. Inferimos que esse fato ocorreu porque não atribuem significado a uma estratégia que não criaram. Entretanto, os princípios básicos daquela estratégia apresentada pelo colega eram utilizados na resolução de outros problemas e, dessa forma, passaram a compreendê-la. O fato de outra pessoa explicar um novo processo não era suficiente para que fosse validado pelos colegas. Era preciso colocá-lo em prática.

Ao compararmos os registros escritos dos testes diagnósticos e das atividades realizadas ao longo do trabalho foi possível verificar que, inicialmente, poucos alunos usaram estratégias de construção de esquemas para resolver os problemas. Entretanto, posteriormente, a maioria usou diagramas ou tabelas para justificar as operações que apresentavam como sendo necessárias para a determinação do total de agrupamentos.

Através da análise dos diálogos, registrados em áudio e vídeo, verificamos que a comunicação estabelecida nos pequenos grupos ocorreu no padrão contributivo, entretanto, quando participávamos das discussões, atingíamos o nível reflexivo. Após vários momentos reflexivos, alcançamos o nível instrutivo.

Se, no início dos trabalhos, os estudantes não aceitavam o convite para expor suas ideias, apresentando suas resoluções para o restante da turma, ao final chegavam a disputar a oportunidade de expressá-las. Mesmo que a resposta não estivesse correta de acordo com as observações dos colegas, quem estava apresentando sua resolução queria saber por que estava errado e não se intimidava com as observações dos outros estudantes, discutindo com eles, querendo convencer ou ser convencido.

Alunos que antes restringiam suas respostas em “sim” ou “não” foram capazes de apresentar justificativas consistentes para suas escolhas.

Durante as discussões das atividades, não trabalhamos a noção de erro de forma negativa. Buscamos não revelar aos alunos se a resposta apresentada era aquela que esperávamos. Depois de algumas semanas, os alunos perceberam que não validaríamos suas respostas. Nesse sentido, procuravam validação nas estratégias escolhidas e nos debates internos de cada grupo.

Utilizamos o erro como ponto de partida para reflexões. Através de questões inquiridoras, procuramos habilitá-los a validar ou refutar as próprias conjecturas. Este objetivo foi alcançado ao final da proposta.

No decorrer do trabalho, os alunos foram desenvolvendo a habilidade de trabalhar em equipe. Observando os registros dos diálogos, nos pequenos e grandes grupos, verificamos que, se no início as discussões quase não aconteciam, ao final, todos se envolviam nas discussões. Criamos juntos, pesquisadoras e alunos, uma norma social que estabelecia a necessidade de argumentar de forma clara e organizada para defender as conjecturas apresentadas. Nessa busca pelo convencimento do outro, os estudantes negociaram significados e construíram o próprio conhecimento.

A norma social, construída pelo grupo, que estabelecia que as respostas precisam ser justificadas foi seguida por todos os grupos. Entretanto, podemos observar que no grande grupo ainda existia uma resistência quanto a essa norma. Atribuímos esse fato a uma dificuldade de se expor para um número maior de pessoas. Tal situação também é descrita pela literatura que afirma que as discussões em pequenos grupos costumam ser mais fáceis para os estudantes.

Pudemos observar que as discussões nos grandes grupos contribuíram para que as estratégias evoluíssem. Ao observar a maneira como outro grupo resolveu o mesmo problema, os estudantes aumentavam suas opções de resolução e passavam a utilizar métodos mais reduzidos, baseados na observação de padrões. É importante ressaltar que esse fato só ocorria quando a estratégia era validada pelo grande grupo, seja no momento da discussão ou quando estavam resolvendo as questões de atividades posteriores.

Um dos processos que pode auxiliar na construção de um ambiente comunicativo rico é a negociação de normas sociomatemáticas capazes de definir qual é o momento mais adequado para participar de uma discussão e, com isso, assegurar aos alunos a liberdade para se manifestar não apenas por escrito, mas também oralmente, diante de um auditório. Não obtivemos o sucesso desejado nesse sentido. Apesar de termos buscado, durante todo o processo, estabelecer uma interação democrática entre professor/alunos, dificilmente conseguiríamos mudar uma norma, perpetuada há anos, em apenas três meses de convivência.

Ao final, os alunos ainda apresentavam alguma dificuldade em argumentar apresentando suas ideias, mas já eram capazes, em alguma medida, de estabelecer analogias e observar criticamente as respostas e resoluções apresentadas pelos colegas.

Nas discussões em que participávamos, estabelecemos uma comunicação no nível reflexivo. Ou seja, utilizamos as falas dos alunos como base para novas reflexões. Entretanto, em alguns momentos, como, por exemplo, no episódio da rifa, alcançamos o nível instrutivo. Este é um nível considerado por Brendefur e Fykholm (2000 apud MARTINHO, 2007b, p. 25) como sendo muito poderoso, pois é capaz de modificar as compreensões matemáticas dos alunos e a prática do professor.

Assumimos o papel de professor "observador-interventor". E em vários momentos nossa interferência foi responsável pela potencialização do processo de ensino e aprendizagem. Destacamos, portanto, a importância e a responsabilidade do professor nesse processo.

No quadro a seguir, apresentamos alguns indícios que nos levaram a concluir que a Comunicação, no sentido da definição adotada neste trabalho, foi um veículo capaz de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem.

Antes da proposta	**Ao final da proposta**
Os alunos não estavam acostumados a questionar, a participar de diálogos envolvendo conceitos matemáticos.	*Alguns alunos perguntavam "por que". Questionavam a resolução dos colegas e da pesquisadora.*
Resolviam os exercícios a partir do modelo estabelecido pela professora.	*Criavam suas próprias estratégias. Resolviam o mesmo problema de formas diferentes para avaliar a resposta encontrada.*
Acreditavam que todo exercício tinha uma maneira única de ser resolvido: aquela ensinada pelo professor.	*Aceitavam que um mesmo problema pode ser resolvido por mais de uma estratégia.*
Dificilmente se expressavam verbalmente sobre um conteúdo matemático.	*Apresentavam suas estratégias e defendiam suas ideias perante a pesquisadora e seus colegas.*
Trabalhavam em grupo de forma que um aluno resolvia a questão enquanto os demais copiavam sua resolução.	*Todos participavam das discussões dentro dos pequenos grupos quase que de forma igualitária. O trabalho tornou-se mais colaborativo.*
Não estavam familiarizados com alguns aspectos próprios da linguagem matemática, como por exemplo, a dificuldade apresentada para resolver problemas envolvendo a noção de numerais.	*Reconheciam alguns verbetes próprios da linguagem matemática, como, por exemplo, "enumeração de possibilidades".*
Eram completamente dependentes do professor para validar suas respostas.	*Criavam estratégias para validar suas conjecturas.*

Além desses indícios, a avaliação da proposta pelos alunos também foi determinante para concluirmos que este trabalho alcançou seus objetivos. Em um relato, uma estudante afirmou que gostou do trabalho porque aprendeu consigo mesma e com os colegas. Analisando essa afirmação, entendemos que, para esta estudante, as atividades propostas promoveram uma interação capaz de influenciar positivamente o processo de aprendizagem de Análise Combinatória. E este não foi um caso isolado.

Analisando as respostas dos alunos ao questionário, verificamos que a proposta foi bem aceita pelos alunos e contribuiu para o processo de aprendizagem. A maioria declarou que não há necessidade de melhorias na proposta e que as atividades foram interessantes e divertidas. Cem por cento dos alunos afirmaram que houve aprendizagem. Avaliaram os problemas que, segundo a maioria, eram inéditos em sua vida escolar, com um grau de dificuldade que variou de fácil a difícil. Concluímos, portanto, que mesmo sendo exigidos intelectualmente, estes sujeitos avaliaram a proposta como sendo adequada e capaz de gerar contribuições para o processo de aprendizagem.

É reconfortante chegar ao final desta proposta obtendo uma avaliação tão positiva visto que, durante o processo, muitas dificuldades foram enfrentadas. A baixa frequência dos alunos foi uma delas. As interrupções ocorridas por problemas administrativos da escola foi outra. A dificuldade dos alunos de se expor expressando suas ideias coletivamente e a falta de confiança na própria capacidade de aprender influenciaram a duração acima do tempo previsto para a aplicação das atividades. Todos esses obstáculos precisaram ser vencidos para que o projeto pudesse ser realizado e chegasse ao final com resultados positivos.

Como pesquisadora, gostaria que este trabalho servisse de apoio e incentivo a professores que pretendem ensinar Análise Combinatória de forma mais efetiva. Almejo que minha pesquisa não tenha apenas uma dimensão teórica, mas seja acessível aos docentes e influencie sua prática pedagógica.

Buscando subsídios em nossa experiência docente e nas leituras feitas, escolhemos e aplicamos os procedimentos metodológicos que julgamos necessários e suficientes para encontrar uma resposta satisfatória para nossa questão de investigação. Entretanto, ao final da implementação da proposta e posterior análise dos dados, observamos que alguns aspectos poderiam ter sido melhor explorados, como, por exemplo, os momentos de ‘silêncio’ que foram significativos e sofreram variações durante todo o processo. Este é um tema interessante a ser investigado em pesquisas futuras.

Com esta proposta buscávamos promover uma mudança na compreensão do que vem a ser ensinar e aprender Análise Combinatória, baseada na capacidade de buscar, aprender e criar. Envolvemos os alunos na resolução de problemas que não exigiam um conhecimento prévio do conteúdo. Ao decorrer do processo, foram sendo convidados a refletir a respeito do problema e analisar uma estratégia para resolvê-lo. Eles não receberam orientações em relação ao conteúdo formal de Análise Combinatória (arranjo, permutação, combinação e suas fórmulas) antes de participarem deste projeto. Assim, as estratégias elaboradas tiveram origem na discussão entre os componentes do grupo e nas conjecturas construídas a partir das observações das resoluções de outros colegas e das intervenções questionadoras da pesquisadora. Os resultados obtidos na comparação entre os testes diagnósticos e na análise do processo nos levam a afirmar que esta proposta de ensino foi capaz de contribuir de forma significativa para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Zelando por uma comunicação no padrão reflexivo, através da utilização de perguntas inquiridoras, discussões em grupos e valorização da argumentação, nossa proposta de ensino foi capaz de gerar conhecimento tanto para os alunos, sujeitos desta pesquisa, quando para nós, pesquisadoras.

Nesse sentido, reunimos o conhecimento adquirido com a implementação desta proposta, de forma condensada, em um livreto destinado a professores de Matemática que se interessam pelo ensino e aprendizagem de Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática. Esperamos que este produto possa, de alguma forma, auxiliar docentes ou futuros docentes na busca por uma educação de qualidade.

REFERÊNCIAS

BATANERO, M.C.; GODINO, J.D. e NAVARRO-PELAYO, Vírgínia. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.** Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

BENITES, Anaerly Bueno. **Relações Comunicacionais**: Uma Ferramenta de Ensino na Universidade. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pelotas, 2006, 119p.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. **A argumentação em Matemática:** Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. 2005a. Tese (Doutorado) – Universidade de Lisboa. Portugal, 2005. p 1 – 128.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. ***A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor.*** **XVI** Seminário de Investigação em Educação Matemática, Évora, 7 e 8 de Novembro de 2005b.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p.

CARVALHO, Carolina. Comunicações e interacções sociais nas aulas de Matemática. (In: LOPES, C. A. E. E NACARATO, A. M. [org] **Escritas e leituras na Educação Matemática**, 1 ed. Belo Horizonte. Autêntica, 2009. 192 p., p.15-34).

CÉSAR, Margarida; TORRES, Madalena; CAÇADOR, Fátima e CANDEIAS, Nuno. E se eu aprender contigo? A interacção entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. (In: PIRES, M. V.; MORAIS, C. M.; PONTE, J. P. da; FERNANDES, M. H.; LEITÃO, A. M. e SERRAZINA, M. L. (Eds.). **Caminhos para a investigação em Educação Matemática em Portugal.** Lisboa: SPCE - Secção de Educação Matemática / APM, 1999, p. 73-89).

COSTA, Eveline Vieira. **O desenvolvimento do processo de comunicação dos significados matemáticos em sala de aula.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, 2005, 199p.

D’ANTONIO, Sandra Regina. **Linguagem e Matemática: Uma relação conflituosa no processo de ensino?** 2006. 285 f. Dissertação (Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná), 2006.

ECHEVERRÍA, Maria Del Puy Pérez e POZO,Juan I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender (In: POZO,Juan I. [org]. **A solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998).

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São

FANIZZI, Sueli. **A interação nas aulas de Matemática: um estudo sobre aspectos constitutivos do processo interativo e suas implicações na aprendizagem**. 2008. 293 f. Dissertação (Programa de Pós-gradução em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

FERNANDES, José Antônio; CORREIA, Paulo Ferreira. **Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória.** In: Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-português de Psicipedagoxia. 2007. A Coruña/Universidade da Coruña. Revista Galego-portuguesa de Psicoloxia e Educación. p. 1256-1267.

FERREIRA FILHO, José Leôncio. **Um estudo sobre Argumentação e Prova Envolvendo o Teorema de Pitágoras.** Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007, 188p.

GOMES, Adriana Aparecida Molina. **Aulas Investigativas na Educação de Jovens e Adultos (EJA):** o Movimento de Mobilizar-se e Apropriar-se de Saber(es) Matemático(s) e Profissional(is). Dissertação de Mestrado. Universidade São Francisco, 2007, 202p.

MARTINHO, Maria Helena; PONTE João Pedro da. **Comunicação na sala de aula de Matemática**: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. 2007a.

MARTINHO, Maria Helena. **Comunicação na sala de aula de Matemática**: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico. 2007. 455 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007b.

MENEZES, Luís. **Desenvolvimento da comunicação em professores do 1º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa..**In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 349-364). Setúbal: APM. 2005

MENEZES, Luís. **Matemática, Linguagem e Comunicação**. Conferência: Matemática, Linguagem e Comunicação. ProfMat 99 – Encontro Nacional de Professores de Matemática. Portimão, Portugal, 10 a 13 de novembro de 1999.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

ROA, Rafael. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada.** 2000. 189 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidade de Granada, Granada, Espanha, 2000.

SANTOS, Vinício de Macedo. Linguagem e Comunicação na aula de Matemática. (In: LOPES, C. A. E. E NACARATO, A. M. [org] **Escritas e leituras na Educação Matemática**, 1 ed. Belo Horizonte. Autêntica, 2009. 192 p., p.117-125).

SILVA, Adriana Aparecida. **Teoria da Argumentação e Ensino de Física.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2007, 91p.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para a Investigação**. Revista bolema. Ano 13. n 14. p 66-91. 2000.

STURM, Wilton. **As possibilidades de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa.** 1999. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação.Campinas, São Paulo, 1999.

VACCARI, Beatriz Volkart. **A Interação em Sala de Aula de Matemática.** Dissertação de Mestrado. Universidade Luterana do Brasil, 2007, 70p.

VIEIRA, Rodrigo Drumond; NASCIMENTO, Silvania Sousa do. **A argumentação e os Procedimentos discursivos didáticos em sala de aula de prática de ensino de Física.** *Ciência & Educação*, v. 15, n. 3, p. 443-457, 2009

YACKEL, Erna; COBB, Paul. **Normas sociomatemática, argumentação e autonomia em matemática.** Tradução do artigo publicado no Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458-477 (1996).

http://www.ibge.com.br/cidadesat (acessado em 11/03/2009)

http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/ (acessado em 08/03/2010)

Apêndice 1: Teste diagnóstico inicial

Que tal resolver algumas questões desafiadoras?
Leia com atenção cada questão.
Procure analisar as informações e o que está sendo pedido.
Crie uma estratégia de resolução e divirta-se!

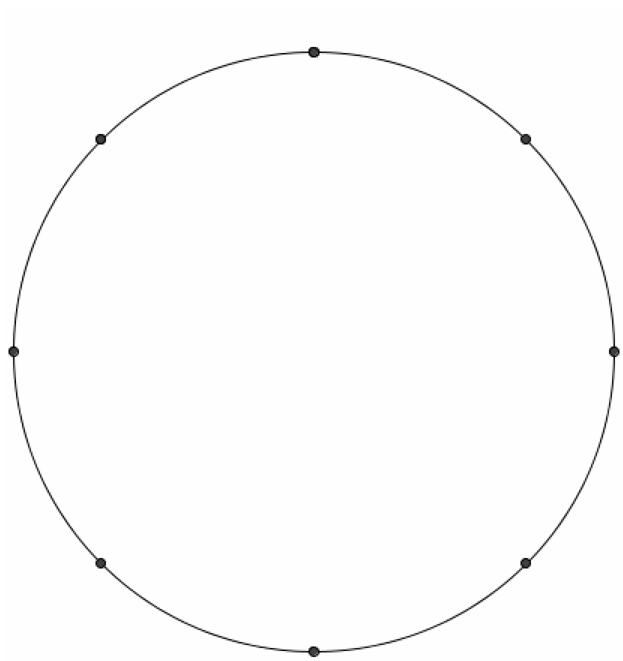
Pseudônimo: ________________________________ Data: 15/04/2009

1. Paulo quer trocar de carro ou comprar uma moto. Pesquisando o mercado, ele encontrou, de seu interesse: 8 modelos de carros em 5 opções diferentes de cores e três modelos de motos, em 3 cores diferentes. Qual é o número de opções de compra que ele tem?

2. Quantos numerais de 4 algarismos distintos, ou seja, diferentes, podemos formar com os algarismos 0, 2, 5 e 7?

3. Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de algarismos distintos, compreendido entre 4000 e 7000 e NÃO é composto pelos algarismos 2, 5 e 9. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha.

4. Numa circunferência são marcados 8 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos.



Apêndice 2: Material para a atividade realizada na terceira semana

Bola Murcha Esporte Clube
Tabajara Futebol Clube
Clube de Regatas Falência
Perna de Pau Futebol Clube
Saci Pererê Esporte Clube.

Apêndice 3: Material para a atividade realizada na sétima semana

1) Quantas e quais são as peças de um jogo de dominó?
2) De quantas formas diferentes 6 pessoas podem formar uma fila?
3) Num grupo de sete alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. A foto será deles sentados em fila. De quantos modos eles poderão sentar, respeitando essa incompatibilidade?
4) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

Apêndice 4: Teste diagnóstico intermediário

Procure resolver as questões a seguir deixando sua resolução no local indicado.

Pseudônimo:____

1) Jorge tem 5 blusas diferentes e 3 calças diferentes. De quantos modos diferentes ele pode se vestir usando uma de suas calças e uma de suas blusas?
2) Fazer anagramas com as letras de uma palavra é misturá-las de forma diferente, ainda que a palavra formada não tenha um significado. Por exemplo: ERAL é um anagrama da palavra REAL. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ESCOLA?
3) Quantos anagramas começados por uma vogal podemos formar com as letras da palavra ESCOLA?
4) Uma escola possui 12 professores de Matemática. Serão escolhidos três para participarem de um congresso. De quantas formas diferentes este grupo poderia ser formado?
5) Quantos **numerais pares** diferentes, de quatro algarismos distintos, podemos formar com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?
DESAFIO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão? (ATENÇÃO! COMISSÃO É UM GRUPO DE PESSOAS ONDE TODOS TÊM AS MESMAS FUNÇÕES)

Apêndice 5: Atividade proposta na 10ª semana

Atividade:

Nomes: ____ Data: ___/___/2009

QUESTÃO 01

Determine o número de anagramas que podemos fazer com as letras da palavra:

a) SEMENTES
b) UNIVERSO

DESAFIO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

MARQUE APENAS UMA ALTERNATIVA E DEIXE SUA RESOLUÇÃO PARA QUE SEJA ANALISADA.

O número de anagramas que podemos fazer com a palavra SEMENTES, de modo que as vogais NÃO fiquem juntas é:

a) 3000
b) 720
c) 2.640
d) 3.360

QUESTÃO 02

Usando os algarismos 1, 3, 4 e 6, quantos numerais com três algarismos distintos podemos formar?

QUESTÃO 03

Usando os algarismos 1, 3, 4 e 6, quantos numerais com três algarismos, distintos ou não, podemos formar?

QUESTÃO 04

Usando os algarismos 0, 1, 3, 4 e 6, quantos numerais com três algarismos distintos podemos formar?

QUESTÃO 05

Usando os algarismos 0, 1, 3, 4 e 6, quantos numerais ímpares com três algarismos distintos podemos formar?

QUESTÃO 06

Usando os algarismos 0, 1, 3, 4 e 6, quantos numerais maiores que 300 podemos formar?

QUESTÃO 07

Numa loja existem camisas de 6 cores diferentes , calças de 4 cores diferentes e sapatos pretos e marrons. Determine o número de maneiras distintas que uma pessoa pode comprar uma camisa, uma calça e um sapato.

QUESTÃO 08

Uma empresa tem 3 diretores e 6 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas?

QUESTÃO 09

Uma empresa tem 3 diretores e 6 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas contendo, exatamente, 1 diretor?

QUESTÃO 10

Em um grupo de 12 pessoas, serão sorteadas três para ganharem viagens para Porto Seguro, Bahia. Quantos são os resultados possíveis deste sorteio?

Apêndice 6: Questionário para os alunos

Caro estudante ou cara estudante,
Estou interessada em conhecer sua opinião sobre o trabalho que acabamos de realizar. Não é necessário se identificar, apenas responder de modo sincero às questões a seguir. Sua contribuição é valiosa! A partir dela posso melhorar meu trabalho. Obrigada!

1. O que você achou da dinâmica das aulas (resolução de problemas/desafios em grupos ou duplas)?
( ) gostei muito ( ) gostei ( ) nem gostei nem desgostei ( ) não gostei ( ) detestei
Explique sua resposta. ____
____

2. Você costuma trabalhar dessa forma (em grupos ou duplas e apresentando o que produzem) nas outras disciplinas? ( ) em várias ( ) em algumas ( ) nenhum professor trabalha assim

3. Você já havia resolvido problemas parecidos com os que eu levei para sua sala antes? ( ) sim ( ) não
Quando? ____

4. O que você achou dos problemas que propus nas aulas de Matemática?
( ) muito fáceis ( ) fáceis ( ) alguns fáceis e outros difíceis ( ) difíceis ( ) muito difíceis
Por quê? ____
____
____

5. Você aprendeu algo com o trabalho? ( ) muito ( ) mais ou menos ( ) pouco ( ) nada
Explique sua resposta ____
____

6. Em geral, o que você achou das atividades realizadas em sala de aula? (assinale mais de uma alternativa, se necessário)
( ) interessantes ( ) divertidas ( ) cansativas ( ) sem interesse ( ) chatas
( ) às vezes interessante, às vezes cansativas ( ) aos poucos, iam ficando mais difíceis
Explique sua resposta ____
____

7. Que conteúdo(s) matemático(s) você acha que eu tentei desenvolver com vocês? _______________
____

8. Como eu poderia melhorar o trabalho realizado? ____________________________________
____

9. A seu ver, você se empenhou em realizar as atividades? ( ) muito ( ) mais ou menos ( ) pouco

10. Quantos anos você tem? ______________ 11. Você trabalha? ( ) sim ( ) não

12. Você é do sexo: ( ) feminino ( ) masculino

Apêndice 7: Tabulação do questionário

1. O que você achou da dinâmica das aulas (resolução de problemas/desafios em grupos ou duplas)?

Alternativas:	frequencia das respostas:	fr
gostei muito	16	55,2%
gostei	12	41,4%
nem gostei nem desgostei	1	3,4%
não gostei	0	0,0%
detestei	0	0,0%
total:	**29**	**100,0%**

Q1	Além da descontração; aprendemos matemática de uma forma muito mais divertida.
Q2	Foi uma forma diferente de explicação e ensinamento.
Q3	Porque nós estamos "testam" nossa capacidade de raciocínio
Q4	foram muito interessantes
Q5	gostei muito pelo modo de ter saído da rotina e muito interessante nos "insentiva a presta a tenção"
Q6	eu gostei muito, pois foi explicado de forma diferente fazendo com que os alunos se "interessasem"
Q7	Isto "por que" aprendemos a trabalhar em grupo istoé muito importante até mesmo para o desenvolvimento dos alunos na escola
Q8	Em grupo fica mais fácil para resolver os problemas
Q9	apenas sou muito difícil de "pegar as coisas", então não entendi muito bem.
Q10	Sempre gostei de Matemática e é legal sair daquela vida escolar monótona onde tudo é cálculo e fórmula.
Q11	Achei que desta forma deu para aprender mais
Q12	Pois trabalho em dupla você desenvolve melhor com as outras opiniões
Q13	Trabalhar em grupo foi bom para dividirmos as ideias, também respeitar a opinião dos outros.
Q14	Eu gostei muito porque a metodologia foi diferente, de modo que possibilitou a efetivação da prática e entendimento da teoria
Q15	Porque eu aprendi trabalho em grupo
Q16	Melhor para o aprendizado, muito mais interessante do que as aulas do dia-a-dia. Nós alunos tendo mais vontade de aprender com esse trabalho.
Q17	Achei o trabalho diferente e "deixou, nós" mais impolgados para resolver as questões.
Q18	Por que são maneiras exatas e simples para a gente chegar ao nosso objetivo
Q19	Em certas "parte" eu até gostei muito da aula, mas depois parecia estar ficando bagunçado.

Q20	Me ensinou novas técnicas de aprendizagem
Q21	Nossa aprendi muito com isso. Muito mais fácil e gostoso de aprender. As aulas ficam prazerosas.
Q22	A dinâmica foi bem elaborada, não deixou nada a desejar.
Q23	Foi bom para ter união entre os amigos e melhora o aprendizado
Q24	eu gostei porque é um modo diferente de resolver as questões
Q25	Porque tinham muitas coisas simples que "poderia" ser "resolvido" de maneira diferente.
Q26	Porque trabalho em grupo é muito bom e a professora é perfeita
Q27	Esta foi uma maneira de aprender uma matéria de forma diferente
Q28	Acho que poderia mudar a dinâmica um pouco mais para o individual, pq tem gente que só quer pegar "rebaba".
Q29	Achei interessante, diferente

2. Você costuma trabalhar dessa forma (em grupos ou duplas e apresentando o que produzem) nas outras disciplinas?

Alternativas:	frequencia das respostas:	fr
em várias	1	3,4%
em algumas	21	72,4%
nenhum professor trabalha assim	7	24,1%
total:	**29**	**100,0%**

3. Você já havia resolvido problemas parecidos com os que eu levei para sua sala antes?

Alternativas:	fequencia das respostas:	fr
SIM	5	17,2%
NÃO	24	82,8%
total:	**29**	**100,0%**

Q1	nr
Q2	nr
Q3	nr
Q4	jamais
Q5	nr
Q6	Na sétima série
Q7	nr
Q8	nr
Q9	nr
Q10	Nunca
Q11	nr
Q12	nr

Q13	nr
Q14	Se não estou enganada, na 8ª série
Q15	Os professores não "tras exercício interesanti" assim.
Q16	Aqui na escola com o professor Genaldo que eu comecei a fazer. Neste ano na parte da manhã
Q17	Um pouco no ano passado, mas não me lembro muito
Q18	Sim, mas não usando esse método de resolução
Q19	nr
Q20	nr
Q21	nr
Q22	Os professores não "costumam a trabalhar" dessa maneira.
Q23	nr
Q24	nr
Q25	nr
Q26	nr
Q27	nr
Q28	nr
Q29	nenhum

4. O que você achou dos problemas que propus nas aulas de Matemática?

alternativas:	frequencia das respostas:	fr
muito fáceis	0	0,0%
fáceis	2	6,9%
alguns fáceis e outros difíceis	26	89,7%
difíceis	1	3,4%
muito difíceis	0	0,0%
total:	**29**	**100,0%**

Q1	Alguns eu nunca imaginei de resolver já outros mais simples; só de vê sabemos resolver.
Q2	Porque envolvia formas diferentes de resoluções e formas de explicação.
Q3	Porque alguns tínhamos que pensar mais que os outros.
Q4	Tenho que pensar muito.
Q5	Porque alguns precisam de mais atenção.
Q6	Porque eles exigem paciência e eu não tenho quase nenhuma.
Q7	Muitos isto "por que algum que parece ser facil mais são dificil e outros ser parecido dificil mais são facil de resolver"
Q8	nr
Q9	Alguns muito "dificies", mas como foi em grupo cada um dava sua opinião aí ficava mais fácil.
Q10	Porque você dava conselhos dorindo nossas mentes e aumentando nossa capacidade de raciocínio.
Q11	"Tinha alguns que eu consegui resolver" outros tentei mas errava e alguns que por "mal vontade" nem tentei.

Q12	Pois não sabia a matéria.
Q13	Tinha alguns muito "difícies" que nem com a explicação eu entendia. Mas tinha fáceis também.
Q14	Porque alguns tinham um raciocínio lógico fácil e outros dependiam de mais atenção aos fatos e seus respectivos detalhes.
Q15	a professora me ensinou fazer os exercícios e aprendi fazer com facilidade.
Q16	"Todos problemas tem alguns" mais difíceis, mas deu para "intender"
Q17	Foram fáceis porque além de você explicar bem nós fazíamos juntos, outras difíceis porque as resoluções eram mais complicadas, mas nada impossível.
Q18	Alguns de cara dava para resolver, outros só com ajudas da Adriana, mas que acabava ficando fácil também.
Q19	No começo com o time de futebol foi mais fácil e depois foi complicando.
Q20	Uns envolvem mais raciocínio que outros.
Q21	"Tipo que tinha facius e difícios" e que pareciam "facios" e que pareciam "difícios". Basta ler e prestar atenção para "percebemos".
Q22	"Por que" alguns problemas eram só você se concentrar para resolver, outros necessitavam de um pouco mais de atenção e a ajuda da nossa excelentíssima professora.
Q23	sei "la"
Q24	Tinha algumas que "era" fáceis e outras difíceis.
Q25	Poruqe alguns trabalhos nós não "esperava"
Q26	Há eu odiava matemática
Q27	Porque uns eu tinha mais facilidade de aprender e outros eu já tinha mais dificuldade.
Q28	nr
Q29	Porque alguns eu entendia e outros tinha dificuldade.

5. Você aprendeu algo com o trabalho?

alternativas:	frequencia das respostas:	fr
muito	16	55,2%
mais ou menos	13	44,8%
pouco	0	0,0%
nada	0	0,0%
total:	**29**	**100,0%**

Q1	O problema "seja" aquela perguntinha! "Porque."
Q2	Através do trabalho descobrir novas formas de conhecimento e maneiras diferentes de "intendimento".
Q3	Aprendemos a raciocinar melhor e trabalhar em equipe.

Q4	Eu aprendi a interpretar melhor as perguntas.
Q5	Por que algumas questões não sei resolver.
Q6	Além da própria matéria aprendi a fazer trabalho em grupo.
Q7	Aprendi muito com o trabalho e a importância do trabalho em grupo que é muito legal.
Q8	Aprendi métodos fáceis para resolver problemas que pareciam difíceis.
Q9	Como eu já disse sou muito difícil de "pegar as coisas".
Q10	Aprendi que existem fórmulas para simplificar enunciados complexos e, mais que isso, aprendi a montar tais fórmulas além de um significado aumento do raciocínio.
Q11	Há algumas coisas que eu não consegui aprender.
Q12	Pois não tive a oportunidade de acompanhar todo o trabalho.
Q13	nr
Q14	Porque me fez perceber que muitos problemas não podem ser resolvidos logo de cara mas com um pouco de força de vontade e atenção se tornam bem mais fáceis.
Q15	"Por que matematica naum e so calculo"
Q16	Por minha parte mais ou menos, por ter conversado muito em algumas aulas.
Q17	Porque eu aprendi mais, sabendo as outras resoluções, assim aprendi de mais maneiras.
Q18	Se a gente pensar, tem maneiras bem legais de rsolver exercícios difíceis, que "achava-mos" chatos e que a gente acabava deixando de fazer.
Q19	Trabalhar em grupo e sendo orientado é muito melhor do que sozinho e nas dúvidas.
Q20	Me ensinou a solucionar questões de outro modo.
Q21	Aprendi como resolver problemas de formas mais simples. E aprendi que em grupo pensamos melhor.
Q22	Aprendi que trabalhando em grupo fica muito mais fácil de resolver os problemas.
Q23	Já sou um pouco lenta para pegar a explicação. Eu não gosto da matéria "tbm".
Q24	Eu aprendi a pensar de um modo mais fácil
Q25	Como eu falei na primeira pergunta
Q26	Eu nunca fui muito boa em matemática e nem gostava, com o trabalho comecei a "mim" interessar pela matéria.
Q27	Muitas coisas como desenvolver um tipo de problema. Quantas possibilidades eu tenho para escolher uma roupa, um grupo e outros.
Q28	Porque eu acho que faltou um pouco mais de interesse da turma, "ouve" muita participação, "mais" fora isto foi muito legal!
Q29	Porque as vezes a maneira de resolver era "compricada" não porque você não explicou mas sim por "mim mesma" não entender.

6. Em geral, o que você achou das atividades realizadas em sala de aula?

alternativas:	frequencia das respostas:	fr
interessantes	20	69,0%
divertidas	23	79,3%
cansativas	3	10,3%
sem interesse	0	0,0%
chatas	0	0,0%
às vezes interessante, às vezes cansativas	9	31,0%
aos poucos, iam ficando mais difíceis	9	31,0%

Q1	Porque houve descontração nas temidas aulas de Matemática
Q2	A forma aplicada de estudos foi diferente "repercurtindo" assim novas ideias.
Q3	Pois a professora "fazia uma atividades" que interagiam com os alunos e davam brindes para nós..
Q4	Gastava muitos neurônios pensando, ainda mais depois de chegar do trabalho, fica difícil pensar
Q5	Gostei pois aprendi por ser explicado de uma forma diferente.
Q6	Elas são interessantes, divertidas e com o tempo se tornavam mais difíceis.
Q7	Isto porque conseguimos resolver formas de um tipo simples, diferente e fácil de fazer.
Q8	Pois todos tinham liberdade para expressar o que "aprendeu" da maneira que sabia.
Q9	As atividades eram pouco parecidas então caía na rotina, mas também foi diferente das aulas de matemática.
Q10	Interessantes pelo modo de ensino e divertidas pelo modo de resolução. Às vezes cansativas porque a professora (às vezes) andava um pouco lento com certas resoluções.
Q11	Foram aulas bem diferentes as vezes nem parecia aula mas havia vezes que tava cansativa mas acho que não era a aula mas sim eu "q já tava" cansada.
Q12	Pois trabalhou com maneiras fáceis de entender.
Q13	As atividades eram parecidas, às vezes ficavam cansativas, mas eram divertidas, diferentes das outras aulas.
Q14	Interessantes e divertidas, porque me prendia (de forma agradável) à matéria, mas aos poucos ficavam mais difíceis porque dependiam de um raciocínio mais avançado.
Q15	Porque a professora "trose varios exercicios enteresantes".
Q16	Melhor do que a falazada que os professores arruma no dia-a-dia pois perdemos o interesse de estudar.
Q17	Foram divertidas, porque foram feitas de maneiras interessantes e um pouco difíceis porque as questões foram ficando mais complicadas de resolver.
Q18	Às vezes não eram difíceis, era porque as vezes eu não estava com cabeça para pensar sobre as questões.
Q19	Porque no começo foi uma matéria nova e depois ficou só nela.
Q20	As vezes "repinham" o mesmo exercício, ou as vees os alunos estavam cansados, isso fazia com que algumas aulas fossem cansativas.

Q21	As aulas sempre alegres todos interessados, atentos, apresentar trabalho nunca foi tão bom.
Q22	As atividades eram interessantes e ao mesmo tempo divertida, fazendo com que as aulas ficassem mais "agradável".
Q23	Pq as vezes ficava cansativa, porque poderíamos fazer aula fora da sala. Ah sei lá.
Q24	Eu achei muito interessante e muito divertido.
Q25	Pelo modo de cada um resolver seu exercício.
Q26	O trabalho da Adriana foi interessante muito gostoso.
Q27	Porque tem alguns exercícios que eu tive bastante dificuldade.
Q28	nr
Q29	Às vezes cansativa por eu não entender algumas "aula" e as vezes por eu "esta" cansada.

7. Que conteúdo(s) matemático(s) você acha que eu tentei desenvolver com vocês?

Q1	Possibilidade, tentativas de solução.
Q2	Raciocínio
Q3	Raciocínio lógico
Q4	Lógica, possibilidades.
Q5	Organização, raciocínio de como dividir da maneira mais certa.
Q6	A saber quantas opções tenho em certas escolhas
Q7	Um conteúdo simples e fácil de fazer
Q8	Possibilidade. Métodos para resolver questões lógicas.
Q9	Organização e raciocínio
Q10	Resumindo minha resposta e expressando a mesma com uma só, raciocínio.
Q11	Probabilidade
Q12	nr
Q13	O raciocínio, divisão, organizar os números de outras formas.
Q14	Probabilidade
Q15	Raciocínio
Q16	Raciocínio
Q17	Probabilidade
Q18	Probabilidade, de maneiras diferentes de resolução.
Q19	Probabilidade
Q20	Probabilidade
Q21	Acho probabilidades, somas, multiplicação, na verdade nem sei explicar o que é.
Q22	Raciocínio.
Q23	nr
Q24	Organização dos números, divisão.
Q25	Aprender matemática divertindo
Q26	Problemas
Q27	Probabilidade
Q28	Possibilidades
Q29	Do que é a matemática e do que é uma resolução as vezes mais simples.

8. Como eu poderia melhorar o trabalho realizado?

Q1	Acho que não precisa ser melhorado. Talvez nesse trabalho 2 aulas foram poucas.!
Q2	Não há o que melhorar!!!!!
Q3	Está bom do jeito que está
Q4	Não precisa melhorar mais, está ótimo.
Q5	Bom, na minha opinião "tá" muito boa na maneira de explicar pois é interessante.
Q6	Dando prêmio aos alunos
Q7	Com mais exercícios e mais trabalhos e etc
Q8	O trabalho está ótimo, para melhorar, a direção deveria disponibilizar mais tempo para suas aulas
Q9	Mudar um pouco os exercícios
Q10	A aula está perfeita, onde todos nós aprendemos "brincando", ganhamos pontos e prêmios além de "ter-mos" uma interação muito agradável com a professora.
Q11	Pra mim "tá" bom assim "foi aula bem divertidas"
Q12	Propondo mais trabalhos em grupo
Q13	Fazer algumas atividades diferentes, acho que a maioria eram iguais, aí caíram na rotina.
Q14	nr
Q15	Não há o que melhorar "por que o trabalho tá ótimo"
Q16	Eu acho que não deveria melhorar, mas sim passar para frente.
Q17	Eu acho que essa matéria também pode ser explicada através de fórmulas.
Q18	Com esse trabalho eu aprendi bastante, para mim não precisa melhorar nada.
Q19	Passando alguma fórmula para as questões ou uma matéria resumida.
Q20	Acho que se você ilustrasse alguns problemas seria mais fácil para quem tem dificuldade de aprender e entender o enunciado.
Q21	Perguntando menos por que... Brincadeira. Acho sua aula muito boa, interessante e muito prazerosa.
Q22	Não há o que melhorar, o trabalho ficou excelente.
Q23	Não precisa melhorar nada. Muito bom. "Vc e D+". Diferente de todos. Aquele abraço, Desculpa qualquer coisa.
Q24	Eu acho que não precisa "melhor", o modo que você "esplica" é muito bom.
Q25	nr

Q26	"Pra' mim não precisa mudar está ótimo.
Q27	Me aprofundando mais nos meus conhecimentos
Q28	Não acho que se "melhor" demais estraga, do jeitinho que "estar" "tá" muito bom.
Q29	No meu ponto de vista está bom.

9. A seu ver, você se empenhou em realizar as atividades?

alternativas:	frequencia das respostas:	fr
muito	13	44,8%
mais ou menos	13	44,8%
pouco	1	3,4%
não respondeu	2	6,9%
total:	**29**	**100,0%**

10. Quantos anos você tem?

idade:	frequencia das respostas:	fr
15	1	3,4%
16	12	41,4%
17	5	17,2%
18	6	20,7%
19	2	6,9%
23	1	3,4%
27	1	3,4%
nr	1	3,4%
total:	**29**	**100,0%**

11. Você trabalha?

alternativas	frequencia das respostas:	fr
sim	10	34,5%
não	18	62,1%
nr	1	3,4%
total:	**29**	**100,0%**

12. Você é do sexo:

alternativas	frequencia das respostas:	fr
feminino	15	51,7%
masculino	14	48,3%
total:	**29**	**100,0%**

Apêndice 8: Teste diagnóstico final

Que tal resolver algumas questões desafiadoras?
Leia com atenção cada questão.
Procure analisar as informações e o que está sendo pedido.
Crie uma estratégia de resolução e divirta-se!

1. Paulo quer trocar de carro e comprar uma moto. Pesquisando o mercado, ele encontrou, de seu interesse: 8 modelos de carros em 5 opções diferentes de cores e três modelos de motos, em 3 cores diferentes. Qual é o número de opções de compra que ele tem?

2. O sistema de numeração na base 10 utiliza, normalmente, os dígitos de 0 a 9 para representar os números naturais, sendo que o zero não é aceito como o primeiro algarismo da esquerda. Pergunta-se:
Quantos são os números naturais de cinco algarismos formados por cinco dígitos diferentes?

3. Encontre:
a) o número de anagramas da palavra CORAGEM que começam com consoante.

b) o número de anagramas da palavra SUCESSO.

4. Observe três diferentes soluções apresentadas por alguns alunos para a seguinte questão de uma prova de matemática:

"*Determine o número de trios possíveis de serem formados com um grupo de 5 pessoas*."

Solução A: $5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 60$ Solução B: $\frac{5.4.3}{3} = 20$ Solução C: $\frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$

Qual das resoluções está correta? **Por que?**

5. Laura esqueceu sua senha de acesso ao computador. Na tentativa de descobri-la, lembrou-se das seguintes informações: é um número de algarismos distintos, compreendido entre 3.000 e 7.000 e NÃO é composto pelos algarismos 2, 5 e 9. Identifique o número máximo de tentativas que Laura deverá fazer para encontrar a senha.

6. Desafio!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Considere um grupo formado por 6 homens e 8 mulheres, do qual se deseja constituir uma equipe formada por 4 pessoas, sendo 2 homens e 2 mulheres. O **NÚMERO DE MANEIRAS DISTINTAS** de se formar a equipe é:

a) 495

b) 420

c) 210

d) 285

e) 450

Justifique sua escolha!