



Universidade Federal de Ouro Preto
Escola de Minas / Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção
(PPGEP)



NÚCLEO DOS JOGOS COOPERATIVOS E ALIANÇAS EM JOGOS DE VOTAÇÃO COM PESO MÚLTIPLOS COM RESTRIÇÕES NA COALIZÃO: UMA ABORDAGEM VIA ÁLGEBRA NÃO-LINEAR E ANÁLISE DE PARTIÇÃO DE MACMAHON

Fernanda Stefane Martins

Orientador: Prof. Dr. Antônio Francisco Neto

**Ouro Preto
19 de janeiro de 2022**

FERNANDA STEFANE MARTINS

**NÚCLEO DOS JOGOS COOPERATIVOS E
ALIANÇAS EM JOGOS DE VOTAÇÃO COM
PESO MÚLTIPLOS COM RESTRIÇÕES NA
COALIZÃO: UMA ABORDAGEM VIA
ÁLGEBRA NÃO-LINEAR E ANÁLISE DE
PARTIÇÃO DE MACMAHON**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Produção (PPGEP) da Universidade
Federal de Ouro Preto.

Linha de pesquisa: Modelagem de Sistemas Produtivos e
Logísticos.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Francisco Neto

Ouro Preto - MG
19 de janeiro de 2022

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

M386n Martins, Fernanda Stefane.

Núcleo dos jogos cooperativos e alianças em jogos de votação com peso múltiplos com restrições na coalizão [manuscrito]: uma abordagem via álgebra não-linear e análise de partição de MacMahon. / Fernanda Stefane Martins. - 2022.
83 f.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Francisco Neto.

Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia de Produção. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

1. Gröbner, Bases de. 2. Desigualdades (Matemática) - Lema de Farkas. 3. Jogos - Jogos de Votação com Peso Múltiplos - Índice de Poder de Banzhaf. 4. Modelos matemáticos - Análise de Partição. I. Neto, Antônio Francisco. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 658.5

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
ESCOLA DE MINAS
PROGRAMA DE POS-GRADUACAO EM ENGENHARIA DE
PRODUCAO



FOLHA DE APROVAÇÃO

Fernanda Stefane Martins

Núcleo dos Jogos Cooperativos e Alianças em Jogos de Votação com Peso Múltiplos com restrições na coalizão: uma abordagem via Álgebra Não-linear e Análise de Partição de MacMahon

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Aprovada em 19 de janeiro de 2022

Membros da banca

[Doutor] - Antônio Francisco Neto - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Doutor] - Helton Cristiano Gomes - (Universidade Federal de Ouro Preto)

[Doutor] - Adélcio Carlos Oliveira - (Universidade Federal de São João del-Rei)

Antônio Francisco Neto, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 19/01/2022



Documento assinado eletronicamente por **Aloisio de Castro Gomes Junior, COORDENADOR(A) DE CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**, em 26/05/2022, às 13:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0333389** e o código CRC **82F7B57B**.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma nova condição algébrica necessária e suficiente para que o núcleo dos jogos cooperativos seja não-vazio. Nossa abordagem é baseada em álgebra não-linear e compreende o uso de uma versão do Lema de Farkas que atesta a existência do núcleo por um sistema quadrático de equações polinomiais juntamente com uma base de Gröbner do ideal associado ao sistema acima mencionado. Para mostrar a utilidade da abordagem introduzida aqui, mostramos que jogos de mercado abstrato com quatro ou menos jogadores têm núcleo não-vazio. Também construímos uma função geratriz generalizada para descrever a aliança de Jogos de Votação com Peso Múltiplos no sentido de Felsenthal e Machover, incluindo restrições na formação de coalizões. Nossa principal ferramenta técnica compreende o cálculo Omega; ou seja, uma abordagem de operador para descrever soluções de sistemas diofantinos lineares por meio de funções geratrizes. Nosso trabalho generaliza e unifica o trabalho de Felsenthal e Machover e Neto e é vantajoso do ponto de vista computacional. Assim, este trabalho abre caminho para computar aliança em Jogos de Votação com Peso Múltiplos usando um pacote computacional simbólico, desenvolvido por Andrews, Paule e Riese, que implementa o cálculo Omega no Mathematica.

Palavras-chave: Núcleo, Lema de Farkas, Base de Gröbner, Jogos de Votação com Peso Múltiplos, Índice de Poder de Banzhaf, Análise de Partição.

Abstract

In this work, we give a new algebraic necessary and sufficient condition for the non-emptiness of the core of cooperative games. Our approach is based on non-linear algebra and comprises the use of a version of Farkas Lemma which certifies the existence of the core by a quadratic system of polynomial equations along with a Gröbner basis of the ideal associated with the aforementioned system. To show the usefulness of the approach introduced here, we show that abstract market games with four or fewer players have non-empty core. We also construct a generalized generating function to describe alliance of Multiple Weighted Voting Games in the sense of Felsenthal and Machover including restrictions in coalition formation. Our main technical tool comprises the Omega calculus; that is, an operator approach to describe solutions of linear diophantine systems via generating functions. Our work generalizes and unifies the work of Felsenthal and Machover and Neto and it is advantageous from the point of view of computations. Indeed, this work opens the way to compute alliance in MWVG's using a symbolic computational package, developed by Andrews, Paule, and Riese, that implements the Omega calculus in Mathematica.

Keywords: Core, Farkas Lemma, Gröbner basis, Multiple Weighted Voting Games, Banzhaf power index, partition analysis.

Lista de abreviaturas e siglas

AMP	Análise de Partição de MacMahon
IP	Índice de Poder
JVP	Jogos de Votação com Peso
TE	Teoria da Eliminação
TJ	Teoria dos Jogos
TU	Utilidade transferível
MWVG	Jogos de Votação com Peso Múltiplos

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	JOGOS COOPERATIVOS	4
2.1	Definição de jogos de coalizão	6
2.1.1	Propriedades dos jogos cooperativos	9
2.2	Exemplos de jogos cooperativos	13
2.2.1	Jogos de Mercado Abstrato	13
2.2.2	Jogos de Votação com Peso	21
2.2.2.1	Jogos de Votação com Peso Múltiplos	23
2.3	Soluções de jogos cooperativos	24
2.3.1	Núcleo	24
2.3.1.1	Núcleo de Jogos de Mercado Abstrato	30
2.3.2	Índices de Poder	32
2.3.2.1	Índice de Poder de Banzhaf	32
2.3.2.2	Índices de Poder de Banzhaf e Jogos de Votação com Peso	34
2.3.2.2.1	Alianças em Jogos de Votação com Peso	35
3	INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS MATEMÁTICOS	39
3.1	Álgebra não-linear e as Bases de Gröbner	39
3.1.1	Geometria Algébrica	40
3.1.2	Divisão de Polinômios Multivariados	43
3.1.2.1	Algoritmo de Divisão em $k[x_1, \dots, x_n]$	45
3.1.3	Bases de Gröbner	47
3.1.3.1	Ideal Monomial e o Lema de Dickson	48
3.1.3.2	Teorema da Base de Hilbert e a Teoria das Bases de Gröbner	51
3.1.3.3	Propriedades das Bases de Gröbner	52
3.1.4	Algoritmo de Buchberger	53
3.1.5	Teoria da Eliminação	57
3.2	Lema de Farkas	58
3.3	Análise de Partições de MacMahon	60
3.3.1	Função geratriz	60
3.3.2	Análise de Partições de MacMahon e o operador Omega	61
4	APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA NÃO-LINEAR EM JOGOS DE MERCADO ABSTRATO	67

5	ALIANÇA EM MWVG COM RESTRIÇÃO NA FORMAÇÃO DE COALIZÃO E ANÁLISE DE PARTIÇÃO DE MACMAHON	71
6	CONCLUSÃO	76
	Referências	77

1 Introdução

O campo conhecido como teoria dos jogos (TJ) surgiu no século XX quando a lógica dos jogos começou a ser aplicada em problemas reais que envolviam o uso de estratégia, tática e cooperação. Seus fundamentos foram estabelecidos no livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado em 1944 pelo matemático John von Neumann e pelo economista Oskar Morgenstern. A teoria foi desenvolvida extensivamente desde então e hoje tem aplicações em uma ampla gama de campos, tais como: economia, redes de comunicação, ciências políticas, estratégias militares e biologia. Souza, Li e Garcia (2018) apontam que a teoria dos jogos pode ser definida como a teoria de modelos matemáticos que tem por objetivo avaliar a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito ou cooperação. A aplicabilidade da teoria dos jogos se deve ao fato de ser uma ferramenta matemática que pode ser usada em qualquer situação de tomada de decisão interativa (MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013).

Tradicionalmente, a TJ trata de dois subcampos principais: jogos estratégicos, também chamados de jogos não-cooperativos, e jogos de coalizão, também chamados de jogos cooperativos. De modo geral, um jogo é não-cooperativo se os jogadores escolhem suas estratégias individualmente, tentando obter o melhor resultado para si. Já nos jogos cooperativos, os jogadores podem cooperar entre si em uma estratégia conjunta. Dessa forma, podemos dizer que em um jogo cooperativo, o foco está nas recompensas e coalizões, e não nas estratégias.

De acordo com Algaba et al. (2019), jogos cooperativos com utilidade transferível são adequados para modelar situações nas quais a cooperação de vários agentes gera algum resultado quantitativo (positivo ou não), e os jogadores participantes precisam encontrar uma alocação estável ou justa desse resultado entre eles. Sendo assim, uma das principais preocupações da teoria dos jogos é tentar entender quais serão os resultados de um jogo (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012). Uma solução de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado do jogo. Existem vários conceitos diferentes de solução. Na teoria dos jogos não-cooperativos, os conceitos mais comuns são a dominância e o equilíbrio de Nash. Já na teoria dos jogos cooperativos, temos os índices de poder e o núcleo.

Segundo Yan, Friedman e Munro (2016), o conceito de núcleo é geralmente considerado como a contribuição mais importante para a economia feita pela teoria dos jogos cooperativos. O núcleo permite saber se é possível alocar as recompensas da grande coalizão N entre os jogadores, mantendo a coalizão estável, ou seja, se é possível alocar as recompensas de tal forma que nenhuma coalizão menor (subcoalizão de N) tenha incentivo para se formar. O núcleo de um jogo pode ser um conjunto grande, um conjunto pequeno ou pode ser vazio.

Na teoria dos jogos cooperativos, os índices de poder (IP) são usados para medir a influência que um determinado jogador tem no resultado do jogo ou para definir uma forma de

compartilhar os benefícios do jogo entre os jogadores. Os índices de poder mais conhecidos são o índice de Shapley-Shubik e o índice de Banzhaf. Intuitivamente, ambos os índices medem a probabilidade de que um determinado agente seja crítico para uma coalizão em formação, ou seja, que a coalizão se torne vencedora se o jogador passar a fazer parte dela. (ZUCKERMAN et al., 2012)

Os índices de poder são de fundamental importância para um modelo clássico de jogo da Teoria dos Jogos Cooperativos, o chamado Jogo de Votação com Peso (JVP). O JVP é composto por um conjunto de jogadores com pesos e uma dada cota, de modo que uma coalizão vence se a soma dos pesos dos jogadores em uma coalizão atinge ou ultrapassa a cota. Fatima, Wooldridge e Jennings (2012) destacam que os JVP são amplamente utilizados na prática. Por exemplo, o sistema de votação no Reino Unido é um jogo de votação com peso, assim como o sistema de votação na União Europeia.

Apesar dos pesos nos JVP se destinarem a modelar a importância relativa dos jogadores, a capacidade de um agente de influenciar a decisão do grupo nem sempre é diretamente proporcional ao seu peso. Assim, para medir o poder, em vez de usar pesos dos agentes, normalmente se emprega os índices de poder. (ZUCKERMAN et al., 2012)

Em muitos esquemas de votação da vida real, várias rodadas de votação entram em jogo e uma extensão dos JVP para essa situação requer a introdução dos chamados Jogos de Votação com Peso Múltiplos (*Multiple Weighted Voting Games* - MWVG) (ALGABA et al., 2003; ALONSO-MEIJIDE et al., 2009). Outras características que se mostraram importantes são a inclusão de restrições na formação da coalizão (ALONSO-MEIJIDE et al., 2009; YAKUBA, 2008; HILLER, 2016; RODRÍGUEZ-VEIGA; NOVOA-FLORES; CASAS-MÉNDEZ, 2016; MYERSON, 1977) e o efeito da manipulação em JVP, como, por exemplo, as alianças (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002).

Um dos maiores problemas em relação aos IP na teoria dos jogos cooperativos é a disponibilidade de métodos eficientes para sua computação. A fim de usar o índice de Banzhaf para medir o poder dos agentes em jogos de votação com peso, precisaríamos de um algoritmo eficiente para calcular esse índice. No entanto, calcular o índice de Banzhaf é conhecido por ser um problema P-completo. (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012) Resumidamente, os problemas P-completos são uma classe de problemas que, embora ninguém tenha sido capaz de provar, parecem intratáveis.

Portanto, torna-se inviável calcular o índice quando um grande número de jogadores estão envolvidos. Vários dispositivos foram desenvolvidos para superar esse fato usando métodos exatos ou aproximados. Dentre os métodos exatos existentes, funções geratrizes de análise combinatória têm se mostrado um método eficiente para jogos de tamanho moderado e versátil no sentido de se adaptar a diversos índices de poder (CHESSA, 2014; NETO, 2018) e permitir restrições na formação de coalizões (ALONSO-MEIJIDE et al., 2009; RODRÍGUEZ-VEIGA; NOVOA-FLORES; CASAS-MÉNDEZ, 2016; NETO, 2018).

Este trabalho é parcialmente motivado por um comentário retirado de [Cao, Qin e Yang \(2018\)](#) e citado literalmente aqui: “Pesquisas futuras incluem a descoberta de condições suplementares necessárias e suficientes para que jogos de mercado abstrato em geral possuam núcleos não-vazios e a análise de propriedades estruturais do núcleo”. ([CAO; QIN; YANG, 2018, p. 474](#), tradução nossa)¹ Neste trabalho, apresentamos uma nova condição necessária e suficiente para que o núcleo de jogos cooperativos seja não-vazio utilizando uma abordagem da álgebra não-linear. Em particular, estudamos o núcleo de jogos de mercado abstrato. Nós mostramos, via ferramentas da álgebra não-linear, que jogos de mercado abstrato com quatro ou menos jogadores possuem núcleo não-vazio.

Ainda neste trabalho, construímos uma ponte entre a Análise de Partição de MacMahon (APM) e os Jogos de Votação com Peso Múltiplos. Usando a APM (também conhecida como cálculo Omega) como em ([ANDREWS; PAULE; RIESE, 2001](#)), construímos uma função geratriz generalizada para calcular a aliança em MWVG que fornece como casos especiais os principais resultados de ([FELSENTHAL; MACHOVER, 2002](#)) e algumas das funções geratrizes de ([NETO, 2018](#)). Em nossa estrutura, múltiplas restrições na formação de coalizões podem ser facilmente tratadas e, dessa forma, podemos incluir outra característica de interesse geral, ou seja, restrições na formação de coalizões como em ([ALONSO-MEIJIDE et al., 2009; YAKUBA, 2008; HILLER, 2016; RODRÍGUEZ-VEIGA; NOVOA-FLORES; CASAS-MÉNDEZ, 2016; NETO, 2018; ALONSO-MEIJIDE; BOWLES, 2005](#)). Mais precisamente, generalizamos alguns dos resultados de ([FELSENTHAL; MACHOVER, 2002](#)) incluindo restrições na formação de coalizões. Nosso trabalho, portanto, generaliza e unifica trabalhos anteriores ([FELSENTHAL; MACHOVER, 2002; NETO, 2018](#)).

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 são apresentados conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos Cooperativos, a definição de duas classes de jogos de interesse para a presente pesquisa - Jogos de Mercado Abstrato e Jogos de Votação com Peso - e conceitos de solução para jogos cooperativos. No Capítulo 3, revisamos o contexto matemático básico necessário para este trabalho: definições de álgebra não-linear e o método de Análise de Partição de MacMahon. Baseados nos capítulos 2 e 3, fornecemos, no Capítulo 4, uma condição necessária e suficiente para que o núcleo de um jogo de mercado abstrato seja não-vazio. No Capítulo 5, construímos uma função geratriz generalizada que fornece como casos especiais os principais resultados de ([FELSENTHAL; MACHOVER, 2002](#)) para MWVG e algumas das funções geratrizes consideradas em ([NETO, 2018](#)). Este trabalho finaliza no Capítulo 6 com algumas observações finais.

¹ “Future research includes finding necessary and sufficient supplemental conditions for general abstract market games to possess non-empty cores, and analyzing structural properties of the core”.

2 Jogos Cooperativos

No século XX, com o objetivo de analisar as interações políticas e econômicas, matemáticos e economistas estabeleceram as bases conceituais para o campo conhecido como Teoria dos Jogos. Inicialmente, os teóricos se interessaram por jogos estritamente competitivos, típicos do contexto de guerras, nos quais não havia possibilidade de cooperação entre os agentes. [Peters \(2015\)](#) destaca que:

a teoria dos jogos estuda situações de competição e cooperação entre as várias partes envolvidas, usando métodos matemáticos. Esta é uma definição ampla, mas é consistente com o grande número de aplicações. Essas aplicações variam de questões estratégicas na guerra à compreensão da competição econômica, de problemas econômicos ou sociais de distribuição justa ao comportamento de animais em situações competitivas, de jogos de salão a sistemas de votação política - e esta lista certamente não é exaustiva. ([PETERS, 2015](#), p.1)

O elemento básico em um jogo é o conjunto de *jogadores* que dele participam. Nos jogos não-cooperativos, cada jogador tem um conjunto de estratégias e um conjunto de preferências sobre os possíveis resultados do jogo. Os jogos estratégicos são classificados em: (i) simétricos e assimétricos; (ii) simultâneos e sequenciais e (iii) de informação perfeita e informação imperfeita. Em relação à representação, eles podem ser descritos na forma normal (matricial) ou na forma extensiva. O jogo do Dilema do Prisioneiro é um dos mais famosos na teoria dos jogos não-cooperativos. Nesse jogo, dois prisioneiros enfrentam o seguinte dilema: ambos irão cooperar para minimizar a pena, ou um dos presos, confiando na cooperação do outro, o trairá para ganhar a liberdade? ([MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013](#))

O economista John Charles Harsanyi introduziu os jogos cooperativos em 1966. Antes da contribuição de [Harsanyi \(1966\)](#), os teóricos consideravam os jogos cooperativos um tipo de jogo não-cooperativo, porque a forma extensiva de um jogo permite mecanismos de negociação e aplicação. Assim como na teoria dos jogos estratégicos, na teoria dos jogos cooperativos, um jogador pode ser uma pessoa, corporação, nação e assim por diante.

De maneira geral, podemos dizer que a teoria dos jogos estratégicos pressupõe que os jogadores ajam de forma independente, com a questão central sendo se um jogador pode ganhar com um desvio unilateral. Já a teoria dos jogos cooperativos pressupõe que os jogadores possam formar coalizões, com a questão central sendo se um conjunto de jogadores pode encontrar uma alocação dos pagamentos disponíveis à coalizão que permitiria que todos ganhassem formando a coalizão. ([SAMUELSON, 2016](#))

De acordo com [Geçkil e Anderson \(2010\)](#), depois que a teoria dos jogos foi estabelecida por grandes matemáticos e economistas, o último quarto do século XX e o início dos anos 2000 testemunharam uma dramática evolução do campo. A maioria dos economistas que se especializaram em teoria dos jogos se interessou mais por questões da teoria pura do que por

aplicações. No entanto, em outros campos, como psicologia, biologia, genética e política, os estudiosos usaram teoria dos jogos e abordagens teóricas dos jogos para os problemas em seus próprios campos.

A TJ tem sido aplicada para análise e solução de problemas em diversas áreas. Pesquisas recentes, como os trabalhos de [Mei et al. \(2019\)](#), [Sarjiya, Budi e Hadi \(2019\)](#), [Yi et al. \(2019\)](#) e [Faria et al. \(2018\)](#), mostram a aplicação da TJ a fim de analisar estratégias e promover melhoria da eficiência do setor energético. Já [Sohrabi e Azgomi \(2019\)](#) apresentam abordagens de otimização baseadas em TJ para Sistemas Baseados em Conhecimento (*Knowledge-based System*). Em um contexto mais teórico, [Lackes, Siepermann e Vetter \(2020\)](#) fazem uma análise baseada em jogos sobre o que leva os tomadores de decisão a seguir ou ignorar as ferramentas de previsão. No trabalho de [Zutshi et al. \(2018\)](#) tem-se um exemplo do planejamento de estratégias de *marketing* digital por meio da TJ. No campo da Ciência da Informação, [Bu et al. \(2019\)](#) utilizaram a TJ para prever o surgimento de relacionamentos futuros (*Link Prediction*) entre os nós em redes temporais do mundo real. A teoria não-cooperativa de jogos é utilizada por [Li et al. \(2019\)](#) para modelar a interação entre um motorista humano e um controlador de seguimento de trajetória. Na área da saúde, [Mendonça et al. \(2019\)](#), apresentam o uso de TJ para modelar a consulta de transplante de fígado de pacientes que sofrem de doença hepática alcoólica. Outras aplicações da TJ podem ser vistas nos trabalhos de [Nagurney, Salarpour e Daniele \(2019\)](#), [Chavoshlou, Khamseh e Naderi \(2019\)](#) e [Wang et al. \(2019\)](#), os quais abordam problemas de logística e cadeia de suprimentos via TJ.

Na teoria dos jogos cooperativos, tratando de conceitos de solução, temos o trabalho de [Neto \(2018\)](#), que estuda uma importante classe de jogos cooperativos, os jogos de votação com peso, e introduz uma nova função geradora generalizada que fornece, como casos especiais, extensões das funções geradoras dos seguintes índices de poder: Banzhaf, Shapley-Shubik, Banzhaf-Owen, Banzhaf para coalizão simétrica e Owen. [Stuart \(2019\)](#) fornece condições necessárias e suficientes para um núcleo não-vazio em jogos de atribuição do tipo muitos-para-um. O problema da cooperação em jogos repetidos e com vários estágios é estudado por [Petrosyan \(2019\)](#). Nesse trabalho, o autor introduz um novo conceito de solução baseado em soluções de jogos multiestágios. Com base em um dos principais problemas da teoria dos jogos cooperativos, a saber: a divisão “justa” do valor da coalizão entre os jogadores, [Radzik e Driessen \(2016\)](#) fornecem condições necessárias e suficientes para valores eficientes, lineares e simétricos satisfazerem alguma versão generalizada da propriedade clássica de jogador nulo. Também nessa linha, o estudo de [Estévez-Fernández et al. \(2017\)](#) apresenta uma análise de outro conceito de solução para jogos cooperativos, o 1-núcleo. Os autores destacam que ao contrário do núcleo, o 1-núcleo pode ser calculado em tempo polinomial. [Albizuri e Vidal-Puga \(2015\)](#) definem e caracterizam uma família de valores para jogos cooperativos nos quais um jogador pode participar de mais de uma coalizão, além disso, fornecem uma generalização do valor de Shapley e do valor de Owen para esse tipo de família.

Em uma perspectiva aplicada, [Gutierrez et al. \(2019\)](#) formulam um modelo teórico de jogo que descreve a cooperação em uma cadeia de suprimentos no caso em que um fornecedor controla um recurso limitado e um conjunto finito de fabricantes precisam adquirir esse recurso. [Hirai, Watanabe e Muto \(2019\)](#) analisam os contratos de licença que resultam de negociações sobre preços de informações sobre tecnologias patenteadas. [Hou et al. \(2018\)](#) apresentam uma análise do valor de Shapley para o jogo de agrupamento de custos aeroportuários no caso específico em que para dois aviões de duas companhias aéreas diferentes, a retirada de uma companhia aérea leva à mesma perda para os aviões da outra. [Roshanaei et al. \(2017\)](#) apresentam uma contribuição dos jogos cooperativos para a área da saúde, especificamente no planejamento e programação colaborativos da sala de operações. [Liu et al. \(2020\)](#) traz um modelo *fuzzy* de jogos cooperativos para alocação espaço-temporal de recursos hídricos. Modelos cooperativos de teoria dos jogos para contratos de arrendamento considerando os efeitos do tempo e do uso na deterioração do equipamento arrendado são apresentados no trabalho de [Hamidi, Liao e Szidarovszky \(2016\)](#).

Portanto, como é possível observar nos parágrafos anteriores, o campo da TJ é de grande relevância e tem uma vasta gama de aplicações. Neste capítulo apresentaremos conceitos e propriedades dos jogos cooperativos que são importantes para o entendimento desta pesquisa.

2.1 Definição de jogos de coalizão

Os jogos cooperativos, também chamados de jogos de coalizão, modelam situações nas quais os jogadores podem cooperar para alcançar seus objetivos. Supõe-se que todo conjunto de agentes possa formar uma coalizão e se comprometer em um acordo vinculativo que lhes proporcione uma certa quantia de lucro (recompensa). A quantia máxima que uma coalizão pode gerar por meio da cooperação é chamada de valor da coalizão. ([MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013](#))

Nesta seção vamos nos concentrar em jogos finitos com utilidade transferível (também chamados de jogos TU²). Tais jogos envolvem um número finito de jogadores. [Roth \(1988\)](#) lista três premissas para um jogo cooperativo ser um jogo TU. Primeiramente, todos os resultados podem ser expressos em algum meio de troca. Em segundo lugar, os jogadores que não são membros da coalizão não precisam ser levados em consideração na avaliação do resultado do jogo. A terceira suposição é que não há custo para fazer cumprir os custos ou acordos de participação nos lucros.

Uma coalizão (S) é simplesmente um subconjunto de jogadores. Por definição, o conjunto vazio e os conjuntos de jogadores individuais também são considerados coalizões. A coalizão que agrupa todos os jogadores é chamada de grande coalizão. A função característica de um jogo cooperativo determina a recompensa (*payoff*) de cada coalizão potencial envolvida no jogo.

Definição 2.1. *Um jogo de coalizão com utilidade transferível é um par $(N; \nu)$ tal que:*

² Do inglês, *games with transferable utility - TU games*.

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ é um conjunto finito de jogadores. Um subconjunto de N é chamado de coalizão.
- $\nu : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que associa todas as coalizões S a um número real $\nu(S)$, satisfazendo $\nu(\emptyset) = 0$. Essa função é chamada função de coalizão ou função característica do jogo.

O número real $\nu(S)$ é chamado de valor da coalizão S . Esse é o valor que os jogadores que estão na coalizão S podem receber como resultado do jogo, independente das ações tomadas pelos jogadores que não fazem parte de S . A coleção de todas as coalizões é denotada por 2^N , pois, obviamente, para um conjunto de N jogadores podemos formar $2^{|N|} = 2^n$ coalizões, incluindo a coalizão vazia.

Note que a função característica não determina o quanto cada jogador da coalizão ganha, apenas diz o quanto o grupo ganha. Chalkiadakis, Elkind e Wooldridge (2012) destacam que a questão de como dividir o valor de coalizão entre os jogadores é um tópico de pesquisa fundamental na teoria dos jogos cooperativos.

Para exemplificar um jogo cooperativo, apresentamos o clássico jogo de luvas com 3 jogadores. Este jogo é chamado de jogo de luvas porque corresponde a uma situação em que os jogadores 1 e 2 têm, cada um, apenas uma luva destra, o jogador 3 tem apenas uma luva canhota e o valor de uma coalizão é igual ao número de pares de luvas complementares que pode formar. Portanto, o jogo das luvas é um jogo de mercado em que os proprietários das luvas esquerdas formam um lado do mercado e os proprietários das luvas direitas o outro.

Exemplo 2.1. *Suponha que haja três jogadores, 1, 2 e 3. Cada jogador 1 e 2 possui uma luva direita, enquanto o jogador 3 tem uma luva esquerda. Um par de luvas vale 1. Os jogadores cooperam para gerar lucro. A função característica desse jogo é dada por*

$$\nu(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } S = \{1\}, S = \{2\}, S = \{3\} \text{ ou } S = \{1, 2\}; \\ 1, & \text{se } S = \{1, 3\}, S = \{2, 3\} \text{ ou } S = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Apartsin e Holzman (2003) explicam que, em termos econômicos, o modelo do mercado de luvas descreve a complementaridade perfeita no consumo dos bens. Se as luvas são pensadas como insumos na produção de um bem de consumo, esse modelo corresponde à produção que requer proporções fixas dos vários insumos.

A Tabela 1, a seguir, apresenta várias outras situações que podem ser analisadas como jogos cooperativos.

Tabela 1 – Jogos Cooperativos

Jogos	Descrição
-------	-----------

Jogo de lucro	São aqueles em que os jogadores lucram de acordo com as coalizões que formam.
Jogos de custo	São semelhantes aos jogos de lucro, mas o valor de uma coalizão em um jogo de custo representa o preço que os membros da coalizão devem pagar se a coalizão se formar.
Jogo de compartilhamento de custo	Modelam situações em que o custo de um serviço deve ser dividido entre diferentes usuários, sendo que diferentes usuários precisam de quantidades diferentes desse serviço. Por exemplo, compartilhamento de custos de manutenção dos aeroportos e custos de estoques de peças compartilhados (SOUZA; AFLALO; YONEYAMA, 2018).
Jogo de falência	Um problema de falência é dado por $n + 1$ números não negativos $[E; d_1, d_2, \dots, d_n]$. Aqui E representa os ativos de uma pessoa ou empresa falida e $N = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de credores, com cada credor com uma dívida d_i . Supõe-se que $E < \sum_{i=1}^n d_i$ (caso contrário, todo credor poderá ser pago integralmente e não haverá nenhum problema de falência a ser considerado).
Jogos de árvore abrangente	São jogos nos quais o valor de cada coalizão é dado pelo custo da árvore abrangente de custo mínimo que conecta todos os membros da coalizão à fonte. Um sistema de árvore abrangente pode descrever várias redes, como um sistema de rede rodoviária que conecta cidades ou um sistema de rede de computadores. Todo sistema de árvore abrangente por ser associado a um jogo.
Jogos de fluxo	Um jogo de fluxo é dado por um grafo direcionado no qual cada elo tem uma capacidade máxima e é controlado por um dos jogadores. O grafo contém dois vértices distintos, uma fonte e uma foz, e o objetivo dos jogadores é direcionar o maior fluxo possível da fonte para a foz.
Jogos de ápice	São uma família especial de jogos simples. Para um jogo de ápice, existem dois tipos de coalizões vencedoras: o primeiro tipo contém o chamado jogador ápice e pelo menos um outro jogador. A única coalizão vencedora sem o jogador ápice é uma coalizão de todos os outros jogadores, exceto o jogador ápice.

Jogos de sequencia-
mento

São jogos nos quais uma fila de jogadores precisa ser ordenada em uma sequência específica: cada jogador prefere ser colocado no início da fila, em vez de ser colocado no final da fila. Em geral, uma situação de sequência é dada por uma ordem inicial de jogadores, a quantidade de tempo que precisa ser dedicada por cada jogador e os custos de cada jogador até a conclusão do trabalho. Os custos totais de um jogador são apresentados por um coeficiente de custo e dependem linearmente do tempo de conclusão. Essa situação de sequenciamento resulta em um problema de otimização, pois é preferível colocar os jogadores na ordem que minimiza os custos totais.(HOGWEIJ, 2017)

2.1.1 Propriedades dos jogos cooperativos

As funções de coalizão podem satisfazer propriedades que têm implicações para as soluções do jogo. A seguir, algumas dessas propriedades serão apresentadas.

Uma propriedade de muitos jogos é a super-aditividade: em jogos super-aditivos, é sempre lucrativo que dois grupos de jogadores somem forças.

Definição 2.2. *Um jogo de coalizão $(N; \nu)$ é super-aditivo se, para qualquer par de coalizões disjuntas S e T ,*

$$\nu(S) + \nu(T) \leq \nu(S \cup T). \quad (2.1)$$

Assim, um jogo super-aditivo é aquele em que duas coalizões que escolhem se unir podem obter pelo menos o que obteriam se, em vez disso, jogassem separadamente. A seguir, apresentamos um exemplo de jogo super-aditivo com 3 jogadores.

Exemplo 2.2. *Seja $(N; \nu)$ um jogo de coalizão onde $N = \{1, 2, 3\}$, e a função de coalizão dada por*

$$\nu(S) = \begin{cases} 6, & \text{se } S = \{1\} \\ 12, & \text{se } S = \{2\} \\ 42, & \text{se } S = \{3\} \\ 18, & \text{se } S = \{1, 2\} \\ 48, & \text{se } S = \{1, 3\} \\ 55, & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 80, & \text{se } S = N. \end{cases}$$

Se $S = \{1\}$ e $T = \{2, 3\}$, temos

$$\nu(1) + \nu(2, 3) \leq \nu(1, 2, 3) = \nu(S \cup T).$$

Se $S = \{1\}$ e $T = \{2\}$, temos

$$18 = \nu(1) + \nu(2) \leq \nu(1, 2) = 18.$$

Para todas as demais coalizões $S, T \subseteq N$, com $S \cap T \neq \emptyset$, a condição (2.1) é satisfeita. Portanto, o jogo é super-aditivo.

Em muitos casos, ao adicionar um jogador a uma coalizão existente, a produtividade geral dessa coalizão só pode aumentar. Jogos com essa propriedade são chamados de monótonos.

Definição 2.3. Um jogo de função característica $(N; \nu)$ é considerado monótono se satisfizer

$$\nu(S) \leq \nu(T) \tag{2.2}$$

para cada par de coalizões $S, T \subseteq N$ tal que $S \subseteq T$

O jogo representado no exemplo a seguir, retirado de Chalkiadakis, Elkind e Wooldridge (2012), é monótono.

Exemplo 2.3. Um país fictício X tem um parlamento de 101 membros, onde cada representante pertence a um dos quatro partidos: Liberal (L), Moderado (M), Conservador (C) ou Verde (G). O Partido Liberal tem 40 deputados, o Partido Moderado tem 22 deputados, o Partido Conservador tem 30 deputados e o Partido Verde tem 9 deputados. O parlamento precisa decidir como alocar US\$1 bilhão de gastos discricionários, e cada partido tem sua própria maneira de usar esse dinheiro. A decisão é tomada por maioria simples de votos, e presumimos que todos os representantes votem de acordo com as linhas partidárias. Os partidos podem formar coalizões; uma coalizão tem valor de US\$1 bilhão se conseguir vencer a votação do orçamento independentemente do que os outros partidos façam, e valor 0 caso contrário. Esta situação pode ser modelada como um jogo de função característica de 4 jogadores, onde o conjunto de jogadores é $N = \{L, M, C, G\}$ e a função característica ν é dada por

$$\nu(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } |S| \leq 1 \text{ ou } |S| = 2 \text{ e } G \in S \\ 10^9, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Jogos de coalizão onde o valor de uma coalizão depende da partição de N que está em vigor a qualquer momento durante o jogo têm recebido crescente atenção. Em tais jogos, ao contrário da forma característica, o valor de uma coalizão S terá uma forte dependência de como os jogadores em $N \setminus S$ estão estruturados. Nestes jogos, dada uma estrutura de coalizão \mathcal{B} , definida como uma partição de N , ou seja, uma coleção de coalizões B_1, B_2, \dots, B_K , tais que $\forall i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$, e $\cup_{i=1}^K B_i = N$, o valor de uma coalizão $S \in \mathcal{B}$ é definido como $\nu(S, \mathcal{B})$.

Definição 2.4. Seja B um conjunto não-vazio. Uma partição de B é uma coleção B_1, B_2, \dots, B_K de subconjuntos disjuntos e não-vazios de B cuja união é B .

Definição 2.5. Uma estrutura de coalizão é uma partição \mathcal{B} do conjunto de jogadores N .

Exemplo 2.4. $\mathcal{B}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ são estruturas de coalizão para $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

Os termos “estrutura de coalizão” e “partição” serão usados alternadamente.

Definição 2.6. Um jogo de coalizão $(N; \nu)$ é super-aditivo em N se

$$\nu(N) \geq \sum_{1 \leq l \leq m} \nu(S_l), \quad (2.3)$$

sempre que $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ forma uma partição de N .

Exemplo 2.5. O jogo do exemplo (2.2) também é super-aditivo em N . Note que as partições de $N = \{1, 2, 3\}$ são $\mathcal{B}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\mathcal{B}_4 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\mathcal{B}_5 = \{\{1, 2, 3\}\}$. A inequação (2.3) é satisfeita para todas as partições de N :

$$\begin{aligned} 80 &= \nu(1, 2, 3) \geq \nu(1) + \nu(2) + \nu(3) = 60 \\ 80 &= \nu(1, 2, 3) \geq \nu(1) + \nu(2, 3) = 61 \\ 80 &= \nu(1, 2, 3) \geq \nu(2) + \nu(1, 3) = 60 \\ 80 &= \nu(1, 2, 3) \geq \nu(3) + \nu(1, 2) = 60. \end{aligned}$$

Outra propriedade dos jogos cooperativos diz respeito à interferência entre as coalizões. Quando as coalizões nunca podem afetar umas as outras, de forma positiva ou negativa, dizemos que o jogo é aditivo (ou inessencial).

Definição 2.7. Um jogo de coalizão $(N; \nu)$ é inessencial (ou aditivo) se

$$\nu(S) = \sum_{i \in S} \nu(i) \quad (2.4)$$

para cada coalizão não vazia S .

Do ponto de vista da TJ, os jogos inessenciais são triviais, ou seja, não há tendência de os jogadores formarem coalizões pois a cooperação entre os agentes não resultará em uma maior recompensa total.

Exemplo 2.6. Considere um jogo com $N = \{1, 2, 3\}$ e a seguinte função de coalizão:

$$\nu(S) = \begin{cases} 10, & \text{se } S = \{1\}, S = \{2\} \text{ ou } S = \{3\} \\ 20, & \text{se } S = \{1, 2\}, S = \{1, 3\} \text{ ou } S = \{2, 3\} \\ 30, & \text{se } S = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Esse jogo é inessencial, visto que cada jogador recebe uma recompensa e a recompensa para uma coalizão é apenas a soma das recompensas dos jogadores nessa coalizão.

Dados dois jogos $(N; \nu)$ e $(N; w)$, com suas respectivas funções características e com o mesmo número de jogadores, é possível saber se esses jogos podem ser os mesmos em sua essência. Por exemplo, caso mudemos apenas a unidade da recompensa de um jogo para o outro, o jogo ainda é o mesmo. Estaremos apenas multiplicando uma constante positiva à função característica. Esses são os chamados jogos estrategicamente equivalentes:

Definição 2.8. Um jogo de coalizão $(N; w)$ é estrategicamente equivalente ao jogo $(N; \nu)$ se existir um número positivo a , e um vetor $b \in \mathbb{R}^N$, tais que para qualquer coalizão $S \subseteq N$:

$$w(S) = a\nu(S) + \sum_{i \in S} b_i = a\nu(S) + b(S).$$

Intuitivamente, a equivalência estratégica significa que a dinâmica entre os jogadores seria idêntica nos dois jogos. É esta propriedade da equivalência que nos permite normalizar um jogo cooperativo.

Exemplo 2.7. Um jogo de coalizão $(N; \nu)$ é chamado de 0-1 normalizado se $\nu(i) = 0$ para todo $i \in N$ e $\nu(N) = 1$.

Considere o jogo $(N; \nu)$ com a seguinte função característica:

$$\nu(S) = \begin{cases} 3, & \text{se } S = \{1\}, \\ 6, & \text{se } S = \{2\}, \\ 8, & \text{se } S = \{3\}, \\ 12, & \text{se } S = \{1, 2\}, \\ 15, & \text{se } S = \{1, 3\}, \\ 18, & \text{se } S = \{2, 3\}, \\ 80, & \text{se } S = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Se tomarmos $a = 1/63$ e $b = \{-3/63, -6/63, -8/63\}$, o jogo $(N; \nu)$ é estrategicamente equivalente ao jogo 0-1 normalizado $(N; w)$ com a seguinte função característica:

$$w(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } S = \{1\}, S = \{2\} \text{ ou } S = \{3\}, \\ \frac{3}{63}, & \text{se } S = \{1, 2\}, \\ \frac{4}{63}, & \text{se } S = \{1, 3\}, \\ \frac{4}{63}, & \text{se } S = \{2, 3\}, \\ 1, & \text{se } S = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

2.2 Exemplos de jogos cooperativos

Nessa seção apresentamos a definição de duas classes de jogos cooperativos de interesse para o presente trabalho: Jogos de Mercado Abstrato e Jogos de Votação com Peso.

2.2.1 Jogos de Mercado Abstrato

Em sua investigação sobre a relação entre jogos cooperativos e mercados, [Shapley \(1955\)](#) considerou uma classe mais rica de jogos, a qual ele chamou de jogos de mercado abstrato ([CAO; QIN; YANG, 2018](#)).

Os jogos de mercado geralmente são analisados sob o ponto de vista do equilíbrio, i.e. como se fossem jogos não cooperativos, entretanto eles podem ser abordados sob a perspectiva dos jogos cooperativos.

Definição 2.9. *Um mercado é dado por um vetor $(N, L, (a_i, u_i)_{i \in N})$ onde:*

- $N = \{1, 2, \dots, N\}$ é o conjunto de produtores;
- $L = \{1, 2, \dots, L\}$ é o conjunto de mercadorias;
- Para cada $i \in N$, $a_i \in \mathbb{R}_+^L$ é a renda inicial do produtor i ;
- Para cada $i \in N$, $u_i \in \mathbb{R}_+^L \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de produção do produtor i .

Definição 2.10. *Uma alocação para uma coalizão S é uma coleção de pacotes de mercadorias $(x_i)_{i \in S}$, onde $x_i \in \mathbb{R}_+^L$ para cada produtor $i \in N$, satisfazendo $x(S) = a(S)$. Assim, uma alocação é uma redistribuição das mercadorias disponíveis para os membros de S em suas rendas iniciais. Denote por X^S o conjunto de alocações para a coalizão S :*

$$X^S := \{(x_i)_{i \in S} : x_i \in \mathbb{R}_+^L \quad \forall i \in S, x(S) = a(S)\} \subseteq \mathbb{R}_+^{S \times L}. \quad (2.5)$$

Todo mercado pode ser associado a um jogo de coalizão, no qual o conjunto de jogadores é o conjunto de produtores $N = 1, 2, \dots, n$ e o valor de cada coalizão não-vazia $S \subseteq N$ é

$$\nu(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S} u_i(x_i) : x = (x_i)_{i \in S} \in X^S \right\}. \quad (2.6)$$

Portanto, o valor da coalizão S é a soma máxima de dinheiro que seus membros podem produzir se trocarem mercadorias entre si. O jogo de coalizão $(N; \nu)$ assim definido é o jogo de mercado derivado do mercado $(N, L, (a_i, u_i)_{i \in N})$.

O exemplo 2.8 mostra um jogo de mercado retirado de ([MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013](#), p. 704).

Exemplo 2.8. *Considere o seguinte mercado:*

- Três produtores: $N = \{1, 2, 3\}$.
- Duas mercadorias: $L = \{1, 2\}$.
- Rendas iniciais dos produtores: $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 1)$, $a_3 = (2, 2)$.
- Função de produção de cada produtor: $u_1(x_1) = x_{1,1} + x_{1,2}$, $u_2(x_2) = x_{2,1} + 2x_{2,2}$, $u_3(x_3) = \sqrt{x_{3,1}} + \sqrt{x_{3,2}}$.

A seguir, derivamos o jogo correspondente ao mercado acima descrito. Se uma coalizão contiver apenas um produtor, $S = \{i\}$, o único pacote em X^S é a_i , a renda inicial do produtor i . Portanto,

$$\nu(1) = 1, \nu(2) = 2, \nu(3) = 2\sqrt{2}.$$

Agora, vamos computar $\nu(1, 2, 3)$. Observe que $a_1 + a_2 + a_3 = (3, 3)$. Cada unidade da mercadoria 1 contribui igualmente para as funções de produção dos produtores 1 e 2, e toda unidade da mercadoria 2 contribui para a função de produção do produtor 2 duas vezes mais do que contribui para o produtor 1. Portanto, nenhuma perda de produção ocorre se nada for dado ao produtor 1; toda quantidade de mercadorias que damos a ele pode ser dada ao produtor 2 sem diminuir a produção total. Se, portanto, definirmos o pacote do produtor 1 como $x_1 = (0, 0)$ e denotarmos por $x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2})$ o pacote para o produtor 2 e por $x_3 = (3 - x_{2,1}, 3 - x_{2,2})$ o pacote para o produtor 3, então

$$\nu(1, 2, 3) = \max \left\{ x_{2,1} + 2x_{2,2} + \sqrt{3 - x_{2,1}} + \sqrt{3 - x_{2,2}} : 0 \leq x_{2,1} \leq 3, 0 \leq x_{2,2} \leq 3 \right\}$$

Ao diferenciar a função $x_{2,1} + 2x_{2,2} + \sqrt{3 - x_{2,1}} + \sqrt{3 - x_{2,2}}$ e igualar suas derivadas direcionais a 0, deduzimos que a alocação ótima é

$$x_1 = (0, 0), x_2 = \left(2\frac{3}{4}, 2\frac{15}{16}\right), x_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

e que o valor da grande coalizão $\{1, 2, 3\}$ é o valor do máximo, que é $\nu(1, 2, 3) = 9\frac{5}{8}$. Computando $\nu(1, 2)$, $\nu(1, 3)$ e $\nu(2, 3)$, vemos que a função de coalizão do jogo de mercado derivado do mercado neste exemplo é

$$\begin{aligned} \nu(1) &= 1, & \nu(2) &= 2, & \nu(3) &= 2\sqrt{2}, & \nu(1, 2) &= 3, \\ \nu(1, 3) &= 5\frac{1}{2}, & \nu(2, 3) &= 8\frac{3}{8}, & \nu(1, 2, 3) &= 9\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Qualquer jogo que possa ser gerado dessa maneira a partir de algum mercado é chamado de jogo de mercado. Sendo assim, em termos gerais, jogos de mercado são jogos de coalizão derivados de um mercado em que as funções de produção são côncavas e contínuas. Em seu estudo de jogos de mercado com utilidade transferível, Shapley e Shubik (SHAPLEY; SHUBIK, 1969) introduziram a definição de jogos totalmente balanceados. Um jogo de coalizão com utilidade transferível é denominado totalmente balanceado sempre que cada um de seus sub-jogos é balanceado. Portanto, as duas famílias de jogos de coalizão coincidem, ou seja, um jogo de coalizão é totalmente balanceado se, e somente se, for um jogo de mercado. (KROUPA; STUDENY, 2019)

Definição 2.11. *Seja $(N; \nu)$ um jogo de coalizão e seja $S \subseteq N$ um conjunto não-vazio de jogadores. O sub-jogo $(S; \nu)$ é o jogo de coalizão onde:*

- *O conjunto de jogadores é S .*
- *A função de coalizão é a função ν restrita às coalizões contidas em S .*

Os jogos de mercado abstrato podem ser vistos como uma extensão do modelo do jogo de atribuição. Segundo [Shapley e Shubik \(1972\)](#), o jogo de atribuição é um modelo para um mercado bilateral, i.e., um mercado formado por dois conjuntos disjuntos de agentes, aqui denominados A e B , que podem representar compradores e vendedores, por exemplo. Em tal modelo, os agentes podem negociar uma mercadoria (por exemplo, casas, carros, etc.) e realizar transferências monetárias. Essas mercadorias não são exatamente iguais, portanto, um comprador pode ter avaliações diferentes para mercadorias pertencentes a diferentes vendedores.

Esse tipo de jogo é o ponto de vista cooperativo de um mercado bilateral. Nesse mercado, agentes de um lado do mercado são pareados com os outros agentes do outro lado do mercado. Como o único tipo de correspondência permitida é um para um, um comprador só pode comprar de um vendedor e cada vendedor pode vender para apenas um comprador. Os compradores não podem negociar entre si, uma vez que não possuem uma mercadoria e, da mesma maneira, os vendedores não podem negociar entre si.

Definição 2.12. *Um mercado de atribuição $(A, B; V)$ consiste em*

- *A , um conjunto finito de compradores;*
- *B , um conjunto finito de vendedores (A e B são disjuntos);*
- *Uma matriz com entradas não-negativas $M = (m_{ij})_{i \in A, j \in B}$ que representa o lucro potencial obtido por cada par $(i, j) \in A \times B$.*

[Shapley e Shubik \(1972\)](#) associaram qualquer mercado de atribuição a um jogo em forma de coalizão $(A \cup B, \nu_V)$ denominado *jogo de atribuição*. Sejam A e B dois conjuntos finitos e disjuntos. Para cada par $(i; j) \in A \times B$ o número $a_{ij} \geq 0$ é interpretado como o valor da atribuição entre i e j . O conjunto de jogadores N é o conjunto $A \cup B$. Para cada coalizão $S \subseteq N$, o valor $\nu(S)$ é o máximo que S pode alcançar fazendo pares entre seus próprios membros. Formalmente, se $S \subseteq A$ ou $S \subseteq B$ então $\nu(S) = 0$, porque nenhum par pode ser formado. Caso contrário, $\nu(S)$ é igual ao valor do seguinte problema de programação de inteira:

$$\max \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} m_{ij} x_{ij} \tag{2.7}$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j \in B} x_{ij} \leq 1_S(i), \quad \forall i \in A \tag{2.8}$$

$$\sum_{i \in A} x_{ij} \leq 1_S(j), \quad \forall j \in B \tag{2.9}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in A, j \in B \tag{2.10}$$

onde $1_S(i) := 1$ se $i \in S$ e igual a zero caso contrário.

Um exemplo de jogo de atribuição é apresentado a seguir.

Exemplo 2.9. (PETERS, 2015) Vladimir (jogador 1), Wanda (jogador 2) e Xavier (jogador 3) possuem, cada um, uma casa que desejam vender. Yolanda (jogador 4) e Zarik (jogador 5) querem comprar uma casa de cada um. Vladimir, Wanda e Xavier avaliam suas casas em 1; 1,5 e 2, respectivamente (cada unidade é de 100.000 euros). Os valores de suas casas para Yolanda e Zarik, respectivamente, são 0,8 e 1,5 para a casa de Vladimir, 2 e 1,2 para a casa de Wanda e 2,2 e 2,3 para a casa de Xavier. Essa situação dá origem a um jogo TU de cinco jogadores, em que o valor de cada coalizão é definido como o excedente máximo que pode ser gerado pela compra e venda dentro da coalizão. Por exemplo, na coalizão $S = \{2, 3, 5\}$ o excedente máximo é gerado se Zarik comprar a casa de Xavier, a saber $2.3 - 2 = 1.3$, que é maior do que $1.2 - 1.5 = 0.3$ que é o resultado se Zarik comprar a casa de Wanda. Cada coalizão pode gerar uma recompensa de pelo menos 0, porque o jogador pode abster-se de negociar. O jogo completo é descrito na Figura 1, onde as coalizões com apenas compradores ou apenas vendedores são deixadas de fora ($S=14$ representa a coalizão $S=\{1,4\}$ e assim sucessivamente). Um jogo como esse é chamado de jogo de atribuição.

Figura 1 – Função de coalizão para o jogo do Exemplo 2.9

S	$v(S)$	S	$v(S)$	S	$v(S)$
14	0	125	0.5	345	0.3
15	0.5	134	0.2	1,234	0.5
24	0.5	135	0.5	1,235	0.5
25	0	145	0.5	1,245	1
34	0.2	234	0.5	1,345	0.7
35	0.3	235	0.3	2,345	0.8
124	0.5	245	0.5	12,345	1

Fonte: Peters (2015)

Nesse exemplo, os números m_{ij} são dados por $m_{ij} = \max\{h_{ij} - c_i, 0\}$, onde h_{ij} é o valor da casa do jogador i para o jogador j e c_i é o valor da casa do jogador i para ele mesmo.

Os jogos de atribuição modelam simples interações de mercado, onde os jogadores pertencem a dois grupos. Consumidores e produtores devem firmar contratos bilaterais exclusivos; para cada parceria possível entre um consumidor e um produtor, há um valor associado que indica o lucro potencial do relacionamento. Esses jogos podem ser considerados um caso especial de jogos de fluxo de rede, mas têm uma estrutura adicional que os torna mais tratáveis. (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012)

Os jogos de atribuição apresentam as seguintes propriedades:

- i. O núcleo de um jogo de atribuição é não-vazio e polarizado.

Shapley e Shubik (1972) mostraram que o núcleo de qualquer jogo de atribuição é sempre não-vazio e polarizado. Isso significa que há um resultado estável que é o mais preferido por todos os agentes de um lado do mercado e, ao mesmo tempo, é o menos preferido por todos os agentes do outro lado do mercado.

- ii. As duas alocações extremas do núcleo são A-ótima, com todos os jogadores de A recebendo suas contribuições marginais para a grande coalizão, e B-ótima, com todos os jogadores em B recebendo suas contribuições marginais para a grande coalizão (DEMANGE, 1982).

- iii. O núcleo de um jogo de atribuição tem uma estrutura reticulada no seguinte sentido (SHAPLEY; SHUBIK, 1972):

$$(x_A \vee y_A, x_B \wedge y_B) \in \mathcal{C}(N; \nu), \forall (x_A, x_B), (y_A, y_B) \in \mathcal{C}(N; \nu). \quad (2.11)$$

e

$$(x_A \wedge y_A, x_B \vee y_B) \in \mathcal{C}(N; \nu), \forall (x_A, x_B), (y_A, y_B) \in \mathcal{C}(N; \nu). \quad (2.12)$$

onde \wedge representa o mínimo em termos de coordenadas e \vee o máximo em termos de coordenadas. Uma consequência dessa estrutura reticulada do núcleo é a existência de dois pontos especiais extremos do núcleo, um para cada lado do mercado. Em um deles, $(x_A \wedge y_A, x_B \vee y_B)$, cada comprador minimiza seu retorno no núcleo, enquanto cada vendedor maximiza seu retorno. No outro, $(x_A \vee y_A, x_B \wedge y_B)$, cada vendedor minimiza seu retorno enquanto cada comprador consegue seu retorno máximo no núcleo. O interessante é que todos os agentes do mesmo lado do mercado, apesar de estarem competindo pelo melhor negócio, obtêm o seu retorno máximo no mesmo elemento do núcleo.

Os jogos de mercado abstrato podem ser vistos como uma extensão do modelo do jogo de atribuição, entre vários outros. Um jogo de mercado abstrato é um jogo de coalizão no qual os jogadores são divididos em dois lados, de modo que dois jogadores são “substitutos” quando pertencem ao mesmo lado e “complementares” quando pertencem a lados diferentes.

O modelo de jogo de mercado abstrato é importante para a teoria dos jogos pelas seguintes razões, de acordo com [Cao, Qin e Yang \(2018\)](#):

- i. O modelo de jogo de mercado abstrato serve como uma estrutura geral para vários modelos importantes, incluindo: (a) o modelo de jogo de atribuição, que é um caso especial do modelo do jogo de mercado abstrato, em que apenas pares de jogadores são coalizões essenciais; (b) o modelo do casamento estável, que pode ser considerado uma contrapartida de utilidade intransferível do modelo de jogo de atribuição; e (c) o modelo do jogo convexo, que também é um caso especial do modelo de jogo de mercado abstrato apenas com jogadores complementares;
- ii. [Shapley \(1955\)](#) foi o primeiro artigo a aplicar a noção de núcleo;
- iii. [Shapley \(1955\)](#) foi o primeiro artigo que introduziu complementaridade e substituíbilidade no contexto da teoria dos jogos cooperativos.

[Shapley \(1955\)](#) definiu um jogo de mercado abstrato impondo certas “condições de convexidade-concavidade” às funções características em termos das contribuições marginais dos jogadores para as coalizões, são elas:

$$\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\}) - \nu(S \setminus \{j\}) + \nu(S \setminus \{i, j\}) \leq 0, \quad (2.13)$$

$$\nu(S) - \nu(S \setminus \{k\}) - \nu(S \setminus \{l\}) + \nu(S \setminus \{k, l\}) \leq 0, \quad (2.14)$$

e

$$\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\}) - \nu(S \setminus \{k\}) + \nu(S \setminus \{i, k\}) \geq 0 \quad (2.15)$$

com $i, j \in S \cap A$ e $k, l \in S \cap B$ onde $A, B, S \subseteq N$.

Em um trabalho posterior, [Shapley \(1962\)](#) mostrou a correspondência dessas condições às “relações de complementaridade-substituíbilidade” entre os agentes.

Definição 2.13. *A contribuição marginal do jogador i para a grande coalizão N é denotada por*

$$\Delta_i = \nu(N) - \nu(N \setminus i). \quad (2.16)$$

Se $(N; \nu)$ estiver balanceado, a recompensa que o jogador i recebe no núcleo $\mathcal{C}(N; \nu)$ é no máximo Δ_i (Equação (2.16)), porque, caso contrário, a coalizão $N \setminus i$ pode melhorar as alocações de recompensa correspondentes.

Definição 2.14 ([Shapley, 1955](#)). *Dado um jogo de coalizão $(N; \nu)$, os jogadores $i, j \in N$ são complementares se a presença de um deles aumentar as contribuições marginais do outro:*

$$\nu(S + \{i, j\}) - \nu(S + \{i\}) \geq \nu(S + \{j\}) - \nu(S), \quad \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\} \text{ e } i \neq j. \quad (2.17)$$

Eles são substitutos se a presença de um deles reduzir as contribuições marginais do outro:

$$\nu(S + \{i, j\}) - \nu(S + \{i\}) \leq \nu(S + \{j\}) - \nu(S), \quad \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\} \text{ e } i \neq j. \quad (2.18)$$

As equações 2.17 e 2.18 são respectivamente equivalentes a

$$\nu(S + \{i, j\}) - \nu(S) \geq [\nu(S + \{i\}) - \nu(S)] + [\nu(S + \{j\}) - \nu(S)] \quad (2.19)$$

e

$$\nu(S + \{i, j\}) - \nu(S) \leq [\nu(S + \{i\}) - \nu(S)] + [\nu(S + \{j\}) - \nu(S)]. \quad (2.20)$$

Ou seja, dois jogadores são complementares (substitutos) se sua contribuição marginal conjunta para cada coalizão contendo ambos não for menor (maior) do que a soma das contribuições marginais de cada jogador, que são alcançadas quando o outro jogador é removido da coalizão.

Definição 2.15 (Shapley, 1955). *Um jogo de coalizão $(N; \nu)$ é um jogo de mercado abstrato, se for super-aditivo em N e os jogadores puderem ser divididos em dois lados (duas coalizões disjuntas), A e B , de modo que quaisquer dois jogadores sejam substitutos se estiverem do mesmo lado e complementares se estiverem em lados opostos.*

No exemplo a seguir, verificamos se um dado jogo de coalizão é um jogo de mercado abstrato.

Exemplo 2.10. *Com o conjunto de jogadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$ particionados em dois lados, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$, $S_A = S \cap A$ e $S_B = S \cap B$ denotam a partição da coalizão S em subcoalizões dos jogadores S_A no lado A e S_B no lado B , respectivamente. Considere a seguinte função característica:*

$$\nu(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } |S_A| = 0 \text{ ou } |S_B| = 0; \\ 2, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (1, 1); \\ 4, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (1, 2), (2, 1); \\ 8, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (2, 2). \end{cases}$$

Primeiro vamos verificar se o jogo é super-aditivo em N . Por meio da Equação (2.3) verificamos que, de fato, trata-se de um jogo super-aditivo em N , uma vez que tal equação é válida para todas as partições de N : (a) $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{4\}$; (b) $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3\}$, $S_3 = \{4\}$; (c) $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{4\}$; (d) $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3, 4\}$; (e) $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{4\}$; (f) $S_1 = \{1, 4\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$; (g) $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 4\}$, $S_3 = \{3\}$; (h) $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3, 4\}$; (i) $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{2, 4\}$; (j) $S_1 = \{1, 4\}$, $S_2 = \{2, 3\}$; (k) $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3, 4\}$; (l) $S_1 = \{2\}$, $S_2 = \{1, 3, 4\}$; (m) $S_1 = \{3\}$, $S_2 = \{1, 2, 4\}$; (n) $S_1 = \{4\}$, $S_2 = \{1, 2, 3\}$ e (o) $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Em (n) , por exemplo, deve ser válido que $\nu(1, 2, 3, 4) \geq \nu(4) + \nu(1, 2, 3)$. De fato, $8 > 0 + 4$.

Agora devemos verificar se esse jogo respeita as condições de complementaridade e substituíbilidade. Nos cálculos a seguir, verificamos que os jogadores $i = 1$ e $j = 2$ são substitutos para todo $S \subseteq N \setminus \{1, 2\}$ utilizando a Equação (2.18).

i. Para $S = \{3, 4\}$: $\nu(1, 2, 3, 4) - \nu(1, 2, 3) \leq \nu(2, 3, 4) - \nu(3, 4) \rightarrow 8 - 4 \leq 4 - 0$;

ii. Para $S = \{3\}$: $\nu(1, 2, 3) - \nu(1, 3) \leq \nu(2, 3) - \nu(3) \rightarrow 4 - 2 \leq 2 - 0$;

iii. Para $S = \{4\}$: $\nu(1, 2, 4) - \nu(1, 4) \leq \nu(2, 4) - \nu(4) \rightarrow 4 - 2 \leq 2 - 0$;

iv. Para $S = \{\emptyset\}$: $\nu(1, 2) - \nu(1) \leq \nu(2) - \nu(\emptyset) \rightarrow 0 - 0 \leq 0 - 0$.

Agora, devemos verificar se os jogadores $i = 3$ e $j = 4$ são substitutos para todo $S \subseteq N \setminus \{3, 4\}$.

i. Para $S = \{1, 2\}$: $\nu(1, 2, 3, 4) - \nu(1, 2, 3) \leq \nu(1, 2, 4) - \nu(1, 2) \rightarrow 8 - 4 \leq 4 - 0$;

ii. Para $S = \{1\}$: $\nu(1, 3, 4) - \nu(1, 3) \leq \nu(1, 4) - \nu(1) \rightarrow 4 - 2 \leq 2 - 0$;

iii. Para $S = \{2\}$: $\nu(2, 3, 4) - \nu(2, 3) \leq \nu(2, 4) - \nu(2) \rightarrow 4 - 2 \leq 2 - 0$;

iv. Para $S = \{\emptyset\}$: $\nu(3, 4) - \nu(3) \leq \nu(4) - \nu(\emptyset) \rightarrow 0 - 0 \leq 0 - 0$.

Logo, os jogadores 3 e 4 são, de fato, substitutos.

O próximo passo é verificar as condições de complementaridade, seguindo a Equação (2.17) para os casos em que (a) $i = 1$ e $j = 3$, (b) $i = 1$ e $j = 4$, (c) $i = 2$ e $j = 3$ e (d) $i = 2$ e $j = 4$. No caso (a), temos:

i. Para $S = \{2, 4\}$: $\nu(1, 2, 3, 4) - \nu(1, 2, 4) \geq \nu(2, 3, 4) - \nu(2, 4) \rightarrow 8 - 4 \geq 4 - 2$;

ii. Para $S = \{2\}$: $\nu(1, 2, 3) - \nu(1, 2) \geq \nu(2, 3) - \nu(2) \rightarrow 4 - 0 \geq 2 - 0$;

iii. Para $S = \{4\}$: $\nu(1, 3, 4) - \nu(1, 4) \geq \nu(3, 4) - \nu(4) \rightarrow 4 - 2 \geq 0 - 0$;

iv. Para $S = \{\emptyset\}$: $\nu(1, 3) - \nu(1) \geq \nu(3) - \nu(\emptyset) \rightarrow 2 - 0 \geq 0 - 0$.

Assim como no caso (a), a relação de complementaridade também é verificada nos demais casos. Portanto, esse é um jogo de mercado abstrato.

2.2.2 Jogos de Votação com Peso

Os jogos de votação ponderada ou jogos de votação com peso são uma família clássica de jogos cooperativos que foram extensivamente estudados na Teoria dos Jogos e na literatura de escolha social (DIAKONIKOLAS; PAVLOU, 2018). Exemplos típicos de jogos de votação com peso são a votação parlamentar, as empresas acionistas e a alocação de recursos em sistemas multiagentes.

Esses jogos modelam um cenário de votação comum onde cada agente (jogador), associado a um peso, lança um voto “SIM” (a favor) ou “NÃO” (contra): se a soma ponderada dos votos “SIM” exceder um limite (cota), então o resultado da votação é “SIM”, caso contrário, o resultado é “NÃO”. Sendo assim, um jogo de votação com peso apresenta três importantes elementos: os jogadores, o peso de cada jogador, e a cota a ser alcançada. Um Jogo de Votação com Peso é um exemplo de jogo simples.

Os jogos simples foram analisados pela primeira vez por John von Neumann e Oskar Morgenstern em seu livro *Theory of Games and Economic Behavior*. Eles também examinaram jogos de votação com peso. Neumann e Morgenstern (1944) observaram que coalizões minimamente vencedoras são uma maneira útil de representar jogos simples.

Um jogo $(N; \nu)$ é dito simples se for monótono e sua função característica assumir apenas valores 0 e 1, ou seja, $\nu(S) \in \{0, 1\}$ para qualquer $S \subseteq N$. Em um jogo simples, as coalizões de valor 1 são consideradas vencedoras e as coalizões de valor 0 são consideradas perdedoras.

A condição de monotonicidade mostra que se uma coalizão T contém uma subcoalizão S que é vencedora implica que T também é vencedora, ou seja, se $S \in \mathcal{W}$ e $S \subseteq T$, então $T \in \mathcal{W}$, onde \mathcal{W} é a família de coalizões vencedoras.

Observe que jogos simples são super-aditivos apenas se o complemento de cada coalizão vencedora estiver perdendo. Claramente, existem jogos simples que não são super-aditivos. No entanto, geralmente assume-se que o resultado de um jogo simples é um vetor de recompensa para a grande coalizão N , assim como nos jogos super-aditivos. (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012)

Definição 2.16. *Um jogo simples $(N; \nu)$ é um jogo em que toda coalizão tem valor 0 ou 1, e a grande coalizão N tem valor 1. As coalizões com valor 1 são chamadas de vencedoras, as outras coalizões são chamadas de perdedoras. Uma coalizão minimamente vencedora é uma coalizão vencedora para a qual todos os subconjuntos próprios estão perdendo. Um jogador i é chamado de ditador em um jogo simples se $\nu(S) = 1$ se, e somente se, $i \in S$.*

É conveniente representar jogos simples indicando a família de coalizões vencedoras $\mathcal{W} = \{S \subseteq N : \nu(S) = 1\}$. Jogos simples podem modelar votos de comitês, incluindo casos em que a regra de votação não é necessariamente a regra da maioria.

A votação com peso é um sistema popular de tomada de decisão coletiva em muitas instituições, como votação de acionistas em empresas ou blocos de votação em legislaturas multipartidárias. Nesse tipo de jogo, diferentes eleitores possuem um número diferente de votos. (GUERCI; HANAKI; WATANABE, 2017)

Os jogos de votação são jogos que refletem a distribuição do poder de voto, ou seja, uma solução para jogos de votação com peso é interpretada como representando o poder de um jogador, ao invés de recompensa (dinheiro, por exemplo) ou utilidade.

Normalmente, presume-se que todos os pesos e a cota são não negativos. A seguir, consideraremos $q, w_i \in \mathbb{N}$ seguindo Taylor e Zwicker (1999). Partindo desse pressuposto, os jogos de votação ponderada são monótonos e, além disso, pertencem à classe dos jogos simples.

Definição 2.17. Um jogo de votação com peso $(N; \nu)$ com um conjunto de jogadores $N = \{1, \dots, n\}$ é dado por uma lista de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e cota $q \in \mathbb{R}$. Sua função característica $\nu : 2^N \rightarrow \{0, 1\}$ é dada por:

$$\nu(S) = \begin{cases} 1, & \text{se } w_S \geq q \\ 0, & \text{se } w_S < q. \end{cases}$$

O peso w_i de um jogador i é o número de votos que i controla, com $i = 1, \dots, n$. A cota q é o número mínimo de votos necessários para que uma proposta seja aprovada.

É conveniente representar um sistema de votação com peso na forma

$$\nu = [q; w_1, w_2, \dots, w_n]. \quad (2.21)$$

Para ilustrar considere os seguintes exemplos.

Exemplo 2.11. Considere um parlamento com três partidos a, b e c . Os números dos votos são, respectivamente, 50, 30 e 20. Para aprovar qualquer lei, é necessário alcançar uma cota igual a 70. Isso leva a um jogo de votação com peso representado como segue:

$$\nu = [70; 50, 30, 20].$$

Temos então as seguintes coalizões vencedoras:

$$\mathcal{W} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Listando todas as coalizões vencedoras desse jogo, podemos ver que se uma coalizão formada pelos partidos a e b é vencedora, então a adição de qualquer partido a essa coalizão também retorna um resultado vencedor, e.g., $\{a, b\} \in \mathcal{W} \Rightarrow \{a, b, c\} \in \mathcal{W}$.

Exemplo 2.12. (MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013) Na Câmara dos Comuns do Parlamento Britânico, que é composta por 650 membros, uma coalizão requer uma maioria de 326 membros para formar um governo. Suponha que haja três partidos representados, o primeiro com 282 cadeiras, o segundo com 260 cadeiras e o terceiro com 108 cadeiras. O jogo pode ser representado da seguinte forma:

$$[q; w_1, w_1, w_3] = [326; 282, 260, 108].$$

Denote por 1 o “valor” de ser a coalizão governante e por 0 o “valor” de estar na oposição. O jogo de coalizão correspondente a essa situação é um jogo de três jogadores. Visto que nenhum partido tem 326 assentos ou mais, nenhum partido sozinho pode formar uma coalizão de governo. Portanto, $\nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = 0$. Cada par de partidos juntos tem mais de 326 cadeiras, portanto, cada par de partidos pode formar uma coalizão de governo e todos os três partidos juntos podem formar uma coalizão de governo. Assim, $\nu(1, 2) = \nu(1, 3) = \nu(2, 3) = \nu(1, 2, 3) = 1$.

2.2.2.1 Jogos de Votação com Peso Múltiplos

Jogos de votação com peso múltiplos (*Multiple Weighted Voting Games* - MWVG) são uma extensão dos jogos de votação com peso.

MWVG são utilizados em várias situações. O tratado de Nice fez dos jogos gerais de votação dos países da União Europeia um jogo de tripla maioria, com algumas restrições adicionais. MWVG são úteis em sistemas multiagentes com múltiplos critérios. (AZIZ; PATERSON; LEECH, 2007a)

A seguir, definimos MWVG seguindo Aziz, Paterson e Leech (2007a), Aziz, Paterson e Leech (2007b) e Algaba et al. (2003).

Definição 2.18. Sejam $(N_1, \nu_1), \dots, (N_d, \nu_d)$ jogos simples. Então um jogo simples $(N, \nu) = (N_1, \nu_1) \times \dots \times (N_d, \nu_d)$ é o produto destes jogos onde $N = \bigcup_{t=1}^d N_t$ e $\nu(S) = 1$ se, e somente se, para todo $1 \leq t \leq d$, $\nu_t(S \cap N_t) = 1$. Se todos N_{i_s} dos jogos $(N_1, \nu_1), \dots, (N_d, \nu_d)$ coincidem, então, o produto (N, ν) desses jogos é chamado de encontro dos jogos. (N, ν) pode ser simplesmente escrito como $(N, \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_d)$ e $\nu(S) = 1$ se, e somente se, $1 \leq t \leq m$, $\nu_t(S) = 1$.

Definição 2.19. (ALGABA et al., 2003) Um jogo de votação com peso múltiplo é um jogo simples $\nu(S) = \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_d(S) = \min_{i \in D} \{\nu_i(S)\}$, ou, equivalentemente,

$$\nu(S) = \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_d(S) = \min\{\nu_i(S) : 1 \leq i \leq d\} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{w}_S \geq \mathbf{q} \text{ e} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $\mathbf{w}_S = \mathbf{w}_{i_1} + \dots + \mathbf{w}_{i_s}$ se $S = \{i_1, \dots, i_s\}$, $\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_d = [\mathbf{q}; \mathbf{W}] = [\mathbf{q}; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n]$. Se $d = 1$ temos um jogo de votação com peso e escrevemos $\nu = [q; \mathbf{w}]$.

Exemplo 2.13. (AZIZ; PATERSON; LEECH, 2007a) Seja $(N, \nu) = (N, \nu_1 \wedge \nu_2)$ um jogo onde $\nu_1 = [20; 18, 5, 0, 5, 5, 2, 5]$ e $\nu_2 = [20; 0, 5, 18, 5, 5, 2, 5]$. Vemos que as coalizões $\{1, 3, 6\}$ e $\{2, 4, 5, 7\}$ são vencedoras em ν .

2.3 Soluções de jogos cooperativos

Quando os agentes têm interesse próprio, uma coalizão estável só pode ser formada se os ganhos obtidos com a cooperação forem distribuídos de forma adequada. A teoria dos jogos cooperativos considera a questão de como esses ganhos devem ser distribuídos e fornece vários conceitos de solução (BACHRACH; PARKES; ROSENSCHEIN, 2013). Dentre esses conceitos, estão o núcleo, o nucléolo, o valor de Shapley e os índices de poder, como o índice de Shapley-Shubik e o índice de Banzhaf.

Qualquer partição de agentes em coalizões e qualquer vetor de recompensa que respeite essa partição corresponde a um resultado de um jogo cooperativo. No entanto, nem todos os resultados são igualmente desejáveis ou igualmente prováveis de ocorrer. De forma mais ampla, pode-se avaliar os resultados de acordo com dois conjuntos de critérios: (a) *estabilidade*, ou seja, quais são os incentivos para os agentes permanecerem na estrutura de coalizão, e (b) *justiça*, ou seja, quão bem a recompensa de cada agente reflete sua contribuição. (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012)

Neste trabalho vamos nos concentrar em dois conceitos de solução: núcleo e índice de poder de Banzhaf. O núcleo é um conceito de solução definido em termos da estabilidade da coalizão. Já o índice de poder de Banzhaf é motivado por considerações de justiça.

2.3.1 Núcleo

O núcleo provavelmente é o conceito de estabilidade mais conhecido na teoria dos jogos e na economia. O núcleo de um jogo cooperativo é definido como o conjunto de alocações das quais nenhum membro da coalizão S tem um incentivo para formar sua própria coalizão separada e atingir $\nu(S)$, valor esse que os membros podem dividir entre si de tal maneira que todo membro i de S receba mais do que receberia na alocação do núcleo. (ABE, 2019)

Cada jogador de um jogo cooperativo tem o direito de receber sua parte do pagamento total $\nu(N)$ disponível, ou seja, sua recompensa. Suponhamos que a alocação de recompensas ao conjunto de jogadores em N seja tal que cada jogador $i \in N$ receba a quantia x_i . Então, a atribuição de recompensas pode ser representada pelo vetor de recompensas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Essas atribuições devem ser regidas por certas restrições. (BRACKIN, 2002)

Definição 2.20. Um vetor de recompensas \mathbf{x} é chamado de imputação se satisfizer as seguintes condições:

$$x_i \geq \nu(i), \quad \forall i = 1, \dots, n \quad e \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \nu(N) \quad . \quad (2.23)$$

O conjunto de todas as imputações para a estrutura de coalizão \mathcal{B} é denotada por $X(\mathcal{B}, \nu)$. Quando a estrutura de coalizão $\mathcal{B} = \{N\}$ escreveremos $X(N; \nu)$.

Se a relação (2.22) não for verdadeira, então o jogador i certamente se recusará a aceitar a alocação, pois terá garantido o valor $\nu(i)$ sem formar nenhuma coalizão. Assim, o vetor de recompensas que atende a relação (2.22) é chamado individualmente racional.

A relação (2.23) é a condição de eficiência. Esta condição é necessária, pois se

$$\nu(N) > \sum_{i=1}^n x_i,$$

então os jogadores podem formar a grande coalizão N para obter a recompensa total $\nu(N)$, caso em que cada jogador i poderia receber uma quantia adicional além de x_i . Por outro lado,

$$\nu(N) < \sum_{i=1}^n x_i,$$

é impossível, visto que, a distribuição de recompensa aos jogadores não pode exceder a renda total disponível.

A seguir, apresentamos um exemplo de imputação eficiente e individualmente racional. Utilizaremos $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$ para o vetor de recompensa $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ e a coalizão $S \subseteq N$.

Exemplo 2.14. *Seja $(N; \nu)$ um jogo de três jogadores com todos os valores iguais a 1, exceto para as coalizões de uma pessoa, que têm valor igual a 0. Equivalentemente:*

$$\nu(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } S = \{1\}, S = \{2\}, \text{ ou } S = \{3\}, \\ 1, & \text{se } S = \{1, 2\}, S = \{1, 3\}, \text{ ou } S = \{2, 3\}, \\ 1, & \text{se } S = N \end{cases}$$

O conjunto de imputações é dado por $X(N; \nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x(N) = \nu(N), x_i \geq \nu(i) \forall i \in N\}$. Portanto,

$$X(N; \nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x(1, 2, 3) = \nu(1, 2, 3), x_1 \geq \nu(1), x_2 \geq \nu(2), x_3 \geq \nu(3)\}.$$

$$X(N; \nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

Logo, o vetor $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ é uma imputação eficiente e individualmente racional para N .

Atay (2017) destaca que o núcleo é um conceito de solução que pode ser definido por meio da relação de dominância: é o conjunto de imputações não dominadas. O núcleo pode ser descrito de maneira intuitiva como “o conjunto de imputações que não deixam nenhuma coalizão em posição de melhorar os ganhos de todos os seus membros”³ (SHAPLEY; SHUBIK, 1973, p. 41, tradução nossa)

A condição de racionalidade coletiva determina que o montante total $x(S)$ alocado para S não é menor do que o valor $\nu(S)$ que os jogadores em S podem obter formando a coalizão S .

Definição 2.21. *Seja $(N; \nu)$ um jogo de coalizão. Uma imputação $\mathbf{x} \in X(N; \nu)$ é coletivamente racional se para toda coalizão $S \subseteq N$*

$$x(S) \geq \nu(S) \quad (2.24)$$

Exemplo 2.15. *Considere a seguinte função de coalizão para o jogo $(N; \nu)$ com três jogadores:*

$$\nu(S) = \begin{cases} 500, & \text{se } S = \{1, 2\} \\ 500, & \text{se } S = \{1, 3\} \\ 750, & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 1000, & \text{se } S = N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere o vetor de recompensas $\mathbf{x} = (100, 400, 500)$. Temos

$$x_1 > \nu(1)$$

$$x_2 > \nu(2)$$

$$x_3 > \nu(3)$$

$$x_1 + x_2 = \nu(1, 2)$$

$$x_1 + x_3 = \nu(1, 3)$$

$$x_2 + x_3 > \nu(2, 3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \nu(1, 2, 3).$$

Portanto $\mathbf{x} = (100, 400, 500)$ é uma imputação coletivamente racional para N .

O núcleo pode ser definido como o “estado” do jogo que garante os interesses individuais e comuns.

Definição 2.22. *O núcleo \mathcal{C} de um jogo cooperativo $(N; \nu)$ é definido como a coleção de todas as imputações coletivamente racionais:*

$$\mathcal{C}(N; \nu) = \{x \in X(N; \nu) : x(S) \geq \nu(S), \forall S \subseteq N\}. \quad (2.25)$$

³ “The set of imputations that leave no coalition in a position to improve the payoffs of all its members” (SHAPLEY, SHUBIK, 1973, p. 41).

O exemplo a seguir apresenta o cálculo do núcleo de um jogo com três jogadores.

Exemplo 2.16. *Seja um jogo de coalizão com $N = \{1, 2, 3\}$ e a seguinte função de coalizão:*

$$\nu(S) = \begin{cases} 20, & \text{se } S = \{1, 2\} \\ 30, & \text{se } S = \{1, 3\} \\ 10, & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 90, & \text{se } S = N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com a Equação (2.25), o núcleo desse jogo é dado por

$$\mathcal{C}(N; \nu) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq \nu(1), x_2 \geq \nu(2), x_3 \geq \nu(3), x_1 + x_2 \geq \nu(1, 2), \\ x_1 + x_3 \geq \nu(1, 3), x_2 + x_3 \geq \nu(2, 3), x_1 + x_2 + x_3 = \nu(1, 2, 3) \end{array} \right\}.$$

Substituindo os valores, temos

$$\mathcal{C}(N; \nu) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 20, \\ x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 10, x_1 + x_2 + x_3 = 90 \end{array} \right\}.$$

A condição $x_1 + x_2 \geq 20$ é equivalente à condição $x_3 \leq 70$, pois $x_1 + x_2 + x_3 = 90$. De modo semelhante obtemos $x_2 \leq 60$ e $x_1 \leq 80$. Portanto, a imputação $(x_1, x_2, x_3) = (70, 10, 10)$, por exemplo, está no núcleo.

Definição 2.23. *O núcleo de um jogo de coalizão é a interseção de um número finito de semi-espacos e, portanto, é um conjunto convexo.*

Exemplo 2.17. (MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013) *Considere um jogo de coalizão, com o conjunto de jogadores $N = \{1, 2, 3\}$ e a seguinte função característica:*

$$\nu(S) = \begin{cases} 1, & \text{se } S = \{1, 2\} \\ 2, & \text{se } S = \{1, 3\} \\ 1, & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 3, & \text{se } S = N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

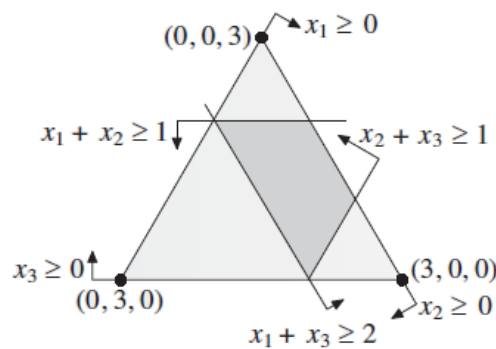
O conjunto de imputações é o triângulo cujos vértices são $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ e $(0, 0, 3)$. Uma

imputação $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ está no núcleo deste jogo se e somente se

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_3 &\geq 2 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

O conjunto de soluções para esse sistema de equações, que forma um trapézio, está representado na Figura 2. O plano no qual a figura se encontra é dado por $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ em \mathbb{R}^3 , e os rótulos na figura referem-se às coordenadas em \mathbb{R}^3 .

Figura 2 – O núcleo do jogo e as desigualdades que o definem



Fonte: Maschler, Solan e Zamir (2013)

A condição $x_1 + x_2 \geq 1$ é equivalente à condição $x_3 \leq 2$, porque $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ e isso corresponde a uma linha paralela ao lado $(3, 0, 0) - (0, 3, 0)$ do triângulo na Figura 2. As demais desigualdades podem ser tratadas de forma semelhante.

Infelizmente, alguns jogos têm núcleos vazios, por isso, é natural questionar se é possível caracterizar os jogos que possuem núcleos não-vazios ou pelo menos identificar famílias interessantes de jogos cujo núcleo é não-vazio.

O jogo do mineiros e das barras de ouro é um exemplo em que o número de jogadores na coalizão influencia na condição do núcleo ser, ou não, vazio.

Exemplo 2.18. Considere um grupo de n mineiros que descobriram grandes barras de ouro. Se dois mineiros conseguirem carregar um pedaço de ouro, então a função de coalizão é dada por

$$\nu(S) = \begin{cases} |S|/2, & \text{se } |S| \text{ é par,} \\ (|S| - 1)/2, & \text{se } |S| \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Se houver mais de dois mineiros e um número par de mineiros, então o núcleo consiste do único vetor de recompensas no qual cada mineiro recebe $1/2$. Se houver um número ímpar de mineiros, então o núcleo é vazio.

Considere um grupo de 3 mineiros. Então,

$$\nu(S) = \begin{cases} 1, & \text{se } S = \{1, 2\} \\ 1, & \text{se } S = \{1, 3\} \\ 1, & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 1, & \text{se } S = N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com a Equação (2.25), o núcleo desse jogo é dado por

$$\mathcal{C}(N; \nu) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_3 \geq 1, x_2 + x_3 \geq 1, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

Esse sistema não tem solução, portanto o núcleo é vazio.

A primeira condição necessária e suficiente que caracteriza os jogos de coalizão com um núcleo não-vazio foi fornecida pelos matemáticos e economistas Olga Bondareva e Lloyd Shapley como uma aplicação de um problema de programação linear. Em suas obras, a noção de coleção balanceada representa o fato de que o núcleo é não-vazio. Sendo assim, um jogo com um núcleo não-vazio é também chamado de jogo balanceado. (ABE, 2019)

Definição 2.24. Seja $\mathcal{D} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ uma coleção de coalizões não vazias. \mathcal{D} é uma coleção balanceada se existir um vetor de números positivos $(\delta_S)_{S \in \mathcal{D}}$ tal que

$$\sum_{\{S \in \mathcal{D} : i \in S\}} \delta_S = 1, \quad \forall i \in N. \quad (2.26)$$

Teorema 2.1 (Bondareva, Shapley). O núcleo de $(N; \nu)$ é não-vazio, se e somente se, para cada coleção balanceada \mathcal{D} de coalizões e todo vetor de pesos balanceados $(\delta_S)_{S \in \mathcal{D}}$ para \mathcal{D} ,

$$\nu(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{D}} \delta_S \nu(S). \quad (2.27)$$

Retomando o Exemplo 2.16, vamos aplicar o teorema de Bondareva-Shapley.

Exemplo 2.19. O jogo do Exemplo 2.16 apresenta as seguintes coleções balanceadas: $\mathcal{D}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ com os coeficientes de balanceamento $\delta_{\{1\}} = \delta_{\{2\}} = \delta_{\{3\}} = 1$; $\mathcal{D}_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ com coeficientes $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$; $\mathcal{D}_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ com os coeficientes de balanceamento $\delta_{\{1,2\}} = \delta_{\{3\}} = 1$; $\mathcal{D}_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ com coeficientes $\delta_{\{1,3\}} = \delta_{\{2\}} = 1$; $\mathcal{D}_5 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$ com coeficientes $\delta_{\{2,3\}} = \delta_{\{1\}} = 1$. Para \mathcal{D}_2 , utilizando (2.27), temos $\nu(1, 2, 3) \geq \delta_{\{1,2\}} \cdot \nu(1, 2) + \delta_{\{1,3\}} \cdot \nu(1, 3) + \delta_{\{2,3\}} \cdot \nu(2, 3)$, que resulta em $90 \geq 30$. O teorema também é verificado para as demais coleções de coalizões. Logo, o jogo do Exemplo 2.16 possui núcleo não-vazio.

Em geral, o teorema de Bondareva-Shapley não fornece um método eficiente de verificar se um dado jogo possui um núcleo não-vazio, pois o número de sistemas de conjuntos balanceados é super-exponencial no número de agentes n (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012). Nesse caso, geralmente, é mais conveniente resolver diretamente as desigualdades que definem o núcleo. Entretanto, o teorema é de grande utilidade quando se deseja provar que todos os jogos em uma classe específica de jogos têm núcleos não-vazios. Um exemplo dessa classe de jogos é a dos jogos de mercado. (MASCHLER; SOLAN; ZAMIR, 2013)

2.3.1.1 Núcleo de Jogos de Mercado Abstrato

Shapley conjecturou que os jogos de mercado abstrato possuem núcleo não-vazios. Entretanto, Cao, Qin e Yang (2018) apresentam contraexemplos que mostram que a Conjectura de Shapley é válida somente quando o número de jogadores é no máximo quatro.

Definição 2.25. Um jogo de coalizão $(N; \nu)$ é denominado *totalmente balanceado* se os núcleos de todos os seus sub-jogos não estiverem vazios.

Teorema 2.2 (Shapley e Shubik (1969)). Todo jogo de mercado é totalmente balanceado.

Teorema 2.3. Todo jogo totalmente balanceado é um jogo de mercado.

No exemplo a seguir, apresentamos um jogo de coalizão que é balanceado mas não é totalmente balanceado.

Exemplo 2.20. Seja $(N; \nu)$ um jogo de coalizão, onde $N = \{1, 2, 3\}$ e a função de coalizão é dada por

$$\nu(S) = \begin{cases} 20, & \text{se } S = \{1\}, S = \{2\} \text{ ou } S = \{3\} \\ 30, & \text{se } S = \{1, 2\}, S = \{1, 3\} \text{ ou } S = \{2, 3\} \\ 180, & \text{se } S = N \end{cases}$$

Este jogo tem um núcleo não-vazio. Observe, por exemplo, que o vetor $x = (60, 60, 60)$ está no núcleo do jogo. Portanto, o jogo é balanceado.

Entretanto, ele não é totalmente balanceado. Isso porque o sub-jogo $(\{1, 2\}; \nu_{\{1,2\}})$, cuja função de coalizão é dada por

$$\nu_{\{1,2\}} = \begin{cases} 20, & \text{se } S = \{1\} \text{ ou } S = \{2\} \\ 30, & \text{se } S = \{1, 2\} \end{cases}$$

tem núcleo vazio. Logo, esse não é um jogo de mercado.

Corolário 2.1. Se $(N; \nu)$ é um jogo de mercado, então todo sub-jogo $(S; \nu)$ de $(N; \nu)$ é um jogo de mercado e, em particular, seu núcleo não é vazio.

Teorema 2.4. Jogos de mercado abstrato com quatro ou menos jogadores têm núcleo não-vazio.

Os jogos de mercado abstrato, em geral, têm coalizões mais complexas do que os jogos de atribuição. Como resultado, a Conjectura de Shapley nem sempre é válida sem condições suplementares. A seguir, um exemplo de jogo de mercado abstrato com 5 jogadores cujo núcleo é vazio, seguindo Cao, Qin e Yang (2018).

Exemplo 2.21. Considere um jogo de coalizão $(N; \nu)$ com $N = A \cup B$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ e função característica

$$\nu(S) = \begin{cases} 0, & \text{se } |S_A| = 0 \text{ ou } |S_B| = 0; \\ 3, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (1, 1); \\ 5, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (1, 2), (2, 1); \\ 9, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (2, 2); \\ 5, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (3, 1); \\ 9, & \text{se } (|S_A|, |S_B|) = (3, 2). \end{cases}$$

É possível verificar por meio da Equação (2.3) que esse jogo é super-aditivo em N . Além disso, as relações de complementaridade-substituibilidade são respeitadas, como mostrado na tabela 2, onde $\Delta_A(l, r) = \nu(S) - \nu(S')$ e $\Delta_B(l, r) = \nu(S) - \nu(S'')$, para $S, S', S'' \subseteq N$ tal que $|S_A| = |S''_A| = l$, $|S_B| = |S'_B| = r$, $|S'_A| = l - 1$, e $|S''_B| = r - 1$.

Tabela 2 – Relações de complementaridade-substituibilidade

l	$\Delta_A(l, 0)$	$\Delta_A(l, 1)$	$\Delta_A(l, 2)$
1	0	3	5
2	0	3	4
3	0	0	0

r	$\Delta_B(0, r)$	$\Delta_B(1, r)$	$\Delta_B(2, r)$	$\Delta_B(3, r)$
1	0	3	5	5
2	0	2	4	4

Por exemplo, tome $i = 4$, $j = 2$, $S = \{1, 2, 4\}$ e $S' = \{1, 4\}$. Temos $|S_A| = |S''_A| = l = 2$, $|S_B| = |S'_B| = r = 1$, $\nu(S) - \nu(S') = \Delta_A(2, 1) = 2$. Agora, tome $S = \{1, 2\}$ e $S' = \{1\}$, temos, então, $|S_A| = |S''_A| = l = 2$, $|S_B| = |S'_B| = r = 0$, $\nu(S) - \nu(S') = \Delta_A(2, 0) = 0$. Como os jogadores 4 e 2 estão em lados opostos, eles devem respeitar a relação de complementaridade, de fato, $\Delta_A(2, 1) = \nu(1, 2, 4) - \nu(1, 4) \geq \nu(1, 2) - \nu(1) = \Delta_A(2, 0)$.

Os jogadores $i = 4$ e $j = 5$, por exemplo, devem respeitar a relação de substituibilidade, visto que estão no mesmo lado. Quando $S = \{1, 2, 4, 5\}$ e $S'' = \{1, 2, 4\}$, temos que $r = 2$ e $l = 2$, além disso, $\nu(S) - \nu(S'') = 4 = \Delta_B(2, 2)$. Já quando $S = \{1, 2, 5\}$ e $S'' = \{1, 2\}$, temos que $r = 1$, $l = 2$ e $\nu(S) - \nu(S'') = 5 = \Delta_B(2, 1)$. Portanto, os jogadores 4 e 5 são, de fato, substitutos, pois $\Delta_B(2, 2) = \nu(1, 2, 4, 5) - \nu(1, 2, 4) \leq \nu(1, 2, 5) - \nu(1, 2) = \Delta_B(2, 1)$.

Pela definição 2.24, pode-se verificar que a coleção de coalizões $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$ é balanceada com os coeficientes de balanceamento $\delta_{\{1,3,4\}} = \delta_{\{2,3,5\}} = \delta_{\{1,2,4,5\}} = 0,5$. Pelo teorema 2.1 de Bondareva-Shapley, o núcleo do jogo é não-vazio se $\nu(1, 2, 3, 4, 5) \geq 0,5 \cdot \nu(1, 3, 4) + 0,5 \cdot \nu(2, 3, 5) + 0,5 \cdot \nu(1, 2, 4, 5)$, entretanto $0,5 \cdot (\nu(1, 3, 4) + \nu(2, 3, 5) + \nu(1, 2, 4, 5)) = 0,5 \cdot (5+5+9) = 9,5 > \nu(1, 2, 3, 4, 5) = 9$, portanto, o núcleo desse jogo é vazio.

No Capítulo 4 mostramos uma nova condição algébrica necessária e suficiente para que o núcleo dos jogos cooperativos seja não-vazio. Para mostrar a utilidade da abordagem, mostramos que jogos de mercado abstrato com quatro ou menos jogadores têm núcleo não-vazio.

2.3.2 Índices de Poder

Um índice de poder (IP) é um valor aplicado a jogos de votação (simples). O vetor de pagamento atribuído a um jogo é interpretado como refletindo a distribuição de poder - por exemplo, a probabilidade de ter um voto decisivo - em vez de utilidade (PETERS, 2015). Portanto, os Índices de Poder medem o quão decisivo um jogador é para a coalizão, no sentido de que esse jogador seria capaz de tornar uma coalizão perdedora em vencedora e vice-versa.

Embora ter um peso maior possa ajudar um jogador a afetar o resultado da votação, sua influência no resultado do jogo nem sempre é proporcional ao seu peso. Assim, em vez de usar pesos dos jogadores, o poder de um jogador sobre o resultado é geralmente medido de forma sistemática por um IP. Ao longo dos anos, muitos IP foram propostos e estudados, como o valor Shapley, o índice Banzhaf, o índice Deegan-Packel e o índice de Holler (DIAKONIKOLAS; PAVLOU, 2018). Este trabalho se concentra no Índice de Banzhaf (1964).

2.3.2.1 Índice de Poder de Banzhaf

O índice de poder de Banzhaf é um dos métodos mais conhecidos para representar numericamente o poder individual de um eleitor em uma situação de votação. Esse índice visa captar a noção de justiça na função característica dos jogos.

De forma geral, podemos definir o poder de um eleitor como a probabilidade de que ele seja um “*swinger*”, ou seja, que seu voto “sim” mude o resultado quando todos os indivíduos votam de forma independente e com igual probabilidade de “sim” e “não”. Da mesma forma, o índice de Banzhaf do jogador é dado por sua probabilidade de transformar uma coalizão aleatória de jogadores de “perdedora” em “ganhadora” ao se juntar a ela, supondo que a coalizão seja escolhida com respeito à distribuição uniforme sobre os subconjuntos de $N \setminus \{i\}$. (HAIMANKO, 2018)

Um conceito importante é o de *jogador crítico*, ou seja, quando este se retira de uma coalizão vencedora, esta torna-se perdedora. A presença de um jogador crítico em uma coalizão S vencedora será chamada de votante *swing* para S . Um jogador será chamado ditador quando

tiver todo poder de decisão e o jogador será chamado jogador *dummy* quando não tiver influência alguma sobre a votação.

Definição 2.26. Um jogador $i \in S$ é crítico para uma coalizão S se $\nu(S) = 1$ e $\nu(S \setminus \{i\}) = 0$.

Definição 2.27. Dado um jogo $(N; \nu)$, um jogador $i \in N$ é considerado um *dummy* se $\nu(S) = \nu(S \cup \{i\})$ para qualquer $S \subseteq N$.

Definição 2.28. O jogador i é chamado de ditador se $\nu(S) = 1$ se, e somente se, $i \in S$.

É possível caracterizar o índice de Banzhaf, assumindo que $\eta_i(\nu)$ é o número de coalizões em que o jogador i é um votante *swing* considerando o conjunto de coalizões que o jogador i faça parte:

$$\eta_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N: i \in S} [\nu(S) - \nu(S \setminus \{i\})].$$

De forma equivalente, podemos escrever

$$\eta_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)].$$

O número total de *swings* é dado por $\sum_{j=1}^n \eta_j(\nu)$. O percentual de poder de um determinado jogador pelo índice *normalizado* de Banzhaf é dado por:

$$B_i(\nu) = \frac{\eta_i(\nu)}{\sum_{j=1}^n \eta_j(\nu)}$$

O Índice *não normalizado* de Banzhaf (doravante denominado simplesmente índice de Banzhaf), é definido como segue.

Definição 2.29. Dado um jogo $(N; \nu)$ com $|N| = n$, o índice de Banzhaf de um jogador $i \in N$ é denotado por β_i e é dado por

$$\beta_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} (\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)). \quad (2.28)$$

Ocasionalmente, quando mais jogos estão envolvidos, incluímos a dependência explícita de β no jogo ν e escrevemos $\beta(\nu) = (\beta_1(\nu), \dots, \beta_n(\nu))$.

É possível perceber que 2^{n-1} denota o número total de coalizões existentes sem o jogador i e assim sua adição ao grupo o torna um votante *swing*.

O índice de Banzhaf mede a probabilidade de que um determinado agente transforme uma coalizão perdedora em vencedora se cada um dos outros agentes decidir se unir à coalizão lançando uma moeda de forma independente. É esta interpretação probabilística que torna o índice (não normalizado) de Banzhaf um conceito de solução mais atraente do que o índice normalizado. (CHALKIADAKIS; ELKIND; WOOLDRIDGE, 2012)

O índice de Banzhaf têm a propriedade do jogador *dummy*, que afirma que o valor do índice para um determinado jogador é 0 se, e somente se, ele não contribuir para nenhuma coalizão, e a propriedade de simetria, que afirma que se dois jogadores são simétricos, então seus índices são iguais.

A título de ilustração, calculamos, a seguir, o índice de Banzhaf para o jogador a do jogo apresentado no exemplo 2.11.

Exemplo 2.22. Neste caso, temos $n=3$ e

$$\beta_a = \frac{1}{2^{3-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{a\}} (\nu(S \cup \{a\}) - \nu(S)).$$

As coalizões $S \subseteq N \setminus \{a\}$ são $\{\emptyset\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ e $\{b, c\}$. Portanto,

$$\beta_a = \frac{1}{4} [(\nu(\{\emptyset\} \cup \{a\}) - \nu(\emptyset)) + (\nu(\{b\} \cup \{a\}) - \nu(b)) + (\nu(\{c\} \cup \{a\}) - \nu(c)) + (\nu(\{b, c\} \cup \{a\}) - \nu(b, c))].$$

Logo, o índice de Banzhaf do jogador a é $\beta_a = \frac{3}{4}$.

2.3.2.2 Índices de Poder de Banzhaf e Jogos de Votação com Peso

Seja b_k^i o número de coalizões que não incluem o jogador i com peso k . Algaba et al. (2003) apresentam as funções geratrizes dos números $\{b_k^i\}$:

Proposição 2.1. (Brams-Affuso) Seja $\nu = [q; w_1, \dots, w_n]$ um jogo de votação com peso. Então, as funções geratrizes dos números $\{b_k^i\}$ são dadas por

$$B_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (1 + x^{w_j}).$$

Algaba et al. (2003) também apresentam as funções geratrizes para calcular o índice de poder de Banzhaf em jogos múltiplos de m -maioria.

Proposição 2.2. Seja $(N; \nu)$ um jogo de m -maioria com peso tal que $\nu = \nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_m$, com $\nu_t = [q^t; w_1^t, \dots, w_n^t]$, com $1 \leq t \leq m$. Para todo $i \in N$,

i) O número de "swings" do jogador i é dado por

$$\eta_i(\nu) = \sum_{\substack{k_t = q^t - w_i^t \\ 1 \leq t \leq m}}^{w^t(N \setminus i)} b_{k_1 \dots k_m}^i - \sum_{\substack{k_t = q^t \\ 1 \leq t \leq m}}^{w^t(N \setminus i)} b_{k_1 \dots k_m}^i$$

onde $b_{k_1 \dots k_m}^i$ é o número de coalizões S tal que $i \notin S$, $w^t(S) = k_t$ para todo $1 \leq t \leq m$.

ii) As funções geratrizes dos números $\{b_{k_1 \dots k_m}^i\}_{k_1 \dots k_m > 0}$ são dadas por

$$B_i(x_1, \dots, x_m) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1 + x_1^{w_j^1} \dots x_m^{w_j^m}).$$

2.3.2.2.1 Alianças em Jogos de Votação com Peso

Em um jogo de votação, alguns jogadores podem ter interesses muito semelhantes e votar de forma idêntica na maioria das questões. Na verdade, no caso extremo em que concordam em todas as questões, eles formam um bloco e não precisam de forma alguma formalizar qualquer esquema de decisão interno. (FEIX et al., 2007)

Mesmo se dois ou mais jogadores em um jogo de votação tiverem opiniões independentes sobre uma questão binária (“sim” ou “não”), eles podem ter interesse em formar uma aliança de votação única, dando um ganho médio de influência para todos eles. Felsenthal e Machover (2002) estudam justamente este caso, i.e., os membros da coalizão têm opiniões independentes sobre as diferentes questões, mas concordam em estabelecer uma regra de decisão que formará a decisão da aliança. Então, a aliança se torna um novo jogador com um número de votos igual à soma dos votos de seus membros. De forma geral, podemos definir uma aliança como um bloco com alguma regra de decisão interna. Esse tipo de aliança não é baseado em afinidades especiais.

A seguir, definimos os conceitos de bloco e aliança seguindo (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002).

Quando uma coalizão S de um jogo ν se transforma em um bloco, ν deixa de existir: ele é transformado em um novo jogo de votação cujos eleitores são todos os eleitores de ν que não pertencem a S , bem como um novo eleitor, $\&_S$, que herda os mandatos de voto de todos os membros de S , mas os próprios membros de S não são mais eleitores de ν . Seja $\nu|\&_S$ o jogo de votação que resulta de ν quando S se funde em um bloco. Isso significa que os membros de S agora votam como um único órgão.

Definição 2.30. *O conjunto de eleitores de $\nu|\&_S$ é $(N \setminus S) \cup \{\&_S\}$, obtido de N removendo todos os membros de S e adicionando um novo eleitor, $\&_S$, chamado de bloco de S . Denotamos este conjunto por ' $N|\&_S$ '. As coalizões vencedoras de $\nu|\&_S$ são todas aquelas $T \subseteq N \setminus S$ tais que T é ganhadora em ν , bem como todas as coalizões $U \cup \{\&_S\}$ tais que $T \subseteq N \setminus S$ e $T \cup S$ são vencedoras em ν . Se ν é um jogo de votação com peso, então $\nu|\&_S$ também é: considere o peso de $\&_S$ como a soma dos pesos que os membros de S tinham em ν , enquanto os pesos de todos os outros eleitores, bem como a cota são mantidos os mesmos que em ν .*

O resultado a seguir de (FELSENTHAL; MACHOVER, 1998) mostra que quando dois jogadores formam um bloco, o índice de Banzhaf desse bloco é a soma dos índices de Banzhaf que os parceiros tinham no jogo de votação simples original.

Teorema 2.5. (FELSENTHAL; MACHOVER, 1998) *Para quaisquer jogadores distintos a e b de ν ,*

$$\beta_{\{a,b\}}[\nu|a\&b] = \beta_a[\nu] + \beta_b[\nu].$$

Observe que esta propriedade estritamente aditiva do índice de Banzhaf não se estende a três ou mais agentes. Isso ocorre porque o poder de Banzhaf de um terceiro agente, digamos c , em $\nu|_{\&\{a,b\}}$ não precisa ser o mesmo que em ν ; por exemplo, c pode ser um agente “*não-dummy*” em ν e tornar-se um jogador *dummy* em $\nu|_{\&\{a,b\}}$.

Um bloco $\&_S$ junto com um jogo de votação interno, ν_S , é chamado de aliança. De forma simplificada, uma aliança é um bloco com um esquema de decisão interno, determinando como o bloco votará.

Quando os membros de S formam uma aliança cujo jogo de votação interno é ν_S , isso dá origem a um novo jogo de votação composto, que designaremos por ‘ $\nu|_{\nu_S}$ ’. O conjunto de eleitores de $\nu|_{\nu_S}$ é N , o mesmo de ν . As coalizões vencedoras do jogo $\nu|_{\nu_S}$ são todos os conjuntos da forma $T \cup U$ com $T \subseteq S$ e $U \subseteq N \setminus S$ satisfazendo pelo menos uma das seguintes condições: (i) U é uma coalizão vencedora de ν . (ii) T é uma coalizão vencedora do jogo auxiliar ν_S e $S \cup U$ é uma coalizão vencedora de ν .

Definição 2.31. Para $i \in S$, definimos aliança por

$$A_i = \beta_i(\nu|_{\nu_S}) - \beta_i(\nu). \quad (2.29)$$

Quando os membros de S consideram formar uma aliança, claramente, eles irão comparar seus potenciais poderes com os poderes que eles têm no jogo original. Assim, [Felsenthal e Machover \(2002\)](#) introduzem os conceitos de aliança *viável* e aliança *conveniente*.

Definição 2.32. Devemos dizer que uma aliança com jogo de votação interno ν_S é *viável* (em relação a um determinado jogo de votação ν) se

$$\beta_i(\nu|_{\nu_S}) \geq \beta_i(\nu), \quad \forall i \in S;$$

e devemos dizer que uma aliança é *conveniente* (em relação a um determinado jogo de votação ν) se

$$\beta_i(\nu|_{\nu_S}) > \beta_i(\nu), \quad \forall i \in S.$$

Equivalentemente, dizemos que ν_S é *viável* e *conveniente* se $A_i \geq 0$ e $A_i > 0$, respectivamente.

Como descrito por ([FELSENTHAL; MACHOVER, 2002](#)), $\nu|_{\nu_S}$ funciona como segue: uma certa conta é proposta, os membros de S tomam uma decisão sobre essa conta usando ν_S , o jogo interno composto da aliança com os jogadores em S . Então, quando a conta é levada ao plenário com os jogadores N , todos os membros de S votam em bloco de acordo com sua decisão interna ditada pelo jogo ν_S .

A seguir apresentamos três teoremas cujas provas podem ser encontradas em [Felsenthal e Machover \(2002\)](#).

Teorema 2.6. Para todo $i \in S$

$$\beta_i(\nu|_{\nu_S}) = \beta_i(\nu_S) \cdot \beta_{\&_S}(\nu|_{\&_S}). \quad (2.30)$$

Assim, para obter o índice de Banzhaf indireto de i em $\nu|_{\nu_S}$, devemos multiplicar o índice direto de i em ν_S pelo índice de Banzhaf do bloco $\&_S$ em $\nu|_{\&_S}$.

Teorema 2.7. *Um bloco formado por dois jogadores nunca é conveniente. Será viável se, e somente se, originalmente os dois eleitores tenham índices de Banzhaf iguais, ou pelo menos um deles seja um jogador dummy.*

Teorema 2.8. *Sejam a , b e c jogadores distintos de ν tais que $\beta_a(\nu) = \beta_b(\nu) \geq \beta_c(\nu)$. Então, o bloco $\&_{\{a,b,c\}}$ é viável. Esse bloco é conveniente se, e somente se, c não é um jogador dummy em $\nu|_{\&_{\{a,b\}}}$.*

Exemplo 2.23. (*FELSENTHAL; MACHOVER, 2002*) *Seja ν o jogo de votação com peso de maioria com os jogadores $\{a; b; c; d; e; f\}$, portanto*

$$\nu = [4; 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

Aqui, o índice de Banzhaf de cada jogador é $5/16$. Agora, suponha que os três primeiros eleitores formem um bloco $\&_{\{a,b,c\}}$. Temos um novo jogo de votação com peso,

$$\nu|_{\&_{\{a,b,c\}}} = [4; 3, 1, 1, 1].$$

Aqui, o bloco tem poder de Banzhaf $7/8$ e cada um dos eleitores restantes tem $1/8$. Observe que o poder de Banzhaf do bloco é menor do que a soma dos poderes originais dos três parceiros. Um observador que acredita que o poder se comporta como uma utilidade transferível pode concluir que o bloco não pode ser vantajoso para os três parceiros. Mas isso é um erro. Seja o jogo auxiliar

$$\nu_{\{a,b,c\}} = [2; 1, 1, 1].$$

Neste jogo auxiliar, o poder de Banzhaf de cada parceiro é $1/2$, o que pelo Teorema 2.6 dá a cada um deles um poder de Banzhaf de $7/16$ no jogo $\nu|_{\nu_{\{a,b,c\}}}$ ($\beta_a = \beta_b = \beta_c(\nu|_{\nu_{\{a,b,c\}}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$).

Assim, cada parceiro ganhou poder absoluto, e o bloco é conveniente como diz o Teorema 2.8.

Exemplo 2.24. *Considere o jogo ν do exemplo 2.23. Agora considere a formação de um bloco de dois jogadores, a e b . Então*

$$\nu|_{\&_{\{a,b\}}} = [4; 2, 1, 1, 1, 1].$$

Seja o jogo auxiliar

$$\nu_{\{a,b\}} = [2; 1, 1].$$

Como observamos, é um jogo de votação unânime. O índice de Banzhaf de cada parceiro no jogo auxiliar é $\beta = \frac{1}{2}$. O índice de Banzhaf do bloco em $\nu|_{\&_{\{a,b\}}}$ é $\frac{5}{8}$. Usando o Teorema 2.6, temos

$$\beta_a(\nu|_{\nu_{\{a,b\}}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16}.$$

O mesmo ocorre com o jogador b . De acordo com a Definição 2.32, uma aliança é conveniente se $\beta_i(\nu|\nu_S) > \beta_i(\nu)$. Em nosso exemplo, temos que $\beta_i(\nu|\nu_{\{a,b\}}) = \beta_i(\nu) = \frac{5}{16}$, portanto a aliança não é conveniente como dito pelo Teorema 2.7.

No Capítulo 5, nós construímos uma função geradora generalizada para descrever aliança de MWVG no sentido de Felsenthal e Machover (2002), incluindo restrições na formação de coalizões.

3 Introdução aos Conceitos Matemáticos

Na primeira seção deste capítulo apresentamos uma revisão sobre os conceitos de álgebra não-linear e as bases de Gröbner. Na segunda seção apresentamos uma versão do Lema de Farkas que será importante para este trabalho. Na terceira e última seção, a Análise de Partições de MacMahon (APM) é descrita em linhas gerais.

3.1 Álgebra não-linear e as Bases de Gröbner

A álgebra linear é um dos fundamentos da ciência natural moderna: seja qual for o cálculo em que estejamos interessados, usamos equações lineares, formas quadráticas, matrizes, mapas lineares etc. Existe uma sensação generalizada de que o mundo não-linear é muito diferente e geralmente é estudado como um fenômeno sofisticado de interpolação entre diferentes regimes aproximadamente lineares. Entretanto, o mundo não-linear, com toda a sua aparente complexidade, permite uma descrição clara e precisa em termos de geometria algébrica comum (DOLOTIN; MOROZOV, 2008).

Uma das possíveis explicações para o atraso na formulação da álgebra não-linear são os diversos desafios teóricos e computacionais, como por exemplo, a falta de *softwares* eficientes, pois tratando-se de álgebra não-linear, nem todos os cálculos são feitos com facilidade, mesmo nos casos mais simples. Apesar do relativo atraso, recentemente tem se observado um crescimento de modelos não-lineares nas ciências matemáticas. Nos últimos tempos houve uma proliferação de métodos baseados em sistemas de equações e inequações polinomiais multivariadas.

O problema geral da álgebra não-linear é resolver um sistema de m equações polinomiais em n incógnitas. Este problema não está completamente resolvido. De fato, é uma das áreas mais ativas da pesquisa matemática atual - conhecida como geometria algébrica. Em razão disso, podemos dizer que no coração da álgebra não-linear está a geometria algébrica.

É importante ter cautela, pois a álgebra não-linear não é simplesmente uma nova marca da geometria algébrica. É um reconhecimento que o foco em computação e aplicações, e as necessidades teóricas que isso traz, resulta em um corpo de investigação que é complementar ao currículo existente. O termo álgebra não-linear destina-se a capturar essas tendências e a ser mais conhecido pelos cientistas aplicados. (MICHAŁEK; STURMFELS, 2018).

Objetos físicos e restrições podem ser modelados por equações e inequações polinomiais. Por esta razão, a geometria algébrica é uma ferramenta essencial para cientistas e engenheiros. Além disso, as relações entre conceitos que surgem na ciência e na engenharia são frequentemente descritas por polinômios. Qualquer que seja sua fonte, uma vez que os polinômios entrem em cena, as noções da geometria algébrica - sua base teórica, seus exemplos clássicos e suas ferramentas

computacionais modernas - podem todas ser usadas no problema em questão (HIGHAM et al., 2015).

3.1.1 Geometria Algébrica

De acordo com Griffiths e Harris (2011), a geometria algébrica está entre as disciplinas mais antigas e altamente desenvolvidas em matemática. Está intimamente ligada à geometria projetiva, análise complexa, topologia, teoria dos números e muitas outras áreas da atividade matemática atual. Além disso, nos últimos anos, a geometria algébrica passou por grandes mudanças no estilo e na linguagem.

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos comuns em aplicações da geometria algébrica seguindo Michałek e Sturmfels (2018) e Cox, Little e O’Shea (2015).

Nossa estrutura algébrica mais básica é a de um corpo. Os elementos do corpo servem como números, também chamados de escalares. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são válidas para os escalares. É habitual denotar corpos pela letra k , derivada da palavra alemã *Körper*. Como exemplo podemos citar o corpo dos números racionais ($k = \mathbb{Q}$), dos números reais ($k = \mathbb{R}$) e dos números complexos ($k = \mathbb{C}$).

Um polinômio é composto por termos, que também são conhecidos como monômios.

Definição 3.1. *Um monômio em x_1, \dots, x_n é um produto da forma*

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde todos os expoentes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são inteiros não negativos. O grau total desse monômio é a soma $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Podemos simplificar a notação para monômios da seguinte maneira: seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ uma n-tupla de inteiros não negativos. Então definimos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Quando $\alpha = (0, \dots, 0)$, observe que $x^\alpha = 1$. O grau total do monômio x^α é denotado por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Definição 3.2. *Um polinômio f em x_1, \dots, x_n com coeficientes em k é uma combinação linear finita (com coeficientes em k) de monômios. Assim, um polinômio f é escrito na forma*

$$f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in k.$$

Exemplo 3.1. *O polinômio $2xyz - x^2 - y^2 - z^2 - 1$ com $n = 3$ variáveis é um polinômio em $\mathbb{Q}[x, y, z]$.*

O conjunto de todos os polinômios em x_1, \dots, x_n com coeficientes em k é denotado por $k[x_1, \dots, x_n]$ e denominado anel polinomial.

Definição 3.3. A estrutura $k[x_1, \dots, x_n]$ é chamada de anel polinomial. Em um anel polinomial as seguintes condições são satisfeitas:

- i. $(f + g) + h = f + (g + h)$ e $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h), \forall f, g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$;
- ii. $f + g = g + f$ e $f \cdot g = g \cdot f, \forall f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$;
- iii. $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \forall f, g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$;
- iv. Existem 0 e $1 \in k$ tal que $f + 0 = f \cdot 1 = f, \forall f \in k[x_1, \dots, x_n]$;
- v. Dado $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, existe $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f + g = 0$.

O termo de referência em um polinômio é o termo de maior grau.

Definição 3.4. Seja $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ um polinômio em $k[x_1, \dots, x_n]$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ o grau total do monômio x^{α} .

- i. a_{α} é denominado coeficiente do monômio x^{α} ;
- ii. Se $a_{\alpha} \neq 0$, então $a_{\alpha} x^{\alpha}$ é um termo de f ;
- iii. O grau total de $f \neq 0$, denotado por grau (f), é o máximo de $|\alpha|$ tal que o coeficiente a_{α} é não-nulo.

Diremos que um polinômio f divide um polinômio g , se existe um polinômio $h \in k[x_1, \dots, x_n]$, tal que $g = fh$.

Os anéis polinomiais podem ter subconjuntos de certas propriedades chamadas ideais, ou seja, um ideal é um subconjunto especial de um anel polinomial. Podemos fazer uma analogia entre ideais e subespaços vetoriais: ambos são fechados em relação a adição e multiplicação, exceto que, para um subespaço, multiplicamos por escalares, enquanto que para um ideal, multiplicamos por polinômios.

Definição 3.5. Um subconjunto I do anel $k[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal se satisfaz

- i. $0 \in I$;
- ii. se $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $g \in I$, então $fg \in I$;
- iii. se $g, h \in I$, então $g + h \in I$.

Definição 3.6. Sejam f_1, \dots, f_s polinômios em $k[x_1, \dots, x_n]$, então definimos

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i \mid h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

$\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ é um ideal.

Uma maneira de construir um ideal é gerá-lo usando um conjunto finito de polinômios.

Lema 3.1. Se $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, então $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ é um ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$. Chamaremos $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ de ideal gerado por f_1, \dots, f_s .

Demonstração. Note que $0 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, pois $0 = \sum_{i=1}^s 0 \cdot f_i$. Suponha que $f = \sum_{i=1}^s p_i f_i$ e $g = \sum_{i=1}^s q_i f_i$ e seja $h \in k[x_1, \dots, x_n]$. Então as equações

$$f + g = \sum_{i=1}^s (p_i + q_i) f_i \quad e$$

$$fh = \sum_{i=1}^s (hp_i) f_i,$$

completam a prova de que $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ é um ideal. \square

Exemplo 3.2. Um exemplo simples do conceito de ideal é o conjunto de todos os inteiros divisíveis por um inteiro n , comumente denotado $n\mathbb{Z}$, que constitui um ideal de \mathbb{Z} .

$$n\mathbb{Z} = \{r \in \mathbb{Z} : n|r\}$$

Uma forma de ver o ideal é pensá-lo como um conjunto gerado pelo inteiro n . Normalmente denotamos isso usando colchetes angulares, $\langle n \rangle$, onde n é chamado de gerador. Observe que o gerador, neste caso, deve ser um elemento do próprio \mathbb{Z} e que

$$\langle 0 \rangle = \{0\} \quad \text{uma vez que } r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0 \text{ para todo } r \in \mathbb{Z}, \quad e$$

$$\langle 1 \rangle = \mathbb{Z} \quad \text{uma vez que } r \cdot 1 = 1 \cdot r = r \text{ para todo } r \in \mathbb{Z}.$$

Como mostra o exemplo a seguir, podemos pensar em $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ consistindo em todas as “consequências polinomiais” das equações $f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0$.

Exemplo 3.3. (COX; LITTLE; O’ SHEA, 2015) Considere as equações

$$\begin{aligned} x - 1 - t &= 0, \\ y - 1 - t^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para cancelarmos os termos envolvendo t , multiplicamos a primeira equação por $x - 1 + t$ e a segunda por -1 :

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - t^2 &= 0, \\ -y + 1 + t^2 &= 0, \end{aligned}$$

e então adicionamos para obter

$$(x - 1)^2 - y + 1 = x^2 - 2x + 2 - y = 0.$$

Em termos do ideal gerado pelas equações (3.1), podemos escrever isso como

$$x^2 - 2x + 2 - y = (x - 1 + t)(x - 1 - t) + (-1)(y - 1 - t^2) \in \langle x - 1 - t, y - 1 - t^2 \rangle.$$

Da mesma forma, qualquer outra “consequência polinomial” de (3.1) leva a um elemento deste ideal.

3.1.2 Divisão de Polinômios Multivariados

Como um polinômio é uma soma de monômios, é importante poder organizar os termos de um polinômio de maneira inequívoca, em ordem decrescente (ou crescente). Para fazer isso, devemos ser capazes de comparar todos os pares de monômios para estabelecer suas posições relativas de maneira apropriada. Isso significa que, para cada par de monômios x^α e x^β , exatamente uma das três afirmações deve ser verdadeira:

$$x^\alpha > x^\beta \text{ ou } x^\alpha = x^\beta \text{ ou } x^\beta > x^\alpha.$$

Os resultados de certos algoritmos importantes, como o algoritmo de divisão, podem variar dependendo de qual ordem monomial é escolhida.

Definição 3.7. Uma ordenação monomial sobre $k[x_1, \dots, x_n]$ é qualquer relação $>$ sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, ou equivalentemente, qualquer relação $>$ sobre o conjunto dos monômios x^α , $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, satisfazendo:

- i. $>$ é uma ordenação total (ou linear) sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.
- ii. Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, então $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- iii. $>$ é uma boa-ordenação em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Isto significa que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ tem um elemento menor sobre $>$.

A seguir apresentamos alguns exemplos de ordens monomiais comumente utilizadas, a saber: ordem lexicográfica, ordem lexicográfica graduada e ordem lexicográfica reversa.

A ordem monomial mais comum corresponde à ordem alfabética padrão usada na lexicografia para dicionários.

Definição 3.8 (Ordem lexicográfica - lex). Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ em $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Diz-se que $\alpha >_{lex} \beta$ se a entrada não-nula mais à esquerda do vetor diferença $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ é positiva. Escreve-se $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ se $\alpha >_{lex} \beta$.

Exemplo 3.4. Considere o polinômio $xy^2 + xyz^2$. Nesse caso, $\alpha = (1, 2, 0)$ e $\beta = (1, 1, 2)$. Portanto, temos $xy^2 >_{lex} xyz^2$, já que $\alpha - \beta = (0, 1, -2)$.

Considere agora os monômios $6x^2y$, x e $4y^3$. Então, $6x^2y >_{lex} x >_{lex} 4y^3$.

Para alguns propósitos, também podemos levar em consideração os graus totais dos monômios e ordenar os monômios de maior grau primeiro. Uma maneira de fazer isso é utilizar a ordem lexicográfica graduada (ou ordem grlex).

Definição 3.9 (Ordem Lexicográfica Graduada - grlex). Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Diz-se que $\alpha >_{grlex} \beta$ se

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad \text{ou} \quad |\alpha| = |\beta| \quad \text{se} \quad \alpha >_{lex} \beta.$$

Exemplo 3.5. Tome o polinômio $xy^2z^4 + xyz^5$. Nesse caso, $\alpha = (1, 2, 4) >_{grlex} (1, 1, 5) = \beta$ pois $|(1, 2, 4)| = |(1, 1, 5)|$ e $(1, 2, 4) >_{lex} (1, 1, 5)$.

Considere agora os monômios $6x^2y$, x e $4y^3$. Então, $6x^2y >_{grlex} 4y^3 >_{grlex} x$.

Outra ordem monomial utilizada, embora em menor escala se comparada com as acima descritas, é a ordem lexicográfica graduada reversa (ou ordem grevlex). Embora menos utilizada, recentemente foi demonstrado que, para algumas operações, a ordem grevlex é a mais eficiente para cálculos.

Definição 3.10 (Ordem Lexicográfica Graduada Reversa - grevlex). Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Diz-se que $\alpha >_{grevlex} \beta$ se

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad \text{ou quando} \quad |\alpha| = |\beta|$$

se, em $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$, a coordenada mais a direita é negativa.

Exemplo 3.6. Seja o polinômio $xy^5z^2 + x^4yz^3$, então $(1, 5, 2) >_{grevlex} (4, 1, 3)$ já que $|(1, 5, 2)| = |(4, 1, 3)|$ e $(1, 5, 2) - (4, 1, 3) = (-3, 4, -1)$.

Considere agora os monômios $6x^2y$, x e $4y^3$. Então, $6x^2y >_{grevlex} 4y^3 >_{grevlex} x$.

Definição 3.11. Dada uma ordenação de termos em $k[x_1, \dots, x_n]$ e um polinômio f nesse anel, o monômio líder de f é o monômio de maior grau em f em relação à ordenação definida.

Definição 3.12. Seja $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ um polinômio não nulo em $k[x_1, \dots, x_n]$ e seja $>$ uma ordenação monomial.

i. O multigrado de f é:

$$\text{multigrado}(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n : a_{\alpha} \neq 0\}.$$

(O máximo é escolhido com respeito a $>$).

ii. O Coeficiente Líder de f é:

$$CL(f) = a_{\text{multigradu}(f)} \in k.$$

iii. O Monômio Líder de f é:

$$ML(f) = x^{\text{multigradu}(f)}.$$

(com coeficiente 1).

iv. O Termo Líder de f é:

$$TL(f) = CL(f) \cdot ML(f).$$

Exemplo 3.7. Seja $f = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2$ e seja $>_{lex}$. Então:

$$\text{multigradu}(f) = (3, 0, 0)$$

$$CL(f) = -5$$

$$ML(f) = x^3$$

$$TL(f) = -5x^3$$

3.1.2.1 Algoritmo de Divisão em $k[x_1, \dots, x_n]$

No algoritmo de divisão para polinômios em uma variável, para a entrada de um divisor e um dividendo, temos como saída um quociente e o resto. No entanto, no caso de polinômios multivariados, os quocientes e o resto dependem da ordem monomial preestabelecida e da ordem dos divisores na divisão.

Um componente essencial do algoritmo de divisão é a noção do termo líder de um polinômio em uma variável. A definição é dada a seguir.

Definição 3.13. Dado um polinômio não-nulo $f \in k[x]$, tal que $f = c_0x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m$, em que $c_i \in k$ e $c_0 \neq 0$, temos $m = \text{grau}(f)$. Então c_0x^m é o termo líder (TL^4) de f : $TL(f) = c_0x^m$.

Por exemplo, se $f = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, então $TL(f) = 4x^3$. Observe também que se f e g são polinômios diferentes de zero, então

$$\text{grau}(f) \leq \text{grau}(g) \Leftrightarrow TL(f) \text{ divide } TL(g).$$

Em geral, nosso objetivo é dividir $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ por $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ e encontrar $q_1, \dots, q_s, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ tais que

$$f = q_1f_1 + \dots + q_sf_s + r,$$

onde q_1, \dots, q_s representam os quocientes e r , o resto da divisão. A ideia básica do algoritmo é a seguinte: cancelar o termo líder de f (com respeito a uma dada ordem monomial) pela

⁴ Do inglês, *leading term* - LT.

multiplicação de algum f_i por um monômio apropriado e, em seguida, realizar a subtração. Então, esse monômio se torna um termo no q_i correspondente. Em alguns casos, o termo líder dos polinômios subsequentes não são múltiplos de qualquer um dos $TL(f_1), \dots, TL(f_s)$, então nós os movemos diretamente para o resto e prosseguimos com o algoritmo.

Teorema 3.1 (Algoritmo de Divisão em $k[x_1, \dots, x_n]$). *Fixe uma ordenação monomial $>$ sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, e seja $F = (f_1, \dots, f_s)$ uma s -upla ordenada de polinômios em $k[x_1, \dots, x_n]$. Então todo $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ pode ser escrito como*

$$f = q_1 f_1 + \dots + q_s f_s + r,$$

onde $q_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, e ou $r = 0$ ou r é uma combinação linear, com coeficientes em k , de monômios, tais que nenhum deles é divisível por algum $TL(f_1), \dots, TL(f_s)$.

O algoritmo de divisão em $k[x_1, \dots, x_n]$ é de grande utilidade quando tratamos do problema de pertencimento a um ideal. Uma implicação do algoritmo de divisão é que, se depois de dividirmos f por $F = (f_1, \dots, f_s)$, obtermos o resto $r = 0$, então teremos

$$f = q_1 f_1 + \dots + q_s f_s,$$

o que implica $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Deste modo $r = 0$ é uma condição suficiente para a pertinência a um ideal. Entretanto, $r = 0$ não é uma condição necessária para a pertinência ao ideal [veja o exemplo 3.8].

Exemplo 3.8. *Sejam $f_1 = xy + 1, f_2 = y^2 - 1 \in k[x, y]$ com a ordenação lexicográfica $x >_{lex} y$. Vamos dividir $f = xy^2 - x$ por $F = (f_1, f_2)$.*

$$\begin{array}{r} q_1 : \\ q_2 : \\ xy + 1 \quad \overline{) xy^2 - x} \\ y^2 - 1 \end{array}$$

Tanto $TL(f_1) = xy$ como $TL(f_2) = y^2$ dividem o $TL(f) = xy^2$. Nesse exemplo, vamos usar f_1 . Então dividimos xy^2 por xy , sobrando y . Em seguida, subtraímos $y \cdot f_1$ de f :

$$\begin{array}{r} q_1 : y \\ q_2 : \\ xy + 1 \quad \overline{) xy^2 - x} \\ y^2 - 1 \quad \underline{xy^2 + y} \\ \quad \quad \quad -x - y \end{array}$$

Como o $TL(f_1)$ e o $TL(f_2)$ não divide $TL(-x - y) = -x$, o resto é $(-x - y)$ e terminamos a divisão. Dessa forma, escrevemos $f = xy^2 - x$ como

$$xy^2 - x = y \cdot (xy + 1) + 0 \cdot (y^2 - 1) + (-x - y).$$

Com $F = (f_2, f_1)$, no entanto, temos

$$xy^2 - x = x \cdot (y^2 - 1) + 0 \cdot (xy + 1) + 0.$$

O segundo cálculo mostra que $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$. Portanto, mesmo que $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$, ainda é possível obter um resto diferente de zero na divisão por $F = (f_1, f_2)$.

3.1.3 Bases de Gröbner

Um dos pilares da álgebra não-linear é a ideia de que um sistema de equações polinomiais é determinado pelo ideal associado. Entre as variáveis que geram conjuntos do ideal associado, um particular merece atenção especial: a base de Gröbner.

O conceito de bases de Gröbner foi introduzido em 1965⁵ por B. Buchberger - matemático conhecido pelo algoritmo que constrói uma Base de Gröbner para um ideal, a partir de um conjunto finito de geradores. Somente a partir da década de 1980 estudiosos passaram a se interessar pelo assunto. Desde então, muitos estudiosos têm se aprofundado no método. Trata-se de um dos métodos mais práticos para encontrar as soluções de um sistema de equações e é amplamente aplicável em programas de computador com programação matemática simbólica (*Matlab, Maple, Mathematica, SymPy*) (BEČEJAC; STEFANOV, 2020).

As bases de Gröbner juntamente com a Teoria da Eliminação (TE) são poderosas ferramentas para resolução de sistemas polinomiais multivariadas, suas aplicações se estendem aos mais variados campos, como, por exemplo, matemática aplicada, astronomia, eletrônica, controle e automação, dentre outros. Algumas aplicações são apresentadas nos parágrafos subsequentes.

Yang et al. (2015) propõem um método algébrico para um problema da eletrônica de potência, mais precisamente na tecnologia de eliminação seletiva de harmônicos (SHE – *Selective harmonic elimination*). Essa tecnologia consiste em definir os instantes, ou ângulos de comutação, para que os harmônicos indesejados sejam minimizados e tem sido amplamente utilizada em muitos conversores de média e alta potência que operam com frequência de comutação muito baixa. Ao computar as bases de Gröbner, as equações não lineares de ordem superior da SHE são convertidas em uma forma triangular por meio da TE e, então, um algoritmo recursivo é usado para resolver as equações uma por uma. Patil e Chakraborty (2014) utilizam a TE em um problema de Controle e Automação, a saber, a otimização do controle de tempo de realimentação (*feedback*). O trabalho apresenta um algoritmo que faz uso das bases de Gröbner e da TE para derivar expressões implícitas, em termos de polinômios e funções racionais, capazes de descrever as superfícies de chaveamento. No trabalho de Rameau e Serré (2015) temos uma aplicação da TE em um problema da Teoria dos Mecanismos e Máquinas: computar condições de mobilidade. Os autores destacam a frutífera aplicação das bases de Gröbner em problemas polinomiais multivariados. O trabalho apresenta uma solução genérica para o problema. A técnica apresentada inclui a utilização da TE para eliminar variáveis do sistema de equações.

⁵ (BUCHBERGER, 1965)

Em Sendra e Sendra (2015), as bases de Gröbner e a TE aparecem em um problema da Matemática Aplicada. Os autores mostram como aplicar as bases de Gröbner para computar o inverso de Drazin de uma matriz cujas entradas são funções racionais multivariadas. A inversa de Drazin é um tipo inverso generalizado de uma matriz e é bastante utilizada em equações diferenciais, equações de diferenças e cadeias de Markov finitas. Bečejac e Stefanov (2020) apresentam um novo algoritmo baseado na formação e solução de um conjunto de equações de bases de Gröbner para o problema de otimização do posicionamento de uma Unidade de Medição Fasorial (PMU - *Phasor Measurement Unit*). Uma PMU consiste em um equipamento capaz de medir grandezas elétricas: tensão, corrente e potência na forma de fasores (módulo e fase), além da frequência e da variação da frequência no tempo. O trabalho recente de Löschenbrand (2020) apresenta uma conexão entre Teoria dos Jogos e bases de Gröbner. O autor demonstra uma nova abordagem para gerar todos os equilíbrios de Nash potenciais em um sistema com múltiplos agentes, computando a base de Gröbner do problema original.

Segundo Michałek e Sturmfels (2018), informalmente, podemos pensar nas bases de Gröbner como uma versão do algoritmo euclidiano para polinômios em $n \geq 2$ variáveis, ou como uma versão de eliminação gaussiana para polinômios de grau maior ou igual a 2. Bases de Gröbner para ideais em $k[x]$ são fundamentais em álgebra não-linear, assim como a eliminação gaussiana para matrizes é fundamental quando se estuda a álgebra linear.

Algoritmos para calcular as bases de Gröbner de ideais polinomiais continuam a atrair interesse porque suas propriedades computacionalmente úteis têm muitas aplicações nas ciências puras e aplicadas (PERRY, 2020).

3.1.3.1 Ideal Monomial e o Lema de Dickson

Um ideal I que é gerado por monômios é chamado ideal monomial. Um polinômio f pertence a I se, e somente se, todos os monômios em f com coeficientes diferentes de zero pertencerem a I . Esta é uma das razões pelas quais as operações algébricas com ideais monomiais são fáceis de realizar. (HERZOG; HIBI, 2011). Esta classe de ideais é de nosso interesse, visto que a teoria da base de Gröbner reduz cálculos algébricos difíceis a cálculos com ideais monomiais, que são essencialmente de natureza combinatória.

Definição 3.14. *Um ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal monomial se existe um subconjunto $A \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ tal que I consiste de todos os polinômios que são somas finitas da forma $\sum_{\alpha \in A} h_{\alpha} x^{\alpha}$, onde $h_{\alpha} \in k[x_1, \dots, x_n]$. Neste caso, escreveremos $I = \langle x^{\alpha} : \alpha \in A \rangle$.*

Exemplo 3.9. *Seja o ideal $I = \langle x^2 \rangle$. Então I é um ideal monomial e $A = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 2\}$.*

Para todos os ideais monomiais, temos o fato de que se x^{β} está em I , então x^{β} é divisível por x^{α} para algum $\alpha \in A$. Além disso, para todo polinômio f em um ideal monomial I , podemos dizer que todo termo de f está em I e que f é uma combinação k -linear dos monômios em I .

Lema 3.2. *Seja $I = \langle x^\alpha : \alpha \in A \rangle$ um ideal monomial. Então um monômio x^β pertence a I se, e somente se, x^β é divisível por x^α para algum $\alpha \in A$.*

Demonstração. Se $x^\beta \in I$ então $x^\beta = \sum_{i=1}^n x^{\alpha_i} h_i$. Sendo assim, x^β é um monômio que certamente aparece em algum dos polinômios $x^{\alpha_i} h_i$, para $i = 1, \dots, n$, e portanto é múltiplo de x^{α_i} para algum $i = 1, \dots, n$.

Se x^β é um múltiplo de x^α para algum $\alpha \in A$, então $x^\beta \in I$ pela definição de ideal. □

Exemplo 3.10. *O ideal $I = \langle x^3 + xy^4, y^2 \rangle$ é um ideal monomial dado por $I = \langle x^3, y^2 \rangle$. Considere os polinômios $f = 6x^4 + 4xy^2 - 2x^5y$ e $g = 2x^4 + 5xy^2 - 8x^2y$.*

Todos os monômios de f são divisíveis por um dos monômios de I . Observe que $6x^4$ é divisível por x^3 , $4xy^2$ é divisível por y^2 e $-2x^5y$ é divisível por x^3 . Portanto, $f \in I$. No polinômio g , um dos monômios não é divisível por nenhum dos monômios geradores de I . Observe que $-8x^2y$ não é divisível por x^3 nem por y^2 . Portanto $g \notin I$.

As operações entre monômios são bem mais simples do que entre polinômios quaisquer. Por exemplo, o cálculo imediato do máximo divisor comum (MDC) e do mínimo múltiplo comum (MMC):

$$\begin{aligned} MDC(x^\alpha, x^\beta) &= x_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} x_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots x_n^{\min\{\alpha_n, \beta_n\}} \\ MMC(x^\alpha, x^\beta) &= x_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} x_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots x_n^{\max\{\alpha_n, \beta_n\}} \end{aligned}$$

O próximo lema fornece uma condição necessária e suficiente para que um polinômio pertença a um ideal monomial.

Lema 3.3. *Seja I um ideal monomial, e seja $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Então são equivalentes:*

- (i) $f \in I$.
- (ii) Todo termo de f pertence a I .
- (iii) f é uma k -combinação linear de monômios de I .

Demonstração. As implicações (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (1) são triviais e seguem da definição de ideal.

Mostraremos que (i) \Rightarrow (iii). Se $f \in I$, temos que $f = \sum_{i=1}^s h_i x^{\alpha_i}$, com $h_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $x^{\alpha_i} \in I$. Cada h_i pode ser expandido como uma soma de monômios com coeficientes em k . Portanto, podemos escrever

$$f = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} x^{\beta_{ij}} x^{\alpha_i},$$

onde $a_{ij}x^{\beta_{ij}}$ é um termo do polinômio h_i , com $j = 1, \dots, k_i$ e $a_{ij} \in k$. Como I é um ideal, o produto $x^{\beta_{ij}}x^{\alpha_i}$ é um monômio de I . Assim, podemos concluir que f é uma k -combinação linear de monômios em I . \square

Corolário 3.1. *Dois ideais monomiais são iguais se, e somente se, eles contém os mesmos monômios.*

O Lema de Dickson será apresentado a seguir. Ele desempenhará papel fundamental na teoria das Bases de Gröbner. O lema de Dickson nos mostra que todos os ideais monomiais de $k[x_1, \dots, x_n]$ são finitamente gerados.

Teorema 3.2 (Lema de Dickson). *Seja I um ideal monomial de $k[x_1, \dots, x_n]$, então existe um conjunto finito de monômios que geram I . Equivalentemente, $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ pode ser escrito da forma $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$, onde $\alpha(1), \dots, \alpha(s) \in A$.*

Demonstração. Para demonstrar o teorema usaremos indução sobre o número de variáveis. O caso de uma variável é imediato uma vez que em $k[x_1, \dots, x_n]$ todo ideal é principal, ou seja, $I = \langle f \rangle$ com $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Assim dado um monômio $m \in I$ temos que $m = h \cdot f$ para algum $h \in k[x_1, \dots, x_n]$. Pela igualdade de polinômios, segue que f (e h) deve ser um monômio.

Agora assumamos que o teorema é válido para $n - 1$, com $n \geq 2$. Escrevemos as variáveis como x_1, \dots, x_{n-1}, y , assim os monômios em $k[x_1, \dots, x_{n-1}, y]$ podem ser escritos como $x^\alpha y^m$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Suponha que $I \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}, y]$ é um ideal monomial. A fim de encontrar geradores para I , seja J um ideal em $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ gerado pelos monômios x^α tais que $x^\alpha y^m \in I$ para algum $m \geq 0$. Como J é um ideal monomial em $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$, nossa hipótese indutiva implica que um número finito de x^α geram J , $J = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$ (J é a “projeção” de I em $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$).

Para cada i entre 1 e s , a definição de J nos diz que $x^{\alpha(i)}y^{m_i} \in I$ para algum $m_i \geq 0$. Seja m o maior dos m_i . Então, para cada l entre 0 e $l - 1$, considere o ideal $J_l \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ gerado pelos monômios x^β tais que $x^{\beta(i)}y^l \in I$. Usando nossa hipótese indutiva novamente, J_l tem um conjunto finito de monômios geradores, digamos $J_l = \langle x^{\alpha_l(1)}, \dots, x^{\alpha_l(s_l)} \rangle$. Afirmamos que I é gerado pelos monômios da seguinte lista:

$$\begin{aligned} \text{de } J & : x^{\alpha(1)}y^m, \dots, x^{\alpha(s)}y^m \\ \text{de } J_0 & : x^{\alpha_0(1)}, \dots, x^{\alpha_0(s_0)} \\ \text{de } J_1 & : x^{\alpha_1(1)}y, \dots, x^{\alpha_1(s_1)}y \\ & \vdots \\ \text{de } J_{m-1} & : x^{\alpha_{m-1}(1)}y^{m-1}, \dots, x^{\alpha_{m-1}(s_{m-1})}y^{m-1}. \end{aligned}$$

Primeiro note que todo monômio em I é divisível por um da lista. Para ver o porquê, seja $x^\alpha y^p \in I$. Temos então:

- (i) Se $p \geq m$, então $x^\alpha y^p$ é divisível por algum $x^{\alpha(i)} y^m$ pela construção de J .
- (ii) Se $p \leq m - 1$, então $x^\alpha y^p$ é divisível por algum $x^{\alpha_p(j)} y^p$ pela construção de J_p .

Segue do Lema 3.2 que os monômios acima geram um ideal contendo os mesmos monômios tal como I . Pelo Corolário 3.1, isso implica que os ideais são iguais, e nossa afirmação está provada.

Para completar a prova do Teorema, precisamos mostrar que um conjunto finito de geradores pode ser escolhido a partir de um dado conjunto de geradores. Se retornarmos à situação anterior para escrever as variáveis como x_1, \dots, x_n , então nosso ideal monomial é $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Queremos mostrar que I é gerado por um número finito de monômios x^α , onde $\alpha \in A$. Pelo parágrafo anterior, sabemos que $I = \langle x^{\beta(1)}, \dots, x^{\beta(s)} \rangle$ para alguns monômios $x^{\beta(i)} \in I$. Como $x^{\beta(i)} \in I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$, o Lema 3.2 nos diz que cada $x^{\beta(i)}$ é divisível por $x^{\alpha(i)}$ para algum $\alpha(i) \in A$ e,

$$x^{\beta(i)} = h_i x^{\alpha(i)},$$

onde $h_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ para $i = 1, 2, \dots, s$. Dado $f \in I$, podemos escrever

$$f = \sum_{i=1}^s a_i x^{\beta(i)} = \sum_{i=1}^s (a_i h_i) x^{\alpha(i)},$$

onde $a_i h_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ e, portanto $f \in \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$.

Logo, $I = \langle x^{\alpha(1)}, \dots, x^{\alpha(s)} \rangle$. Isto completa a demonstração □

3.1.3.2 Teorema da Base de Hilbert e a Teoria das Bases de Gröbner

Fixada uma ordem monomial, cada polinômio em $k[x_1, \dots, x_n]$ possui um único termo líder, então podemos definir o ideal dos termos líderes como abaixo.

Definição 3.15. *Seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal não nulo,*

- i. *Denotamos por $TL(I)$ o conjunto de termos líderes dos elementos de I . Desde modo,*

$$TL(I) = \{cx^\alpha : \exists f \in I \text{ com } TL(f) = cx^\alpha\}.$$

- ii. *Denotamos por $\langle TL(I) \rangle$ o ideal gerado pelos elementos de $TL(I)$.*

Seja $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$, então $\langle TL(f_1), \dots, TL(f_t) \rangle$ e $\langle TL(I) \rangle$ são (ou podem ser) ideais diferentes, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.11. *Considere o ideal $I = \langle f_1 = x^2 + 2xy^2, f_2 = xy + 2y^3 - 1 \rangle$ e a ordem lexicográfica em $k[x, y]$.*

Como $y \cdot (f_1) - x \cdot (f_2) = x$, $x \in \langle f_1, f_2 \rangle$. Além disso, $TL(x) = x \in \langle TL(I) \rangle$. Mas x não é divisível por $TL(f_1) = x^2$ nem por $TL(f_2) = xy$. Segue que $x \notin \langle TL(f_1), TL(f_2) \rangle$.

De acordo com o Teorema das Bases de Hilbert, todo ideal polinomial é finitamente gerado. Uma base Gröbner é um conjunto gerador especial que possui algumas propriedades úteis.

Teorema 3.3. [Teorema das Bases de Hilbert] *Se I é qualquer ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$, então existem polinômios $g_1, \dots, g_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ tais que $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$.*

Um ideal I em um anel que satisfaz o Teorema das Bases de Hilbert é dito ser finitamente gerado, ou ter um conjunto gerador finito.

Em geral não obtemos um resto (r) unicamente definido no algoritmo de divisão. No entanto, a definição a seguir de uma base de Gröbner terá a qualidade de que a divisão de f por G produz o mesmo resto, não importando como os elementos de G sejam ordenados na divisão. (ZEADA, 2013)

Definição 3.16. *Seja uma dada ordenação de monômios em um anel $k[x_1, \dots, x_n]$. Um subconjunto finito $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ de um ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ diferente de $\{0\}$ é denominado de Base de Gröbner⁶ se $\langle TL(g_1), \dots, TL(g_t) \rangle = \langle TL(I) \rangle$.*

Equivalentemente, de maneira mais informal, um conjunto $g_1, \dots, g_t \subseteq I$ é uma base de Gröbner para I se, e somente se, o termo líder de qualquer elemento de I é divisível por um dos termos líderes $TL(g_i)$ (COX; LITTLE; O'SHEA, 2015)

Como corolário do Teorema das Bases de Hilbert aplicado ao $\langle TL(I) \rangle$, temos que todo ideal I tem uma base de Gröbner.

Corolário 3.2. *Seja I um ideal polinomial diferente de zero, então I tem uma base de Gröbner.*

Exemplo 3.12. *Este exemplo é talvez o mais simples e não trivial de base de Gröbner. Seja $>$ a ordem lexicográfica com $x >_{lex} y$. Seja $I = \langle x^2, xy + y^2 \rangle \subset k[x, y]$. A partir desses dois polinômios, vemos que o $TL(I)$ contém x^2 e xy . Podemos obter outros termos líderes que não sejam divisíveis por um deles? Podemos cancelar os termos líderes: $y(x^2) - x(xy + y^2) = xy^2$. Este não é um novo termo líder, pois é divisível por xy . Obtemos um novo termo líder cancelando: $xy^2 - y(xy + y^2) = y^3$. Assim $y^3 \in I$ e então $y^3 \in TL(I)$.*

Embora ainda não tenhamos provado isso, a base Gröbner de I é $G = \{x^2, xy + y^2, y^3\}$. No momento, porém, usamos o resultado para mostrar que as bases de Gröbner existem e, ao mesmo tempo, obtemos uma prova clara do teorema da base de Hilbert.

3.1.3.3 Propriedades das Bases de Gröbner

Nesta seção, serão apresentadas as propriedades das bases de Gröbner. Começaremos mostrando que o resto obtido no algoritmo da divisão é único quando dividimos por uma base de Gröbner. Em seguida, mostraremos um critério para o “problema de pertencimento de um ideal”.

⁶ Outro termo comumente utilizado na literatura é *Base Padrão*.

Proposição 3.1. *Seja $G = g_1, \dots, g_s$ uma base de Gröbner para o ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ e seja $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Então existe um único $r \in k[x_1, \dots, x_n]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i Nenhum termo de r é divisível por nenhum dos $TL(g_1), \dots, TL(g_s)$.*
- ii. Existe $g \in I$ tal que $f = g + r$.*

Em particular, r é o resto da divisão de f por g , não importando como os elementos de G estão ordenados quando usarmos o algoritmo de divisão.

Demonstração. O algoritmo da divisão nos dá $f = q_1g_1 + \dots + q_sg_s + r$, onde r satisfaz (i). Podemos também satisfazer (ii) simplesmente fazendo $g = q_1g_1 + \dots + q_sg_s \in I$. Isto prova a existência de r . Para provar a unicidade suponhamos que $f = g_1 + r_1 = g_2 + r_2$ satisfaça (i) e (ii). Então $r_2 - r_1 = g_1 - g_2 \in I$ e, portanto, se $r_1 \neq r_2$, então $TL(r_2 - r_1) \in \langle TL(I) \rangle = \langle TL(g_1), \dots, TL(g_s) \rangle$. Pelo Lema 3.2, temos que $TL(r_2 - r_1)$ é divisível por algum $TL(g_i)$. Isto é impossível uma vez que nenhum termo de r_1, r_2 é divisível por $TL(g_1), \dots, TL(g_s)$. Logo $r_1 - r_2$ deve ser zero e, portanto $r_1 = r_2$. A parte final da proposição segue da unicidade de r . \square

Embora tenhamos na Proposição 3.1 que os restos sejam únicos para divisão por uma base de Gröbner, os quocientes não são necessariamente únicos, pois eles podem mudar se listarmos os geradores em uma ordem diferente. Como corolário da Proposição 3.1, temos o seguinte critério para determinar quando um polinômio está em um ideal.

Corolário 3.3. *Seja $G = g_1, \dots, g_s$ uma base de Gröbner para o ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ e seja $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. Então $f \in I$ se, e somente se, o resto da divisão de f por G for zero.*

Demonstração. Se o resto é zero então $f = q_1g_1 + \dots + q_sg_s \in I$. Inversamente, dado $f \in I$ então $f = f + 0$ satisfaz as duas condições da proposição anterior. Segue, portanto que 0 é o resto da divisão de f por G . \square

Claramente, a questão agora é: como calculamos uma base de Gröbner para um ideal I ? Fixada uma ordem monomial, nosso objetivo é formular um algoritmo que nos permita determinar um conjunto de geradores para um ideal com certas propriedades de modo que um polinômio pertença ao ideal se, e somente se, deixa resto zero na divisão por estes geradores. O algoritmo de Buchberger será apresentado na próxima seção.

3.1.4 Algoritmo de Buchberger

O algoritmo de Buchberger para calcular as bases de Gröbner de ideais polinomiais multi-variados se tornou um dos algoritmos mais importantes da Álgebra Computacional. Atualmente, esse algoritmo está disponível na maioria dos sistemas de álgebra computacional e sua teoria, implementação e inúmeras aplicações estão amplamente documentadas na literatura. O algoritmo

de Buchberger introduziu o conceito de pares críticos e realiza repetidamente uma certa operação polinomial (chamada redução).

Dado um ideal I gerado pelos polinômios f_1, \dots, f_s e uma ordenação de monômios -lexicográfica, grau-lex ou grau-lex reversa -, é possível computar uma base de Gröbner usando o algoritmo de Buchberger.

O teorema das bases de Hilbert (Teorema 3.3) afirma que sempre temos uma base Gröbner finita e o algoritmo de Buchberger produz uma base Gröbner para o ideal I começando com um conjunto de geradores para esse ideal. Dada uma base Gröbner para um ideal I , pode-se fornecer algoritmos eficientes para resolver muitos problemas computacionais relativos a I . (EHRMANN, 2020)

De maneira geral, o algoritmo funciona da seguinte maneira: dado um conjunto finito F de polinômios, calcule para cada par de polinômios em F o chamado \hat{S} - polinômio e reduza-o relativamente a F a um polinômio. Se esse polinômio reduzido não for 0, insira-o em F . No término do algoritmo, todos os \hat{S} - polinômios são reduzidos a 0 e F é uma base de Gröbner.

Definição 3.17. Escreveremos \overline{f}^F para denominar o resto da divisão de f pela s -upla ordenada $F = (f_1, \dots, f_s)$. Se F é uma base de Gröbner para $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$, então podemos considerar F como um conjunto (ou seja, sem nenhuma ordem entre os seus elementos) pela Proposição 3.1.

Exemplo 3.13. Considere a divisão de $f = x^2y + xy^2 + y^2$ por $F = (y^2 - 1, xy - 1) \subseteq k[x, y]$. Usando a ordem $x >_{lex} y$, temos

$$\overline{x^2y + xy^2 + y^2}^F = 2x + 1$$

já que o resultado da divisão é

$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x + 1) \cdot (y^2 - 1) + x \cdot (xy - 1) + 2x + 1.$$

Uma vez que a eliminação está no centro das soluções para sistemas de equações e do algoritmo de Buchberger, muitas definições e provas de bases de Gröbner contam com o que é conhecido como \hat{S} -polinômio.

Definição 3.18. Sejam $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ polinômios não nulos.

i. Se $\text{multigrado}(f) = \alpha$ e $\text{multigrado}(g) = \beta$, então tomamos $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, onde $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Chamaremos x^γ o Mínimo Múltiplo Comum de $ML(f)$ e $ML(g)$, e escreveremos $x^\gamma = MMC(ML(f), ML(g))$.

ii. O \hat{S} - polinômio de f e g é a combinação

$$\hat{S}(f, g) = \frac{x^\gamma}{TL(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{TL(g)} \cdot g.$$

Como é visto no exemplo 3.14 a seguir, um polinômio $\hat{S}(f, g)$ é “projetado” para produzir o cancelamento dos termos líderes.

Exemplo 3.14. Considere $f = x^2 - y$ e $g = x^3 - z \in \mathbb{R}[x, y, z]$ e seja a seguinte ordem monomial: $x >_{lex} y >_{lex} z$. Então $TL(f) = x^2$, $TL(g) = x^3$, $multigrau(f) = (2, 0, 0)$, $multigrau(g) = (3, 0, 0)$, $\gamma = (3, 0, 0)$ e:

$$\hat{S}(x^2 - y, x^3 - z) = \frac{x^3}{x^2} \cdot (x^2 - y) - \frac{x^3}{x^3} \cdot (x^3 - z) = -xy + z.$$

Teorema 3.4 (Algoritmo de Buchberger). *Seja $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$ um ideal polinomial. Então uma base de Gröbner pode ser construída em um número finito de passos através do seguinte algoritmo:*

Algoritmo de Buchberger

Entrada: $f = (f_1, \dots, f_s)$

Saída: Uma base de Gröbner $G = (g_1, \dots, g_t)$ para I , com $F \subseteq G$

$G := F$

Repita

$G' := G$

para cada par $\{p, q\}$, com $p \neq q$ em G' **faça**

$\hat{S} := \overline{\hat{S}(p, q)}^{G'}$

se $\hat{S} \neq 0$ **então** $G := G \cup \{\hat{S}\}$

até $G = G'$

Retorne G

Exemplo 3.15. Para ilustrar o funcionamento do algoritmo de Buchberger, considere o ideal $I = \langle x^2 + 2xy^2, xy + 2y^3 - 1 \rangle$ com $x >_{lex} y \in \mathbb{R}[x, y]$. Primeiro, fazemos $G = \{x^2 + 2xy^2, xy + 2y^3 - 1\}$. Considere $G' = \{f_1 = x^2 + 2xy^2, xy + 2y^3 - 1 = f_2\}$, então

$$\hat{S}(f_1, f_2) = \frac{x^2y}{x^2} \cdot (x^2 + 2xy^2) - \frac{x^2y}{xy} \cdot (xy + 2y^3 - 1) = x.$$

Como $\hat{S} \neq 0$, $G = \{x^2 + 2xy^2, xy + 2y^3 - 1, x = f_3\}$. Para o par $\{f_2, f_3\}$, temos

$$\hat{S}(f_2, f_3) = 2y^3 - 1.$$

Portanto, devemos adicionar $f_4 = 2y^3 - 1$ ao nosso conjunto gerador G . De acordo com o algoritmo, devemos testar os seguintes pares: $\{f_1, f_3\}$, $\{f_1, f_4\}$, $\{f_2, f_4\}$ e $\{f_3, f_4\}$. Entretanto, se computarmos os \hat{S} – polinômios dos pares acima, veremos que todos reduzem a 0. Logo,

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{x^2 + 2xy^2, xy + 2y^3 - 1, x, 2y^3 - 1\}.$$

A base de Gröbner de um ideal não é única, por isso, é preciso impor condições adicionais que implicarão na unicidade.

Ao construirmos bases de Gröbner, frequentemente encontramos um conjunto de geradores muito grande. Alguns geradores desse conjunto podem ser eliminados, como aponta o lema a seguir.

Lema 3.4. *Seja G uma base de Gröbner para um ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Considere o polinômio $p \in G$ tal que $TL(p) \in \langle TL(G \setminus \{p\}) \rangle$. Então $G \setminus \{p\}$ também é uma base de Gröbner para I .*

Demonstração. Sabemos que $\langle TL(G) \rangle = \langle TL(I) \rangle$. Se $TL(p) \in \langle TL(G \setminus \{p\}) \rangle$, então $\langle TL(G) \rangle = \langle TL(G \setminus \{p\}) \rangle$ e, portanto, $\langle TL(G \setminus \{p\}) \rangle$ é também uma base de Gröbner para I . \square

Com o Lema 3.4 podemos definir o que é conhecido como base de Gröbner mínima.

Definição 3.19. *Uma base de Gröbner G para um ideal I é dita mínima se satisfaz:*

- i. $CL(p) = 1, \forall p \in G$;
- ii. $TL(p) \notin \langle TL(G \setminus \{p\}) \rangle, \forall p \in G$.

Exemplo 3.16. *Seja o ideal $I = \langle f_1 = x^3 - 2xy, f_2 = x^2y - 2y^2 + x \rangle$. Aplicando o Algoritmo de Buchberger com a ordem $grlex$ (lexicográfica graduada) com $x >_{grlex} y$, obtemos a seguinte base de Gröbner:*

$$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, x^2, xy, y^2 - (1/2)x\}.$$

Note que $TL(g_1) = xTL(g_3)$, então podemos eliminar g_1 . Observe também que $TL(g_2) = xTL(g_4)$, portanto podemos eliminar g_2 . A base mínima é

$$G = \{g_3, g_4, g_5\} = \{x^2, xy, y^2 - (1/2)x\}.$$

As bases de Gröbner mínimas não são únicas. Felizmente, podemos destacar uma base mínima que é melhor do que as outras. A definição de base reduzida é dada a seguir.

Definição 3.20. *Uma base de Gröbner G para um ideal I é dita reduzida se satisfaz:*

- i. $CL(p) = 1, \forall p \in G$;
- ii. *nenhum monômio de p está em $\langle TL(G \setminus \{p\}) \rangle, \forall p \in G$.*

Em geral, as bases de Gröbner reduzidas têm a seguinte propriedade.

Teorema 3.5. *Seja $I = \{0\}$ um ideal polinomial. Então, para uma dada ordenação monomial, I tem uma base de Gröbner reduzida, e a base de Gröbner reduzida é única.*

Observe que toda base de Gröbner reduzida é uma base mínima, isto é, nenhum polinômio pode ser removido. Além disso, ela tem a propriedade de que nenhum monômio de qualquer polinômio na base é divisível por qualquer um dos monômios líderes (exceto possivelmente ele mesmo). Se todos os polinômios em uma base de Gröbner reduzida têm coeficiente líder $CL = 1$, então essa base reduzida é única.

Exemplo 3.17. Considere uma base (ordem lexicográfica com $y >_{lex} x$) $G = \{y^2 + yx + x^2, y + x, y, x^2, x\}$. Podemos construir duas bases mínimas $G' = \{y, x\}$ e $G'' = \{y + x, x\}$. A base mínima G'' não é reduzida, visto que podemos reduzir $y + x$ a y usando x .

Dada uma base de Gröbner G , para calcular uma versão reduzida de G basta reduzir cada elemento $g \in G$ em relação a todos os outros elementos da base e, no final, fazer todos os polinômios em G mônicos, i.e., fazer o coeficiente do termo de maior grau igual a 1.

A próxima seção trata do uso de bases de Gröbner para resolver sistemas de equações polinomiais por meio da eliminação de variáveis.

3.1.5 Teoria da Eliminação

Sistemas de equações polinomiais sobre números complexos ou reais podem ser usados para modelar problemas combinatórios. Deste modo, um problema combinatório é viável se, e somente se, um sistema relacionado de equações polinomiais tiver uma solução (LOERA et al., 2009). Nesse sentido, o papel da base de Gröbner e da Teoria da Eliminação (TE) na resolução de sistemas de equações algébricas é o mesmo que o da eliminação gaussiana na resolução de sistemas de equações lineares, ou seja, obter um sistema triangular, ou realizar o processo de eliminação. A estratégia básica da teoria da eliminação será dada em dois teoremas principais: o Teorema da Eliminação e o Teorema da Extensão, seguindo Michałek e Sturmfels (2018) e Cox, Little e O’Shea (2015).

Definição 3.21. Dado $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, o l -ésimo ideal de eliminação I_l é o ideal de $k[x_{(l+1)}, \dots, x_n]$ definido por $I_l = I \cap k[x_{(l+1)}, \dots, x_n]$.

Portanto, I_l consiste em todas as consequências de $f_1 = \dots = f_s = 0$, o que elimina as variáveis x_1, \dots, x_l . Note que $I = I_0$. É importante observar que diferentes ordenações de variáveis levam a diferentes ideais de eliminação. Em suma, a eliminação de x_1, \dots, x_l significa encontrar polinômios não-nulos no l -ésimo ideal de eliminação I_l .

Teorema 3.6 (Teorema da Eliminação). Seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal e seja G uma base de Gröbner de I em relação à ordem lexicográfica em que $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Então, para todo $0 \leq l \leq n$, o conjunto $G_l = G \cap k[x_{(l+1)}, \dots, x_n]$ é uma base de Gröbner do l -ésimo ideal de eliminação I_l .

Este resultado mostra que a base Gröbner G_l em relação à ordem lex resolve o problema de eliminação simultaneamente para todos os n . Assim, calcular G_l significa triangularizar um dado sistema de equações polinomiais. Portanto, a eliminação lexicográfica é uma ferramenta chave para resolver sistemas de equações polinomiais.

Definição 3.22. Dados os polinômios $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, o conjunto $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ tal que

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall i\}$$

é chamado variedade afim.

Uma variedade afim $V(f_1, \dots, f_s) \subseteq k^n$ é o conjunto de todas as soluções do sistema de equações $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Teorema 3.7 (Teorema da Extensão). *Seja $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e I_1 o primeiro ideal de eliminação de I . Para cada $1 \leq i \leq s$, escreva f_i na forma*

$$f_i = c_i(x_2, \dots, x_n)x_1^{N_i} + \text{termos em que } x_i \text{ tem grau} < N_i,$$

onde $N_i \geq 0$ e $c_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é não-nulo. Suponha que tem-se uma solução parcial $(a_2, \dots, a_n) \in V(I_1)$. Se $(a_2, \dots, a_n) \notin V(c_1, \dots, c_s)$, então existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tal que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V(I)$.

É importante salientar que o Teorema 3.7 somente está definido para o corpo $k = \mathbb{C}$.

Exemplo 3.18. *Considere o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ 2x + y^2 + z = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1. \end{cases}$$

Utilizando a ordem lexicográfica ($x >_{lex} y >_{lex} z$), a base de Gröbner associada ao ideal gerado pelos polinômio acima é

$$\begin{aligned} g_1 &= x + y + z^2 - 1 \\ g_2 &= y^2 - y - z^2 + z \\ g_3 &= 2yz^2 + z^4 - z^2 \\ g_4 &= z^2(z - 1)^2(z^2 + 2z - 1). \end{aligned}$$

Trabalhando de trás para frente, do último gerador para o primeiro, encontramos as seguintes soluções

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}).$$

Na seção a seguir apresentaremos o Lema de Farkas e sua contribuição para a resolução de problemas de otimização não linear.

3.2 Lema de Farkas

A teoria da dualidade da programação linear e os princípios de otimalidade de muitas classes de problemas de otimização não linear são muitas vezes baseadas no lema de Farkas ou em suas generalizações.

O célebre lema de Farkas para sistemas de desigualdade linear foi introduzido em 1902⁷. Trata-se de um resultado fundamental em matemática e tem sido uma ferramenta importante para o desenvolvimento de muitos princípios matemáticos de otimização e métodos matemáticos associados. Ele fornece uma caracterização dual para a não-negatividade de uma função linear sobre um determinado sistema de desigualdade linear finito. (CHIEU et al., 2019)

O Lema de Farkas provou ser útil na Teoria da Dualidade da otimização matemática (alternativamente, programação matemática). O resultado original foi estendido e generalizado de várias maneiras. Informalmente, o Lema de Farkas afirma que um sistema de equações e desigualdades lineares tem uma solução em \mathbb{R}^n ou uma solução dual que certifica que o sistema original não tem solução. Assim, o Lema de Farkas nos fornece um meio, empregando a Teoria da Dualidade, de apresentar um certificado de inviabilidade de um sistema linear, dado que outro sistema linear associado possui uma solução.

Lema 3.5 (Lema de Farkas). *Sejam A uma matriz e \mathbf{b} um vetor, sendo que o número de linhas de A é igual à quantidade de elementos de \mathbf{b} . Então exatamente um dos dois sistemas a seguir tem solução*

- i. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para algum $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
- ii. $\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}$ para algum \mathbf{y} tal que $\mathbf{b}^T \mathbf{y} < \mathbf{0}$.

Exemplo 3.19. *Sejam:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ só tem a solução $\mathbf{x} = (3, -5, 30/19)^T$, portanto o sistema $A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ deve ter solução para algum \mathbf{y} com $\mathbf{b}^T \mathbf{y} < \mathbf{0}$. De fato, a solução $\mathbf{y} = (2, -3, 4)^T$ nos dá

$$A^T \mathbf{y} = (10, 13, 12)^T, \quad \mathbf{y} \mathbf{b} = 3(2) + 5(-3) + 1(4) = -5.$$

Na literatura, muitas variantes do lema de Farkas podem ser encontradas. A seguir, apresentamos uma versão do Lema de Farkas obtida de Michałek e Sturmfels (2018).

Lema 3.6. *Dados os polinômios f_1, \dots, f_k e g_1, \dots, g_l de grau um em $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$, exatamente uma das seguintes afirmações é válida*

- Existe um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f_i(\mathbf{x}) = 0, \forall i \in K, g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \forall j \in L.$$

⁷ Farkas J (1902) Theorie der einfachen Ungleichungen. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 124:1-27

- Existem números reais a_i ($i \in K$) e b_j ($j \in L$) tais que

$$\sum_{i=1}^k a_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^l b_j^2 g_j(\mathbf{x}) = -1$$

vale em $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$.

Um resultado mais geral está disponível com a inclusão de polinômios não lineares e desigualdades estritas, mas o Lema conforme indicado é suficiente para nossos propósitos.

No Capítulo 4, mostramos como a álgebra não-linear pode ser uma ferramenta útil na análise de jogos cooperativos. Mais precisamente, utilizamos o Lema de Farkas para fornecer uma condição necessária e suficiente para que o núcleo de jogos cooperativos seja não-vazio.

3.3 Análise de Partições de MacMahon

O sistema diofantino linear é um dos conceitos mais fundamentais da matemática. Um problema básico é determinar o conjunto de soluções inteiras não negativas de um sistema de equações ou desigualdades lineares $A\alpha = b$ para uma matriz inteira A e vetor b adequados. Em combinatória algébrica, a análise de partição de MacMahon (APM) tornou-se uma abordagem geral para problemas relacionados ao sistema diofantino linear. (XIN, 2015)

Usando a abordagem de MacMahon, problemas como contagem de pontos de rede em um politopo convexo, contagem de soluções integrais para um sistema de equações diofantinas lineares e cálculo de quase-polinômios de Ehrhart, tornam-se avaliações do termo constante de uma função racional de Elliott: uma função racional cuja denominador tem apenas fatores da forma $A - B$, onde A e B são ambos monômios. (XIN, 2004)

A ideia central da APM é o chamado processo de eliminação de variáveis. Dado um sistema diofantino, i.e., um sistema envolvendo equações e desigualdades diofantinas, o método de partição visa obter a função geratriz que descreve todas as soluções deste sistema.

3.3.1 Função geratriz

Definição 3.23. Dada uma sequência de números reais $a = a_0, a_1, a_2, \dots$, a função

$$f_a(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j,$$

é chamada de função geratriz da sequência a , e pode ser uma soma finita ou infinita. Note que nessa série a_j é o coeficiente de t^j .

Considere o exemplo de Alonso-Mejide, Casas-Méndez e Fiestras-Janeiro (2015) a seguir.

Exemplo 3.20. Considere o produto finito ou binomiais lineares $\prod_{r=1}^n (1 + \alpha_r t) = \sum_{r=0}^n a_r t^r$, com $\alpha_r \in \mathbb{R}$, onde $a_0 = 1$ e para $r > 0$, a_r é dado por:

$$a_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}$$

Se todos os valores de α_r são iguais a 1, temos que $(1 + t)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r$. Assim sendo, a função $f(t) = (1 + t)^n$ gera a sequência binomial $a = \{\binom{n}{r} \mid r = 0, 1, \dots, n\}$.

A função geratriz fornece um método para contar o número de elementos $c(r)$ partindo de um conjunto finito, quando esses elementos têm configuração dependente de uma propriedade r .

3.3.2 Análise de Partições de MacMahon e o operador Omega

Uma partição $n = (n_1; n_2; \dots; n_k)$ de um inteiro N é uma coleção não ordenada de inteiros positivos n_i , chamados de partes, tais que $|n| = n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$. Duas somas que diferem apenas na ordem de seus elementos são considerados a mesma partição. Por exemplo, o número cinco pode ser escrito de sete maneiras distintas: $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ e temos as partições $\{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}$ e $\{1, 1, 1, 1, 1\}$.

Teorema 3.8 (Lecture Hall Partition Theorem). De forma geral, o número de partições de um número inteiro positivo n pode ser escrito na forma: $n = b_j + b_{j-1} + \dots + b_1$ onde

$$\frac{b_j}{j} \geq \frac{b_{j-1}}{j-1} \geq \dots \geq b_1 \geq 0$$

e

$$b_j - b_{j-1} + \dots + (-1)^{j-1} b_1 = m,$$

onde m representa o número de partições possíveis para n em exatamente m partes ímpares cada uma menor ou igual a $2j - 1$.

Em seu famoso livro “Combinatory Analysis”⁸, MacMahon introduziu a análise de partição como um método computacional para resolver problemas combinatórios em conexão com sistemas de equações e desigualdades diofantinas lineares.

O método de Análise de Partições de MacMahon (APM) consiste na aplicação do operador linear Omega Ω , eliminando a variável λ que contenha expoentes não negativos. A seguir, apresentamos a definição do operador Omega Ω_{\geq} segundo Andrews, Paule e Riese (2001).

Definição 3.24. O operador Omega é definido em função de expansões múltiplas convergentes

$$F = \sum_{\alpha_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_i=-\infty}^{\infty} f_{\alpha_1 \dots \alpha_i} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_i^{\alpha_i} \tag{3.2}$$

⁸ (MACMAHON, 1960)

numa vizinhança aberta do círculo $|\lambda_i| = 1$. A ação do operador Ω_{\geq} é dada por

$$\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda} F = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} f_{\alpha_1 \cdots \alpha_i} \quad (3.3)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Note que o operador é linear e

$$\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda} F = \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda_1} \left(\cdots \left(\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda_n} F \right) \cdots \right) = \underset{\geq}{\Omega}^{\sigma \lambda} F$$

onde σ é qualquer permutação dos componentes de λ . Portanto, no que segue, restringimos nossa análise à eliminação de uma única variável λ já que o caso geral pode ser deduzido pela eliminação de uma variável de cada vez.

Como apontado por [Andrews, Paule e Riese \(2001\)](#), é importante trabalhar com expressões convergentes para evitar ambiguidades. No caso de nosso trabalho, trabalhamos com somas finitas de tal forma que nossas funções automaticamente satisfazem 3.24.

Doravante, para evitar confusões, geralmente omitimos o λ no símbolo de Ω e escrevemos simplesmente $\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda} F = \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda_1, \dots, \lambda_n} F = \underset{\geq}{\Omega}^{1, \dots, 1} F$ e quando temos apenas uma variável restante, escrevemos $\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda} F = \underset{\geq}{\Omega} F$. Nas aplicações, há um outro operador útil:

Definição 3.25. Para F como na Eq. (3.2) definimos

$$\underset{=}{\Omega}^{\lambda} F = f_{0 \dots 0} \quad (3.4)$$

Em termos gerais, dado o sistema linear diofantino $A\alpha = a$ e $B\alpha \geq b$ com $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\alpha \in \mathbb{B}^n$, $A = (a_{ij})_{l \times n} = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_{ij})_{m \times n} = (b_1, \dots, b_n)$, $a_j, a \in \mathbb{Z}^l$ e $b_j, b \in \mathbb{Z}^m$ ($j = 1, \dots, n$). A expressão Omega associada é dada por

$$F(x) = \underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\lambda, \mu} \sum_{\alpha} \lambda^{A\alpha - a} \mu^{B\alpha - b} x^{\alpha} = \underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\lambda, \mu} \lambda^{-a} \mu^{-b} \prod_{k=1}^n (1 - \lambda^{a_k} \mu^{b_k} x_k). \quad (3.5)$$

Ressaltamos que (3.5) não é a expressão mais geral a ser tratada pela APM, mas (3.5) é suficiente para nossos propósitos. Extensões envolvendo somas infinitas, mas limitadas, também podem ser consideradas neste contexto. Ressaltamos ainda que, neste trabalho, as desigualdades para os vetores são entendidas de forma articulada, i.e., $a \leq b$ significa $a_i \leq b_i$ para $i = 1, \dots, n$ e $\lambda^a = \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_n^{a_n}$.

A eliminação de variáveis permite que possamos enumerar todas as soluções do sistema através da função geratriz livre de variáveis Omega. Na expressão 3.5, ao somar em todo α possível, apenas os termos que satisfazem $A\alpha = a$ e $B\alpha \geq b$ serão capturados pelos operadores $\underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\lambda}$ e $\underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\mu}$, respectivamente. Finalmente, usando as Definições 3.24 e 3.25, obtemos um polinômio em x cujo coeficiente conta o número de soluções do sistema diofantino linear $A\alpha = a$ e $B\alpha \geq b$. Usamos também a notação $\mathbf{i} = (i, \dots, i)$, e.g., $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, etc.

O processo descrito no parágrafo anterior é chamado de eliminação e torna a análise de partição do MacMahon um método muito poderoso e útil para fins práticos. Por exemplo, a análise de partição de MacMahon é um método eficaz para introduzir restrições na descrição das soluções de sistemas diofantinos via geração de funções como em (NETO, 2018).

Observação 3.1. *Existe um resultado interessante que nos permite calcular a ação de $\underline{\Omega}$ em termos de $\underline{\Omega}$. Mais precisamente, para F como em (3.2) a seguinte igualdade é válida*

$$\underline{\Omega}F(\lambda) = \underline{\Omega}F(\lambda) + \underline{\Omega}F(\lambda^{-1}) - F(1) \quad (3.6)$$

o que segue diretamente da Definição 3.24. Desigualdade estritas e reversas são recuperadas dos operadores $\underline{\Omega}$ and $\underline{\Omega}$, i.e., $\underline{\Omega}F = \underline{\Omega}F - \underline{\Omega}F$ and $\underline{\Omega}F(\lambda) = \underline{\Omega}F(1/\lambda)$. Portanto, de agora em diante, consideraremos somente \geq and $=$ em nossas análises.

Retomamos o Teorema 3.8 para apresentar o exemplo a seguir seguindo Andrews, Paule e Riese (2001).

Exemplo 3.21. *Considere $j = 3$ no Teorema 3.8, temos então*

$$\frac{1}{(1 - qx)(1 - q^3x)(1 - q^5x)}. \quad (3.7)$$

O coeficiente de $x^m q^n$ representa as m partições de n . Portanto, o coeficiente de $x^m q^n$ em:

$$\underline{\Omega}_{\geq} \sum_{b_1, b_2, b_3 \geq 0} \lambda_1^{2b_3 - 3b_2} \lambda_2^{b_2 - 2b_1} x^{b_3 - b_2 + b_1} q^{b_1 + b_2 + b_3} \quad (3.8)$$

gera exatamente o número de partições quando definimos $j = 3$, pois o operador $\underline{\Omega}_{\geq}$ viabiliza apenas as partições $b_1 + b_2 + b_3 = n$ por ter todos os expoentes positivos. Agora inserimos condições para que $2b_3 - 3b_2 \geq 0$ e $b_2 - 2b_1 \geq 0$.

A série geométrica obtida ao somar os termos da expressão anterior é dada por

$$\underline{\Omega}_{\geq} \sum_{b_1 \geq 0} \left(\frac{qx}{\lambda_2^2}\right)^{b_1} \sum_{b_2 \geq 0} \left(\frac{\lambda_2 q}{\lambda_1^3 x}\right)^{b_2} \sum_{b_3 \geq 0} (\lambda_1^2 qx)^{b_3}$$

Podemos reescrever a expressão acima como

$$\underline{\Omega}_{\geq} \frac{1}{\left(1 - \frac{qx}{\lambda_2^2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2 q}{\lambda_1^3 x}\right) (1 - \lambda_1^2 qx)} \quad (3.9)$$

Temos então $n = 3$, $x_1 = x_3 = qx$, $x_2 = q/x$. Para provar o Teorema 3.8 temos que mostrar a igualdade das expressões geradas em (3.7) e (3.9). Para isso usamos o seguinte Lema:

Lema 3.7. *Para qualquer s inteiro não negativo ($s \geq 0$),*

$$\underline{\Omega}_{\geq} \frac{1}{(1 - \lambda x)(1 - \frac{y}{\lambda^s})} = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^s y)}$$

Aplicamos o Lema 3.7 para eliminar os parâmetros λ_1 e λ_2 . Dessa forma, chegamos a expressão dada por 3.7.

Demonstração. Ao aplicar o operador Omega, temos a eliminação dos λ 's com expoentes positivos:

$$\sum_{\alpha, \beta \geq 0}^{\Omega} (x\lambda)^{b_1} \left(\frac{y}{\lambda^s}\right)^{b_2} = \sum_{\alpha, \beta \geq 0}^{\Omega} \lambda^{b_1 - sb_2} x^{b_1} y^{b_2}.$$

Fazendo a mudança $b_3 = b_1 - sb_2$ obtemos

$$\sum_{b_2, b_3 \geq 0}^{\Omega} \lambda^{b_3} x^{b_3 + sb_2} y^{b_2} = \sum_{b_2, b_3 \geq 0} x^{b_3} (x^s y)^{b_2} = \frac{1}{(1-x)(1-x^s y)}.$$

□

O exemplo acima mostra que manipulações algébricas são o elemento central do método de MacMahon. Outra característica importante do método de MacMahon é o Pacote Omega⁹, um programa computacional simbólico adequado para fazer cálculos envolvendo o cálculo do operador Omega e disponível gratuitamente¹⁰. A aplicação de tal pacote permite que o método de MacMahon seja facilmente implementado no computador, já que o operador Omega é calculado automaticamente, possibilitando, assim, a execução de cálculos computacionais de maior porte.

Consideramos agora o número de soluções de uma equação diofantina considerada em Faaland (1972) que é particularmente relevante na programação inteira. O resultado principal de Faaland (1972) é uma generalização do resultado da Mignose ao obter uma relação de recursão para o número de soluções $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ da equação diofantina

$$\mathbf{a}^T \alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n = a$$

com $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ sujeito a $\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{b}$.

Proposição 3.2. O número de soluções $\mathbf{a}^T \alpha = a$ sujeito a $\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{b}$ é dado pelo coeficiente x^a e

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{b_i} x^{ja_i} \right)$$

⁹ O pacote Omega é uma implementação para o programa *Wolfram Mathematica* para Análise de Partição de MacMahon realizada por Axel Riese, um Postdoc do grupo *RISC Combinatorics (Research Institute for Symbolic Computation)*. O Pacote foi desenvolvido em conjunto com George E. Andrews e Peter Paule (ANDREWS; PAULE; RIESE, 2001). O objetivo do pacote Omega é implementar no *Mathematica* o método de MacMahon na pesquisa de análise combinatória.

¹⁰ A aquisição do pacote é dada por meio de download no endereço eletrônico: <http://www.risc.jku.at/research/combinat/software/ergosum/RISC/Omega.html>.

Demonstração. Temos

$$F(\mathbf{a}^T, -I, -\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{b}} \lambda^{\mathbf{a}^T \alpha - a} x^{\mathbf{a}^T \alpha} = \sum_{\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{b}} \lambda^{-a} \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{b_i} (\lambda x)^{j a_i} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{b_i} x^{j a_i} \right)$$

onde o único termo que sobrevive são aqueles que o expoente de x é a . □

Corolário 3.4. *O número de soluções de $\mathbf{a}^T \alpha = a$ é dado pelo coeficiente x^a de*

$$\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^{j a_i} \right)$$

Demonstração. Considere $b_i \rightarrow \infty$ na Proposição 3.2. □

Exemplo 3.22. *Consideramos o sistema*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1} = n \\ \alpha_1 \geq \alpha_2 \\ \alpha_2 \leq \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{2m} \leq \alpha_{2m+1}. \end{cases}$$

Então, a função geratriz do sistema é dada por

$$\sum_{\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{n}} \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m+1} - n} \mu_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \mu_2^{\alpha_3 - \alpha_2} \mu_3^{\alpha_4 - \alpha_3} \dots \mu_{2m}^{\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \dots x_{2m+1}^{\alpha_{2m+1}}$$

Usando Definições 3.24 e 3.25 e fazendo $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1$, temos:

$$= \sum_{\mathbf{0} \leq \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1} \leq \mathbf{n}} \left(\lambda^{\beta_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m+1} - n} \mu_1^{\beta_1} \mu_2^{\alpha_3 - \alpha_2} \mu_3^{\alpha_4 - \alpha_3} \dots \mu_{2m}^{\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}} \cdot x_1^{\alpha_2 + \beta_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{2m+1}^{\alpha_{2m+1}} \right)$$

$$= \sum_{\mathbf{0} \leq \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m+1} \leq \mathbf{n}} \left(\lambda^{\beta_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m+1} - n} \mu_2^{\alpha_3 - \alpha_2} \mu_3^{\alpha_4 - \alpha_3} \dots \mu_{2m}^{\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}} x_1^{\alpha_2 + \beta_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_{2m+1}^{\alpha_{2m+1}} \right)$$

Fazendo $\alpha_3 - \alpha_2 = \beta_2$, temos:

$$= \sum_{\mathbf{0} \leq \beta_1, \beta_2, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2m+1} \leq \mathbf{n}} \left(\lambda^{\beta_1 + \beta_2 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2m+1} - n} \mu_2^{\beta_2} \mu_3^{\alpha_4 - \beta_2 - \alpha_2} \dots \mu_{2m}^{\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}} \cdot x_1^{\alpha_2 + \beta_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_2 + \beta_2} \dots x_{2m+1}^{\alpha_{2m+1}} \right)$$

$$= \underset{=}{\overset{\lambda \mu}{\Omega \Omega}} \sum_{0 \leq \beta_1, \beta_2, \alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2m+1} \leq n} \left(\lambda^{\beta_1 + \beta_2 + 3\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2m+1} - n} \mu_3^{\alpha_4 - \beta_2 - \alpha_2} \dots \mu_{2m}^{\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}} x_1^{\alpha_2 + \beta_1} \cdot x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_2 + \beta_2} \dots x_{2m+1}^{\alpha_{2m+1}} \right)$$

⋮

Fazendo $\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m} = \beta_{2m}$, temos:

$$= \underset{=}{\overset{\lambda \mu_{2m}}{\Omega \Omega}} \sum_{0 \leq \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2m}, \alpha_2 \leq n} \left(\lambda^{\beta_1 + (2m-1)\beta_2 + (2m-2)\beta_3 + \dots + \beta_{2m} + (2m+1)\alpha_2 - n} \mu_{2m}^{\beta_{2m}} x_1^{\alpha_2 + \beta_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot x_4^{\beta_2 + \beta_3 + \alpha_2} \dots x_{2m+1}^{\beta_2 + \dots + \beta_{2m} + \alpha_2} \right)$$

$$= \underset{=}{\overset{\lambda}{\Omega}} \sum_{0 \leq \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2m}, \alpha_2 \leq n} \left(\lambda^{\beta_1 + (2m-1)\beta_2 + (2m-2)\beta_3 + \dots + \beta_{2m} + (2m+1)\alpha_2 - n} x_1^{\alpha_2 + \beta_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_2 + \beta_2} x_4^{\beta_2 + \beta_3 + \alpha_2} \dots x_{2m+1}^{\beta_2 + \dots + \beta_{2m} + \alpha_2} \right).$$

$$= \sum_{\beta_1 + (2m-1)\beta_2 + (2m-2)\beta_3 + \dots + \beta_{2m} + (2m+1)\alpha_2 = n} x_1^{\alpha_2 + \beta_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_2 + \beta_2} x_4^{\beta_2 + \beta_3 + \alpha_2} \dots x_{2m+1}^{\beta_2 + \dots + \beta_{2m} + \alpha_2}.$$

Como mostrado em (NETO, 2018), muitas restrições na formação de coalizões em jogos cooperativos podem ser reformuladas em termos de um sistema diofantino. No Capítulo 5, apresentamos uma aplicação da Análise de Partições de MacMahon em Jogos de Votação com Peso Múltiplos (MWVG).

4 Aplicações da Álgebra Não-linear em Jogos de Mercado Abstrato

Pelo Lema de Farkas, afirmar que o núcleo de um jogo é não-vazio é equivalente a não encontrar números reais y, z_S tais que

$$y(x_N - \nu(N)) + \sum_{S \subseteq N} z_S^2(x_S - \nu(S)) = -1 \quad (4.1)$$

em $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$. O certificado em (4.1) nos fornecerá um sistema, denotado por \mathcal{S}_N , de equações polinomiais quadráticas ao igualarmos cada coeficiente de x_i no L.H.S. e R.H.S. de (4.1). Seja

$$I_N = \left\langle y - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} z_{S \cup \{i\}}^2, \nu(N)y + \sum_{S \subseteq N} \nu(S)z_S^2 - 1 \right\rangle. \quad (4.2)$$

A determinação da base de Gröbner associada ao ideal I_N é direta. Em termos gerais, a computação da base de Gröbner tem um elevado custo computacional, mas no nosso caso, a base pode ser facilmente determinada devido ao fato de muitos polinômios envolvidos na aplicação do algoritmo de Buchberger serem primos relativos; ou seja, se $MMC(ML(f), ML(g)) = ML(f)ML(g)$, então f e g são primos relativos. Portanto, o fato a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para o núcleo ser não-vazio:

Fato 4.1. *O núcleo de um jogo cooperativo (N, ν) é não-vazio se, e somente se, pelo menos uma das equações $\hat{S}(g_i, g_j) = 0$ não é satisfeita, onde $G_N = \{g_1, \dots, g_k\}$ é uma base de Gröbner para o ideal I_N na Eq. (4.2).*

No caso de jogos de mercado abstrato, o seguinte lema pode ser usado para simplificar o certificado na Eq. (4.1).

Lema 4.1. *Se $\nu(N) \neq \sum_{i \in S} \nu(i)$, então o jogo de mercado abstrato admite uma normalização tal que $\nu(S) \leq 1, \forall S \subseteq N$, com $\nu(i) = 0, \forall i \in N$, e $\nu(N) = 1$.*

Demonstração. Note que $\nu(S) = a\nu(S) - b\sum_{i \in S} \nu(i)$. Ao impor $\nu(N) = 1$ e $\nu(i) = 0$ e resolver para a e b , encontramos $a = b = (\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i))^{-1}$. Lembre-se que para os jogos serem equivalentes devemos ter $a \geq 0$. Como o jogo $(N; \nu)$ é super-aditivo em N , temos $\nu(N) \geq \sum_{i=1}^m \nu(S_i)$ com $\mathcal{B} = \{S_i\}_{i=1}^m$ uma partição \mathcal{B} de N , isto é, $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$, tal que $i, j \in M$ e $\cup_{i=1}^m S_i = N$. Introduzimos o jogo (N, ν) com

$$\nu(S) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\nu(S) - \sum_{i \in S} \nu(i)}{\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i)}$$

o qual é estrategicamente equivalente a $(N; \nu)$. Desse modo, o novo jogo $(N; \nu)$ satisfaz a normalização necessária. \square

Nosso próximo resultado revisita o Teorema 1 de Cao, Qin e Yang (2018) do ponto de vista das ferramentas da álgebra não-linear apresentadas no Capítulo 3.

Teorema 4.1. *O núcleo de jogos de mercado abstrato com quatro ou menos jogadores é não-vazio.*

Demonstração. O caso $n = 2$ segue diretamente do fato de que $y(x_{12} - 1) + z_1^2 x_1 + z_2^2 x_2 = -1$ nos leva a $y + z_1^2 = 0$, $y + z_2^2$, e $y = 1$ o que é impossível.

Para $n = 3$, usamos o Lema de Farkas para obter

$$y(x_{1,2,3} - 1) + z_1^2(x_{1,2} - v(1, 2)) + z_2^2(x_{1,3} - v(1, 3)) + z_3^2 x_1 \\ + z_4^2(x_{2,3} - v(2, 3)) + z_5^2 x_2 + z_6^2 x_3 = -1, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

Portanto, temos os certificados

$$y + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \quad y + z_2^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0,$$

$$y + z_3^2 + z_4^2 + z_6^2 = 0, \quad \text{e } y + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_4 z_4^2 = 1$$

com $a_1 = v(1, 2)$, $a_2 = v(1, 3)$, e $a_4 = v(2, 3)$. Usamos a ordem lex com

$$y >_{\text{lex}} z_1 >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} z_6.$$

O ideal

$$I = \langle y + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, y + z_2^2 + z_4^2 + z_5^2, y + z_3^2 + z_4^2 + z_6^2, y + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_4 z_4^2 - 1 \rangle$$

gerado pela base de Gröbner é dado por $\langle f_1, \dots, f_{11} \rangle$ com

$$f_1 = y + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \quad f_2 = y + z_2^2 + z_4^2 + z_5^2,$$

$$f_3 = y + z_3^2 + z_4^2 + z_6^2, \quad f_4 = y + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 + a_4 z_4^2 - 1,$$

$$f_5 = z_1^2 + z_3^2 - z_4^2 - z_5^2, \quad f_6 = z_1^2 + z_2^2 - z_4^2 - z_6^2,$$

$$f_7 = z_2^2 - z_3^2 + z_5^2 - z_6^2, \quad f_8 = z_1^2 + (1 - a_2) z_2^2 + (1 - a_3) z_3^2 - a_4 z_4^2 + 1,$$

$$f_9 = (1 - a_2) z_2^2 - a_3 z_3^2 + (1 - a_4) z_4^2 + z_5^2 + 1, \quad f_{10} = -a_2 z_2^2 + (1 - a_3) z_3^2 + (1 - a_4) z_4^2 + z_6^2 + 1,$$

e

$$f_{11} = (1 - a_2 - a_3) z_3^2 + (1 - a_4) z_4^2 + a_2 z_5^2 + (1 - a_2) z_6^2 + 1.$$

Note que se $|A| = 0, 1, 2, 3$, sempre teremos uma equação polinomial sem solução, já que, pelo menos uma das condições, $a_1, a_2, a_4 \leq 0$ é verdadeira tomando $S = \emptyset$ em (2.13) ou (2.14). Portanto, pelo Lema de Farkas, o núcleo é não-vazio.

Para $n = 4$ temos a condição

$$\begin{aligned} & y(x_{1,2,3,4} - 1) + z_1^2(x_{1,2,3} - v(1, 2, 3)) + z_2^2(x_{1,2,4} - v(1, 2, 4)) + z_3^2(x_{1,3,4} - v(1, 3, 4)) \\ & + z_4^2(x_{1,2} - v(1, 2)) + z_5^2(x_{1,3} - v(1, 3)) + z_6^2(x_{1,4} - v(1, 4)) + z_7^2x_1 \\ & + z_8^2(x_{2,3,4} - v(2, 3, 4)) + z_9^2(x_{2,3} - v(2, 3)) + z_{10}^2(x_{2,4} - v(2, 4)) + z_{11}^2x_2 \\ & + z_{12}^2(x_{3,4} - v(3, 4)) + z_{13}^2x_3 + z_{14}^2x_4 = -1, \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, temos os certificados

$$y + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 = 0,$$

$$y + z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 + z_8^2 + z_9^2 + z_{10}^2 + z_{11}^2 = 0,$$

$$y + z_1^2 + z_3^2 + z_5^2 + z_8^2 + z_9^2 + z_{12}^2 + z_{13}^2 = 0,$$

$$y + z_2^2 + z_3^2 + z_6^2 + z_8^2 + z_{10}^2 + z_{12}^2 + z_{14}^2 = 0,$$

e

$$y + a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + a_3z_3^2 + a_4z_4^2 + a_5z_5^2 + a_6z_6^2 + a_8z_8^2 + a_9z_9^2 + a_{10}z_{10}^2 + a_{12}z_{12}^2 = 1$$

com $a_1 = v(1, 2, 3)$, $a_2 = v(1, 2, 4)$, $a_3 = v(1, 3, 4)$, $a_4 = v(1, 2)$, $a_5 = v(1, 3)$, $a_6 = v(1, 4)$, $a_8 = v(2, 3, 4)$, $a_9 = v(2, 3)$, $a_{10} = v(2, 4)$, e $a_{12} = v(3, 4)$. O ideal gerado pelos polinômios do certificado é dado por $\langle f_1, \dots, f_{11} \rangle$ com

$$f_1 = y + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2,$$

$$f_2 = y + z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 + z_8^2 + z_9^2 + z_{10}^2 + z_{11}^2,$$

$$f_3 = y + z_1^2 + z_3^2 + z_5^2 + z_8^2 + z_9^2 + z_{12}^2 + z_{13}^2,$$

$$f_4 = y + z_2^2 + z_3^2 + z_6^2 + z_8^2 + z_{10}^2 + z_{12}^2 + z_{14}^2,$$

$$f_5 = y + a_1z_1^2 + a_2z_2^2 + a_3z_3^2 + a_4z_4^2 + a_5z_5^2 + a_6z_6^2 + a_8z_8^2 + a_9z_9^2 + a_{10}z_{10}^2 + a_{12}z_{12}^2 - 1,$$

$$f_6 = S(f_1, f_2) = z_3^2 + z_5^2 + z_6^2 + z_7^2 - z_8^2 - z_9^2 - z_{10}^2 - z_{11}^2,$$

$$f_7 = S(f_1, f_3) = z_2^2 + z_4^2 + z_6^2 + z_7^2 - z_8^2 - z_9^2 - z_{12}^2 - z_{13}^2,$$

$$f_8 = S(f_1, f_4) = z_1^2 + z_4^2 + z_5^2 + z_7^2 - z_8^2 - z_{10}^2 - z_{12}^2 - z_{14}^2,$$

$$f_9 = S(f_2, f_3) = z_2^2 + z_4^2 + z_{10}^2 + z_{11}^2 - z_3^2 - z_5^2 - z_{12}^2 - z_{13}^2,$$

$$f_{10} = S(f_2, f_4) = z_1^2 + z_4^2 + z_9^2 + z_{11}^2 - z_3^2 - z_6^2 - z_{12}^2 - z_{14}^2,$$

$$f_{11} = S(f_3, f_4) = z_1^2 + z_5^2 + z_9^2 + z_{13}^2 - z_2^2 - z_6^2 - z_{10}^2 - z_{14}^2,$$

$$\begin{aligned} f_{12} = S(f_1, f_5) &= (1 - a_1)z_1^2 + (1 - a_2)z_2^2 + (1 - a_3)z_3^2 + (1 - a_4)z_4^2 + (1 - a_5)z_5^2 \\ &+ (1 - a_6)z_6^2 + z_7^2 - a_8z_8^2 - a_9z_9^2 - a_{10}z_{10}^2 - a_{12}z_{12}^2 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{13} = S(f_2, f_5) &= (1 - a_1)z_1^2 + (1 - a_2)z_2^2 - a_3z_3^2 + (1 - a_4)z_4^2 - a_5z_5^2 \\ &- a_6z_6^2 + (1 - a_8)z_8^2 + (1 - a_9)z_9^2 + (1 - a_{10})z_{10}^2 + z_{11}^2 - a_{12}z_{12}^2 + 1, \end{aligned}$$

$$f_{14} = S(f_3, f_5) = (1 - a_1) z_1^2 - a_2 z_2^2 + (1 - a_3) z_3^2 - a_4 z_4^2 + (1 - a_5) z_5^2 - a_6 z_6^2 + (1 - a_8) z_8^2 + (1 - a_9) z_9^2 - a_{10} z_{10}^2 + (1 - a_{12}) z_{12}^2 + z_{13}^2 + 1,$$

$$f_{15} = S(f_4, f_5) = -a_1 z_1^2 + (1 - a_2) z_2^2 + (1 - a_3) z_3^2 - a_4 z_4^2 - a_5 z_5^2 + (1 - a_6) z_6^2 + (1 - a_8) z_8^2 - a_9 z_9^2 + (1 - a_{10}) z_{10}^2 + (1 - a_{12}) z_{12}^2 + z_{14}^2 + 1,$$

$$S(f_{12}, f_{15}) = z_2^2 + z_3^2 - a_4 z_4^2 + (a_1 - a_5) z_5^2 + (1 - a_1 - a_6) z_6^2 + (1 - a_1 - a_8) z_8^2 + (a_1 - a_9) z_9^2 + (1 - a_1 - a_{10}) z_{10}^2 + z_{12}^2 + a_1 z_{13}^2 + (1 - a_1) z_{14}^2 + 1,$$

$$S(f_{14}, f_{15}) = (1 - a_1 - a_2) z_2^2 + z_3^2 - a_4 z_4^2 + (a_1 - a_5) z_5^2 + (1 - a_1 - a_6) z_6^2 + (1 - a_1 - a_8) z_8^2 + (a_1 - a_9) z_9^2 + (1 - a_1 - a_{10}) z_{10}^2 + z_{12}^2 + a_1 z_{13}^2 + (1 - a_1) z_{14}^2 + 1,$$

$$f_7 = z_2^2 - z_3^2 + z_5^2 - z_6^2,$$

$$f_8 = z_1^2 + (1 - a_2) z_2^2 + (1 - a_3) z_3^2 - a_4 z_4^2 + 1,$$

$$f_9 = (1 - a_2) z_2^2 - a_3 z_3^2 + (1 - a_4) z_4^2 + z_5^2 + 1,$$

$$f_{10} = -a_2 z_2^2 + (1 - a_3) z_3^2 + (1 - a_4) z_4^2 + z_6^2 + 1,$$

$$f_{11} = (1 - a_2 - a_3) z_3^2 + (1 - a_4) z_4^2 + a_2 z_5^2 + (1 - a_2) z_6^2 + 1.$$

Note que se $|A| = 0, 1, 2, 3$, sempre teremos uma equação polinomial sem solução, pois pelo menos uma das condições $a_1, a_2, a_4 \leq 0$ é válida. Portanto, pelo Lema de Farkas, o núcleo é não-vazio. \square

5 Aliança em MWVG com restrição na formação de coalizão e Análise de partição de MacMahon

Em situações descritas como jogos cooperativos, geralmente assume-se que qualquer conjunto de jogadores pode formar uma coalizão. No entanto, em muitas negociações que ocorrem no mundo real, nem todas as coalizões podem ser formadas. As restrições na formação de coalizões podem ser atribuídas a razões econômicas, hierárquicas, políticas etc. e fazem com que alguns indivíduos não concordem ou sejam capazes de cooperar com outros. (PULIDO; SÁNCHEZ-SORIANO, 2006) Quando dois partidos não têm nenhuma pauta em comum um com o outro e, por isso, nunca formariam uma coalizão, temos um exemplo de um jogo de votação com restrições na formação de coalizões.

Considere $\mathbf{W}^T = \{w_1, \dots, w_n\}$ o vetor de pesos de um jogo de votação como descrito em 2.21. Uma coalizão S é representada por

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^T \in \{0, 1\}^n$$

se $w_S = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\alpha}$, com $w_S = \sum_{i \in S} w(\{i\})$ e $S \subseteq N$. Por exemplo, se $n = 5$ e $S = \{2, 3, 5\}$, então $\boldsymbol{\alpha} = (0, 1, 1, 0, 1)^T$ representa a coalizão S . Suponha agora que queremos excluir ou incluir certas coalizões no cálculo do índice de poder de Banzhaf. Como $\alpha_i, \alpha_j \in \{0, 1\}$, a restrição $\alpha_i + \alpha_j - 2 = 0$ força $(\alpha_i, \alpha_j) = (1, 1)$; isto é, i e j irão cooperar. Em termos da APM, introduzimos $\underline{\Omega} \cdots \lambda^{\alpha_i - \alpha_j - 2}$. Da mesma forma, se os jogadores não cooperarem, introduzimos a restrição $1 - \alpha_i - \alpha_j \geq 0$ que força $(\alpha_i, \alpha_j) = (0, 1), (1, 0), (0, 0)$; ou seja, i e j não estão na mesma coalizão. Em termos do cálculo Omega, introduzimos $\underline{\Omega} \cdots \mu^{1 - \alpha_i - \alpha_j}$.

Exemplo 5.1. *Suponha que desejamos calcular o índice de poder para um jogo de votação com peso com $N > 5$ jogadores, mas, por algum motivo, sabemos que o jogador 3 nunca formaria uma coalizão com o jogador 5. No contexto de APM podemos introduzir a restrição na formação de coalizão*

$$\alpha_3 + \alpha_5 \leq 1.$$

Em outras palavras, não podemos ter $\alpha_3 = \alpha_5 = 1$. Essa restrição impõe que os jogadores 3 e 5 não estejam juntos na coalizão.

Como apresentado por (NETO, 2018), muitas restrições na formação de coalizões podem ser reformuladas em termos de um sistema diofantino. Portanto, apresentamos

$$\bigvee_{l=1}^k \left(\mathbf{A}^{(l)} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}^{(l)} \wedge \mathbf{B}^{(l)} \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{b}^{(l)} \right). \quad (5.1)$$

Se aplicarmos a APM para descrever as soluções de (5.1), é possível que algumas das soluções sejam contadas mais de uma vez e podemos adaptar o princípio de inclusão-exclusão ao contexto da APM para evitar múltiplas contagens como na Proposição 6 de (NETO, 2018). Portanto, no que se segue, consideramos

$$\sum_{l=1}^m \sum_{\alpha \in \mathbb{B}^n} (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda, \mu} \lambda^{c^{(l)}} \mu^{d^{(l)}} \mathbf{x}^\alpha = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda, \mu} \lambda^{-a^{(l)}} \mu^{-b^{(l)}} \prod_{i \in N} \left(1 + \lambda^{a_i^{(l)}} \mu^{b_i^{(l)}} x_i \right)$$

com $\mathbf{c}^{(l)} = \mathbf{A}^{(l)} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{a}^{(l)}$, $\mathbf{d}^{(l)} = \mathbf{B}^{(l)} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}^{(l)}$, e $\epsilon_l \in \mathbb{B}$ definidos pelo princípio da inclusão-exclusão. O próximo exemplo ilustra nossa notação.

Exemplo 5.2. Queremos determinar as soluções de $\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \geq 4$ ou $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 1$ ou $2\alpha_2 - \alpha_3 \geq 2$. Sejam $a = \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 - 4$, $b = \alpha_1 - \alpha_2 - 1$, e $c = 2\alpha_2 - \alpha_3 - 2$. Então, a função geratriz abaixo descreve todas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} & \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda, \mu, \nu} \sum_{\alpha \in \mathbb{B}^3} \left(\lambda^a + \mu^b + \nu^c - \lambda^a \mu^b - \lambda^a \nu^c - \mu^b \nu^c + \lambda^a \mu^b \nu^c \right) \mathbf{x}^\alpha \\ &= \underset{\geq}{\Omega}^{\lambda, \mu, \nu} \left(\lambda^{-4} (1 + \lambda x_1) (1 + \lambda x_2) (1 + \lambda^3 x_3) + \mu^{-1} (1 + \mu x_1) (1 + \mu^{-1} x_2) (1 + x_3) \right. \\ & \quad \left. + \nu^{-2} (1 + x_1) (1 + \nu^2 x_2) (1 + \nu^{-1} x_3) - \lambda^{-4} \mu^{-1} (1 + \lambda \mu x_1) (1 + \lambda \mu^{-1} x_2) (1 + \lambda^3 x_3) \right. \\ & \quad \left. - \lambda^{-4} \nu^{-2} (1 + \lambda x_1) (1 + \lambda \nu^2 x_2) (1 + \lambda^3 \nu^{-1} x_3) - \mu^{-1} \nu^{-2} (1 + \mu x_1) (1 + \mu^{-1} \nu^2 x_2) \right. \\ & \quad \left. \times (1 + \nu^{-1} x_3) + \lambda^{-4} \mu^{-1} \nu^{-2} (1 + \lambda \mu x_1) (1 + \lambda \mu^{-1} \nu^2 x_2) (1 + \lambda^3 \nu^{-1} x_3) \right) \\ &= x_1 + x_2 + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{2,3} + x_{1,2,3}. \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para apresentar nosso resultado principal. Usamos a notação $S^c = N \setminus S$.

Teorema 5.1. A função geratriz

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \theta^{-a^{(l)}} \iota^{-b^{(l)}} \kappa^{w_i - r} \lambda^{-r} \mu^{w_S - q} \nu^{-q} \\ & \quad \times \prod_{j \in S \setminus \{i\}} \left(1 + \theta^{a_j^{(l)}} \iota^{b_j^{(l)}} \kappa^{w_j} \lambda^{w_j} x_j \right) \prod_{k \in N \setminus S} \left(1 + \theta^{a_k^{(l)}} \iota^{b_k^{(l)}} \mu^{w_k} \nu^{w_k} x_k \right) \Bigg|_{\lambda, \nu}^1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

fornece todas as combinações de peso que contribuem para A_i (para definição de A_i , veja Eq. 2.29) e satisfaz a restrição (5.1). Onde $f(\boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\boldsymbol{\lambda}}^1 = f(\mathbf{1}) - f(\boldsymbol{\lambda})$.

Demonstração. Decompomos $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ de tal forma que $\boldsymbol{\beta}$ representa a coalizão $T \subseteq S \ni i$ e $\boldsymbol{\gamma}$ representa a coalizão $U \subseteq N \setminus S$, i.e., $\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\gamma} = 0$. Uma coalizão é vencedora no jogo $\nu|_{\nu_S}$ se

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{q} \text{ ou } \mathbf{W}|_S \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{W}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{w}_S \geq \mathbf{q} \quad (5.3)$$

com $\nu_S = [\mathbf{r}; \mathbf{W}|_S] = [\mathbf{r}; \mathbf{w}_{i_1}, \dots, \mathbf{w}_{i_s}]$. Agora determinamos sob quais condições i é um votante *swing*. Primeiro, observe que se a primeira desigualdade (5.3) for verdadeira, i não

é um jogador *swing*, ou seja, i não é necessário para vencer. Portanto, devemos considerar $S^c \setminus \{\gamma \in S^c : \mathbf{W}\gamma \geq \mathbf{q}\}$. Além disso, o jogador i deve ser um *swing* no jogo auxiliar ν_S e a terceira condição em (5.3) deve ser mantida. Com base nessas observações, concluímos com a função geratriz de i para i ser um *swinger*

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \sum_{\mathbf{0}_{S \setminus \{i\}} \leq \beta_{-i} \leq \mathbf{1}_{S \setminus \{i\}}} \sum_{\mathbf{0}_{N \setminus S} \leq \gamma \leq \mathbf{1}_{N \setminus S}} \theta^{A^{(l)} \alpha_{-i} - a^{(l)}} \\ \times \iota^{B^{(l)} \alpha_{-i} - b^{(l)}} \kappa^{W|_S \beta_{-i} + w_i - r} \lambda^{W|_S \beta_{-i} - r} \mu^{W\gamma + w_S - q} \nu^{W\gamma - q} \mathbf{x}^{\beta_{-i} + \gamma} \Bigg|_{\lambda}^{\mathbf{1}} \Bigg|_{\nu}^{\mathbf{1}}$$

e somamos sobre β_{-i} e γ . □

Primeiro, mostramos que alguns dos resultados de (NETO, 2018) seguem do Teorema 5.1. Tomamos $w_i \geq r \geq 1$ no que segue.

Corolário 5.1. *Se definirmos $S = \{i\}$ no Teorema 5.1 obtemos a função geratriz*

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \mu, \nu} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \theta^{-a^{(l)}} \iota^{-b^{(l)}} \mu^{w_i - q} \nu^{-q} \prod_{j \in N \setminus \{i\}} \left(1 + \theta^{a_j^{(l)}} \iota^{b_j^{(l)}} \mu^{w_j} \nu^{w_j} x_j \right) \Bigg|_{\nu}^{\mathbf{1}} \quad (5.4)$$

dadas nas Proposições 5 e 6 de (NETO, 2018) e adaptadas à notação utilizada neste trabalho.

Demonstração. A prova segue diretamente do Teorema 5.1, observando que $\underset{\geq}{\Omega}^{\kappa} \kappa^{w_i - r} = 1$, $\underset{\geq}{\Omega}^{\lambda} \lambda^{-r} = 0$, e usando a linearidade do Operador Omega. □

Observação 5.1. *Note que o Corolário 5.1 é uma extensão de alguns resultados de (ALGABA et al., 2003). De fato, se definirmos $(\kappa, \lambda, \theta, \iota) = (1, 1, 1, 1)$, $m = 1$ em (5.4), e $x_j = \mathbf{x}^{w_j}$, então obtemos a função geratriz na Proposição 2.2 de (ALGABA et al., 2003). A vantagem de usar a função geratriz de multi-parâmetros em (5.4) via APM é que ela seleciona diretamente os termos que entram no cálculo do índice de poder de Banzhaf de um MWVG.*

Se $\nu = [\mathbf{q}; \mathbf{W}]$ de agora em diante escrevemos

$$\beta_i^{(l)}(\nu) = \underset{\geq}{\Omega}^{\kappa, \lambda} \kappa^{w_i - q} \lambda^{-q} \prod_{j \in N \setminus \{i\}} \left(1 + \theta^{a_j^{(l)}} \iota^{b_j^{(l)}} \kappa^{w_j} \lambda^{w_j} x_j \right) \Bigg|_{\lambda}^{\mathbf{1}}.$$

A seguir, começando pelo Teorema 5.1, obtemos uma função geratriz simplificada no caso especial de um jogo de votação com peso.

Proposição 5.1. *A função geratriz*

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \theta^{-a^{(l)}} \iota^{-b^{(l)}} \kappa^{w_i - r} \lambda^{r-1} \mu^{w_S - q} \nu^{q-1} \\ \times \prod_{j \in S \setminus \{i\}} \left(1 + \theta^{a_j^{(l)}} \iota^{b_j^{(l)}} \frac{\kappa^{w_j}}{\lambda^{w_j}} x_j \right) \prod_{k \in N \setminus S} \left(1 + \theta^{a_k^{(l)}} \iota^{b_k^{(l)}} \frac{\mu^{w_k}}{\nu^{w_k}} x_k \right) \quad (5.5)$$

fornece todas as combinações de peso que contribuem para A_i e satisfazem a restrição (5.1).

Demonstração. Seguimos a prova do Teorema 5.1 e decompomos $\alpha = \beta + \gamma$. Uma coalizão é vencedora no jogo $\nu|\nu_S$ se $w\gamma \geq q$ ou $w|_S\beta \geq r$ e $w\gamma + w_S \geq q$ com $\nu_S = [r; w|_S] = [r; w_{i_1}, \dots, w_{i_s}]$. Note que uma condição necessária para i ser *swing* é $w\gamma \leq q - 1$. Portanto, temos

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \sum_{\mathbf{0}_{S \setminus \{i\}} \leq \beta_{-i} \leq \mathbf{1}_{S \setminus \{i\}}} \sum_{\mathbf{0}_{N \setminus S} \leq \gamma \leq \mathbf{1}_{N \setminus S}} \theta^{A^{(l)}\alpha_{-i} - a^{(l)}} \iota^{B^{(l)}\alpha_{-i} - b^{(l)}} \times_{\kappa} w|_S \beta_{-i} + w_i - r \lambda^{r-1-w|_S \beta_{-i}} \mu^{w\gamma + w_S - q} \nu^{q-1-w\gamma} \mathbf{x}^{\beta_{-i} + \gamma}$$

e somamos sobre β_{-i} e γ . □

Observação 5.2. Seguindo o que fizemos no Corolário 5.1, obtemos a função apresentada na Observação 3 de (NETO, 2018) da Proposição 5.1.

Finalmente, mostramos que extensões de alguns resultados de (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002) seguem diretamente do Teorema 5.1. Usamos a notação $g_i(\mu\nu) = 1 + \mu^{w_k} \nu^{w_k}$ e $g_k^{(l)}(\mu\nu) = 1 + \theta^{a_k^{(l)}} \iota^{b_k^{(l)}} \mu^{w_k} \nu^{w_k}$.

Corolário 5.2. Seja $c_i^{(l)} = (a_i^{(l)}, b_i^{(l)})$. A seguinte identidade é válida

$$\beta_{\{i,j\}}(\nu|\{i,j\}) = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{\geq}{\Omega}^{\theta, \iota} \theta^{-a^{(l)}} \iota^{-b^{(l)}} \left(\beta_i^{(l)}(\nu) \Big|_{c_j^{(l)}=0} + \beta_j^{(l)}(\nu) \Big|_{c_i^{(l)}=0} \right).$$

Demonstração. Usando o Teorema 5.1 com $x_j = 0$, $S = \{i, j\}$, e $w_i \geq r \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left. 2 \underset{\geq}{\Omega}^{\mu, \nu} \mu^{w_{i,j}-q} \nu^{-q} \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu\nu) \right|_{\nu}^1 \\ &= 2 \underset{\geq}{\Omega}^{\mu, \nu} \left(\mu^{w_{i,j}-q} \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu) - \mu^{w_{i,j}-q} \nu^{-q} \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu\nu) \right) \\ &= 2 \underset{\geq}{\Omega}^{\mu, \nu} \left(\mu^{w_{i,j}-q} \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu) - \nu^{-q} \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu\nu) \right) \\ &= 2 \underset{\geq}{\Omega}^{\nu} \left(\nu^{w_{i,j}-q} - \nu^{-q} \right) \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\nu), \end{aligned} \quad (5.6)$$

usando o fato de que sob o sinal do operador Omega, a variável μ é redundante. Em seguida, temos

$$\begin{aligned} \text{lado direito de (5.6)} &= \underset{\geq}{\Omega}^{\nu} \left(\nu^{w_i-q} - \nu^{-q} + \nu^{w_{i,j}-q} - \nu^{w_i-q} \right) \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\nu) + [i \rightarrow j] \\ &= \underset{\geq}{\Omega}^{\mu, \nu} \left(\mu^{w_i-q} \nu^{-q} + \mu^{w_{i,j}-q} \nu^{w_i-q} + \mu^{w_j-q} \nu^{-q} + \mu^{w_{i,j}-q} \nu^{w_j-q} \right) \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu\nu) \Big|_{\nu}^1 \\ &= \underset{\geq}{\Omega}^{\mu, \nu} \left(\mu^{w_i-q} \nu^{-q} g_j(\mu\nu) + \mu^{w_j-q} \nu^{-q} g_i(\mu\nu) \right) \prod_{k \in N \setminus \{i,j\}} g_k^{(l)}(\mu\nu) \Big|_{\nu}^1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Portanto, o resultado segue ao igualarmos o lado esquerdo de (5.6) com o lado direito de (5.7) e somando sobre l , usando a linearidade do operador Omega, e aplicando o operador $\underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\theta, \iota}$, depois de dividir por 2^{n-1} . \square

Observação 5.3. *O Corolário 5.2 é uma generalização do Teorema 2.5 de (FELSENTHAL; MACHOVER, 1998). De fato, se definirmos no Corolário 5.2 $(\theta, \iota) = (1, 1)$ e tomarmos $m = 1$ obtemos o Teorema 2.5 de (FELSENTHAL; MACHOVER, 1998).*

Corolário 5.3. *Seja $i \in S$. A seguinte identidade é válida*

$$\beta_i(\nu|\nu_S) = \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\theta, \iota} \theta^{-a^{(l)}} \iota^{-b^{(l)}} \beta_i^{(l)}(\nu_S) \beta_S^{(l)}(\nu|_S).$$

Demonstração. De fato, usando o Teorema 5.1, temos a fatoração

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^m (-1)^{\epsilon_l} \underset{=}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\theta, \iota} \theta^{-a^{(l)}} \iota^{-b^{(l)}} \underset{\geq}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\kappa, \lambda} \kappa^{w_i-r} \lambda^{-r} \prod_{j \in S \setminus \{i\}} \left(1 + \theta_j^{a_j^{(l)}} \iota_j^{b_j^{(l)}} \kappa^{w_j} \lambda^{w_j} x_j \right) \Big|_{\lambda}^1 \\ &\quad \times \underset{\geq}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\mu, \nu} \mu^{w_S-q} \nu^{-q} \prod_{k \in N \setminus S} \left(1 + \theta_k^{a_k^{(l)}} \iota_k^{b_k^{(l)}} \mu^{w_k} \nu^{w_k} x_k \right) \Big|_{\nu}^1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

para $i \in S$ e usando a linearidade do operador Omega. Note que $f_i(\mathbf{1})$ conta o número de *swings* do jogador i no jogo $\nu|\nu_S$ que é dado pelo produto do número de *swings* do jogador i no jogo auxiliar ν_S vezes o número de *swings* do jogdor S em $\nu|_S$. Dividindo os dois lados de (5.8) por 2^{n-1} e usando $2^{n-1} = 2^{s-1}2^{n-s}$ no lado direito de (5.8) o resultado segue. \square

Observação 5.4. *O Corolário 5.3 é uma generalização do Teorema 2.6 de (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002). De fato, se estabelecermos no Corolário 5.3 $(\theta, \iota) = (1, 1)$ e tomarmos $m = 1$ obtemos o Teorema 2.6 de (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002).*

Observação 5.5. *Nós destacamos que os Teoremas 2.7 e 2.8 de (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002) são consequências diretas dos Corolários 5.2 e 5.3 e, portanto, podem ser vistos como casos particulares do Teorema 5.1.*

Exemplo 5.3. *Seja $\nu = [6; 2, 1, 1, 1, 1, 1]$, $S = \{2, 3, 4, 5\}$, e $\nu_S = [3; 1, 1, 1, 1]$ como no exemplo 4.3 obtido de (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002). Nesse caso, temos*

$$f_2(\mathbf{1}) = \underset{\geq}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\kappa, \lambda, \mu, \nu} \kappa^{-2} \mu^{-2} \lambda^2 \nu^5 \left(1 + \frac{\kappa}{\lambda} \right)^3 \left(1 + \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{\mu}{\nu} \right)^2 = 15.$$

Obtemos $\beta_2(\nu|\nu_S) = 15/2^6 = 15/64$ como em (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002). Finalmente, consideramos a mesma situação, mas tal que 3 não forma uma coalizão com 4. Temos

$$f_2(\mathbf{1}) = \underset{\geq}{\underset{\geq}{\Omega}}^{\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu} \iota \kappa^{-2} \mu^{-2} \lambda^2 \nu^5 \left(1 + \frac{\kappa}{\lambda} \right) \left(1 + \iota^{-1} \frac{\kappa}{\lambda} \right)^2 \left(1 + \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) \left(1 + \frac{\mu}{\nu} \right)^2 = 10$$

e obtemos $\beta_2(\nu|\nu_S) = 10/2^6 = 5/32$.

6 Conclusão

Neste trabalho, mostramos como a álgebra não-linear pode ser uma ferramenta útil na análise de jogos cooperativos. Mais precisamente, fornecemos uma nova condição necessária e suficiente para o para que o núcleo de jogos cooperativos seja não-vazio. Acreditamos que este trabalho é interessante por vários motivos. Em primeiro lugar, o certificado para a existência do núcleo se reduz a cálculos envolvendo um sistema de equações polinomiais quadráticas para as quais a teoria de eliminação da geometria algébrica está disponível. Em segundo lugar, uma das principais desvantagens em relação à base de Gröbner compreende seu custo computacional. No contexto do nosso problema, ocorre uma grande simplificação, pois muitos dos polinômios envolvidos são primos relativos. Terceiro, o método é versátil, como mostramos ao obter os resultados no Capítulo 4. Finalmente, cálculos envolvendo sistemas polinomiais se encaixam bem com pacotes de computação simbólica, como *Maple* ou *Mathematica*, que executam cálculos com bases de Gröbner.

A construção de pontes entre a partição de números e a análise de JVP e MWVG tem se mostrado uma área fértil de exploração nos últimos anos (NETO, 2018; FRIEDMAN, 2016) e esta pesquisa reforça essa mensagem. De fato, unificamos e generalizamos o trabalho (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002; NETO, 2018) através da construção de uma função geratriz generalizada no Teorema 5.1 em relação ao cálculo de aliança usando o índice de poder de Banzhaf. Por unificação, queremos dizer que os resultados de (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002; NETO, 2018) surgem como consequências do uso da APM na análise de MWVG. Por generalização, queremos dizer que tomando $S = \{i\}$ no Teorema 5.1 recuperamos a função geratriz de (NETO, 2018) (ver Corolário 5.1) e sem restrições na formação da coalizão, recuperamos alguns dos resultados estruturais de A_i em (FELSENTHAL; MACHOVER, 2002) (ver Corolários 5.2 e 5.3 e Observação 5.5). Finalmente, do lado computacional, uma vez que colocamos o cálculo da aliança no contexto da APM ganhamos outro subproduto introduzido em (ANDREWS; PAULE; RIESE, 2001): o pacote Omega, um pacote computacional simbólico que implementa o cálculo do operador Omega no *Mathematica*.

Como trabalhos futuros, pretendemos abordar outros jogos no contexto da estrutura apresentada no Capítulo 4 e incluir outro aspecto importante nos JVPs da vida real, ou seja, a inclusão da abstenção na análise de aliança seguindo a abordagem da função geratriz de (FREIXAS, 2012). Também pretendemos estudar outras formas de manipulação, incluindo a variação da cota do JVP associado para o qual uma representação de índices de poder baseada em métodos de álgebra tropical (BUTKOVIC, 2010) está disponível (NETO, 2019).

Referências

- ABE, T. Decomposing a balanced game: A necessary and sufficient condition for the nonemptiness of the core. *Economics Letters*, p. 9–13, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.
- ALBIZURI, M. J.; VIDAL-PUGA, J. Values and coalition configurations. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 81, p. 3–26, 2015. Citado na página 5.
- ALGABA, E. et al. Relationship between labeled network games and other cooperative games arising from attributes situations. *Economics Letters*, p. 1–6, 2019. Citado na página 1.
- ALGABA, E. et al. Computing power indices in weighted multiple majority games. *Math. Social Sci.*, Elsevier, v. 46, n. 1, p. 63–80, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 2, 23, 34 e 73.
- ALONSO-MEIJIDE, J. M. et al. Weighted multiple majority games with unions: Generating functions and applications to the European Union. *European J. Oper. Res.*, Elsevier, v. 198, n. 2, p. 530–544, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- ALONSO-MEIJIDE, J. M.; BOWLES, C. Generating functions for coalitional power indices: an application to the IMF. *Ann. Oper. Res.*, Springer, v. 137, n. 1, p. 21–44, 2005. Citado na página 3.
- ALONSO-MEIJIDE, J. M.; CASAS-MÉNDEZ, B.; FIESTRAS-JANEIRO, M. G. Computing banzhaf–coleman and shapley–shubik power indices with incompatible players. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 252, p. 377–387, 2015. Citado na página 60.
- ANDREWS, G. E.; PAULE, P.; RIESE, A. Macmahon’s partition analysis: the omega package. *European Journal of Combinatorics*, Elsevier, v. 22, n. 7, p. 887–904, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 3, 61, 62, 63, 64 e 76.
- APARTSIN, Y.; HOLZMAN, R. The core and the bargaining set in glove-market games. *International Journal of Game Theory*, v. 32, p. 189–204, 2003. Citado na página 7.
- ATAY, A. An alternative proof of the characterization of core stability for the assignment game. *Operations Research Letters*, v. 45, n. 3, p. 217 – 219, 2017. Citado na página 26.
- AZIZ, H.; PATERSON, M.; LEECH, D. *Combinatorial and computational aspects of multiple weighted voting games*. [S.l.], 2007. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- AZIZ, H.; PATERSON, M.; LEECH, D. Efficient algorithm for designing weighted voting games. In: *2007 IEEE International Multitopic Conference*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 1–6. Citado na página 23.
- BACHRACH, Y.; PARKES, D. C.; ROSENSCHEIN, J. S. Computing cooperative solution concepts in coalitional skill games. *Artificial Intelligence*, v. 204, p. 1–21, 2013. Citado na página 24.
- BANZHAF, J. F. Weighted voting doesn’t work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, v. 19, p. 317, 1964. Citado na página 32.

- BEČEJAC, V.; STEFANOV, P. Groebner bases algorithm for optimal pmu placement. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 115, p. 105427, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.
- BRACKIN, R. N. *N-Person Cooperative Game Theory Solutions, Coalitions, and Applications*. Dissertação (Mestrado) — University of Tennessee, Knoxville, 2002. Citado na página 24.
- BU, Z. et al. Link prediction in temporal networks: Integrating survival analysis and game theory. *Information Sciences*, v. 498, p. 41 – 61, 2019. Citado na página 5.
- BUCHBERGER, B. Bruno buchberger's phd thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *English translation published in the Journal of Symbolic Computation (2006)*, Austria, v. 41, p. 475–511, 03 1965. Citado na página 47.
- BUTKOVIC, P. *Max-linear systems: theory and algorithms*. [S.l.]: Springer, New York, 2010. Citado na página 76.
- CAO, Z.; QIN, C.; YANG, X. Shapley's conjecture on the cores of abstract market games. *Games and Economic Behavior*, p. 466–477, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 3, 13, 18, 30, 31 e 68.
- CHALKIADAKIS, G.; ELKIND, E.; WOOLDRIDGE, M. *Computational Aspects of Cooperative Game Theory*. [S.l.]: Morgan & Claypool Publishers, 2012. Citado 9 vezes nas páginas 1, 2, 7, 10, 17, 21, 24, 30 e 33.
- CHAVOSHLOU, A. S.; KHAMSEH, A. A.; NADERI, B. An optimization model of three-player payoff based on fuzzy game theory in green supply chain. *Computers & Industrial Engineering*, v. 128, p. 782 – 794, 2019. Citado na página 5.
- CHESSA, M. A generating functions approach for computing the public good index efficiently. *TOP*, Springer, v. 22, n. 2, p. 658–673, 2014. Citado na página 2.
- CHIEU, N. et al. A copositive farkas lemma and minimally exact conic relaxations for robust quadratic optimization with binary and quadratic constraints. *Operations Research Letters*, v. 47, n. 6, p. 530 – 536, 2019. Citado na página 59.
- COX, D. A.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. 4. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 40, 42, 52 e 57.
- DEMANGE, G. Strategyproofness in the assignment market game. *Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique*, Paris, 1982. Citado na página 17.
- DIAKONIKOLAS, I.; PAVLOU, C. On the complexity of the inverse semivalue problem for weighted voting games. *CoRR*, abs/1812.11712, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 32.
- DOLOTIN, V.; MOROZOV, A. *Introduction to Non-Linear Algebra*. Moscow, Russia: Wspc, 2008. Citado na página 39.
- EHRMANN, D. J. *Khovanskii-Gröbner basis*. Tese (Doutorado) — University of Pittsburgh, 2020. Citado na página 54.
- ESTÉVEZ-FERNÁNDEZ, A. et al. On the 1-nucleolus. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 86, p. 309–329, 2017. Citado na página 5.

- FAALAND, B. On the number of solutions to a diophantine equation. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 13, n. 2, p. 170–175, 1972. ISSN 0097-3165. Citado na página 64.
- FARIA, V. A. et al. Cooperative game theory and last addition method in the allocation of firm energy rights. *Applied Energy*, v. 226, p. 905 – 915, 2018. Citado na página 5.
- FATIMA, S.; WOOLDRIDGE, M.; JENNINGS, N. R. A heuristic approximation method for the banzhaf index for voting games. *Multiagent & Grid Systems*, v. 8, n. 3, p. 257 – 274, 2012. ISSN 15741702. Citado na página 2.
- FEIX, M. R. et al. On the voting power of an alliance and the subsequent power of its members. *Social Choice & Welfare*, v. 28, n. 2, p. 181 – 207, 2007. ISSN 01761714. Citado na página 35.
- FELSENTHAL, D. S.; MACHOVER, M. *The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes*. [S.l.]: Edward Elgar, Cheltenham, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 75.
- FELSENTHAL, D. S.; MACHOVER, M. Annexations and alliances: When are blocs advantageous a priori? *Soc. Choice Welf.*, Springer, v. 19, n. 2, p. 295–312, 2002. Citado 9 vezes nas páginas 2, 3, 35, 36, 37, 38, 74, 75 e 76.
- FREIXAS, J. Probabilistic power indices for voting rules with abstention. *Math. Social Sci.*, Elsevier, v. 64, p. 89–99, 2012. Citado na página 76.
- FRIEDMAN, J. A note on hierarchies in weighted voting games and partitions. *Ramanujan J.*, Springer, v. 41, n. 1, p. 305–310, 2016. Citado na página 76.
- GEÇKIL, I.; ANDERSON, P. L. *Applied Game Theory and Strategic Behavior*. 1. ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2010. 230 p. Citado na página 4.
- GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of Algebraic Geometry*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2011. 832 p. Citado na página 40.
- GUERCI, E.; HANAKI, N.; WATANABE, N. Meaningful learning in weighted voting games: an experiment. *Theory and Decision*, v. 83, p. 131–153, 2017. Citado na página 22.
- GUTIERREZ, E. et al. On horizontal cooperation in linear production processes with a supplier that controls a limited resource. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 90, p. 169–196, 2019. Citado na página 6.
- HAIMANKO, O. The axiom of equivalence to individual power and the banzhaf index. *Games and Economic Behavior*, v. 108, p. 391–400, 2018. Special Issue in Honor of Lloyd Shapley: Seven Topics in Game Theory. Citado na página 32.
- HAMIDI, M.; LIAO, H.; SZIDAROVSKY, F. Non-cooperative and cooperative game-theoretic models for usage-based lease contracts. *European Journal of Operational Research*, v. 255, n. 1, p. 163 – 174, 2016. Citado na página 6.
- HARSANYI, J. C. A general theory of rational behavior in game situations. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 34, n. 3, p. 613–634, 1966. Citado na página 4.
- HERZOG, J.; HIBI, T. Monomial ideals. In: _____. *Monomial Ideals*. London: Springer London, 2011. p. 3–22. Citado na página 48.

- HIGHAM, N. J. et al. *The Princeton Companion to Applied Mathematics*. [S.l.]: Princeton University Press, 2015. Citado na página 40.
- HILLER, T. Excluded coalitions and the distribution of power in parliaments. *Appl. Econ.*, Taylor and Francis, v. 48, n. 4, p. 321–330, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- HIRAI, T.; WATANABE, N.; MUTO, S. Farsighted stability in patent licensing: An abstract game approach. *Games and Economic Behavior*, p. 141–160, 2019. Citado na página 6.
- HOGWEIJ, S. *Sequencing Games with a Target Player*. 63 p. Dissertação (Mestrado) — Tilburg University, The Netherlands, 2017. Citado na página 9.
- HOU, D. et al. A note on the shapley value for airport cost pooling game. *Games and Economic Behavior*, p. 162–169, 2018. Citado na página 6.
- KROUPA, T.; STUDENY, M. Facets of the cone of totally balanced games. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 90, n. 2, p. 271–300, 2019. Citado na página 14.
- LACKES, R.; SIEPERMANN, M.; VETTER, G. What drives decision makers to follow or ignore forecasting tools - a game based analysis. *Journal of Business Research*, v. 106, p. 315 – 322, 2020. Citado na página 5.
- LI, M. et al. Shared control with a novel dynamic authority allocation strategy based on game theory and driving safety field. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 124, p. 199 – 216, 2019. Citado na página 5.
- LIU, D. et al. A fuzzy cooperative game theoretic approach for multinational water resource spatiotemporal allocation. *European Journal of Operational Research*, v. 282, n. 3, p. 1025 – 1037, 2020. Citado na página 6.
- LOERA, J. et al. Expressing combinatorial problems by systems of polynomial equations and hilbert’s nullstellensatz. *Combinatorics, Probability & Computing*, v. 18, p. 551–582, 07 2009. Citado na página 57.
- LÖSCHENBRAND, M. Finding multiple nash equilibria via machine learning-supported gröbner bases. *European Journal of Operational Research*, 2020. Citado na página 48.
- MACMAHON, P. *Combinatory analysis, 1915-16, Two volumes (bound as one)*, Chelsea Pub. [S.l.]: Co, 1960. Citado na página 61.
- MASCHLER, M.; SOLAN, E.; ZAMIR, S. *Game Theory*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 979 p. Citado 8 vezes nas páginas 1, 4, 6, 13, 23, 27, 28 e 30.
- MEI, J. et al. Coalitional game theory based local power exchange algorithm for networked microgrids. *Applied Energy*, v. 239, p. 133 – 141, 2019. Citado na página 5.
- MENDONÇA, F. V. et al. Improving medical decision-making with a management science game theory approach to liver transplantation. *Omega*, p. 102050, 2019. Citado na página 5.
- MICHAŁEK, M.; STURMFELS, B. *Invitation to Nonlinear Algebra*. Leipzig: Max-planck Institute, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 39, 40, 48, 57 e 59.
- MYERSON, R. B. Graphs and cooperation in games. *Math. Oper. Res.*, Springer, v. 2, n. 3, p. 225–229, 1977. Citado na página 2.

- NAGURNEY, A.; SALARPOUR, M.; DANIELE, P. An integrated financial and logistical game theory model for humanitarian organizations with purchasing costs, multiple freight service providers, and budget, capacity, and demand constraints. *International Journal of Production Economics*, v. 212, p. 212 – 226, 2019. Citado na página 5.
- NETO, A. F. Generating functions of weighted voting games, MacMahon's partition analysis, and Clifford algebras. *Math. Oper. Res. articles in advance*, 2018. Citado 10 vezes nas páginas 2, 3, 5, 63, 66, 71, 72, 73, 74 e 76.
- NETO, A. F. Tropical algebra and partition analysis meet weighted voting games. *unpublished results*, 2019. Citado na página 76.
- NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. [S.l.]: Princeton University Press, 1944. Citado na página 21.
- PATIL, D. U.; CHAKRABORTY, D. Computation of time optimal feedback control using groebner basis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 59, n. 8, p. 2271–2276, 2014. Citado na página 47.
- PERRY, J. A dynamic f4 algorithm to compute gröbner bases. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, v. 31, p. 411–434, 07 2020. Citado na página 48.
- PETERS, H. *Game Theory: A multi-leveled approach*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. 494 p. Citado 3 vezes nas páginas 4, 16 e 32.
- PETROSYAN, L. Strong strategic support of cooperation in multistage games. *International Game Theory Review*, v. 21, n. 01, p. 1–12, 2019. Citado na página 5.
- PULIDO, M. A.; SÁNCHEZ-SORIANO, J. Characterization of the core in games with restricted cooperation. *European Journal of Operational Research*, v. 175, n. 2, p. 860–869, 2006. Citado na página 71.
- RADZIK, T.; DRIESSEN, T. Modeling values for tu-games using generalized versions of consistency, standardness and the null player property. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 83, p. 179–205, 2016. Citado na página 5.
- RAMEAU, J.-F.; SERRÉ, P. Computing mobility condition using groebner basis. *Mechanism and Machine Theory*, v. 91, p. 21 – 38, 2015. Citado na página 47.
- RODRÍGUEZ-VEIGA, J.; NOVOA-FLORES, G. I.; CASAS-MÉNDEZ, B. Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration. *Discrete Appl. Math.*, Elsevier, v. 214, p. 1–15, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- ROSHANAIEI, V. et al. Collaborative operating room planning and scheduling. *INFORMS Journal on Computing*, v. 29, n. 3, p. 558–580, 2017. Citado na página 6.
- ROTH, A. E. Introduction to the shapley value. In: _____. *The Shapley value*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1988. p. 1 – 28. Citado na página 6.
- SAMUELSON, L. Game theory in economics and beyond. *Journal of Economic Perspectives*, v. 30, n. 4, p. 107–130, 2016. Citado na página 4.
- SARJIYA; BUDI, R. F. S.; HADI, S. P. Game theory for multi-objective and multi-period framework generation expansion planning in deregulated markets. *Energy*, v. 174, p. 323 – 330, 2019. Citado na página 5.

- SENDRA, J.; SENDRA, J. R. Gröbner basis computation of drazin inverses with multivariate rational function entries. *Applied Mathematics and Computation*, v. 259, p. 450 – 459, 2015. Citado na página 48.
- SHAPLEY, L. S. Markets as cooperative games. *Rand Corporations*, p. 1–5, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.
- SHAPLEY, L. S. Complements and substitutes in the optimal assignment problem. *Nav. Res. Logist*, p. 45–48, 1962. Citado na página 18.
- SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. On market games. *Journal of Economic Theory*, p. 9–25, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 30.
- SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. The assignment game i: the core. *Game Theory*, p. 111–130, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. Characteristic function, the core and stable set. In: _____. R-904/6-nsf. Santa Monica: Rand, 1973. cap. 6, p. 1 – 97. Citado na página 26.
- SOHRABI, M. K.; AZGOMI, H. Evolutionary game theory approach to materialized view selection in data warehouses. *Knowledge-Based Systems*, v. 163, p. 558 – 571, 2019. Citado na página 5.
- SOUZA, M. A. da S.; LI, W.; GARCIA, R. C. Stable two-sided matching of slot allocation in airport collaborative decision making by top trading cycles mechanism. *Chinese Journal Of Aeronautics*, p. 534–545, 2018. Citado na página 1.
- SOUZA, N. N. F.; AFLALO, B. S.; YONEYAMA, T. Jogos cooperativos na alocação de custos de estoques de peças compartilhados. In: _____. *Métodos Quantitativos – Pesquisa Operacional*. 2. ed. Belo Horizonte: Editora Poisson, 2018. v. 2, cap. 9, p. 104–114. Citado na página 8.
- STUART, H. W. Substitution, complementarity, and stability. *International Game Theory Review*, v. 21, n. 01, p. 1940006, 2019. Citado na página 5.
- TAYLOR, A. D.; ZWICKER, W. S. *Simple Games: Desirability Relations, Trading, Pseudoweightings*. [S.l.]: Princeton University Press, New Jersey, 1999. Citado na página 22.
- WANG, Z. et al. Mitigation strategies for overuse of chinese bikesharing systems based on game theory analyses of three generations worldwide. *Journal of Cleaner Production*, v. 227, p. 447 – 456, 2019. Citado na página 5.
- XIN, G. A fast algorithm for macmahon’s partition analysis. *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 11, n. 1, 2004. Citado na página 60.
- XIN, G. A euclid style algorithm for macmahon’s partition analysis. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 131, p. 32–60, 2015. ISSN 0097-3165. Citado na página 60.
- YAKUBA, V. Evaluation of Banzhaf index with restrictions on coalitions formation. *Math. Comput. Model.*, Elsevier, v. 48, n. 9–10, p. 1602–1610, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- YAN, H.; FRIEDMAN, D.; MUNRO, D. An experiment on a core controversy. *Games and Economic Behavior*, v. 96, p. 132 – 144, 2016. Citado na página 1.
- YANG, K. et al. A groebner bases theory-based method for selective harmonic elimination. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 30, n. 12, p. 6581–6592, 2015. Citado na página 47.

YI, Z. et al. From feed-in tariff to renewable portfolio standards: An evolutionary game theory perspective. *Journal of Cleaner Production*, v. 213, p. 1274 – 1289, 2019. Citado na página 5.

ZEADA, S. Polynomial division and gröbner bases. *The Teaching of Mathematics*, XVI, p. 22–28, 2013. Citado na página 52.

ZUCKERMAN, M. et al. Manipulating the quota in weighted voting games. *Artificial Intelligence*, v. 180-181, p. 1–19, 2012. ISSN 0004-3702. Citado na página 2.

ZUTSHI, A. et al. A game theory approach to online lead generation for oligopoly markets. *Computers & Industrial Engineering*, v. 121, p. 131 – 138, 2018. Citado na página 5.