UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RENATO ALVES DE CARVALHO

O RESGATE DE ELEMENTOS DA PAIDÉIA GREGA COMO ORIENTAÇÃO NO USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA MÚSICA EM SALA DE AULA

OURO PRETO

2021

RENATO ALVES DE CARVALHO

O RESGATE DE ELEMENTOS DA PAIDÉIA GREGA COMO ORIENTAÇÃO NO USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA MÚSICA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, no Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Ouro Preto.

Orientador: Dilhermando Ferreira Campos

OURO PRETO

2021

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

C331o Carvalho, Renato Alves de .
O resgate de elementos da Paideia grega como orientação no uso da história da matemática e da música na sala de aula. [manuscrito] / Renato Alves de Carvalho. - 2020.
89 f.

Orientador: Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Matemática. 2. Música. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Campos, Dilhermando Ferreira. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU 51:78

Bibliotecário(a) Responsável: Celina Brasil Luiz - CRB6-1589

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
REITORIA
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E BIOLOGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Renato Alves de Carvalho

O resgate de elementos da Paidéia grega como orientação no uso da história da matemática e da música em sala de aula

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação Matemática

Aprovada em 18 de dezembro de 2020

Membros da banca

Prof. Doutor Dilhermando Ferreira Campos - Orientador (Universidade Federal de Ouro Preto)
Samira Zaidan - (Universidade Federal de Minas Gerais)
Ana Cristina Ferreira - (Universidade Federal de Ouro Preto)

Dilhermando Ferreira Campos, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 18/12/2020

R. Diogo de Vasconcelos, 122, - Bairro Pilar Ouro Preto/MG, CEP 35400-000
Telefone: 3135591700 - www.ufop.br

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, ser supremo e reponsável por cada uma das minhas vitórias. Através de sua infinita sabedoria me possibilitou concluir mais uma etapa da minha acadêmica. Sei que não foi fácil, mas toda honra e toda glória, eu dedico ao Senhor. Muito obrigado minha Santa Rita de Cássia pela luz, benção e proteção e por proporcionar esse momento de felicidade e de término de mais um trabalho. A fé em vocês, sem dúvidas, me auxiliou a chegar até aqui.

Aos meus pais Efigênia Carvalho (in memorian) e Zoroastro Carvalho, que não mediram esforços para me proporcionar educação de qualidade. Em todo momento, vocês sempre me incentivaram a estudar e buscar todos os meus sonhos. Agradeço o carinho, dedicação e exemplos de vida. Vocês são meus eternos ídolos! Obrigado pelos ensinamentos e por conduzirem meus passos.

Ao Prof. Dr. Dilhermando Campos, meu orientador, pela confiança, paciência, ensinamentos e compreensão em todos os momentos de dificuldades.

À Profª. Dra. Ana Cristina Ferreira por ter abraçado a ideia de pesquisar a matemática e a música desde minha graduação. Agradeço pelos ensinamentos, conselhos, instrução e por contribuir tão fortemente na minha formação como professor.

À banca examinadora, composta pela Prof.ª Dr.ª Maria Cristina (qualificação) e pela Prof.ª Dra. Samira Zaidan por aceitarem o convite para participarem desta banca e pelas valorosas contribuições que permitiram auxiliar na conclusão deste trabalho.

Aos meus irmãos Carlos, Marize, Sílvia, Márcia, Paulo e Sônia por toda convivência e ensinamentos. Em especial, à minha irmã Vânia pelos conselhos, cumplicidade e eterna amizade. Agradeço à Daiane pelo amor, companheirismo, dedicação e nos momentos que estive ausente. Você foi muito importante nesse momento. Obrigado meu filho/anjo Gabriel pela amizade, carinho e razão da minha vida. Você é meu combustível diário. Amo vocês!

A todos os professores e professoras do Mestrado Profissional em Educação Matemática e a coordenação: obrigado por todo conhecimento e contribuição em minha formação como pesquisador e docente.

A todos os colegas de turma, pelos momentos de descontração, de apoio, e principalmente os conhecimentos compartilhados.

Aos amigos, pelo incentivo, força e apoio.

Por fim, a todas as pessoas que fizeram parte dessa trajetória apoiando e incentivando, meus sinceros agradecimentos!

RESUMO

A relação entre a matemática e a música foi muito explorada na Grécia Antiga, tendo diversos desdobramentos na filosofia e na educação desenvolvida pelos gregos. A descoberta de Pitágoras, que relacionava comprimentos e notas musicais, teve grande influência no pensamento grego, levando à construção de uma leitura rítmica do universo, que funcionaria segundo uma harmonia matematicamente apreensível. Era a *mousiké* que daria inteligibilidade ao mundo e que ordenaria o modelo educacional grego sistematizado sob o conceito de *Paidéia*. Esse modelo de educação clássica, que visava a uma formação integral do indivíduo, contrasta com o nosso modelo moderno, que possui grande tendência a fragmentar o conhecimento e explorar apenas seu caráter lógico. Por esse motivo, nos propusemos a investigar se seria possível recuperarmos elementos do modelo clássico na escola atual, usando a história da matemática e da música como fio condutor de atividades em que trabalhamos o conceito de número racional. Realizamos uma pesquisa qualitativa, formulando atividades que explorassem toda a riqueza da abordagem clássica, que envolve percepções sensoriais, atividades corporais e reflexão a respeito da estrutura da música, trabalhando com razões e medidas numa sala de aula. As atividades foram aplicadas a alunos do 1º ano do ensino médio e as conclusões a que chegamos foi que essa recuperação da *Paidéia* é possível em alguma medida, mas sob grandes limites que são parte estrutural do modelo de educação atual.

Palavras-chave: Matemática. Música. Educação Matemática.

ABSTRACT

The connection between mathematics and music was widely explored in ancient Greece, being very influential in the philosophy and education developed by them. Pythagoras' discovery relating lengths and musical notes had a great influence on Greek thought, constructing of a rhythmic reading of the universe, which would function according to a mathematically apprehensive harmony. The *mousiké* would became the world intelligible and that would order the Greek educational model systematized under the concept of *Paideia*. This model of classical education, which aimed at an integral formation of the individual, contrasts with our modern model, which has a great tendency to fragment knowledge and explore only its logical character. For this reason, we set out to investigate whether it would be possible to recover elements of the classical model in the current school, using the history of mathematics and music as the guiding thread of activities in which we work on the concept of rational number. We conducted a qualitative research, formulating activities that explored elements of the classical approach, which involves sensory perceptions, corporal activities and reflection about the structure of music, working with ratios and measures in a classroom. The activities were applied to students of the 1st year of high school and the conclusions we reached was that this recovery of *Paidéia* is possible to some extent, but under great limits that are a structural part of the current model of education.

Key-words: Math. Music. Mathematics Educatoin.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Unidade de tempo dentro da música definido pelo intervalo de palmas 52
Figura 2: Divisão de ritmos..53
Figura 3: Tempo forte e tempo fraco nos ritmos..53
Figura 4: Partituras utilizadas na pesquisa..55
Figura 5: Partitura do solfejo 56
Figura 6: Marimba de tubos..59
Figura 7: Marimba feita de cabaças..60
Figura 8: Marimba de garrafas..60
Figura 9: Monocórdio..65
Figura 10: As oitavas de um piano..67
Figura 11: Os intervalos da escala pitagórica 68
Figura 12: Ciclo das quintas, mostrando os desencontros das notas em forma de espiral 68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Frações de Pitágoras e a escala musical 23
Tabela 2: Frações de Pitágoras e de Arquitas 26
Tabela 3: Tipos de andamento 54
Tabela 4: Tabela de equivalência das notas 55
Tabela 5: Razão entre volumes de água nas garrafas da marimba 62
Tabela 6: Razões entre os comprimentos da corda 63
Tabela 7: Frações de Pitágoras e Arquitas 65
Tabela 8: Frequência das notas musicais a serem calculadas pelos alunos 69

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

2 A PAIDÉIA GREGA E AS RELAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA E A MÚSICA 12

2.1 A educação na Grécia Antiga 12

1.2 Paidéia e Mousiké 15

1.3 A escala de Pitágoras e Arquitas 20

1.4 Os papéis da Matemática e da Música no ensino após o fim da Grécia Clássica 26

2 REFERENCIAIS TEÓRICO-METODOLÓGICOS 37

2.1 O ensino de matemática e da música nas escolas brasileiras 37

2.2 A história da matemática como ferramenta pedagógica 41

3 AS ATIVIDADES 48

3.1 A elaboração das atividades 50

3.2 Atividade 1: Percepção musical 51

3.3 Atividade 2: O ritmo do mundo 56

3.4 Atividade 3: Construção da marimba com garrafas 59

3.5 Atividade 4: Proporções na corda do violão 62

3.6 Atividade 5: Construção do monocórdio 64

3.7 Atividade 6: A escala temperada 67

4 ANÁLISE DOS DADOS 70

5 CONCLUSÃO 79

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 81

ANEXOS 83

1 INTRODUÇÃO

Minhas pesquisas sobre as relações existentes entre a matemática e a música durante o curso de licenciatura em Matemática me deram a dimensão da interrelação profunda desses dois campos, que entraram na minha vida de forma totalmente separadas. Meu percurso de vida e trajetória profissional foram muito marcados por essa relação e minha vida acadêmica, como mostrarei a seguir, foi redirecionada quando iniciei minhas pesquisas nesse tema.

Aos oito anos de idade, eu e meus amigos começamos a estudar música no curso livre de flauta doce da Fundação de Arte de Ouro Preto (FAOP). No final do primeiro ano, somente eu renovei a matrícula. Concluí o curso de iniciação musical em três anos e, em seguida, ingressei na Sociedade Musical Bom Jesus de Matozinhos para aprofundar os estudos sobre teoria musical e aprender clarinete. Infelizmente, permaneci por pouco tempo, pois tive que me mudar e fiquei impossibilitado de continuar assistindo às aulas, que aconteciam no período da noite.

No início dos anos 90, pouco antes de entrar no ensino médio, participei de uma banda de rock na qual eu era o tecladista. A paixão pelos palcos foi tão grande que o meu maior desejo na época era abandonar os estudos e tentar a carreira profissional como músico. No ano seguinte, já na Escola Técnica, estudando Informática Industrial, dedicava-me muito mais aos shows e ensaios do que aos compromissos escolares, o que fez com que eu abandonasse esse curso. Desliguei-me da Escola Técnica para ingressar no curso Normal. O contato com disciplinas de cunho educacional como Didática, Filosofia, Psicologia e Sociologia despertou em mim o interesse pela docência.

Durante os três anos no ensino médio, fui monitor de Matemática para alunos das séries finais do ensino fundamental. Era uma disciplina que eu sempre gostei na escola, mas só dei maior atenção no ensino médio. Após a formatura, ao invés de abandonar os estudos, como tinha me programado anteriormente, fui convencido pelos meus familiares a ingressar no ensino superior. Como tinha interesse em lecionar, ingressei no ensino superior pela primeira vez em 1997, no curso de Letras da Universidade Federal de Ouro Preto e, em meados desse ano, dei aulas de Português e de Literatura em uma escola municipal localizada no distrito de Mariana.

Um ano depois, entrei no curso de Engenharia Metalúrgica. Estudei aproximadamente dois anos, mas não me dedicava o suficiente às atividades acadêmicas. Nessa época, ainda dividia meu tempo entre os shows e os estudos e, dois anos depois, mais uma vez, mudei de curso. No início de 2001, ingressei pela primeira vez no curso de Matemática e foi nesse momento que surgiu a ideia de trabalhar a música e a matemática, mas com outro enfoque, diferente do que o presente trabalho aborda. Naquela época, tinha a ideia de produzir um CD com músicas que auxiliassem a aprendizagem de matemática para alunos da educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental. Infelizmente, não consegui muito suporte no curso para a realização desse projeto.

Cursei dois anos e alguns meses e abandonei o curso de Matemática. Em 2006, desgostoso e desgastado pelas diversas tentativas na carreira musical, retornei, pela segunda vez ao curso de Matemática. Logo no início, ingressei no Núcleo Interdisciplinar de Pesquisas em Educação Matemática (NIEPEM) como voluntário a convite da professora Ana Cristina Ferreira, pessoa fundamental que me incentivou a pesquisar sobre a relação entre a matemática e a música através de oficinas para alunos e professores de escolas da região. Fiquei responsável por buscar contribuições que iriam enriquecer as atividades, refletindo sobre o conteúdo teórico-musical. A partir dessas pesquisas, fui convidado por ela para participar de dois trabalhos de iniciação científica que foram financiados pelo PROBIC/FAPEMIG entre os anos de 2006 e 2008, que culminaram em diversas oficinas realizadas para alunos e professores da Educação Básica em várias escolas da região.

A partir dessa trajetória permeada pela matemática e pela música, propus uma pesquisa no Mestrado Profissional em Educação Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto. Isso me permitiu retomar os estudos nesse tema e desenvolver uma pesquisa em que pudesse explorar as potencialidades do vínculo entre matemática e música na Educação Básica.

Acreditamos que uma proposta que trabalhe adequadamente esse vínculo pode contribuir não só para motivação dos alunos, mas também para tornar alguns conceitos matemáticos mais palpáveis e inteligíveis aos estudantes. O conteúdo escolar ainda costuma ser lecionado de forma fragmentada, mesmo havendo várias indicações nos documentos oficiais que sugerem o uso de atividades interdisciplinares como ferramenta pedagógica, como:

> [...] a organização do aprendizado não seria conduzida de forma solitária pelo professor de cada disciplina, pois as escolhas pedagógicas feitas numa disciplina não seriam independentes do tratamento dado às demais, uma vez que é uma ação de cunho interdisciplinar que articula o trabalho das disciplinas, no sentido de promover competências (BRASIL, 2002, p. 13).

Além disso, o ensino tradicional da matemática, em especial, costuma privilegiar conteúdos abstratos, sem ligação direta com o cotidiano do aluno, e a dar muita ênfase à memorização de fórmulas e à repetição de exercícios como método de ensino. Nesse cenário, muitas inovações pedagógicas têm surgido para atenuar os problemas no ensino e aprendizagem da matemática. Uma das ferramentas, também previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para realizar essa abordagem no campo da matemática é o uso da história da matemática não só como amálgama das diversas áreas que compõem as matemáticas, mas também seu vínculo com as outras ciências (BRASIL, 1998, p. 42).

A relação entre a matemática e a música é um tema rico do qual podem emergir diversas atividades que visem motivar os alunos e contextualizar os conceitos matemáticos em sala de aula. Em meus estudos anteriores, também percebi que esse vínculo estrutural entre a matemática e a música se torna mais didático quanto mais se compreende a história desses dois campos que se entrelaçam em diversos períodos, revelando muito dos conceitos envolvidos nesses momentos. É esse potencial pedagógico da história da matemática e da música que tentamos explorar nesta pesquisa.

O uso da relação entre matemática e música na escola não é algo novo. Na verdade, esse vínculo é explorado no ensino desde a Antiguidade Clássica. Na Grécia Antiga, a formação dos indivíduos se dava orientada por um conceito educacional chamado *Paidéia*, que visava a uma formação integral dos cidadãos, o que transcendia o mero aprendizado dos conteúdos escolares. Nesse contexto, o ensino da matemática e da música na escola tinha objetivos muito mais amplos que os presentes hoje em dia nas escolas, pois serviam não para instrumentalizar os alunos com conceitos a serem utilizamos em outros campos ou momentos, mas, sim, para revelar a própria estrutura da realidade aos estudantes. O conceito de *mousiké* trabalhado pelos gregos também não se reduz ao que chamamos de “música” hoje. A *mousiké* seria o estudo dos ritmos, mas não apenas dos ritmos musicais como concebemos hoje, e sim dos ritmos do mundo, do estado de mudança permanente que caracteriza a realidade. Porém, essa mudança (ou esse ritmo) se dá segundo uma ordem que pode ser traduzida matematicamente.

Acreditamos que essa perspectiva clássica sobre a matemática e a música, vinda da *Paidéia* grega, trazida para a sala de aula atual pode contribuir para dar mais significado aos conceitos matemáticos, inclusive aos conceitos da matemática moderna.

Vale ressaltar, desde já, que as sugestões desse tipo de atividades que envolvem a música não estão sendo propostas com o intuito de preencher a lacuna existente da música no currículo escolar. Em nossa visão, a presença dessa disciplina, desde a educação infantil ao ensino médio, é de suma importância entre os conteúdos escolares e deve permanecer com suas características originais. Porém, não devemos deixar de lado as possibilidades que ela oferece no trabalho em conjunto com outros conteúdos do currículo comum.

A partir disso, a questão de investigação que orienta o trabalho é: *Como o resgate de elementos da* Paidéia *grega, através do conceito de* mousiké, *pode auxiliar o atual ensino de Matemática na Educação Básica por meio de práticas pedagógicas que explorem a relação entre as histórias da matemática e da música?*

Para responder a essa pergunta, realizamos oficinas em uma sala de aula do 1º ano do ensino médio, orientadas por essa perspectiva clássica da *Paidéia* grega fundamentada na noção de *mousiké*, que será explicada no capítulo 2. Nesse capítulo, também apresentaremos a relação entre matemática e música descoberta pelos gregos antigos e que foi usada na elaboração das atividades[1] aplicadas em sala de aula. No capítulo 3, apresentaremos os demais referenciais teórico-metodológicos, além da *Paidéia* grega, baseado no uso da história da matemática como ferramenta pedagógica. No capítulo 4, descreveremos as atividades aplicadas, que foram gravadas em vídeo. No capítulo 5, apresentaremos a análise dos dados coletados e, por fim, no capítulo 6, as conclusões da pesquisa.

[1] Cabe ressaltar aqui que, nesta pesquisa, atividades devem ser entendidas em seu significado mais corriqueiro no ambiente escolar que é o de tarefas estruturadas em um roteiro e aplicadas aos alunos durante a pesquisa, não tendo relação com teorizações a respeito do conceito de atividade, como ocorre na teoria da atividade, por exemplo.

2 A PAIDÉIA GREGA E AS RELAÇÕES ENTRE A MATEMÁTICA E A MÚSICA

2.1 A educação na Grécia Antiga

A ideia de educação na Grécia Antiga passou por diversas reconstruções ao longo da história grega e se diferencia do conceito que temos hoje. Em seus primórdios, seu teor era revestido de conteúdos práticos, morais e éticos voltados para o convívio em sociedade e passados oralmente ao longo dos anos, sendo, paulatinamente, inseridos nas leis dos povos gregos. Nessa fase inicial, o sistema educacional não era concebido de forma elaborada e nem era bem definido. Nesse período, assim como ocorreu em outras civilizações, os ensinamentos eram passados dos mais velhos para os mais novos no ato da caça e na prática da agricultura, prevalecendo a transmissão de preceitos morais e éticos da comunidade. Com o passar do tempo, a sociedade grega foi se dividindo em classes, dando origem a uma aristocracia proprietária que se tornou a fonte de um novo processo educacional. Segundo Werner Jaeger, em seu clássico livro sobre o processo educacional na Grécia antiga, *Paidéia: a formação do homem grego*:

> [...] toda cultura superior surge da diferenciação de classes sociais, que por sua vez se origina da diferença natural de valor corporal e espiritual dos indivíduos. Mesmo onde a diferença de formação conduz à constituição de castas rígidas, o princípio da herança que nelas domina é corrigido e compensado pela ascensão de novas forças procedentes do povo. E, ainda, quando uma brusca mudança arruína ou destrói as classes dominantes, forma-se rapidamente, pela natureza das coisas, uma classe dirigente que se constitui em nova aristocracia. A nobreza é a fonte do processo espiritual pelo qual nasce e se desenvolve a formação de uma nação (JAEGER, 1995, p. 24).

No caso do novo processo educacional grego, houve alguns aspectos culturais desse povo que fez com que eles adotassem um percurso distinto de outras civilizações. Em dois textos fundamentais que narram o início da civilização grega, podemos notar o papel da nobreza helênica aristocrática e o desenvolvimento de alguns valores da mesma que foram importantes naquele período.

Como posteriormente disse Platão, Homero foi o educador de toda Grécia. Sua poesia foi um importante material educativo, que narra batalhas épicas dos heróis, contribuindo para a formação do homem grego primitivo como fonte modeladora da sociedade da época.

Homero, por meio de sua poesia, conseguiu nos dar uma ideia do contexto histórico da Grécia arcaica, contando a história da nobreza que lutou em grandes batalhas. Seus personagens têm um papel de cunho educacional, utilizando a figura heroica de um indivíduo como exemplo de boa conduta.

O primeiro desses textos, a *Ilíada*, de Homero, foi escrito por volta de 700 a.C. Nele é destacada a imagem da nobreza como classe de guerreiros que disputavam várias batalhas. O objetivo desse livro é narrar histórias dos antigos heróis, personagens das sagas que contam a vida da aristocracia grega. É uma obra que celebra as lutas e as vitórias dos heróis ancestrais, que mostram a paixão pelas batalhas e a procura pela honra nos palcos da guerra.

Uma ideia importante para entender os valores da civilização grega é a evolução do conceito de *areté*, que poderíamos traduzir, de forma simplificada, como virtude e estava intimamente ligada à honra do herói. Ao estudar esse período arcaico, é difícil relacionar a educação separada das guerras existentes na época em que os homens buscavam honra e glória.

O segundo livro importante de Homero, a *Odisseia*, conta o retorno dos heróis gregos da guerra em Troia. Nessa epopeia, as narrativas sobre as batalhas sangrentas dão lugar a uma reflexão sobre a vida de seus personagens junto da família e dos amigos. Mostra uma visão da aristocracia nobre, sabedora de suas regalias e seus costumes refinados perante a sociedade. Nesse período histórico, o sedentarismo da nobreza, a transmissão da tradição e das posses se tornaram as características mais relevantes dessa aristocracia. Os jovens pertencentes a essa nobreza, conscientes do papel que ocupavam na sociedade, passaram a se preocupar com a formação, pois faziam parte de uma classe historicamente privilegiada.

Nesse novo período, outro importante poeta, Hesíodo, retratou um momento menos conflituoso entre os gregos. Em vez de focar na figura do herói presente nos campos de batalha, Hesíodo contemplou a vida primitiva no campo e valorizou o trabalho como forma de ascensão social, sem desclassificar a vida dos nobres relatada na poesia homérica. Para ele, o título de herói não poderia ser adquirido somente nos campos de batalha e na luta entre os adversários, mas também a partir do trabalho.

Assim como Homero, Hesíodo dizia que a educação nasce na esfera nobre da comunidade. Ele tornou as epopeias acessíveis em uma linguagem que fosse compreendida pelo homem comum. Uma de suas obras mais importantes relata uma disputa jurídica entre ele e seu irmão, na qual ele foi prejudicado economicamente.

A inovação na forma de narrar vem da vontade que Hesíodo tinha de corrigir caminhos errôneos que alguns camponeses seguiam, visto que ele escrevia suas obras para sua própria classe. Seus poemas e fábulas tinham o objetivo de corrigir a injustiça entre os homens e valorizar a conquista de seus bens por meio do trabalho (JAEGER, 1995).

No período de Hesíodo, iniciou-se um processo de formação das grandes *pólis* gregas, como Esparta, localizada em uma região em que os gregos chamavam de Lacônia. Lá surgiram as primeiras noções acerca da história da educação devido ao surgimento de ideias sobre o Estado, aqui tomado como entidade educadora. Alguns relatos de tempos remotos contam que Esparta vivia rotineiramente como um campo de batalha preparado para guerra em nome do Estado espartano.

O principal poeta que narrou as aventuras e as histórias espartanas é Tirteu. Pelo fato de narrar conquistas e versos motivadores ao exército espartano, formado por nobres e membros de classe mais baixa, sua obra apresenta características tanto da poesia de Hesíodo quanto da de Homero. Seus versos tinham caráter educacional quando elencava casos de guerra e falas motivadoras. Com isso, ele criava entre os espartanos um sentimento de formação de um exército de heróis, visto somente entre os nobres narrados na *Ilíada*, porém com um propósito diferente. Agora eles não lutavam pela glória individualizada, e sim pelo amor à pátria e a paixão pelo Estado. Na poesia de Tirteu, o "ideal homérico de uma *areté* heroica transforma-se no heroísmo do amor à pátria" (JAEGER, 1995, p. 120). Tirteu colocou a morte como estágio final na proteção do seu Estado e é a partir dessa ideia que os espartanos buscavam alcançar seu ato heroico, como uma forma de imortalizar seu nome a favor da *pólis* em busca da eternidade.

Além de Esparta, outra *pólis* grega que obteve destaque foi Atenas, localizada na região denominada Ática. Em outras cidades, a valorização do Estado não era tão grande como feita em Esparta e Atenas. Nessa época, o poder do rei já se encontrava enfraquecido e havia uma tendência no sistema político de alteração da monarquia para a aristocracia. Ao mesmo tempo, a nobreza real grega deixava de ser agrária para assumir o papel de empresária. Com o objetivo de promover as relações comerciais em substituição ao sistema de trocas, povos de cidades vizinhas iniciaram a produção de moedas para facilitar as transações comerciais.

Diante de todas essas transformações, surgiu um novo tipo de homem na Grécia, motivado pelo incremento do comércio e das navegações, o que trazia a possibilidade de descoberta de novos povos e novos lugares. Nesse momento, apareceram demandas por mudanças na ideia de direito. Algumas leis nas grandes *pólis,* como Esparta e Atenas, estavam ultrapassadas, pois eram baseadas em normas antigas transmitidas ao longo dos séculos. Além disso, tais leis procediam da nobreza e beneficiavam somente essa classe. Deu-se início a um estado de tensão entre nobres e a classe popular emergente que vinha enriquecendo através do comércio marítimo. Agora fortalecida economicamente, essa nova classe não aceitava mais as imposições vindas da aristocracia.

Juntamente com a alteração das leis, a educação do homem grego passou a ser modificada com o objetivo de transformá-lo em homem político. Começou a surgir um novo tipo de Estado que teve como foco educar esses homens de forma igualitária e humanista, proporcionando uma educação que prezava pelos princípios políticos, humanos e éticos, com o objetivo de formar os cidadãos dessa nova sociedade. Esse espírito de igualdade incluía o direito das classes populares (que, no contexto grego, incluíam estrangeiros, escravos e mulheres), que passaram a se envolver em questões administrativas, econômicas e políticas. Era o início da democracia no Estado grego.

Posteriormente, mesmo com o domínio e ascensão ao poder da classe popular, esse acesso aconteceu conforme os traços da nobreza. Esses homens, ao alcançar o sucesso econômico, procuraram a formação e a educação adequada para ocupar uma posição privilegiada. A busca pela igualdade e leis mais justas inspirava novas formas de convivência dentro das *pólis*, o que, por consequência, influenciou na formação e educação do cidadão. A criação de leis gerou uma nova forma de se educar os jovens e adultos na comunidade e proporcionou o desenvolvimento do Estado que tinha por responsabilidade a educação dos jovens.

1.2 Paidéia e Mousiké

O sistema educacional elementar grego era dividido em duas partes: a *mousiké* e *gymnastiké.* A origem desse ideal de educação vem do período arcaico, quando houve uma mudança no conceito de *areté* e a formação do nobre passou a se dar pela ginástica para o cultivo do corpo e a música para o cultivo da alma.

A educação tinha ação particular e variava de acordo com a faixa etária. As crianças eram educadas mediante o poder aquisitivo da família, sem levar em consideração quanto tempo ela permaneceria estudando. Era primordial que tivessem contato com a *gymnastiké* e a *mousiké* para, em seguida, partir para a educação secundária. Ao chegar à adolescência, geralmente era dispensada a presença de um tutor e esperava-se que o indivíduo adquirisse conhecimentos baseados em sua história como cidadão. Além do conteúdo dessas duas áreas (*gymnastiké* e *mousiké*), o indivíduo deveria adquirir uma formação moral e prática, tornando-se um cidadão de boa índole que visava ao desenvolvimento da *pólis*. Cada um desses cursos era lecionado por mestres diferentes. Os *kitharisthés* eram responsáveis por ensinar a *mousiké* e os *paidotribés*, em ensinar a *gymnastiké*, cada um deles em um lugar próprio. Era comum, dentro do campo da *mousiké*, um professor responsável no ensino da escrita e leitura chamado *grammastisté*. As aulas aconteciam mediante pagamento da família e em lugares públicos específicos chamados *gymnasia* (PATRICK, 1996).

Cabe ressaltar que o conceito de *mousiké*, na educação clássica, envolvia mais do que para nós atualmente é o conceito de Música. *Mousiké* entendida como tudo que envolve ritmo, como a dança, a atuação teatral, a gramática (o ritmo da palavra escrita), o canto (o ritmo das palavras cantadas), a retórica (o ritmo das palavras faladas) e a música, propriamente dita. A origem dessa valorização da música remetia aos primórdios da civilização grega, pois

> [...] a presença da música na cultura grega já era importante desde os tempos de Homero (séc. VIII a.C.), quando o estudo da lira e do canto faziam parte da educação aristocrática. A música era indispensável no acompanhamento do canto, da poesia e da dança [...] pois facilitava a memorização dos épicos, suscitava sentimentos e educava a percepção estética dos ouvintes (GRANJA, 2006, p. 22).

Uma das primeiras manifestações da valorização da música na educação se deu na cidade de Esparta. Para os espartanos, a educação musical e a ginástica eram algo extremamente importante para formação do homem. “A ginástica proporcionava a educação para o corpo, preparando os jovens para as artes da guerra. A música seria o conhecimento apropriado para ‘educar a alma’, ou seja, promover conhecimento e sabedoria ao cidadão” (GRANJA, 2006, p. 38). Esparta fazia uso da ginástica nas competições esportivas e da música em manifestações populares para honrar seus deuses.

O século VI a.C. foi marcado por ser uma época em que os homens gregos desenvolveram diversos conceitos importantes de outras áreas do conhecimento, o que possibilitou que a Música não fosse só praticada e executada em rituais e festas religiosas, mas estudada de forma a investigar sua estrutura de formação, como, por exemplo, a produção de uma escala musical.

> [...] foi no século VI a.C. que vieram à luz os maravilhosos conceitos fundamentais do espírito grego. [...] Um momento decisivo daquela evolução

> é a nova concepção da estrutura da música. Só o conhecimento da essência da harmonia e do ritmo que dela brota já seria suficiente para garantir aos gregos a imortalidade na história da educação humana (JAEGER *apud* GRANJA s.d, p. 142).

Segundo Carlos Granja, em seu livro *Musicalizando a escola: música, conhecimento e educação*, nesse momento histórico, surgiu o conceito de *mousiké* (GRANJA, 2006). Esse termo deriva da palavra *mousa*, que eram as filhas do deus Júpiter. As musas, segundo a tradição grega, eram entidades responsáveis por inspirar os homens nos campos das artes. Nesse conceito, estão englobados o ensino da dança, filosofia, poesia e metafísica. Muito mais que trabalhar com o conceito de som, a *mousiké* envolvia, de forma geral, aquelas ciências que lidam com o ritmo.

Oscar João Abdounur, em seu livro *Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados*, diz que, indiscutivelmente, foram os gregos que estabeleceram as bases para a cultura musical do Ocidente, abrangendo, também, a poesia e a dança (ABDOUNUR, 2003). Conforme Lia Tomás, em seu livro *Ouvindo o logos: música e filosofia*, dentro do ideal humanístico de formação dos gregos, a música tinha uma relação estreita com o *lógos*, pois ela pode ser entendida como um campo mais estrito que trabalha com manifestações artísticas e utilizam o som por meio da poesia, da dança, do teatro e do canto (TOMÁS, 2002).

Sob um ponto de vista mais amplo, o conceito de *lógos* pode estar relacionado com a ideia de harmonia que extrapola o sentido estritamente musical. Conforme Granja, a harmonia ainda agrega outros significados.

> Outro aspecto da *mousiké* grega era a harmonia [...] [que] significava algo como "ajustamento" ou "junção" e se referia ao encaixe de duas peças de madeira. Harmonia também era o que se aproximava e mantinha unidos os elementos contrários dos quais as coisas eram formadas ou ainda a relação das partes com o todo (GRANJA, 2006, p. 26).

O ritmo era o denominador comum das três artes, fundindo-as numa só. Foi dessa fusão que surgiu, por exemplo, a lírica, um gênero poético que exibia como traço principal a melodia. O nome desse gênero poético deriva de "lira", que era um instrumento musical muito comum entre os gregos, o que nos dá outro exemplo da organicidade desses campos artísticos naquele contexto.

As mudanças sociais e econômicas ocorridas começaram a gerar, a partir do século V a.C., questionamentos acerca de uma educação baseada na *gymnastiké*, *mousiké* e gramática ser suficiente para formar um cidadão pleno. Nesse período, surgiu o conceito de

Paidéia, que visava formar o homem intelectualmente, fisicamente e também como cidadão. Segundo Platão, “[...] a essência de toda a verdadeira educação ou Paidéia é a que dá ao homem o desejo e a ânsia de se tornar um cidadão perfeito e o ensina a mandar e a obedecer, tendo a justiça como fundamento” (PLATÃO *apud* JAEGER, 1995, p. 147).

Originalmente, a palavra *Paidéia* tinha como significado “criação dos meninos” e estava vinculado à educação elementar de crianças dos sete aos catorze anos. Posteriormente, essa palavra ganhou vários significados. De acordo com Jaeger (1995), para entendermos os significados de *Paidéia*,

> Não se pode evitar o emprego de expressões modernas como civilização, tradição, literatura ou educação; nenhuma delas coincidindo, porém, com o que os gregos entendiam por Paidéia. Cada um daqueles termos se limita a exprimir um aspecto daquele conceito global. Para abranger o campo total do conceito grego, teríamos de empregá-los todos de uma só vez (JAEGER, 1995, p. 1).

A mudança da educação arcaica para a *Paidéia* se deu, inicialmente, com os sofistas, que eram professores que circulavam pelo mundo helênico oferecendo seus serviços educacionais. Não eram pensadores especializados e nem participavam de seitas filosóficas. Estavam mais ligados a situações políticas e discussões morais.

Com o período de relativa paz e o rápido enriquecimento de Atenas após a vitória da guerra contra os persas, os sofistas enxergaram nessa cidade uma possibilidade de alojamento seguro. Lá encontrariam alunos de qualidade para ensinar seus conhecimentos. Acreditavam que a política deveria ser ensinada através da persuasão e da retórica e que a condição necessária para ser um bom cidadão, além de estudar oratória, era conhecer e argumentar sobre vários temas de cultura geral (PATRICK, 1996).

Os jovens da nova classe de cidadãos emergentes pagavam grandes quantias em dinheiro para ter aulas de retórica, cultura geral e política com os sofistas. Esse movimento fez com que a educação clássica grega passasse por várias modificações. Uma delas envolve o dueto *mousiké* e *gymnastiké* que fez parte do sistema educacional grego elementar durante muitos anos. A educação sofista dava mais ênfase a assuntos relacionados ao intelecto, desvalorizando as atividades voltadas para a educação corporal do indivíduo, o que gerou diversas críticas de seus opositores. Outra crítica feita à escola sofista, especialmente por Sócrates, era o fato de receberem dinheiro para lecionar.

Basicamente, os sofistas trabalhavam com as obras de poetas antigos como Homero e Hesíodo. Diferentemente de Sócrates, que valorizava a dialética, os sofistas valorizavam a retórica.

> O seu objectivo não era, pois, interpretar a poesia, por puro prazer, ou para descortinar as regras gramaticais que permitissem compreender a estrutura da linguagem. O que pretendiam era alcançar uma dicção correcta e uma pronúncia correcta da forma certa da palavra certa. Os grandes escritores do passado seriam os modelos a partir dos quais se teria que aprender (PFEIFFER, trad. POMBO, s.d.).

Uma das maiores contribuições dos sofistas para o ensino escolar foi a valorização de uma tradição não mais oral e, sim, escrita. Foi o desejo de que as obras que eles ensinavam fossem transcritas com o objetivo de produzir livros, o que causou nova discussão com Sócrates que era um defensor da tradição oral. Para Sócrates, a utilização do livro, seria uma maneira de impedir o aprimoramento do conhecimento enquanto memória e de não valorizar a relação interpessoal entre o mestre e seu discípulo.

Dentro da educação grega arcaica, além da *gymnastiké* e da *mousiké*, o indivíduo deveria adquirir em sua vivência social, uma formação moral e prática para tornar-se um cidadão integrado no desenvolvimento de sua *pólis*. Nesse outro momento da história grega, em Atenas, o que se buscava era adaptar o currículo a uma nova realidade política e social.

Todo esse processo teve impacto significativo na educação ocidental por muitos séculos. Na educação europeia medieval, por exemplo, os conteúdos foram ressignificados e voltados exclusivamente para a formação do intelecto, o que levou o currículo antigo a assumir a forma do que ficou conhecido como *Trivium*. Nessa primeira parte do processo educacional dos jovens medievais, o foco era promover a educação, inicialmente, pelo aprimoramento da linguagem e sua relação com o pensamento. As disciplinas que lidavam com isso eram a Gramática, a Retórica e a Lógica. O objetivo principal era que o indivíduo tivesse a capacidade de organizar suas ideias, expô-las com clareza e defendê-las nos debates públicos.

Já o ensino secundário grego, que na Idade Média ficou conhecido como *Quadrivium,* era composto pela Geometria, Astronomia, Aritmética e Música. Essas áreas eram relacionadas da seguinte maneira: a Geometria lidava com o estudo dos corpos em repouso e a Astronomia, dos corpos em movimento. A Aritmética era o estudo dos números em repouso (teoria dos números) e a Música era o estudo dos números em movimento. O conjunto das disciplinas do *Trivium* e do *Quadrivium* era visto de forma interligada, porém cada uma com suas próprias especificidades. Além disso, a abordagem interdisciplinar da Música, também tinha o papel de valorizar os sentimentos do homem em suas manifestações artísticas. Desse modo, o ensino de música, que passou a ser cada vez mais teórico, com o objetivo de mostrar a harmonia existente na natureza, foi se afastando do sentido de seu ensino dentro do campo da *mousiké*.

Voltando à Grécia Clássica, o sentido de educação foi se moldando cada vez mais ao que ficou conhecido posteriormente por platonismo. Para Platão, que foi o principal discípulo de Sócrates, existiam dois tipos de conhecimento, aquele ligado ao mundo sensível, e outro, ao mundo inteligível. A Matemática e seu método dedutivo seria o elemento que permitiria a ligação entre esses dois mundos, pois lidavam e permitiam acessar verdades a respeito de entes abstratos do mundo inteligível que possuíam seus reflexos no mundo sensível. Nessa perspectiva, o ensino de Matemática levaria o indivíduo a encontrar, através do raciocínio, verdades universais eternas e imutáveis.

Sua preocupação era formar o homem ideal inserido em um Estado ideal. Platão propunha que a Matemática deveria ser ensinada para as crianças, diferentemente do que acontecia até aquele momento, com destaque para o processo de contagem e o conhecimento de alguns números inteiros e de frações, que auxiliassem na compreensão do sistema de medidas utilizado na Grécia antiga. A Matemática seria estudada somente no nível elementar, mas, para aqueles que despontassem como futuros governantes e filósofos continuariam estudá-la de maneira mais abstrata, com foco especial em seu método hipotético-dedutivo (MIORIM, 1998).

1.3 A escala de Pitágoras e Arquitas

Segundo a tradição, por volta do século VI a.C., Pitágoras de Samos fundou sua escola filosófica que deu origem a uma corrente de pensamento que teve impacto nas mais diversas áreas. No campo da Música, por meio de experiências que envolviam o comprimento de uma corda e o som produzido ao percuti-la, Pitágoras teria relacionado a matemática com a música através do tamanho da corda e da altura musical, com o objetivo de explicar a consonância. Pitágoras realizou expedições pelo Oriente e pelo Egito, para aprofundar seus conhecimentos, e foi influenciado pela cultura dessas regiões. Entusiasmado pela filosofia chinesa, adotou como lema da escola pitagórica a frase “Tudo é número e harmonia” (ABDOUNUR, 2003, p. 7).

Conta a lenda que Pitágoras, ao passar próximo a uma ferraria, escutou sons de martelos (pesos diferentes), que batiam em pedaços de ferro, produzindo sons que, às vezes, se combinavam, outras, não. Para entender esse fenômeno, ele construiu o monocórdio, que é um instrumento que possui uma corda esticada, presa por dois cavaletes fixos em uma mesa ou madeira, contendo outro cavalete móvel, destinado a variar o tamanho da corda. Com isso, era possível estabelecer relações entre os sons (altura musical) e as frações do comprimento da corda. Esses estudos alavancaram o sentido educador do ensino da música, que deixou de ser apenas prático e passou a ser, também, teórico. É fato que a música já existia em celebrações religiosas ou em festas da nobreza e da classe popular. A novidade introduzida por Pitágoras foi a investigação para descobrir a leis gerais que regem a música por meio de métodos empíricos.

Pitágoras, inicialmente, descobriu que, ao pressionar 3/4 da corda inteira, o som produzido era o correspondente a uma quarta ascendente do som emitido pela corda inteira. Ao repetir esse processo, agora pressionando 2/3 da corda, percebeu que o som emitido era uma quinta ascendente do som produzido pela corda inteira. Por fim, percebeu que pressionar metade da corda, produzia o som de uma oitava ascendente ao som emitido pela corda inteira. Esses intervalos foram classificados como consonâncias perfeitas. As razões encontradas no experimento de Pitágoras foram classificadas pelos filósofos como *diapason*, *diapente* e *diatessaron* e eram responsáveis pela sustentação da música grega.

> O *diapason*, o *diapente* e o *diatessaron* constituíam a base da música grega. Essas consonâncias estavam relacionadas a tétrade sagrada, um dos símbolos sagrados dos pitagóricos, constituído pelos quatro números inteiros mais simples: 1, 2, 3 e 4. Assim, a partir desses quatro números foi possível construir toda uma escala musical [...]. Pitágoras havia realizado uma das descobertas mais significativas da civilização grega, considerada por muitos como o primeiro experimento científico da história (GRANJA, 2006, p. 32).

Podemos notar que, na obtenção das frações, Pitágoras encontrou, tanto no numerador, quanto no denominador, números inteiros entre 1 e 4 para explicar as consonâncias. Segundo Abdounur, envolvido de grande misticismo e com grande influência da cultura oriental, o criador da irmandade pitagórica concluiu que o motivo de encontrar esses números (1, 2, 3 e 4) era o fato deles gerarem a perfeição e governar todo o mundo. Naquela época, os números possuíam um significado diferente do que concebemos hoje, pois tinham sentido místico e estavam relacionados aos entes da natureza.

> Os pitagóricos consideravam o número quatro – primeiro quadrado par – origem de todo o universo, todo o mundo material, representando a matéria em seus quatro elementos integradores: o fogo, o ar, a terra e a água. A importância do número quatro para os pitagóricos emerge ainda no cenário musical ao considerar o tetracorde – sistema de quatro sons, cujos extremos encontravam-se a um intervalo de quarta justa – como escala mais elementar e unidade fundamental da música grega (ABDOUNUR, 2003, p. 6-7).

Na tentativa de obter as notas musicais em um intervalo de oitava, Pitágoras tomou como início do intervalo o som produzido pela corda inteira e o fim do mesmo o som produzido pela metade do comprimento da corda. Com isso, ele descobriu outras notas que faltavam para formar a escala utilizando o ciclo das quintas e oitavas. Quando excedia esse intervalo, tanto inferiormente, quanto superiormente, acrescentava ou diminuía intervalos de oitava para que não fugisse da oitava padrão. Dessa forma, obteve a escala diatônica de DÓ (dó-ré-mi-fá-sol-lá-si) (ABDOUNUR, 2003). Para exemplificar, tomemos como base o som produzido pela corda solta de comprimento unitário que vai corresponder à nota $DÓ_1$. Para encontrar as outras frações que correspondem às outras notas da escala musical, os pitagóricos, através do ciclo das quintas e oitavas, fizeram da seguinte maneira:

- A partir de $DÓ_1$ temos como quinta ascendente a nota SOL_1, obtida a partir de $DÓ_1$ temos como quinta ascendente a nota SOL_1, obtida multiplicando $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.
- A partir de SOL_1, temos como quinta ascendente a nota $RÉ_2$, obtida multiplicando a fração correspondente a essa nota por $\frac{2}{3}$, como segue: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. O resultado escapa da oitava padrão. Conforme dito anteriormente, para retornar para oitava inicial, dividimos $\frac{4}{9}$ por $\frac{1}{2}$. Assim $\frac{4}{9} : \frac{1}{2} = \frac{8}{9}$, que corresponde à nota $RÉ_1$.
- A partir da nota $RÉ_1$, temos como quinta ascendente a nota $LÁ_1$, obtida multiplicando a fração correspondente a essa nota por $\frac{2}{3}$. Desse modo, $\frac{8}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$.
- A partir da nota $LÁ_1$, temos como quinta ascendente a nota MI_2, obtida multiplicando a fração correspondente a essa nota por $\frac{2}{3}$. Assim, $\frac{16}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$. Mais uma vez, o resultado escapa da oitava padrão. Logo, retornando para oitava inicial, é necessário dividir $\frac{32}{81}$ por $\frac{1}{2}$ que tem como resultado $\frac{64}{81}$, que corresponde à nota MI_1.
- A partir da nota MI_1, temos como quinta ascendente anota SI_1, obtida multiplicando a fração correspondente a essa nota por $\frac{2}{3}$. Assim, $\frac{64}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{243}$.

- A nota $FÁ_1$ é a quarta ascendente de $DÓ_1$, logo sua fração correspondente no intervalo inicial é obtida multiplicando 1 por $\frac{3}{4}$ que é igual a $\frac{3}{4}$.
- A partir de $FÁ_1$, temos como quinta ascendente o $DÓ_2$, obtida multiplicando a fração correspondente a essa nota por $\frac{2}{3}$. Desse modo, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Assim, conseguimos a seguinte tabela:

Tabela 1: Frações de Pitágoras e a escala musical

Nome das notas/intervalo[2]	Frações encontradas por Pitágoras
$DÓ_1$ (primeira)	1
$RÉ_1$ (segunda)	$\frac{8}{9}$
MI_1 (terça)	$\frac{64}{81}$
$FÁ_1$ (quarta)	$\frac{3}{4}$
SOL_1 (quinta)	$\frac{2}{3}$
$LÁ_1$ (sexta)	$\frac{16}{27}$
SI_1 (sétima)	$\frac{128}{243}$
$DÓ_2$ (oitava)	$\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, "Pitágoras estava determinado a achar uma medida para percepção sonora" (GRANJA, 2006, p. 31). Essa foi uma das bases da música da época. A questão da afinação dos instrumentos baseados nesse método de Pitágoras variou de época para época e de lugar para lugar.

Essa teoria pitagórica deu um novo tratamento para a música que foi considerada um dos ramos da matemática, somado à aritmética, à geometria e à astronomia. Para Pitágoras, pelos seus estudos musicais e pela crença de que tudo é número, todo cosmo era organizado segundo a mesma harmonia (GRANJA, 2006).

[2] Vale comentar que, nessa tabela, não se leva em consideração se os intervalos são maiores, menores, justos e diminutos. Além disso, os nomes das notas foram utilizados para dar maior entendimento ao leitor, visto que, naquela época, as notas musicais não tinham esses nomes como conhecemos hoje.

Essa palavra *harmonia* deve ser entendida em um sentido mais amplo, pois extrapola o campo musical e era utilizada pelos gregos em áreas como a poesia e a arquitetura. Na concepção pitagórica, esse conceito possui um caráter geométrico e proporcional. Um dos motivos dessa percepção foi o achado que eles fizeram na música quando, após a experiência com o monocórdio, perceberam que o comprimento de corda específico de uma lira pode emitir sons *agradáveis* (consonantes), ou não (dissonantes), ao ouvido, dependendo da combinação dessas frações de corda. Nesse caso, os números possuem um aspecto quantitativo, quando são usados para determinar os comprimentos que produzem uma dada nota musical, ao mesmo tempo em que possuem um caráter qualitativo, quando o resultado desse procedimento é classificado como agradável ou não ao ouvido.

Segundo consta, Pitágoras não queria que seus discípulos tivessem o primeiro contato com o estudo das relações entre Matemática e Música através dos cálculos matemáticos. Para ele, era mais importante que os pitagóricos vivenciassem experiências perceptivas que envolvessem a apreciação das consonâncias e, posteriormente, entendessem as relações matemáticas por trás dessas sensações.

> [...] ele evitava que seus discípulos se envolvessem, logo de início, em teorias abstratas concernentes à matemática e à música, mas fazia, primeiro, com que aprendessem a apreciar sensações agradáveis, as belas cores e a beleza das formas e dos sons. Após demonstrar-lhes o poder da música no mundo material, explicou-lhes as razões matemáticas invisíveis dessas manifestações (GORMAN *apud* GRANJA, 2006, p. 30).

Pitágoras não foi o único que contribuiu para a relação matemática/música na Grécia antiga. Vale comentar sobre Aristoxeno de Tarento (~350 a.C.), que era discípulo de Arquitas (430-360 a.C.), com quem tinha divergências quanto à teoria musical. Enquanto Arquitas dava ênfase em determinar matematicamente os intervalos, Aristoxeno privilegiava o som das notas e a utilização do método empírico. Arquitas teve contato com a escola pitagórica e, quando iniciou seus estudos, escreveu o livro *Elementos de Harmonia* que reforçava sua ideia de estudar a música como um método empírico/demonstrativo (ABDOUNUR, 2003).

Assim como Pitágoras, Arquitas foi um dos indivíduos que mais influenciou nos trabalhos posteriores que relacionavam matemática e música. Teve grande destaque no desenvolvimento teórico da música e acreditava que ela era importante na formação do indivíduo, colocando-a em posição mais privilegiada que a literatura para os mais jovens. A maior parte de sua obra versa sobre proporções e intervalos musicais. Alguns historiadores acreditam que ele mudou o nome de média subcontrária para média harmônica. Dizia que o ouvido diante de uma consonância, com duas ou mais notas tocadas simultaneamente, escutaria somente uma nota, ou seja, um prenúncio na época da ideia de harmônicos do som (ABDOUNUR, 2003).

Com o propósito de tornar mais simples a afinação da lira, Arquitas construiu a escala musical com sete notas utilizando apenas conceitos de médias aritméticas e médias harmônicas, diferentemente de Pitágoras, que utilizava o percurso das quintas. Com isso, obteve frações bem mais simples que as de Pitágoras. Arquitas utilizou, inicialmente, as primeiras razões encontradas por Pitágoras. Supondo o inteiro 1 correspondente à corda solta, em analogia com a escala musical, esta será a nota $DÓ_1$, primeira nota da escala, e a fração $\frac{1}{2}$ à nota $DÓ_2$, oitava nota da escala, porém mais aguda que $DÓ_1$. Então, temos um intervalo de oitava, que tem como extremos $DÓ_1$ e $DÓ_2$. Para encontrar as outras frações que correspondem às outras notas da escala musical, Arquitas fez da seguinte maneira:

- A quarta nota na escala (nota FÁ) foi calculada através da média aritmética entre os extremos do intervalo de oitava.

$$\text{FÁ} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

- A quinta nota da escala (nota SOL) foi determinada através da média harmônica entre os extremos do intervalo de oitava.

$$\text{SOL} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

- A terceira nota da escala (nota MI) foi calculada através da média harmônica entre a fração correspondente da nota $DÓ_1$ e da nota SOL.

$$\text{MI} = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{4}{5}$$

- A segunda nota da escala musical (nota RÉ) foi determinada através da média harmônica entre a fração correspondente da nota $DÓ_1$ e da nota MI.

$$\text{RÉ} = \frac{2}{1+\frac{5}{4}} = \frac{8}{9}$$

- A sexta nota da escala musical (nota LÁ) foi calculada através da média harmônica entre a fração correspondente da nota FÁ e da nota $DÓ_2$.

$$\text{LÁ} = \frac{2}{\frac{4}{3}+2} = \frac{3}{5}$$

- A sétima nota da escala musical (nota SI) foi determinada através da média harmônica entre a fração correspondente da nota SOL e da nota RÉ_2.

$$\text{SI} = \frac{2}{\frac{3}{2}+\frac{9}{4}} = \frac{8}{15}$$

Conforme a tabela abaixo, podemos perceber que as frações encontradas por Arquitas são mais simples que as de Pitágoras.

Tabela 2: Frações de Pitágoras e de Arquitas

Nome das notas/intervalo	Frações encontradas por Pitágoras	Frações encontradas por Arquitas
DÓ_1 (primeira)	1	1
RÉ (segunda)	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
MI (terça)	$\frac{64}{81}$	$\frac{4}{5}$
FÁ (quarta)	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
SOL (quinta)	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
LÁ (sexta)	$\frac{16}{27}$	$\frac{3}{5}$
SI (sétima)	$\frac{128}{243}$	$\frac{8}{15}$
DÓ_2 (oitava)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os estudos de Pitágoras e Arquitas influenciaram e instigaram muitos músicos durante vários séculos. Só na Idade Média, a relação entre a Matemática e a Música foi ter modificações mais significativas.

1.4 Os papéis da Matemática e da Música no ensino após o fim da Grécia Clássica

Segundo Ângela Maria Miorim, em seu livro *Introdução à história da Educação Matemática*, ao longo dos tempos, a Matemática exerceu diversas funções na sociedade tendo grande importância em várias civilizações (MIORIM, 1998).

No início do período Paleolítico, completamente dependente da natureza, o homem sobrevivia da pesca, da caça e da colheita de frutas. As pinturas feitas nas cavernas eram, geralmente, figuras de animais abatidos na caça ou ligadas a cerimônias religiosas. Já no Neolítico, o homem criava animais, cultivava plantas e raízes e produzia objetos que utilizavam na caça e na agricultura. Os desenhos rupestres desse período representavam pessoas e animais, eram mais elaborados e exploravam simetrias.

A ideia de número surge da necessidade de contar objetos e foi sendo desenvolvida de forma gradual. Inicialmente, o objetivo era contabilizar grupos de animais ou pessoas. No ambiente educacional dos primeiros agrupamentos humanos, os mais velhos ensinavam aos mais jovens e não existia a divisão entre aqueles que deveriam somente estudar e aqueles que deveriam trabalhar.

Com o crescimento populacional, foi necessário dividir as tarefas do dia a dia. Algumas pessoas ficaram responsáveis em resolver problemas de cunho organizacional da comunidade e, outras, responsáveis por atividades como caça, pesca e agricultura. Nesse momento, alguns indivíduos deixaram de assumir tarefas práticas, que anteriormente era comum a todos, para assumir tarefas que envolviam toda aldeia. Com isso, diferentemente dos outros membros da comunidade, os herdeiros daqueles que lideravam o grupo passaram a receber uma educação específica, com o objetivo de prepará-los para ocupar o lugar de seus pais.

Ao término do período Neolítico, surgiram as primeiras cidades próximas aos rios Nilo e Tigre. O sistema organizacional dessas sociedades consistia na divisão de seus membros em classes, com o poder centralizado nas mãos de uma pequena minoria governante. Além desses indivíduos, a sociedade era composta por trabalhadores braçais, mercadores e escravos.

Naquela época, surgiram os primeiros rudimentos para o registro de números, impulsionados pelas transações comerciais e o aparecimento da escrita. Nesse contexto, as operações matemáticas que eram realizadas com a ajuda de técnicas que utilizavam partes do corpo nos processos de contagem tornaram-se insuficientes. Com isso, foram surgindo métodos para se efetuar cálculos que utilizavam objetos, como, por exemplo, pedras, para estabelecer formas de contar através da correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto que se desejava registrar o tamanho e um conjunto de objetos quaisquer. Esse processo contribuiu para o nascimento do ábaco (MIORIM, 1998). Posteriormente, com a evolução dos processos de contagem, foi surgindo um sistema de numeração.

Nesse período, a Matemática evoluiu bastante e, ao lado da Astronomia e da Medicina, foi considerada uma ciência importante. Foram nas civilizações egípcia e a mesopotâmica que houve, pela primeira vez, uma distinção nos tipos de educação: um era baseado na transmissão oral que envolvia atividades práticas e o outro voltado para a parte escrita destinada àqueles que posteriormente iriam governar a cidade.

Os povos das antigas civilizações conseguiram, sem dúvida, desenvolver vários elementos que viriam a compor o que seria, futuramente, chamado de as *matemáticas*. Entretanto a preocupação com as regras gerais, com a exatidão dos resultados e com os princípios lógicos (matemática teórica) seria valorizada por pensadores de uma nova civilização, que viria ser o novo centro da cultura Ocidental: a civilização grega. O processo educacional na Grécia antiga, como mostrado anteriormente, evoluiu até o modelo sistematizado no conceito de *Paidéia*, cuja preocupação fundamental era formar um indivíduo que pudesse atuar como cidadão na *pólis*.

O fim da Grécia clássica ocorreu por volta de 338 a.C., quando Filipe II (382-226 a.C.), rei da Macedônia, reuniu várias cidades-Estado da Grécia em seu poder. Após sua morte, seu filho, Alexandre (356-323 a.C.), herdou seu império. Em meio a diversas conquistas, fundou a cidade de Alexandria.

Poucos anos mais tarde, comandou uma batalha contra o Império Persa, o mais poderoso do mundo naquela época, no qual se sagrou vencedor. Com isso, reuniu, em um só Império, a Grécia, o Egito e o Oriente Médio, formando assim, o que os gregos chamavam de *Oikoumene*. Criaram, nesse novo centro, bibliotecas, universidades e museus. Com a convivência de várias culturas, os pensadores gregos passaram a conhecer mais sobre outros povos. O período que durou entre 336-31 a.C. foi chamado pelos historiadores de Era Helenística. Eves (2004) conta que, no início desse período, enquanto a civilização grega se preocupava com estudos voltados para a literatura, história e filosofia, os intelectuais em Alexandria desenvolviam ideias no campo da Matemática.

No período helenístico, a *Paidéia* grega foi assumindo o aspecto do que hoje concebemos como educação clássica, centrada nos livros e tendo a escola como ambiente que proporciona a prática educativa. A educação clássica tinha um período maior de estudos, mas nem todos conseguiam alcançar o estágio final. A maioria dos que ingressavam na escola concluíam somente o nível elementar. Nessa época, criou-se uma etapa intermediária, após o nível elementar, que proporcionava aos alunos um conhecimento mais amplo e preparava para o nível superior. Aqueles que tinham vontade e poder aquisitivo favorável poderiam optar, no nível superior, entre retórica, a medicina e a filosofia. Nessa época, a Matemática lecionada para as crianças de sete aos catorze anos era um dos métodos de cálculo, o reconhecimento dos nomes e símbolos numéricos e contagem através dos dedos das mãos.

Por volta de 150 a.C., houve um período de baixa produção intelectual na Era helenística. Entre outros motivos que influenciaram o declínio e a diminuição da produção intelectual nesse período foi a invasão de Roma no O*ikoumene*, em 146 a.C., e o incêndio da biblioteca de Alexandria, em 46 a.C.

O conhecimento na Roma antiga privilegiou a cultura literária e fez com que as matemáticas desaparecessem da escola secundária, deixando de lado os números e os processos de contagem como a parte fundamental na educação. Foi no período romano que a educação clássica se consolidou. Houve uma transformação no âmbito educacional que teve como características o aumento do número de escolas, o fim dos castigos físicos e as salas de aula sendo constituídas respeitando o nível e idade dos alunos. A formação mais geral do aluno no nível intermediário, a partir do século I d.C., era composta pela Matemática dividida entre a Aritmética, Geometria, Astronomia e Música e os estudos literários, divididos entre a Gramática, Dialética e a Retórica.

O domínio romano e a posterior adoção do Cristianismo como religião oficial de todo império, fez com que a produção científica diminuísse consideravelmente, pois “os líderes religiosos se opunham às investigações científicas, em especial quando os modelos científicos pareciam desafiar os dogmas religiosos” (EVES, 2004, p. 164).

O período posterior, denominado Idade Média, foi uma época conturbada na história ocidental tendo seu início no século V a.C. com a queda do Império Romano. Os pensadores dessa época davam maior importância aos conhecimentos sobre religião e engenharia em vez da Matemática e da Ciência pura. O currículo educacional foi sistematizado, nesse período, no que ficou conhecido posteriormente como *Trivium* e o *Quadrivium*.

Com o desaparecimento do mundo clássico, o ensino da música volta a cena por volta do século V d.C. através de eventos festivos que tinham como uma das atrações a disputa envolvendo apresentações artísticas. Por volta do século VI d.C., com o crescimento da religião cristã, a música instrumental obteve posição de destaque, principalmente nas cerimônias religiosas. O Papa Gregório I (544-604 d.C.) organizou uma série de hinos e salmos com algumas adaptações para serem utilizados nos rituais católicos. A música era cantada em latim, em uma voz (monofônica) e uma melodia (monódica) sem ritmo definido. Geralmente era acompanhado por um instrumento para auxiliar na afinação vocal. Tinha como objetivo levar o indivíduo a um estado de meditação. Era a música oficial das liturgias da igreja. Em homenagem ao Papa Gregório I, essa música recebeu o nome de canto gregoriano. Nesse período, o ensino e estudo da música eram realizados nos monastérios com o objetivo de formar instrumentistas e cantores. Por volta do século XI d.C., quem mais influenciou no estudo da música foi o monge Guido D'Arezzo (992-1050 d.C.) (ABDOUNUR, 2003). Preocupado com o ensino e o estudo da teoria musical, D'Arezzo escreveu um manual musical chamado *Micrologus* que apresenta, pela primeira vez, o nome das notas musicais que conhecemos hoje, baseando-se em um texto sagrado em latim, em homenagem a São João. O hino era assim:

Ut*queant laxis*
Resonare fibris
Mira gestorum
Famuli tuorum
Solve poluti
Labii reatum
Sancte **I**oannes

As primeiras sílabas de cada verso correspondem ao nome das notas musicas. Como "Ut", no primeiro verso, era de difícil pronúncia e não permitia a fluência no momento do canto foi modificado por "dó". A nota "si", no último verso, originou-se do "S" da palavra *Sancte"* e o "i" da palavra *Ioannes* (ABDOUNUR, 2003, p. 23).

Os grandes impérios presentes no mundo antigo deram lugar a um novo sistema social que foi posteriormente chamado de feudalismo. A população era dividida entre as classes servos, nobreza e clero, e havia pouca mobilidade social. A Igreja era o único poder centralizado da Idade Média. Ao longo da Europa Ocidental, fora de sua pequena parte urbana, a Igreja tinha várias instituições religiosas espalhadas como monastérios e conventos que estudavam, além de religião, a filosofia, sendo que ciências, como a Matemática, não tinham muito espaço. Durante a Baixa Idade Média, essas instituições religiosas condenavam todo conhecimento oriundo da cultura pagã anterior, tendo a Bíblia como única fonte de sabedoria. Houve, nesse período, uma preocupação com a educação das crianças, e o castigo físico que Platão desaprovava dentro do cenário educacional começava a se extinguir.

Sobre os conhecimentos que envolviam as matemáticas, o principal autor era Boécio (480-524 d.C.), que escreveu obras simplistas baseadas em autores da Antiguidade clássica sobre aritmética e geometria. Basicamente, o interesse pelas matemáticas no Ocidente era voltado para seu caráter instrumental, como na determinação do calendário religioso (MIORIM, 1998).

A partir do século IX, o imperador Carlos Magno, percebendo que a educação do clero e do povo seria de fundamental importância para a expansão do cristianismo, propôs o ensino dividido em três partes: elementar, secundário e superior. Porém, nesse momento, o ensino das matemáticas ainda não era tão valorizado, já que se dava maior importância ao estudo do latim que permitiria o acesso às escrituras sagradas. A ideia era que

> [...] em cada paróquia seja criada uma escola elementar e em cada mosteiro, abadia ou bispado, uma escola de nível secundário. Cria ainda uma universidade itinerante e incentiva a cópia de manuscritos, não apenas dos eclesiásticos como também dos de escritores clássicos que pudessem ser localizados (MIORIM, 1998, p. 30).

Na Europa ocidental, do século X até por volta do século XV, surgiu o que foi classificada posteriormente como escolástica. A produção intelectual desse período é caracterizada pela tentativa de se explicar o sagrado através da razão, quando os filósofos toda época começaram a ter acesso a alguns textos clássicos, em especial, aos livros de Aristóteles que sofreram uma releitura. Nesse contexto, o estudo da lógica ganhou grande destaque no ensino de nível superior. O maior expoente desse período foi São Tomás de Aquino (1225-1274).

Nessa época, foram criadas várias universidades importantes na Europa. Em meio aos debates teológicos, as especulações a respeito da matemática abstrata começaram, novamente, a ganhar corpo à medida em que as obras dos antigos pensadores gregos chegavam novamente à Europa, principalmente, por via de traduções do árabe. Na busca por respostas para explicar questões teológicas por meio da razão, surgem algumas divergências com a Igreja. Entre o final do século XIV e início do XV, surge um movimento que, além de outros fatores, rompe com as ideias da escolástica e com a forma que a educação era concebida nas universidades. Nasce, então, o Renascimento.

O Renascimento foi responsável por diversas transformações nos campos da Filosofia, das Artes e das Ciências, gerando mudanças nos aspectos culturais, sociais, econômicos, políticos e religiosos em toda sociedade. As principais características do Renascimento foram o antropocentrismo, o hedonismo, o individualismo e o racionalismo. Nessa época, o aprimoramento da trigonometria, da aritmética e da álgebra aconteceu no sentido de melhorar as técnicas utilizadas no campo da navegação, da astronomia e do comércio. A ciência buscava explicar a natureza através da matematização dos fenômenos. O incremento do comércio e a aplicação da Matemática na produção de tecnologias, principalmente ligadas à navegação, foi um fator motivador no desenvolvimento da Matemática nesse período.

Uma das maiores contribuições do Renascimento para a relação entre a matemática e a música foi o estudo da polifonia, o que ao longo dos anos fez surgir a harmonia. No século XVI, com a Revolução Científica, os estudiosos passaram a buscar explicações racionais para certos fenômenos físicos através da experimentação e da matematização diferentemente de momentos históricos anteriores, quando a explicação da natureza tinha grande ligação a questões místicas.

Nesse processo de reformulação da cultura medieval, ocorreu uma busca pela valorização de elementos da Antiguidade clássica, em oposição ao sistema vigente. Surge o Humanismo, um movimento artístico e cultural que acreditava nas ideias do antropocentrismo e do naturalismo. Nesse período, o ensino era dividido em duas vertentes: um ligado aos aspectos práticos, que começava a ganhar maior importância pelas novas profissões que vinham surgindo e outro ligado aos conhecimentos clássicos, basicamente direcionados à aristocracia. No currículo proposto pelos humanistas, não havia espaço para prática, a não ser quando seu estudo era direcionado para o aperfeiçoamento do raciocínio (MIORIM, 1998).

Por volta do século XVI, esse modelo de ensino começou a ser questionado. Com os avanços da ciência moderna, o ensino de matemática foi sendo cada vez mais valorizado. Porém, diferentemente do que ocorria na Antiguidade, o ensino de matemática não tinha mais como sua função principal o treinamento do raciocínio através de sua estrutura dedutiva, mas servia, agora, como um instrumento das ciências empíricas.

Outro fator importante que aconteceu nesse século foi que, com o advento da imprensa, passou a existir uma circulação de livros sobre aritmética e álgebra que abordavam assuntos sobre a Matemática, o que era impulsionada pelo incremento do comércio, principalmente, das grandes navegações.

Nos séculos XVI e XVII ocorreram várias descobertas no campo da Matemática que foram importantes nesse novo cenário europeu na confecção de mapas cartográficos e na construção de navios. Era a utilização das matemáticas em aplicações práticas e na matematização de fenômenos.

Nessa época, sobre a relação entre a matemática e a música, vários cientistas e teóricos musicais foram importantes para impulsionar essa relação. Gioseffe Zarlino (1517-1590) produziu uma obra, chamada *Inztituzioni Armonique*, que serviu de referência no Ocidente por muito tempo e de alicerce para a cultura artística e científica da época. O matemático Marin Mersenne (1588-1648) produziu uma obra sobre a física do fenômeno acústico, campo que, até então, era estudado como uma parte vinculada apenas a explicação de fenômenos musicais. Mersenne mantinha contato com René Descartes (1596-1650) que escreveu um tratado, o *Compendium Musicae*, sobre a relação entre essas duas ciências (ABDOUNUR, 2003).

No início do século XVII, Galileu Galilei (1564-1642), contrariou os estudos realizados pelos pitagóricos sobre sons consonantes e dissonantes. Segundo Abdounur, Galileu defendia que "Nem a tensão e nem a densidade linear de cordas apresentava-se como razão direta e imediata subjacente a intervalos musicais, mas razões de números dos números de vibrações e impactos de ondas sonoras que atingiam o tímpano" (ABDOUNUR, 2003, p. 29).

Uma de suas principais contribuições na relação entre a Matemática e a Música foi a analogia que envolve a altura musical e a frequência que um corpo sonoro emite. Nesse momento, surge, como vemos atualmente, o estudo de fenômenos sonoros sob o olhar da Física, pois essas descobertas só foram possíveis quando o som começou a ser tratado como onda. Outros matemáticos contribuíram com essa nova abordagem sonora, como Newton (1642-1727), Euler (1707-1783) e Laplace (1749-1827). Leonhard Euler dizia que a representação matemática dos sons que chega até nosso tímpano é diferente da representação das mesmas numericamente. Para exemplificar, Abdounur afirma que "[...] no temperamento igual, a escala não possuía consonâncias exatamente puras, uma vez que embora o ouvido escutasse o intervalo de quinta como razão de 3 para 2, seu valor matemático real igualmente temperado soava no ar como $2^{7/12}$" (ABDOUNUR, 2003, p. 34).

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), tendo como objeto de estudo as cordas vibrantes, voltou-se para observações que relacionavam a altura musical e sua frequência correspondente. Concluiu que "o som obtido por uma corda esticada por duas extremidades fixas é inversamente proporcional ao som emitido por ela" (ABDOUNUR, 2003, p. 35). Daniel Bernoulli (1700-1782) estava interessado nos problemas referentes aos harmônicos, conforme demonstra Abdounur que "[...] a vibração de um corpo sonoro poderia ser observada com superposição de seus modos simples de distintas amplitudes, porém não havia princípios gerais sobre os quais a prova de tal afirmação poderia ser experimentada" (Ibidem).

Com a polifonia, o sistema aritmético pitagórico começou a apresentar falhas significativas na composição e na transposição de acordes. As músicas soavam desafinadas devido aos intervalos sem simetria. As razões comensuráveis estabelecidas por Pitágoras para representar o som produzido por uma corda, não fazia mais sentido com o aprimoramento e desenvolvimento da música renascentista. Não era mais possível construir escalas admitindo somente números racionais. Além disso, não só o comprimento da corda era importante para analisar o som que ela produzia. Outros fatores deveriam ser levados em consideração como densidade e tensão da corda.

Desde o experimento com o monocórdio percebeu-se que, através do ciclo das quintas e das oitavas, era impossível colocar uma quantidade exata de ciclos das quintas dentro de um ciclo de oitavas, o que ocasionava em um desajuste. Pensemos o seguinte: partindo de uma determinada nota e realizando o percurso das quintas 12 vezes, alcançaremos a mesma nota musical, se realizarmos o percurso das oitavas 7 vezes. Daí tem-se que $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$. Porém, matematicamente, essa igualdade não é verdadeira, pois, $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}:\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=1{,}01364\neq 1$. Esse desajuste é chamado de coma pitagórica, fato que contribuiu para o surgimento de um novo sistema de afinação, por volta do século XVII e início do século XVII, chamado temperamento igual.

Esse sistema foi responsável por dividir o intervalo de oitava em 12 semitons que possuem a mesma distância entre si, o que seria uma solução adequada para o problema da coma pitagórica. Matematicamente, o objetivo era descobrir um número f tal que multiplicado por uma frequência inicial 12 vezes, alcançasse uma oitava acima dessa frequência inicial. Pode-se dizer que as notas musicais, nesse novo sistema de afinação, estariam igualmente espaçadas seguindo uma progressão geométrica. Logo, a razão entre as frequências de duas notas quaisquer consecutivas são iguais. Conforme já foi dito, a relação envolvendo o comprimento de uma corda vibrante e sua metade compreende ao intervalo de uma oitava. Sob o olhar físico, dado uma frequência inicial, a oitava corresponde ao dobro da frequência inicial. Daí tem-se que

$$f_0.f.f.f.f.f.f.f.f.f.f.f.f=2.f_0$$

$$f_0 . f^{12} = 2 . f_0$$

$$f^{12} = 2$$

$$f = 2^{\frac{1}{12}}$$

Nessa nova concepção sobre afinação musical, o intervalo de quinta pitagórica que correspondia a $1{,}5$, no novo sistema era de $2^{\frac{7}{12}} = 1{,}4983$. Vale ressaltar que outros sistemas de afinação foram propostos e que o temperamento igual foi o que melhor se adequou à música da época. Mesmo assim, muitos ainda contestaram sua eficácia por acreditar que as consonâncias pitagóricas eram as que mais se encaixavam como critério de afinação.

Como forma de ratificar a eficácia desse novo sistema, um dos maiores músicos de todos os tempos, Johann Sebastian Bach (1685-1750), utilizou em suas obras o temperamento igual. Ele compôs uma obra chamada *O Cravo bem temperado* com 24 prelúdios e fugas utilizando os 12 tons maiores e menores da música ocidental.

Em relação ao ensino da matemática, a partir do século XVIII, marcado por grandes revoluções, em especial a Revolução Francesa de 1789, o ensino de tradicional de Matemática passou a ser questionado. Até esse período, o estudo da Matemática era baseado nos *Elementos* de Euclides que apresentava uma linguagem de difícil compreensão com um enorme número de definições e postulados. Muitos acreditavam que uma das dificuldades que o ensino de Matemática enfrentava, se devia à estrutura dos livros disponíveis na época. Foi na França que surgiu uma das principais obras que iria apresentar um novo modelo para o estudo da geometria. Alexis Claude Clairaut (1713-1765), em seu livro *Eléments de géométrie* (1741), apresentava uma linguagem predominantemente didática (MIORIM, 1998). Uma das principais características de sua proposta era oferecer questões de aplicação prática e, a partir dessa situação, mostrar os conceitos e definições mais abstratas. Utilizou também o percurso histórico da Matemática para exemplificar e propor situações. De fato, foi uma obra com grande aceitação na França, utilizada durante anos no ensino de Geometria e teve influência em vários países.

No século XIX, surgiu a necessidade de implantar as modificações no ensino que foram construídas até então. Como herança da Revolução Industrial, veio a importância de preparar melhor o trabalhador das indústrias com conhecimentos matemáticos tendo como objetivo aperfeiçoar as técnicas de produção. O conteúdo e o direcionamento na educação secundária precisavam ser modificados para atender a esses novos anseios. Com isso, surgiram duas perspectivas antagônicas em relação ao currículo escolar: uma baseada na formação clássica, nos moldes do ensino grego e medieval; outra voltada para a nova realidade, absorvendo os conhecimentos advindos da ciência moderna.

Ao final do século XIX, Felix Klein (1849-1925) contribuiu consideravelmente para o desenvolvimento do ensino da matemática, criando o Programa de Erlander, que se tornou, posteriormente, expressivo para o desenvolvimento da Geometria. Klein buscava relacionar as diversas áreas da matemática e adquiriu papel de destaque na promoção desse campo do saber. Além de suas contribuições no campo da matemática pura e aplicada, tinha grande interesse pela forma de ensinar essa disciplina, realizando estudos sobre a formação de professores e de como a matemática era ensinada nos níveis secundário e universitário. Klein acreditava que o ensino deveria ser unificado em oposição à especialização do conhecimento e via na matemática um instrumento para realização desse projeto. Por isso, dizia que os conhecimentos matemáticos deveriam ser estudados em todos os segmentos de ensino, de forma diferenciada (MIORIM, 1998).

O século XX foi o período de consolidação dessas novas perspectivas e papéis da matemática no ensino e da educação matemática como um campo de pesquisa específico. Nesse período, a perspectiva clássica da educação praticamente desapareceu com a formação dos grandes sistemas de ensino de massa.

2 REFERENCIAIS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

2.1 O ensino de matemática e da música nas escolas brasileiras

O ensino brasileiro foi dominado pelos padres jesuítas por mais de duzentos anos. As escolas secundárias seguiam a tradição do código chamado *Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Iesu*, que dizia que o ensino médio deveria contemplar disciplinas baseadas na humanidade clássica, deixando a matemática a cargo do ensino superior, em cursos restritos. Com isso, a matemática teve sua carga horária reduzida e vinculada ao estudo da lógica e da matemática demonstrativa.

Em 1759, a Companhia de Jesus foi expulsa do Brasil e, com isso, vários centros educacionais encerraram suas atividades, restando uns poucos dirigidos por outras ordens religiosas e padres formados pelos jesuítas. Com a Reforma Pombalina, em 1772, foram criadas aulas de disciplinas isoladas, chamadas de Aulas Régias, com o objetivo de suprir a falta do sistema educacional anterior. Essa medida não trouxe muitas melhorias o ensino, pois não existia planejamento escolar nem articulação entre as aulas. Com as Aulas Régias foi possível modificar os conteúdos escolares e introduzir outros, como as matemáticas, mas esse modelo não vigorou devido à dificuldade de encontrar alunos que se interessassem por esse tema. Além disso, não existiam professores suficientes para ministrar as aulas de matemática.

No Período Imperial, como centros educacionais, existiam os seminários e colégios mantidos pelas ordens religiosas, as escolas e professores particulares e os Liceus, esses últimos tinham como principal objetivo o preparo dos alunos para ingressar nas Academias Militares e nas Escolas Superiores para estudarem medicina ou direito. Às vezes, esses centros ministravam somente disciplinas exigidas nos exames de seleção.

Em 1837, surgiu o Colégio Pedro II, que deu um novo impulso ao ensino secundário brasileiro. Nesse colégio, foi apresentado pela primeira vez um planejamento para o ensino secundário, em que os alunos eram promovidos por séries e não mais por disciplinas. Ao final desse curso, recebiam o título de bacharel em Letras, o que já possibilitaria o ingresso em escolas superiores, sem prestar exames. As matemáticas, juntamente com outras ciências, também seriam contempladas nesse Colégio, com o objetivo de relacionar o ensino clássico com as tendências modernas (MIORIM, 1998).

Com o surgimento da República, a educação no Brasil sofreu grandes alterações. A primeira dessas reformas foi a Benjamin Constant, inspirada nas obras de Augusto

Comte, rompendo com o ensino anterior que tinha características clássicas e humanistas que perduravam durante anos no ensino secundário. Uma das modificações foi a inserção de disciplinas científicas, porém ainda mantendo algumas disciplinas clássicas. Houve uma alteração nos conteúdos matemáticos, que eram estudados no ensino secundário, privilegiando elementos da matemática concreta e abstrata. Cabe ressaltar que essa reforma, apesar de ter alterado a perspectiva educação do um ponto de vista das ideias, não teve grande impacto, pois não foi realmente implementada na prática.

Com o passar dos anos, surgiram as escolas técnicas, para resolver a demanda gerada na indústria e na agricultura, situadas no Rio de Janeiro e em São Paulo. Devido a vários acontecimentos no mundo, como a Primeira Guerra Mundial e as novas ideias na Europa e nos Estados Unidos, surgiram movimentos de renovação educacional, entre eles o Movimento da Escola Nova século XX. Na mesma época, foram publicados livros sobre educação com as novas correntes educacionais mundiais e criou-se a Associação Brasileira de Educação em 1924, que, entre outras atribuições, promoveu as Conferências Nacionais de Educação. Uma das principais características do Movimento da Escola Nova era de introduzir problemas que envolviam situações reais na escola, o que causou uma importante mudança, principalmente no ensino de matemática das séries iniciais. O Movimento da Escola Nova não atingiu as escolas secundárias que continuaram com o ensino tradicional, sem levar em consideração o estudo de problemas que envolvem situações reais. Mesmo assim, as contribuições desse movimento foram consideráveis quando se trata de novas propostas para a educação nas séries iniciais.

Até então, com a ausência de propostas significativas para o ensino secundário, em 1928, o Colégio Pedro II apresentou uma reformulação para esse segmento a qual envolvia alterações no currículo da Matemática. As principais ideias modernizadoras inicialmente foram apresentadas por Euclides Roxo, que foi o primeiro a unificar a aritmética, a geometria e a álgebra em uma única disciplina: Matemática. Essa proposta foi inspirada nas ideias discutidas na Comissão Internacional de Matemática da qual o Brasil participou uma única vez, tendo como delegado o professor Raja Gabaglia. Inicialmente, essa e outras reformas foram decretadas pelo Conselho de Educação, porém só aplicadas no Colégio Pedro II. Essas propostas influenciaram outras escolas de ensino secundário em todo país.

Outra alteração importante no âmbito educacional que aconteceu no Brasil nessa época foi a Reforma Francisco Campos, que propôs, entre outras medidas, a frequência obrigatória dos alunos, o aumento da duração e a divisão do ensino secundário em duas partes. Além disso, a finalização desse segmento passou a ser requisito para ingressar nas universidades.

A matemática, através dessas reformas, passou a ser estudada levando em consideração o desenvolvimento cognitivo e o interesse do aluno. As atividades eram organizadas de tal maneira que valorizasse os cálculos mentais e a forma como os alunos chegavam até as soluções, deixando de lado práticas que estimulam a memorização e demonstrações abstratas. Os conceitos deveriam ser trabalhados de forma intuitiva e experimental. A Reforma também sugeria a eliminação de assuntos de caráter formal e de cálculos sem interesse didático.

Com o passar dos anos, o ensino de matemática ainda recebia críticas. Entre elas estão a grande quantidade de assuntos estudados e o abandono da formalização lógica. Discussões antigas ainda perduravam sobre qual formação (literária ou científica) era mais importante para a formação do aluno e sobre qual delas deveria ocupar maior espaço no currículo escolar.

Sobre o ensino da música nas escolas brasileiras, antes da lei de agosto de 2008 que regulamenta o ensino de música nas escolas brasileiras ser aprovada, ele fazia parte do currículo escolar no governo do presidente Getúlio Vargas (1882-1954), inserido no canto orfeônico, idealizado por Villa-Lobos (1887-1959). Esse foi considerado por muitos o maior movimento popular de educação musical. O objetivo era conhecer as músicas regionais através do canto coral utilizando partituras e solfejos como uma proposta de estimular o nacionalismo. O método não foi bem-sucedido. Entre os diversos fatores para o fracasso, destacam-se a falta de profissionais capacitados para trabalhar com a educação musical e a implementação de métodos de escolas internacionais que não vingaram em solo brasileiro. Em seguida, nos anos 70, houve uma nova tentativa malsucedida de implementar a Educação Artística nas escolas. Em sua proposta original, ela deveria abordar o Teatro, a Música e as Artes Plásticas. Mas o que foi visto foi uma priorização das Artes Plásticas, e a Música foi novamente esquecida nas escolas. Outra tentativa de colocar a Música na grade curricular foi feita pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB) na década de 90. O problema, mais uma vez, foi a dificuldade em formar profissionais específicos para trabalharem a educação musical.

Recentemente, foi sancionada, em 18 de agosto de 2008, uma lei que coloca o ensino obrigatório de Música na Educação Básica nas escolas da rede pública e privada. A lei não deixa claro se é dever da escola criar uma disciplina com esse nome específico ou integrar a Música na disciplina de Artes. Pela própria subjetividade no texto da lei, são possíveis diversas interpretações acerca do assunto. Considerando as várias tentativas de inserção desse conhecimento no ambiente escolar, deve-se tomar muito cuidado para que os problemas não se repitam.

> Sabemos que os desafios necessários para se reinserir a música na escola são enormes. Para tanto, será necessário um amplo debate sobre o valor da música enquanto conhecimento. Sem isso, as iniciativas de recolocação da música na escola (e existem muitas!) correm o risco de não se sustentar ao longo prazo. Além disso, é preciso também repensar os modos de implantação do seu ensino e de sua prática, para que não se repitam os erros do passado (GRANJA, 2006, p. 15).

O trabalho com a música, entre outras possibilidades, permite ao aluno desenvolver habilidades lógico-matemática, sensório-motor e espacial, perceber os sons e conhecer as músicas que pertencem ao folclore da região. O objetivo não é formar nas escolas músicos de profissão, e sim desenvolver a percepção e a sensibilidade, além de estimular a criatividade e a integração dos alunos. Porém, o ambiente escolar ignora o potencial pedagógico e interdisciplinar que existe nessa disciplina.

> [...] o ensino de música nas escolas deve ter como fim menos a formação de uma elite de músicos talentosos e mais a formação de pessoas que sejam capazes de realizar seus projetos a partir de múltiplas linguagens (GRANJA, 2006, p.15).

A proposta de se ensinar música não é formar artistas profissionais, tampouco utilizá-la com intuito de reforçar o “modismo” do trabalho interdisciplinar. A intenção é bem maior. A música pode ser trabalhada como fator motivacional e incentivador no ensino da matemática e de outras disciplinas, porém sem perder sua característica original de desenvolver habilidades motoras, sensoriais e espaciais e formar cidadãos críticos com sensibilidade, criatividade e imbuídos de um instinto de cooperação.

Segundo Granja (2006), a música, ao longo da trajetória escolar do aluno, é tratada com maior visibilidade na educação infantil e no ensino fundamental – séries iniciais. Nas séries seguintes, ela perde espaço para outras disciplinas e é trabalhada de forma isolada, sem vínculo com projetos educacionais. O potencial pedagógico da música é ignorado, por exemplo, quando é trabalhada em conjunto com a matemática e a física. Juntas, essas disciplinas permitem aos alunos conhecerem e verificarem a aplicação de conceitos matemáticos de razão, proporção, progressão geométrica, logaritmos e de conceitos físicos de onda, como amplitude, frequência e funções periódicas.

No ensino médio, o abandono da música é mais acentuado, pois, nessa etapa da vida escolar do aluno, o foco está em permitir o ingresso dele na universidade. Tanto que a grade curricular opta por concentrar maior carga horária para disciplinas de cunho conceitual, destinando espaço mínimo para as atividades perceptivas e lúdicas, negando os diversos papéis que a escola possui na formação mais ampla dos alunos.

O presente trabalho surge da ideia inicial de realizar uma pesquisa que tem como foco a Grécia Antiga e perceber que importância tinha a educação clássica e a aquisição de conhecimento na formação do homem grego. Nesse cenário, como tema central, a pesquisa centraliza na relação que existia entre a matemática e a música nesse período. A concretização e as considerações finais deste trabalho podem ser úteis na elaboração de estratégias que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da matemática utilizando a música no ambiente escolar e em atividades que usam a história da matemática em sala de aula.

2.2 A história da matemática como ferramenta pedagógica

O clássico texto de Antonio Miguel (1997), *As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*, que destaca doze principais argumentos reforçadores e as dificuldades do uso da história da matemática em sala de aula, foi muito importante para sistematizar e divulgar essa ferramenta pedagógica em um período em que havia poucas pesquisas a respeito em português.

O primeiro argumento apresentado no texto é que a história, por si, seria uma fonte de motivação para os alunos. Contudo, defende o autor, que, se esse argumento fosse verdadeiro, o próprio ensino de história seria intrinsecamente motivador, o que não se observa. Essa seria uma visão mecanicista da motivação e representa um argumento frágil na defesa do uso da história da matemática no ensino da matemática.

O segundo argumento diz respeito à possibilidade que o uso da história traz para que o aluno deixe de ver a matemática como algo pronto e dado e a perceba como uma construção influenciada não só a outros campos do saber, mas também às necessidades práticas da humanidade. A crítica apresentada a esse tipo de defesa do uso da história da matemática em sala de aula seria pela dificuldade em romper com a visão tradicional dessa disciplina, pois a própria história dela é permeada por uma concepção platônica do conhecimento, na qual seu caráter lógico-dedutivo acaba ganhando mais relevo.

Um terceiro argumento apresentado é que a história seria uma fonte privilegiada de métodos para ensino e aprendizagem de matemática, o que, para o autor, seria expressão de uma concepção positivista que reserva ao método histórico um papel central para o alcance do ideal pedagógico.

O argumento seguinte diz respeito à possibilidade de a história permitir à prática pedagógica incorporar problemas práticos que agucem a curiosidade dos alunos. Para esse argumento, Miguel apresenta crítica semelhante ao primeiro, dizendo que esse fator motivacional da história é supervalorizado e que problemas que podem aguçar a curiosidade dos alunos não necessariamente precisam ser permeados por esse fator histórico.

Outro argumento é que a história permitiria um ensino de matemática desalienado. Como contra-argumento, o autor diz que a forma como o conteúdo matemático é apresentado aos alunos não segue o percurso histórico da matemática e, mesmo com o uso da história, poder-se-ia construir uma ideia falsamente harmônica do desenvolvimento desse campo do saber.

A história também seria, como mostrado no argumento seguinte pelo autor, um instrumento de promoção de um pensamento crítico e independente. No enfoque heurístico, baseado em provas e refutações, a história poderia entrar como guia para se alcançar um resultado pré-definido, usando-a para atingir esse fim.

Outro argumento é a possibilidade de a história ser usada como elemento unificador dos vários campos da matemática, dando uma visão global do seu desenvolvimento.

Também alguns valores provenientes de idealizações da matemática e dos matemáticos podem ser questionados pelo fato de os alunos terem contato com a história da matemática, visto que os percalços pelos quais os grandes matemáticos do passado passaram o caminho irregular do desenvolvimento da matemática é, normalmente, omitido do processo de ensino e construção da visão dos alunos a respeito da matemática e do conhecimento em geral.

No décimo argumento, Miguel apresenta a tese do filósofo e matemático Henri Poincaré, a qual afirma que a história é um instrumento de conscientização epistemológica. Seria necessário, segundo essa perspectiva, que o professor se valesse da história para recuperar, em momentos posteriores, saltos de padrões ensinados que são feitos no ensino devido à imaturidade psicológica do aluno.

No outro argumento levantado, a história é apresentada como potencial promotora de uma aprendizagem significativa da matemática. Com o uso da história, seria possível mostrar a ordem na qual conceitos matemáticos foram sendo desenvolvidos, o que evidenciaria os obstáculos enfrentados pelos matemáticos no curso da história da matemática. A recriação desse processo mostraria ao aluno os limites e os caminhos da matemática, o que teria a função pedagógica de mostrar os “porquês” dos conceitos e contribuir para uma aprendizagem significativa, sendo esses porquês categorizados por Miguel em três tipos: cronológicos, lógicos e pedagógicos.

Os porquês cronológicos estariam ligados às explicações que seriam legitimadas por razões culturais, convencionadas. Os lógicos estariam baseados na lógica subjacente às proposições. Já os pedagógicos estariam relacionados aos modos como os conceitos seriam operacionalizados em sala de acordo com a escolha das abordagens para cada caso.

O último argumento apresentado por Miguel é o ponto de vista do educador matemático moçambicano Gerdes, que possui um amplo trabalho a respeito dos efeitos do colonialismo na matemática escolar. Segundo Gerdes, os colonizados desprezaram os conhecimentos dos nativos e impuseram uma forma de conceber a matemática que sufocou as matemáticas nativas e são causa de bloqueios e mau desempenho de crianças nessa disciplina, visto que não se reconhecem nessas formas de ensino e conteúdo. A introdução do ensino de matemática nas colônias teria um papel de selecionar uma elite local e não de conscientizar os alunos. Assim, a introdução de uma étno-história em sala de aula poderia contribuir para a recuperação da identidade cultural desses povos. Miguel relativiza tais conclusões por acreditar que há uma carência de estudos que sustentem os efeitos pedagógicos desse tipo de abordagem.

Por fim, Miguel apresenta alguns argumentos questionadores relacionados ao uso da história da matemática em sala de aula. O primeiro diz respeito à ausência de uma literatura adequada, à época do artigo, sobre a história da matemática dos últimos séculos que abarcam grande parte do que é ensinado nos cursos básicos.

Outro problema seria a própria literatura disponível, que enfatiza os resultados, e não os processos que levaram aos resultados matemáticos apresentados. Mas esse fato, relativiza o autor, poderia ser usado como estímulo para investigações que completem as lacunas da historiografia.

O terceiro argumento questionador aponta que a história da matemática pode se tornar um fator de complicação do ensino da matemática, visto que resolver problemas nessa perspectiva história não é algo familiar aos alunos. Por último, Miguel diz que esse método pode ser um problema para as crianças pela ausência de sentido histórico que elas têm.

Outro trabalho importante de Antonio Miguel sobre o tema, este escrito com Ângela Miorim, é o livro *História na Educação Matemática: Propostas e desafios* (2001), no qual são apresentadas as diversas perspectivas presentes no campo da história da educação matemática. A primeira delas é a perspectiva evolucionista linear. Com base nos estudos do morfologista E. Haeckel, a ideia é que a construção do conhecimento se dá a partir de uma hereditariedade e adaptação, que seria uma estrutura que se manifestaria no desenvolvimento psíquico das crianças. Esse é um argumento de matriz biológica chamado recapitulacionista, no qual as duas funções biopsicológicas básicas (hereditariedade e adaptação) seriam condições "para a recapitulação sequenciada e progressiva de estruturas pré-formadas de conhecimento por parte do indivíduo" (MIGUEL; MIORIN, 2011, p. 81).

Segundo esse ponto de vista, como dizem os autores, a matemática seria composta por um conhecimento cumulativo, produzido em períodos distintos e que deveriam ser apresentados aos alunos em etapas cronológicas, hierarquizadas e indistintas qualitativamente. Os autores afirmam, com bases nos estudos de Felix Klein, que o professor deve direcionar os estudos no sentido do desenvolvimento da disciplina, que seria, na visão desse autor, um caminho que parte de um estado mais simples até as formas mais elevadas. Essa seria também a perspectiva de Poincaré a respeito do ensino da matemática, dando esse autor um sentido pedagógico mais ligado à epistemologia, que revele ao aluno o desenvolvimento das ideias matemática ao longo da história.

Outra perspectiva abordada é a estrutural-construtivista operatória. A base dessa perspectiva está na obra *Psicongênese e História da Ciência*, de Jean Piaget e Rolando García, na qual são apresentadas duas teses destacadas por Miguel e Miorim.

A primeira delas é a defesa de que a significação epistemológica que uma ideia ou estrutura adquire está subordinada a uma lógica de desenvolvimento por etapas, podendo esta ser renovada ou ampliada, mas não alterada em sua natureza ou função. Isso mostra porque construções mais elevadas no plano do conhecimento continuam ligadas aos níveis mais primitivos que as originaram. O mecanismo que permite a integração sucessiva de novos conhecimentos, mantendo sua natureza original e sua função, é denominado pelos autores de "modo de construção do conhecimento por abstração reflexiva e generalização completiva" (MIGUEL; MIORIN, 2011, p. 87).

Segundo os autores, haveria dois tipos de abstrações: as reflexivas e as empíricas. A abstração reflexiva é o ato mental de impor propriedades a objetos e ações. Já a empírica seria o processo inverso, que consiste no ato mental de extrair dos objetos suas propriedades. O mecanismo da reflexão seria dado pela conjugação de dois processos de abstração, em que um extrairia os elementos do objeto analisado e o outro os reconstituiria, reorganizando e ampliando o conhecimento por uma generalização completiva.

A segunda tese de Piaget e García destacada por Miguel e Miorim estaria ligada às duas características relacionadas a esse mecanismo de abstração. A análise dos objetos se daria em níveis hierarquizados que são operados pelos mecanismos de abstração de modo que, no plano cognitivo, se promova uma passagem de um nível inferior de compreensão a um superior. Nesse processo, o que foi ultrapassado seria integrado ao elemento superador pelo mecanismo que promove a passagem do nível objetal (no qual a análise é feita sobre propriedades inerentes ao objeto) para um nível intraobjetal (no qual a análise é feita sobre as propriedades intrínsecas às relações estabelecidas entre os objetos e as transformações que podem ocorrer neles). Um último nível seria o transobjetal, que engloba a análise das estruturas internas de sistemas abstratos.

A partir dessa perspectiva, Miguel e Miorim mostram que os objetos matemáticos são concebidos como complexos operatórios e que a aprendizagem matemática se daria por uma reconstrução pessoal de um corpo de conhecimento já construído historicamente, mesmo que, a depender do objeto considerado, a natureza das operações seja diferente. Assim, a construção histórica (filogênese) e a reconstrução pessoal (psicogênese) se desenvolveriam pelas três etapas, a saber: intraoperacional, interoperacional e transoperacional – qualitativamente distintas entre si.

Desse ponto de vista, a história da matemática seria a expressão dos conflitos e mecanismos cognitivos operatórios que emergem na passagem de determinada etapa a outra no processo de construção conceitual.

Outra perspectiva é a evolutiva descontínua, que foi desenvolvida com bases nos trabalhos de nomes conhecidos da Didática Francesa, tendo como base o livro *A formação do espírito científico*, de Gastón Bachelard. Segundo Miguel e Miorim, essa obra teria promovido uma ruptura na história e filosofia da ciência com o pensamento evolucionista linear. Além disso, Bachelard seria considerado o “teórico da descontinuidade” por também ter introduzido a noção de obstáculos epistemológicos, cuja forma de superação daria o caminho do progresso do conhecimento científico e se expressariam também no processo de aprendizado.

Para Miguel e Miorim, os obstáculos epistemológicos de origem didática se manifestariam no modo como o saber matemático é organizado e transmitido na escola. Os obstáculos epistemológicos de origem propriamente epistemológicos estariam relacionados à forma como determinado conteúdo se constituiu na história, ou seja, seriam "obstáculos históricos".

Nessa perspectiva, aprender matemática em um determinado contexto institucional seria uma construção por parte dos estudantes de recursos cognitivos que os permitisse superar os obstáculos cognitivos que se apresentassem durante o trabalho com problemas matemáticos. Os recursos cognitivos podem ser conhecimentos, procedimentos, ou mesmo concepções a respeito do saber matemático, e a história da matemática apareceria como um campo fértil de obstáculos epistemológicos a serem abordados em sala de aula com o objetivo de promover o aprendizado.

Outra perspectiva abordada por Miguel e Miorim seria a sociocultural. Remetendo ao pesquisador Luis Radford, os autores mostram que, para ele, haveria uma relação entre história da matemática e epistemologia a partir de uma concepção sociocultural do conhecimento matemático.

Para esse pesquisador, a análise histórico-epistemológica cumpriria vários papéis, como: extrair informações sobre o desenvolvimento intracultural e intercultural de determinado conhecimento; alterar intra e interculturalmente os significados dados a um conteúdo específico. Dessa maneira, modifica-se o modo de compreender as negociações internas do desenvolvimento do conhecimento avaliado e alterar-se também o significado de como se deu o embate de programas de pesquisa rivais no momento em que um conhecimento é desenvolvido.

Na área de educação matemática, o principal papel das análises histórico-epistemológicas seria o de construir campos semânticos de conceitos, teorias e procedimentos que podem ser introduzidos no currículo após análise de adaptação didática. Outra função seria servir de suporte para a elaboração de sequências didáticas, sendo a história da matemática um bom laboratório epistemológico para esse processo.

Miguel e Miorim ressaltam que essa perspectiva não trata de defender uma mera transposição mecânica para o ensino e aprendizagem de elementos do passado. As fontes que constituem o objeto de investigação devem ser avaliadas em conformidade com as práticas culturais que lhe deram origem, o que afasta da perspectiva recapitulacionista.

Essa abordagem sociocultural apresentada por Miguel e Miorim se aproxima do que pretendemos fazer nesta pesquisa, que é recuperar a perspectiva educacional da cultura grega antiga e reintroduzi-la na escola atual por uma "adaptação didática", utilizando a história da matemática (e da teoria musical) como um "laboratório epistemológico" dessa prática.

No próximo capítulo, apresentaremos a sequência de atividades aplicadas na pesquisa de campo, na qual desenvolvemos a ideia central deste estudo, aplicada ao ensino do conceito de número e conjuntos numéricos, mas sob a perspectiva clássica, que dava outra interpretação e significado a esse aprendizado.

3 AS ATIVIDADES

Apresentamos aqui as atividades que aplicamos aos alunos, elaboradas para responder a questão de investigação que orienta este trabalho, a saber: *Como o resgate de elementos da* Paidéia *grega, através do conceito de* mousiké*, pode auxiliar o atual ensino de Matemática na Educação Básica por meio de práticas pedagógicas que explorem a relação entre as histórias da matemática e da música?*

Para responder a pergunta, propusemos resgatar alguns elementos presentes na educação clássica, sistematizados sob a noção de *Paidéia*, desenvolvido na Grécia Antiga, para elaborar uma sequência de atividades aplicadas a alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola privada da cidade de Ouro Preto, Minas Gerais.

Os alunos estudam no período da manhã, e o pesquisador é o professor de matemática do ensino regular da referida escola. Para poder aproveitar melhor o referencial teórico em relação aos conteúdos explorados na elaboração das atividades, julgamos que seria mais conveniente utilizarmos um período extraclasse, com os alunos que se voluntariassem a participar à tarde.

Após conseguirmos autorização da escola – firmada em um termo próprio que segue anexo a este trabalho –, apresentamos um esboço da pesquisa aos alunos e, como todos eram menores de idade, em torno de 15 anos, pedimos àqueles que se interessassem em participar que levassem aos pais um termo de consentimento para que seus filhos integrassem a pesquisa. Dos 22 alunos da sala, 15 se disponibilizaram e trouxeram a autorização assinada (o formulário também está nos anexos da pesquisa).

Aplicamos 6 atividades extraclasse, uma por semana, no período da tarde. As atividades ocorreram no segundo semestre de 2016. Foram filmadas e duraram, cada uma, cerca de 1 hora. Em duas atividades, além da filmagem feita com a câmera fixa, o pesquisador também utilizou a câmera de um celular para caminhar entre os grupos durante as discussões e registrar algumas das falas de forma isolada. Com esse arquivo, produziu um caderno de campo com suas percepções da atividade, introduzindo comentários entre as falas dos alunos durante a transcrição dos vídeos.

A forma de coleta foi orientada pela intenção de realizar uma pesquisa qualitativa que nos fornecesse elementos para responder a questão de investigação. A escolha da estratégia de pesquisa decorre de algumas características da investigação que se deseja realizar.

Como nos mostra Yin (2005), essa escolha decorre de algumas variáveis, como o grau de controle que se terá sobre os eventos analisados, o período em que os eventos estudados ocorrem e o tipo de dado que se deseja coletar. Um elemento importante da pesquisa, que pode indicar a estratégia mais recomendada, segundo Yin, é a forma da questão de investigação. Questões do tipo “quais”, “o que”, “quantos”, estão relacionadas à busca de incidências ou predominância de um fenômeno e são indicativos de que se deseja realizar um levantamento de dados em que a abordagem quantativa será o elemento central na composição da pesquisa e suas conclusões. Já questões do tipo “como” e “por que”, especialmente quando estão avaliando acontecimentos contemporâneos em que o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos analisados, indicam uma abordagem qualitativa dos dados da pesquisa, em que o conteúdo é extraído não de sua incidência numérica, mas de seu significado dentro do fenômeno investigado.

Em nosso caso, estudaremos uma sala de aula em que os eventos se dão no presente e o investigador influencia no desenrolar das atividades, mas não tem controle sobre os caminhos e interações seguidos pelo grupo estudado. Além disso, nossa pesquisa pretende responder a uma questão do tipo “como”, aprofundando a análise nos casos particulares que emergiram nas falas e ações dos indivíduos que compõem a pesquisa.

Outra referência importante utilizada para fundamentação metodológica da pesquisa é o trabalho de *Investigação Qualitativa em Educação*, de Bodgan e Biklen (2003). Para esses autores, uma pesquisa qualitativa possui algumas características que permitem identificar se é essa a abordagem que se deseja fazer numa investigação.

A primeira delas é que a fonte dos dados, numa pesquisa qualitativa, é o ambiente natural, onde os pesquisadores se introduzem e gastam grande quantidade de tempo registrando o que ocorre e suas impressões a respeito. A segunda característica é que esse tipo de pesquisa é descritiva e não apresenta seus resultados em forma de números e tabelas. A terceira é o fato de os investigadores estarem mais interessados nos processos observados que nos resultados alcançados pelos pesquisados. As duas últimas características estão ligadas à forma como os investigadores analisam seus dados. Numa pesquisa qualitativa há a tendência dessa análise ser indutiva, na qual o significado, ou a perspectiva dos participantes, é o elemento central da avaliação dos dados.

Neste trabalho, realizamos um experimento social em que a base de dados não será dada por questionários padronizados nem classificação quantitativa de expressões ou interações, mas buscaremos encontrar nas falas dos alunos e do pesquisador elementos que iluminem as barreiras e potencialidades de resgatarmos elementos da *Paidéia* dentro de um ambiente escolar moderno, tão distinto daquele em que os gregos conceberam seu modelo educacional. Por esse motivo, optamos por realizar uma pesquisa qualitativa, tendo como instrumentos de coleta de dados filmagens e gravações em áudio das falas dos alunos, de seus questionamentos e interações, tanto entre eles quanto com o pesquisador, buscando elementos significativos para responder a questão de pesquisa.

3.1 A elaboração das atividades

Como apresentado no segundo capítulo, o elemento fundamental da educação grega é a noção de ritmo expresso no conceito de *mousiké*. O mundo estaria em um estado de permanente mudança, mas esta não se daria de forma caótica ou aleatória, e sim por padrões rítmicos que podem ser traduzidos em uma ordem matematicamente apreensível. Por esse motivo, o estudo da música e da matemática tinha tanto relevo na formação dos cidadãos gregos. A *mousiké* é o que torna possível a compreensão da realidade mais profunda. As atividades desta pesquisa foram elaboradas sob essa ótica, tomando a história da matemática como a ferramenta capaz de recuperar essa perspectiva pedagógica na sala de aula atual.

A formulação das atividades foi feita com o objetivo de tentar desenvolver nos alunos essa percepção mais integral da realidade e a capacidade dos seres humanos de apreendê-la não apenas formalmente, mas pela experiência orientada pelo ritmo em suas mais diversas manifestações. Além da parte sensorial, que é o componente mais explícito da *mousiké*, há também a matematização da música feita pelos gregos, dentro do seu modelo de matemática. Assim, o objetivo era elaborar atividades em que todos esses elementos pudessem estar presentes, mas que fossem orientadas por um conceito matemático estudado em sala de aula. Escolhemos a ideia de número racional como esse núcleo condutor.

O desafio na escolha das atividades foi conseguir utilizar materiais e instrumentos que pudessem ser construídos e manuseados pelos alunos no espaço de uma hora, além de produzir efeitos conectados com os objetivos da pesquisa, que é avaliar a possibilidade de recuperar elementos da *Paidéia* numa sala de aula moderna.

Algumas ideias foram descartadas porque não atingiam o efeito esperado utilizando o material disponível – como a possibilidade de fazer uma flauta de pan com canudinhos, que seriam usados para gerar determinados sons de acordo com o comprimento do canudo. Não conseguimos produzir os sons esperados. Outras foram eliminadas porque exigiriam um ouvido muito apurado para distinguir notas – como a ideia de gerá-las a partir de um metrônomo digital que, em tese, permitira produzir notas específicas pelo aumento controlado de batimentos.

Nesse processo de testes e busca por ideias, formulamos as seis atividades a seguir, tentando explorar toda a gama de elementos que compõe a *mousiké*, sua relação com o mundo e a capacidade perceptiva dos alunos. Partimos de atividades mais gerais, de experiência sensorial, para as mais formais, de uso da matemática para dar inteligibilidade aos ritmos do mundo, considerando a ideia de número presente na matemática grega. Do ponto de vista conceitual, o objetivo foi mostrar de forma palpável a noção de número natural, racional e proporções, deixando, ao fim, a intuição da insuficiência dos números racionais para descrever o mundo e a necessidade dos números irracionais, utilizando para isso conceitos da teoria musical apresentados de uma perspectiva histórica. Descreveremos a seguir as atividades e como se deu sua aplicação.

3.2 Atividade 1: Percepção musical

O objetivo desta atividade era fazer com que os alunos percebessem os ritmos que nos cercam e sua relação com as noções musicais. Utilizamos um notebook e um datashow para projetar a apresentação e caixas de som para passarmos alguns vídeos. Além disso, utilizamos um teclado musical. Nessa atividade participaram 15 alunos.

Depois de apresentada a pesquisa, iniciamos projetando pelo datashow a sequência de conceitos que iríamos trabalhar na atividade. Inicialmente, os alunos permaneceram em suas carteiras, pois o foco inicial era a apresentação conceitual dos elementos centrais da música e a percepção musical.

O primeiro deles foi o de melodia, que é conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva. Após a definição, projetamos o vídeo *Bobby McFerrin Demonstrates the Power of the Pentatonic Scale*[3], no qual o músico americano Bobby McFerrin transforma a platéia de uma palestra em um coral, produzindo uma melodia guiada pela mudança de sua posição no palco.

Em seguida, apresentamos a definição de harmonia, que é o conjunto de sons dispostos em ordem simultânea, mostrado com um exemplo no teclado tocado pelo

[3] Disponível em: https://youtu.be/ne6tB2KiZuk.

pesquisador. Por fim, apresentamos o conceito de ritmo, que está relacionado à ordem e à proporção que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia. Em seguida, apresentamos um vídeo[4] que é a introdução de uma matéria jornalística na qual são mostrados exemplos de ritmos diferentes, do jazz ao samba, com um músico dizendo como a matemática e a música se relacionam por padrões que se repetem.

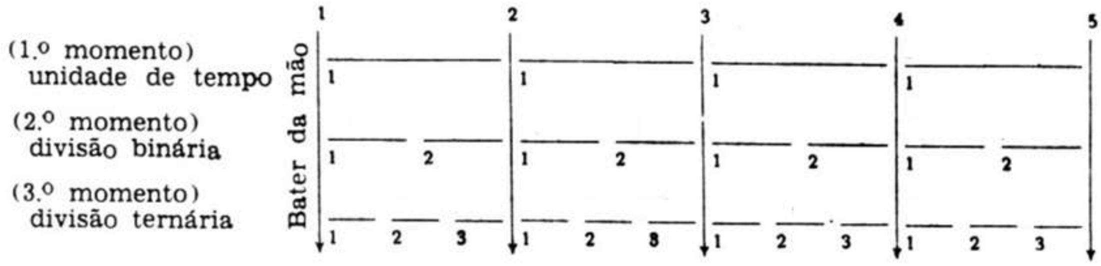
Na sequência, trabalhamos a percepção rítmica, mostrando como somos levados a fazer movimentos com o corpo – pés, mãos, cabeça, dedos – para "marcar" o ritmo que estamos ouvindo. Como exemplo, o pesquisador mostrou como as palmas normalmente batidas ao cantar "Parabéns pra você" servem para marcar o ritmo da música que, usualmente, é cantada duas vezes em velocidades diferentes. O objetivo desse exemplo foi utilizar as palmas para definir o intervalo entre uma palma e outra como uma unidade de tempo dentro da música.

Figura 1: Unidade de tempo dentro da música definido pelo intervalo de palmas

Apresentados esses conceitos, foi possível começar atividades mais participativas com alunos. Para isso, introduzimos a diferenciação da divisão de ritmos, usando como exemplo a divisão do ritmo em binário e terciário. Usando o software *TempoPerfect*, que permite gerar padrões de batida em ritmos estabelecidos, pedimos que eles batessem palmas, tentando "encaixar" nas unidades de tempo (entre uma palma e outra) dois tempos e, em seguida, três tempos. Sugerimos que contassem, mentalmente, "1, 2" em cada unidade de tempo para a divisão binária e "1, 2, 3' em cada unidade de tempo para a divisão ternária, fazendo isso para cada uma dessas divisões separadamente.

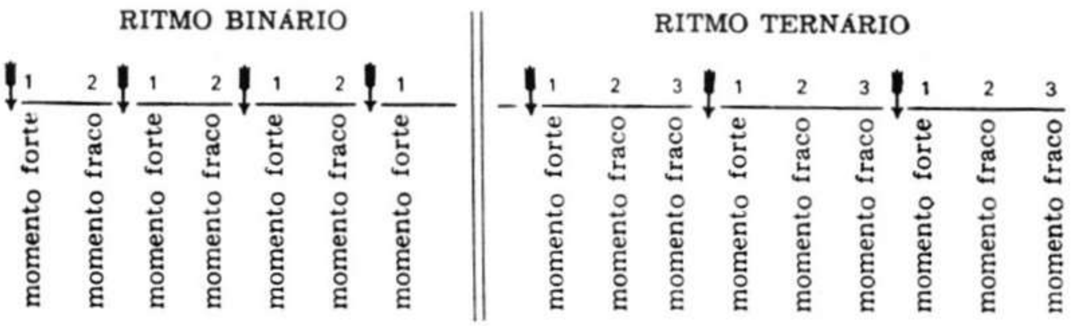
[4] Disponível em: https://youtu.be/fDXNye8jptw.

Figura 2: Divisão de ritmos



Na sequência, abordamos a diferença entre tempo forte e tempo fraco. Em cada uma das divisões (binária e ternária) existe um tempo forte e um tempo fraco e é apresentado sempre na “primeira batida” ou, como estamos utilizando números, será representado sempre pelo número 1. Para isso, utilizamos novamente o software *TempoPerfect*, acionando a função *measure*, que permite programar os tempos fortes e fracos. Nessa parte, reforçamos a noção ciclos de repetição.

Figura 3: Tempo forte e tempo fraco nos ritmos



Para trabalhar o andamento (a velocidade) das músicas, que são os tipos de compasso, apresentamos aos alunos em um slide o instrumento que é utilizado para medir o andamento da música. Em seguida, foi apresentada a tabela abaixo com os principais andamentos, apontando que algumas partituras em vez de trazerem o andamento, registram o número correspondente de batidas por minuto (BPM).

Tabela 3: Tipos de andamento

Andamento	*BPM*	*Definição*
Grave	40	Muito vagarosamente e solene
Largo	40-60	Largo e severo
Lento	60-66	Lento
Adagio	66-76	Vagarosamente, de expressão terna e patética
Andante	76-108	Velocidade do andar humano, amável e elegante
Andantino	84-112	Mais ligeiro que o *Andante*, agradável e compassado
Moderato	108-120	Moderadamente (nem rápido, nem lento)
Allegretto	112-120	Nem tão ligeiro como o *Allegro*
Allegro	120-168	Ligeiro e alegre
Vivace	152-168	Rápido e vivo
Vivacissimo	168-180	Mais rápido e vivo que o *Vivace*
Presto	168-200	Veloz e animado
Prestissimo	200-208	Muito rapidamente, com toda velocidade e presteza

Fonte: https://lendasnamusica.blogspot.com/2018/05/dicionario-musical-andamento.html.

Para exemplificar as diferenças entre andamentos e sua relação com os tempos, usamos algumas músicas para fazer os alunos perceberem esses conceitos na prática. Pedimos que eles ouvissem e tentassem identificar qual era a divisão da música, acompanhando com palmas e, se possível, identificassem o tempo forte. Em seguida, pedimos que eles encaixassem entre uma palma e outra (unidade de tempo) a contagem "1, 2" ou "1, 2, 3" para classificar a divisão entre binária ou ternária. Por serem músicas com andamentos diferentes e mais fáceis de perceber a marcação dos tempos, escolhemos trechos das seguintes canções (todas facilmente encontradas no YouTube pelo título): "Anunciação", de Alceu Valença; "Qui nem jiló", de Luiz Gonzaga; "Oceano", de Djavan; "Primavera – Vivaldi", de Vivaldi; "Pela luz dos olhos teus", de Tom Jobim e Miucha; "Por você", do grupo Barão Vermelho; e "*Lucy in the sky with diamond*", na versão de Dan Torres.

Após essa atividade auditiva, mostramos aos alunos a tabela de equivalência das notas, que são símbolos que se encontram no início de cada música no compasso. Lá fica indicada a figura de nota que vale um pulso e que pode ser exemplificado da seguinte maneira: cada batida do metrônomo equivale a um pulso. Na simbologia musical, a figura escolhida para valer um pulso é a semínima.

Tabela 4: tabela de equivalência das notas

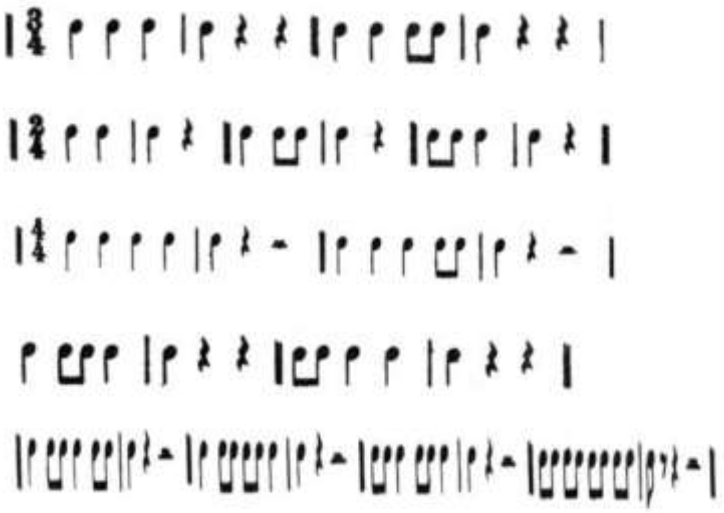
NOTA	PAUSA	TEMPO	NOMENCLATURA
𝅝	𝄻	4	SEMIBREVE
𝅗𝅥	𝄼	2	MÍNIMA
♩	𝄽	1	SEMÍNIMA
♪	𝄾	1/2	COLCHEIA
𝅘𝅥𝅯	𝄿	1/4	SEMI-COLCHEIA
𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/8	FUSA

Fonte: http://www.guitarbattle.com.br/licoes/1560-ritmos-divisoes-ritmicas-e-tipos-de-compassos.html

A partir disso, levamos os alunos a elaborarem o que acontece com os valores das notas acima e abaixo da semínima e mostramos que cada figura tem uma pausa própria (figura de silêncio) que equivale a cada figura de som.

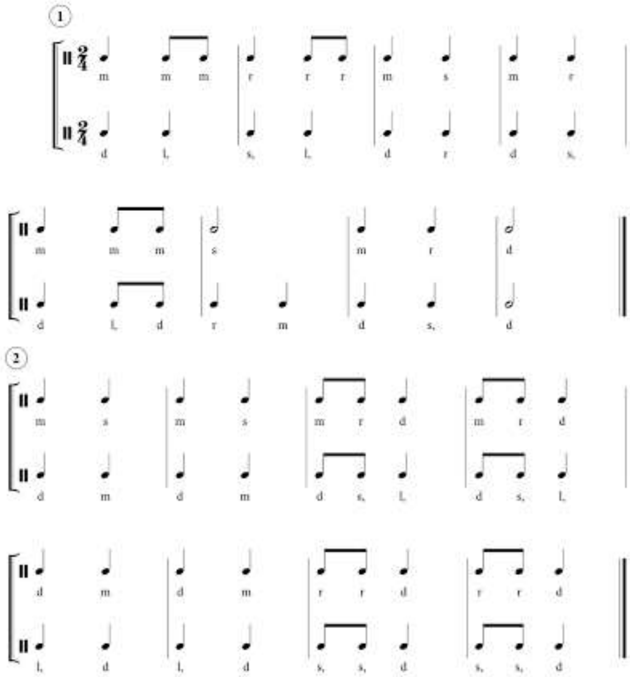
Com o programa *TempoPerfect* ligado, mostramos o que significa cada uma das notas e, em seguida, começamos a "cantar" cada uma delas (semibreve, mínima, semínima e colcheia e suas respectivas pausas). Com isso os alunos conseguiriam ler algumas partituras simples utilizando o metrônomo (que foi programado em 70 BPM). Fizemos cada atividade mais de uma vez, até que os alunos conseguissem internalizar o tempo das notas, com as seguintes partituras:

Figura 4: Partituras utilizadas na pesquisa



Por fim, organizamos um solfejo, dividindo os alunos em dois grupos e deixando cada grupo encarregado de cantar uma voz, para que, sobrepostas, formassem a música. Fizemos essa atividade com o seguinte solfejo:

Figura 5: Partitura do solfejo



3.3 Atividade 2: O ritmo do mundo

O objetivo da atividade era mostrar aos alunos os ritmos presentes no mundo e sua relação com o fluxo da vida, não necessariamente associada à música propriamente dita. Nas atividades seguintes, sob a ótica da educação clássica, matematizamos esses ritmos, mas sem isolá-los desse contexto geral que une a existência perpassada pela *mousiké*. Os materiais usados para essa atividade foram os mesmos da anterior e também compareceram 15 alunos.

Iniciamos propondo uma atividade de percussão corporal guiada por um vídeo do grupo musical paulistano Barbatuques com o que eles chamam de "Jogo do Tum Pá"[5]. Treinamos os movimentos e sons com os alunos até eles conseguirem a sincronia do ritmo apresentado.

[5] Disponível em: https://youtu.be/Ti-RWna1Xqo.

De volta às carteiras, propusemos que acompanhassem, usando o tampo das mesas como percussão, a música do conjunto Queen, *"We Will Rock You"*, tentando encaixar alguma das frases percussivas que foram apresentadas no vídeo do Barbatuques.

Dos sons do corpo e dos produzidos com o corpo, passamos ao que chamamos ritmos do mundo. Pedimos que os alunos ouvissem com atenção alguns áudios, tentando identificá-los e perceber repetições, padrões ou ciclos existentes em cada som apresentado. Foram passados sons de: (1) Canto de um bem-te-vi, (2) avião decolando, (3) coração batendo, (4) uma impressora matricial com pessoas falando ao fundo, (5) efeitos sonoros computacionais diversos, (6) sirene de uma ambulância, (7) um telefone tocando, (8) uma máquina de datilografar e (9) motor de um carro ao virar a chave de ignição.

A próxima etapa foi a de trabalhar o ritmo das palavras. Projetamos o poema "Trem de Ferro", de Manuel Bandeira, pedimos que escutassem um vídeo[6] de uma apresentação teatral sobre o poema, acompanhando a letra:

Café com pão/Café com pão/Café com pão
Virge Maria que foi isso maquinista?
Agora sim/Café com pão/Agora sim/Café com pão
Voa, fumaça/Corre, cerca/Ai seu foguista
Bota fogo/Na fornalha/Que eu preciso
Muita força/Muita força/Muita força
Oô.../Foge, bicho/Foge, povo
Passa ponte/Passa poste/Passa pasto
Passa boi/Passa boiada/Passa galho
Da ingazeira/Debruçada/No riacho
Que vontade/De cantar!
Oô...
(café com pão é muito bom)

Quando me prendero/No canaviá
Cada pé de cana/Era um oficiá
Oô...
Menina bonita/Do vestido verde
Me dá tua boca/Pra matar minha sede
Oô...

Vou mimbora vou mimbora
Não gosto daqui/Nasci no sertão
Sou de Ouricuri
Oô...
Vou depressa/Vou correndo
Vou na toda/Que só levo

[6] Disponível em: https://youtu.be/O1bDntWPjj4.

Pouca gente/Pouca gente
Pouca gente...
(trem de ferro, trem de ferro)

Na sequência, pedimos aos alunos que discutissem as seguintes questões e apresentassem as respostas em seguida:

1) Em relação aos sons que você ouviu nos exemplos mostrados, algum(s) dele(s) segue(m) algum padrão rítmico? Qual(is) segue(m)? Qual(is) não segue(m)?

2) Qual a diferença entre os padrões rítmicos das músicas que você ouviu e os padrões rítmicos dos sons produzidos pelas palavras de uma poesia, pelo funcionamento de uma impressora, pela batida do coração, pelo motor do carro?

3) Que outros exemplos desses fenômenos rítmicos você já observou ou passou observar a partir de agora?

4) Em sua opinião, pode existir algum fenômeno que não produza som, mas que siga algum padrão rítmico? Dê exemplos.

Na próxima etapa, passamos para a avaliação dos ritmos do corpo, mostrando vídeos de danças, pedindo que eles, analisando o movimento do corpo dos dançarinos tentassem perceber a divisão rítmica expressa nos corpos. Mostramos um vídeo de samba[7] e um de valsa[8].

Chamamos a atenção deles para notarem que, apesar de no samba a divisão ser feita em quatro partes, podemos pensar também em uma divisão binária, bastando dividir cada tempo da binária em dois tempos, formando a divisão quaternária.

Por fim, apresentamos alguns vídeos que mostram ritmos do mundo e da vida: a passagem do tempo vista de um horizonte em câmera acelerada, o dia e a noite também acelerado e um que mostrava o envelhecimento de uma pessoa em frente a um espelho, de criança até virar um idoso. E, em seguida, pedimos que eles discutissem a seguinte questão:

Após ver esses vídeos, você mudaria algo em sua resposta sobre a questão que diz

[7] Disponível em: https://youtu.be/D8muihUaFp0.
[8] Disponível em: https://youtu.be/gtfSXRqMJnE.

"Em sua opinião, pode existir algum fenômeno que não produza som mais que siga algum padrão rítmico? Dê exemplo(s)."

3.4 Atividade 3: Construção da marimba com garrafas

Nessa atividade, compareceram 16 alunos, que foram divididos em grupos de 4 integrantes para construção de marimbas com garrafas de vidro. O objetivo era trabalhar as noções de razão e proporção a partir da sensibilidade auditiva dos alunos ao baterem nas garrafas com quantidades diferentes de água em seu interior. Utilizamos para essa atividade 1 notebook, 1 datashow, 20 garrafas de vidro de refrigerante de 290ml, 4 cabos de vassoura, 4 baldes, 4 conjuntos de medidores, 4 rolos de barbante, 4 tesouras de metal, 4 rolos de fita crepe, 4 funis, 4 calculadoras e um teclado musical.

Iniciamos apresentando por meio da projeção via datashow quem foi o matemático grego Euclides e fazendo uma breve revisão das noções de razão e proporção. Além disso, abordamos a representação dos números racionais em sua forma fracionária e decimal.

Antes da construção, apresentamos o que é uma marimba e seu histórico, como foi e ainda é utilizada pelos povos para produzir música e mostramos algumas fotos de tipos diferentes de marimba:

Figura 6: Marimba de tubos

Fonte: http://www.sonoridad.com.br/instrumental/.

Figura 7: Marimba feita de cabaças

Fonte:http://www.todosinstrumentosmusicais.com.br/conheca-o-instrumento-marimba.html.

E, então, iniciamos a construção da marimba de garrafas listando uma sequência de procedimentos. Ressaltamos que, antes da atividade, fizemos testes para avaliar o som produzido pelas garrafas cheias e verificamos que com 225 ml de água elas produziam o som mais próximo possível da nota Dó.

Figura 8: Marimba de garrafas

Fonte:https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2497/3/PRODUTO_ManualDid%C3%A1ticoProjetos.pdf

Passo 1: Utilizando duas cadeiras como cavalete, coloque o cabo de vassoura na horizontal para servir de suporte da sua marimba.

Passo 2: Utilizando o barbante, pendure no cabo de vassoura as 4 garrafas vazias (o mais espaçado possível uma da outra). Utilize a fita crepe para deixar os nós do barbante amarrados na boca da garrafa e no cabo de vassoura o mais firme possível.

Passo 3: Utilizando os medidores, encha a primeira garrafa com 225ml de água.

Passo 4: Batendo de leve com a tesoura na parte vazia da garrafa com 225ml, perceba que o som produzido pela garrafa corresponde à nota Dó. Utilize o teclado para esse teste.

Passo 5: Encha as garrafas restantes com água, de modo que o som produzido ao batermos nelas com a tesoura seja o mais parecido possível com os sons que serão produzidos no teclado.
[Durante esse passo, o professor tocou as notas fá, sol e dó uma oitava acima do primeiro dó, para que os alunos tentassem afinar o som da garrafa com a nota tocada. Escolheu-se dó, fá, sol, dó, porque fá é a quarta ascendente de dó, sol é a quinta ascendente e dó é a oitava.]

Passo 6: Usando os medidores, determine o volume de água dentro de cada garrafa.

No último passo, entregamos uma tabela para os alunos preencherem com a seguinte instrução:

Passo 7: Por fim, determine a razão entre o volume de água das três garrafas enchidas por último e o primeira garrafa e preencha a tabela a seguir com esses dados:

Tabela 5: Razão entre volumes de água nas garrafas da marimba

Razão entre os volumes de água	Em forma de fração	Em decimais
Entre o volume de água na garrafa 2 e o volume de água na garrafa 1		
Entre o volume de água na garrafa 3 e o volume de água na garrafa 1		
Entre o volume de água na garrafa 4 e o volume de água na garrafa 1		

Fonte: Elaborada pelo autor

A última etapa da atividade foi propor um conjunto de questões para os alunos discutirem e apresentar suas respostas:

1) Há alguma relação entre a quantidade de água e o fato de o som ser mais grave ou mais agudo?

2) Toque duas garrafas simultaneamente. Quais têm o som mais parecido uma com a outra?

3) Pensando na representação das proporções que você obteve, haveria alguma vantagem na representação decimal comparada com a representação em forma de razão? Qual seria essa vantagem?

3.5 Atividade 4: Proporções na corda do violão

Nessa atividade, utilizamos um violão para relacionar os sons produzidos por uma corda de violão à medida que alterássemos o tamanho da corda solta. Compareceram 9 alunos que foram divididos em grupos de 3 integrantes.

Por termos conseguido apenas um violão, revezamos o uso do instrumento nos grupos, que fizeram a atividade de forma independente um do outro. A corda usada na experiência foi a sexta (mi grave) e utilizamos aos mesmos intervalos das notas trabalhadas na marimba. Como a sexta corda do violão é afinada em mi, usamos, portanto, as seguintes notas como referência para essa atividade: mi, lá, si e mi.

Projetamos no quadro a imagem de um violão e suas partes e passamos para a atividade prática, apresentando um roteiro de procedimentos com as seguintes orientações:

Você está recebendo um violão e uma fita métrica.

Passo 1: Determine o tamanho da corda entre a pestana e o cavalete.

Passo 2: Meça o tamanho da corda entre o cavalete e o 5º traste do braço do violão, considerando os trastes da pestana para o cavalete.

Passo 3: Meça o tamanho da corda entre o cavalete e o 7º traste do braço do violão, considerando os trastes da pestana para o cavalete.

Passo 4: Meça o tamanho da corda entre o cavalete e o 10º traste do braço do violão, considerando os trastes da pestana para o cavalete.

Passo 5: Por último, determine a razão entre o comprimento de cada uma das três últimas medidas e o tamanho da corda inteira e preencha a tabela a seguir com esses dados:

Tabela 6: Razões entre os comprimentos da corda

Razão entre os comprimentos	Em forma de razão	Em decimais
Entre a 2ª medida e o tamanho da corda inteira		
Entre a 3ª medida e o tamanho da corda inteira		
Entre a 4ª medida e o tamanho da corda inteira		

Fonte: Elaborda pelo autor.

Agora, compare os resultados obtidos com aqueles apresentados na tabela da atividade anterior da marimba.

É possível perceber alguma relação entre os dados das duas tabelas?

Se sim, você imagina por que isso ocorreu?

Após a discussão desses resultados, seguimos com a atividade no datashow apresentando aos alunos a teoria musical de Pitágoras. Iniciamos explicado o ciclo das quintas e das oitavas no quadro e finalizamos apresentando as frações descobertas por Pitágoras que associam o tamanho de uma corda vibrando em um instrumento a determinadas notas que formam a ‘escala pitagórica’.

3.6 Atividade 5: Construção do monocórdio

Para essa atividade compareceram 8 alunos, que foram divididos em 3 grupos, sendo 2 grupos com 3 pessoas e 1 grupo com 2 (os alunos se auto-organizaram nessa divisão e acabaram se agrupando por gênero).

Utilizamos os seguintes materiais para essa atividade: 3 réguas de papel do tamanho da corda, 3 pedaços de madeira, 3 cordas de violão de aço (usamos as cordas mi e lá, por serem mais grossas. As cordas mais finas não funcionaram bem no experimento prévio que fizemos), 1 martelo, pregos, palito de churrasco, canetas e réguas com escala.

Iniciamos fazendo uma revisão de razões, proporções, média aritmética e média harmônica. Esses conteúdos foram usados para encontrarmos as frações de Arquitas, que foram usadas para trabalharmos com o monocórdio indicando proporções das cordas que seriam presas.

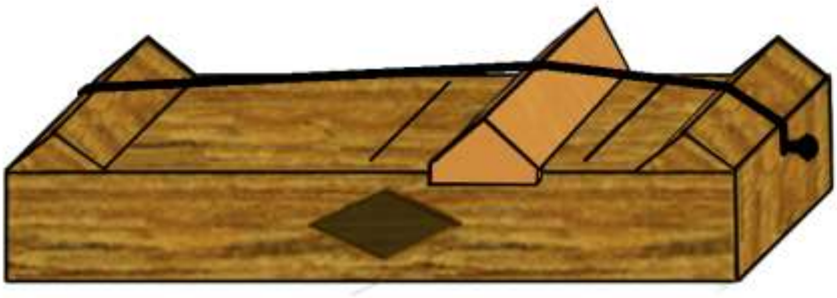
Tabela 7: Frações de Pitágoras e Arquitas

Notas	Frações de Pitágoras	Notas	Frações de Arquitas
Dó1	1	Dó1	1
Ré	8/9	Ré	8/9
Mi	64/81	Mi	4/5
Fá	3/4	Fá	3/4
Sol	2/3	Sol	2/3
Lá	16/27	Lá	3/5
Si	128/243	Si	8/15
Dó2	1/2	Dó2	1/2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, apresentamos o monocórdio e começamos sua construção indicando passos a serem seguidos pelos alunos com o material que tinha recebido.

Figura 9: Monocórdio



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/

Passo 1: Você está recebendo um pedaço de madeira com, aproximadamente, 3x 6x 65 cm de dimensões.

Passo 2: Construa uma régua de papel com o mesmo comprimento do pedaço de madeira.

Passo 3: Vamos marcar a primeira fração de Arquitas, 8/9, referente à nota Ré. Utilizando a ideia de fração como uma parte do inteiro, divida a régua de papel em 9 partes iguais. Corte uma delas (de um das extremidades) e coloque-a sob a corda, encostando-a em uma das extremidades. Marque na tábua, com a canetinha da cor azul, o comprimento da régua sob a corda.

Passo 4: Repita essa operação para as outras frações de Arquitas, marcando a tábua com as seguintes cores, nessa sequência: verde, laranja, preto, rosa, roxo e marrom.

Passo 5: Martele dois pregos no centro da lateral da tábua.

Passo 6: Prenda a corda nos dois pregos e tencione-a até o som produzido por ela ficar o mais próximo possível do som que está sendo tocado agora no teclado.

Passo 7: Coloque dois palitinhos nas extremidades na parte superior, de modo a impedir que a corda encoste na madeira.

Passo 8: Use outro palitinho como cavalete móvel para verificar os sons produzidos nas marcações feitas na madeira.

Feitas as medidas e os registros, passamos para a parte discursiva propondo questões.

Sobre a construção do monocórdio, responda as seguintes perguntas:

1) Observando as réguas marcadas, qual a vantagem em utilizar a escala de Arquitas em vez da escala de Pitágoras?

2) Vocês agora irão receber uma régua de papel com a marcação de um ponto. Encontre uma razão que corresponda àquele ponto.

3) Agora, com uma régua de papel sem nenhuma marcação, marque um ponto qualquer e determine uma fração correspondente.

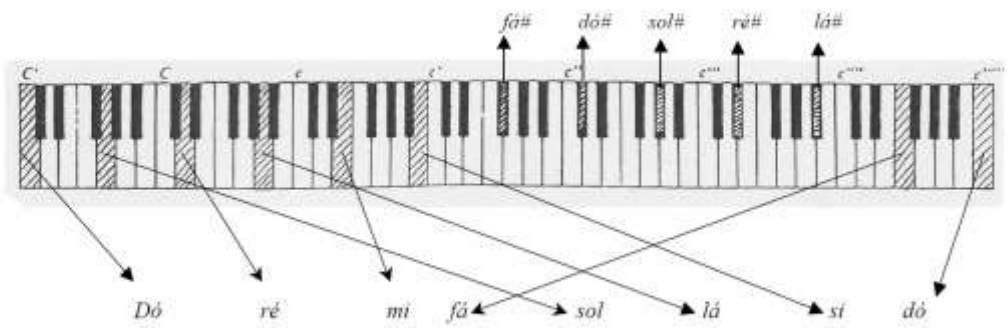
4) Nesse processo de segmentação da régua, haveria algum ponto que não seja possível encontrarmos uma proporção entre dois inteiros que nos forneça uma razão correspondente?

3.7 Atividade 6: A escala temperada

A partir do problema da coma pitagórica e explorando a insuficiência dos números inteiros para expressar as proporções reais do mundo, trabalhamos na última atividade a escala temperada, popularizada por Johann Sebastian Bach no século XVIII. O objetivo dessa atividade foi mostrar um exemplo prático da necessidade dos números irracionais para a descrição da realidade e como isso se expressa no mundo físico.

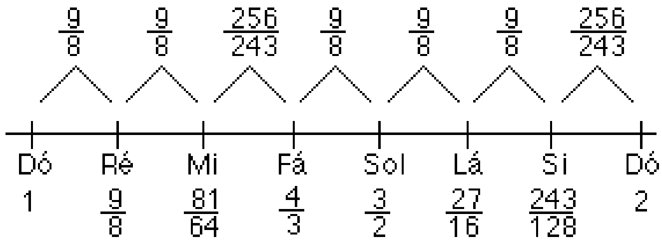
Como dito no primeiro capítulo, com o desenvolvimento dos instrumentos musicais os problemas que uma concepção aritmética da música geram começaram a aparecer, não sendo possível afinar os instrumentos seguindo as frações de Pitágoras. De uma oitava a outra vai sobrando um "resíduo" de desafinação, um pequeno "erro $\mathcal{E}$", que se propaga pelas oitavas.

Figura 10: As oitavas de um piano



Como os intervalos conseguidos pela escala pitagórica não são constantes, desde a Antiguidade há tentativas de contornar esse problema na afinação, com a criação de escalas assimétricas. Se, do ponto de vista teórico, essa distorção poderia ser abordada com a introdução dos números irracionais para se buscar intervalos constantes, do ponto de vista prático a solução veio com a criação de escalas que permitem contornar o problema diluindo esse erro ao longo das oitavas.

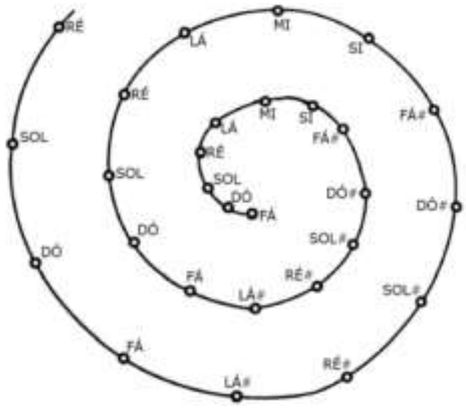
Figura 11: Os intervalos da escala pitagórica



Fonte: https://www.matematicaviva.pt/2013/11/a-matematica-nas-escalas-musicais.html?m=1

Um desses processos ficou conhecido como “temperamento”, que significa fazer ajustes nos intervalos, de modo a desviá-los dos intervalos naturais. Diferentes tipos de temperamento surgiram ao longo da história.

Figura 12: Ciclo das quintas, mostrando os desencontros das notas em forma de espiral



Fonte:https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/.

Para mostrar essa ideia aos alunos, propusemos uma atividade final teórica, com exposição da solução apresentada por Andreas, que envolve potenciação e mostramos a mudança ocorrida na teoria da música ao longo da modernidade. A principal delas foi a transição de uma visão aritmética da música, herdada da Antiguidade, para uma concepção física do som, ligada a conceitos que emergiram do desenvolvimento da ciência acústica, como frequência, onda, timbre, intensidade sonora etc.

Para essa atividade compareceram 5 alunos e iniciamos retomando o ciclo das quintas e o ciclo das oitavas, mostrando como a escala pitagórica apresentava limites pela razão dos intervalos não ser constante ao longo das oitavas. Como exemplo dessa nova perspectiva sobre a música, apresentamos um dos pilares da música tonal, que é “O cravo bem temperado”, composto por Bach, sendo esta a primeira obra da história da música ocidental a consolidar o sistema temperado de afinação dos instrumentos. Bach explora todos os recursos disponíveis contidos nesse novo jeito de organizar a escala diatônica, com 24 prelúdios e fugas fechando o quadro das tonalidades maiores e menores, além das modulações apresentadas no interior de cada peça.

Na construção da escala, apresentamos o processo conhecido como temperamento igual, que consiste em dividir a oitava em 12 semitons rigorosamente iguais, impondo sempre o mesmo intervalo de frequência entre dois sons vizinhos quaisquer.

Por fim, apresentamos a ideia por trás das escalas temperadas, já explicadas no segundo capítulo deste texto, na seção 2.4. Após essa exposição, os alunos determinaram a frequência das notas e preencheram a tabela abaixo com os cálculos.

Tabela 8: Frequência das notas musicais a serem calculadas pelos alunos

Notas	Frequência	Notas	Frequência
Dó1		Sol	
Ré		Lá	
Mi		Si	
Fá		Dó2	

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Apresentaremos, neste capítulo, a análise dos dados obtidos na coleta realizada com as filmagens das atividades aplicadas, além do caderno de campo do pesquisador. Na verdade, o caderno de campo foi preenchido e forma comentários incorporados à transcrição de cada atividade que era feita logo após elas serem realizadas.

O objetivo da pesquisa de campo, pensando na ideia de abordagem sociocultural apresentada por Miguel e Miorim a respeito do uso da história da matemática na educação, foi testar as dificuldades em reintroduzir aspectos da *Paidéia* grega na escola atual. A aplicação das atividades teve o papel de "laboratório epistemológico" da prática de se promover uma "adaptação didática" utilizando a história da teoria musical e suas relações com a da matemática e a da educação grega como ferramentas. O modelo proposto foi o de atividades em período extraclasse, aplicadas em sala de aula, com os alunos trabalhando em grupos.

Analisando as transcrições das atividades, não conseguimos identificar momentos específicos em que essa apreensão conceitual ocorreu, apesar de eles terem conseguido realizar as tarefas propostas. No entanto, como pesquisador e também professor dos alunos no período regular, observei durante as aulas que a abordagem matemática das razões feitas nas atividades, de forma muito concreta, teve efeitos em sala de aula, por comentários e perguntas dos estudantes pesquisados que remetiam às atividades extraclasse.

Pudemos observar que, ao fim, os alunos perceberam as vantagens instrumentais, e para efeito de comparação entre grandezas, da representação decimal das razões. No entanto, não podemos afirmar com base nos dados que isso se deveu à contextualização histórica dos conceitos ou à sua utilização prática nas atividades e não à revisão feita no início de algumas atividades. Essa relação não ficou visível, apesar de a história da matemática ter tornado a aplicação do conceito mais palpável, ao atrelá-lo às aplicações e à teoria musical.

Os principais dados que emergiram estão mais relacionados aos obstáculos de implementar atividades baseadas em uma concepção de educação tão diferente da atual numa escola tradicional. E esse é justamente o centro da análise que visa responder a pergunta de investigação, que é: *Como o resgate de elementos da* Paidéia *grega, através do conceito de* mousiké, *pode auxiliar o atual ensino de Matemática na Educação Básica* *por meio de práticas pedagógicas que explorem a relação entre as histórias da matemática e da música?.*

Um dado preliminar que chamou a atenção apareceu já no processo de formulação das atividades, antes do início da pesquisa de campo. Uma dificuldade encontrada foi a de imaginar resultados e conclusões a que os alunos poderiam chegar no percurso da atividade para definirmos sua estrutura. Em uma aula de matemática tradicional, o caminho é, de certa forma, delineado pelo material didático, e os questionamentos que surgem a despeito da particularidade de cada aluno são relativamente previsíveis a um professor experiente. Diferente disso, em uma aula em que o conteúdo envolve sensações sonoras e percepções mais amplas a respeito das interconexões matemáticas da realidade, portanto formular a atividade completa foi uma tarefa dura.

Obviamente que esse aspecto não é um problema em si, já que essa diversidade de resultados e percursos traz grandes potenciais pedagógicos no encaminhamento da atividade. No entanto, como o marco da pesquisa é testar a possibilidade da recuperação dessa abordagem clássica dentro dos limites da estrutura escolar atual, o desafio era como conciliar essa maior liberdade em relação ao decorrer da atividade com um modelo escolar que impõe determinadas regras relacionadas ao tempo, ao conteúdo e ao formato das salas de aula. Por esse motivo, apesar de que, em tese, pudéssemos ter criado um ambiente mais livre, utilizando outros espaços da escola, e uma abordagem menos ligada a um conteúdo específico da matemática, não era esse o objetivo da pesquisa. As amarras da escola tradicional são parte da realidade educacional moderna e simplesmente concluir que a recuperação da *Paidéia* só é possível se restruturarmos todo o modelo escolar nos parece muito trivial e que não vai de encontro à questão de investigação.

Como exemplo dessas dificuldades, foos surpreendidos pela falta de previsibilidade de determinados caminhos da atividade e da percepção dos alunos. Ao formularmos os questionários da Atividade 2, os alunos tentavam explorar a ideia de ritmo fora do contexto musical. Imaginávamos que essa reflexão seria mais demorada e significativa, mais complexa de ser feita. No entanto a associação tanto ao "ritmo da palavra falada", no caso da poesia, quanto ao "ritmo das mudanças no mundo físico" foi muito direta a todos os grupos que realizavam a atividade.

Outra surpresa foi a dificuldade em afinar a marimba de garrafas e conseguir as proporções esperadas. Talvez pelo pesquisador ser também músico não tenha avaliado a dificuldade que os alunos teriam em perceber notas específicas geradas pelas batidas nas garrafas comparadas às produzidas pelo teclado. Por esse motivo, as proporções encontradas, excetuando na nota Dó, não tiveram o grau de aproximação que imaginávamos quando comparada ao experimento da corda do violão, que é mais precisa em termos de medida. Apenas um grupo conseguiu valores aproximados entre as frações geradas em ambos os experimentos.

Essa dificuldade em antever determinados obstáculos foi registrada no caderno de campo do pesquisador, como no momento em que estava sendo abordada a divisão do ritmo em tempos:

> **Pesquisador**: Aluno 1 falou dois.
> **Aluna 1**: Nossa! (estava batendo palmas em desencontro com a música)
> **Aluno 2:** Eu escutei essa música sem ser em ritmo de samba.
> **Pesquisador**: Tem ela em outro ritmo mesmo.
> **Aluno 3**: É dois, é dois (Aluna 6 olha pra ele e concorda com a opinião dele)
> **Aluna 2**: é três (pelo fato da unidade de tempo dela ser mais longa pela maneira que escolheu bater palma, ela achou que a divisão era em três)
> **Aluno 3:** Eu acho que é dois.
> **Aluna 1**: Eu acho que é três.

Nesse ponto da transcrição, o pesquisador registrou:

> Aluna 3 e Aluna 4 também acham que é três. Como estava gerando dúvida, resolvi fazer as duas maneiras para eles compararem. Anteriormente, pensava que se eles enxergassem a divisão binária, eles, claramente, iriam enxergar a divisão quaternária, mesmo eu não tendo falado. Hoje penso que não é tão fácil assim. Como o tempo era curto para analisar as músicas, acabei criando macetes (tempo forte e fraco, bater palmas etc.) para identificar as divisões binárias e ternárias. Eu mostrei atividades que envolviam percepção, mas seria muito presunçoso em achar que nesse curto tempo iria desenvolver a percepção nos alunos. Acabou que treinamos um pouco em como achar a divisão das músicas. Quando penso que é possível enxergar o quaternário pelo binário, vejo que não é fácil utilizar o raciocínio e a criatividade em uma atividade que foi conduzida através de macetes e treinamentos. Hoje penso que não é tão fácil assim.

Só durante a análise dos dados percebemos que esses comentários do pesquisador feitos durante as transcrições das atividades foram muito ricos para mostrar, justamente, os obstáculos em se recuperar a *Paidéia* no ambiente escolar atual que estávamos buscando. As dificuldades em encaixar uma concepção de educação tão distinta, como a *Paidéia* grega, dentro do modelo escolar moderno emergiram em vários trechos dessas notas do pesquisador.

Foram registrados em diversas passagens da coleta momentos em que o pesquisador-professor não consegue se conter no direcionamento dos alunos durante a atividade pelo hábito docente internalizado durante sua formação e experiência profissional. O tempo determinado, o roteiro da atividade e expectativa de poder trabalhar um conteúdo específico da matemática, no caso, os números racionais, seus significados e formas de expressão, impuseram aulas totalmente distintas do modelo dos peripatéticos gregos. Desse modo, a incorporação de tal perspectiva educacional dentro do modelo atual de escola, por mais que as atividades possam ser aplicadas em ambientes abertos ou sem o compromisso de trabalhar determinados conteúdos com roteiros menos estruturados, sempre vai ser limitada em alguma medida por essas questões ligadas à cultura escolar atual.

Logo no início da primeira atividade, quando se apresentavam as divisões da música, o pesquisador registrou em seu caderno de campo:

> Esse início foi importante para quebrar o gelo da situação da filmagem e deixar os alunos mais à vontade. Porém, percebi que a aula estava se tornando expositiva por dois motivos: a maioria do tempo eu falei sozinho e a postura dos alunos na sala (uns segurando a cabeça enquanto eu falava). Esse fato pode ter sido motivado pelo horário da atividade (logo após o almoço) e pelo cansaço dos alunos que já tinham assistido a seis aulas pela manhã. Além disso, alguns deles moram fora de Ouro Preto e acordam muito cedo para pegar o ônibus.

Na mesma atividade, relatando o momento após a apresentação do vídeo sobre as relações entre matemática e música, houve outro registro nesse sentido:

> Percebi aqui e em outros momentos da atividade a falta de experiência em trabalhar com os alunos em atividades mediadas pelo professor. Em alguns momentos, respondi algumas perguntas que eu mesmo fiz e, em outros, mesmo deixando que um aluno respondesse, não compartilhei a resposta dele com o restante da sala. Perdi, nesses momentos, a oportunidade desses alunos enriquecerem a resposta do colega e, através dela, criar novas conjecturas. Assim que aceitei a resposta do aluno, também acabei inibindo, sem querer, a chance que algum aluno discorde do pensamento do colega e argumente suas conjecturas. Faltou habilidade em mediar a atividade nesses momentos.

Quando abordava o ritmo no corpo, esse incômodo também emergiu nesse momento da atividade:

> **Pesquisador**: O quê que acontece quando a gente escuta ritmo. Quando vocês estão numa festa, quando vocês escutam uma música que vocês gostam, qual a primeira reação que vocês tem, além de cantar?
> **Aluna 3, Aluna 6, Aluna 5, Aluna 2 e Aluna 1**: Dançar
> **Pesquisador**: Dançar seria o quê? Você marcar o ritmo.

Sobre esse ponto da transcrição, o pesquisador fez a seguinte anotação:

> Sobre a pergunta que fala sobre a reação deles ao chegar numa festa e sobre o que seria dançar, mais uma vez, respondi a pergunta sem deixar que eles respondessem, impedindo assim as discussões com a turma. A forma de dar aula engessada que está na minha prática docente me impediu de realizar as discussões e explorar a atividade. Acredito que isso é fruto da minha formação no curso de graduação, a exigência do cumprimento do conteúdo anual. Nem o tempo maior que teria disponível para desenvolver a atividade (mais que duas geminadas que teria pela manhã) fez com que, nesse primeiro momento, mudasse minha postura como professor.
> Outro fato que chamou a atenção foi a quantidade de conteúdo que foram encaixados nessa primeira atividade. A falta da prática em atividades assim fez com que eu ficasse mais preocupado em terminar a atividade em vez de explorar as respostas e questionamentos dos alunos. Hoje percebo que essa atividade poderia ser dividida em duas ou até três partes.

E, ao fim, fazendo uma avaliação geral da atividade, anotou o pesquisador:

> Analisando a atividade, percebo que em vários momentos acabei respondendo as perguntas em vez de deixar, porque achei que eles não fossem entender a teoria musical que estava expondo. Não sei se posso dizer que os subestimei. Talvez tenha vivido o que participantes sentiram quando apliquei essa atividade em vários momentos. A dúvida deles era se precisa saber música para aplicar a atividade. Bem, é interessante saber música, com certeza facilita. Mas ao longo da elaboração da atividade, ela foi ganhando mais elementos que envolvem teoria musical e acabei ajudando (e, às vezes, dando a resposta a eles) pensando que talvez eles não pudessem responder por desconhecer música. Deveria ter utilizado mais metáforas ou algo do conhecimento prévio ou da experiência dos alunos para explicar algo novo, como fiz no exemplo das palmas no “Parabéns pra você”. Outra coisa que permeou toda atividade foi o fato de nunca ter dado aula de música e, principalmente, aula sobre teoria musical. Acabei saindo da minha zona de conforto, que é a matemática, e esse é um dos medos que os professores têm e a maioria prefere não trabalhar com atividades interdisciplinares O medo de alguma pergunta sobre teoria musical e incerteza de saber ou não saber improvisar foi nítida.

Quando falava das unidades do tempo na música, houve um questionamento interessante do aluno, mostrando que entre os alunos também havia uma expectativa ligada a elementos de uma aula tradicional, quando Aluno 3 disse: “Daqui a pouco vem até equação nesse negócio aí...”. E o pesquisador respondeu: “Não, ainda não. Mas não entra, não. Pode ficar tranquilo... (risos)”.

Nesse trecho da transcrição da atividade, o próprio pesquisador notou depois que deveria ter tentado aprofundar mais nas causas desse tipo de reação do aluno: “Deveria ter explorado essa resposta do Aluno 3 para verificar o que ele quis dizer sobre as equações. Infelizmente, deixei passar.”

Interpretamos todos esses incômodos apresentados pelo pesquisador em seu caderno de campo não apenas como inexperiência em pesquisas desse tipo, mas pela própria dificuldade que a estrutura escolar, em suas características mais amplas, impõe a processos pedagógicos que não se encaixam exatamente no modelo tradicional. Isso se dá não apenas na organização do espaço físico e formato das aulas, compartimentadas com tempos fixos, mas pelos próprios valores que os atores envolvidos numa escola internalizam, desde alunos até os professores.

Identificamos também outro obstáculo de ordem curricular. Como apresentado no segundo capítulo, a música tinha um papel muito mais amplo na sociedade grega antiga que na nossa, estruturando o currículo da época. No capítulo 3, mostramos que, no Brasil, a música foi, na prática, abolida do currículo escolar. Por esse motivo, não só o contato com a teoria musical era uma novidade aos alunos, como as próprias atividades de percepção sensorial e corporal também eram.

Sobre esse aspecto, foi anotado no caderno de campo:

> Os alunos tentaram, mas sentiram dificuldade em encaixar a divisão ternária. Tive que ajudá-los. Fico pensando nessa dificuldade, que pode ser normal pelo fato de muitos deles não terem estudado percepção musical. Mas fico me indagando que se não era necessário, dentro do currículo da Educação Básica, alguma disciplina que trabalhe com percepção, não necessariamente musical, com coordenação motora (sei que tem nas séries iniciais, mas poderia ser trabalhada mais nas aulas de educação física ao longo da educação básica) para desenvolver a educação corporal do indivíduo. A escola é um lugar que, na maioria das vezes, o que tem importância são as disciplinas de cunho científico (matemática, português, física, química).

Mais adiante, essa questão da importância da corporalidade foi percebida pelo pesquisador em relação a uma aluna que estudava dança e em vários momentos das atividades usava o corpo para fazer as marcações de tempo e dar inteligibilidade a alguns conceitos apresentados. Esse dado foi registrado no caderno de campo da seguinte forma: “A Aluna 3 acompanha com a cabeça, em alguns momentos, a divisão do ritmo com a cabeça. Às vezes a Aluna 5 faz também. Seria uma forma de marcar o ritmo. A Aluna 3 faz dança.”.

Ao notar essa variável, o pesquisador tentou explorá-la no seguinte diálogo, que acabou interferindo no decorrer da atividade:

> **Pesquisador:** Ô, Aluna 3, como que você descobriu que era dois?
> **Aluna 5:** Dançando.
> **Aluna 3:** Sei lá!
> **Pesquisador:** Tá... mas como é que você dançou?
> **Aluna 5:** Ela é dançarina.
> **Aluna 6:** Pelo ritmo da música.
> **Pesquisador:** Tá... mas como é que você dançou?
> **Aluna 6:** Dança aí, coloca a música de novo!
> **Aluna 3:** Ah não...
> **Aluna 5:** Põe a música de novo.

> **Pesquisador:** É sério! Como é que você fez pra descobrir que era dois. Você fez, é como se você tivesse feito... (nesse momento, Aluna 3 dança sem a música para me explicar).
> **Aluna 3:** Dois pra lá e dois pra cá.
> **Pesquisador:** Duas pra lá...
> **Aluna 3:** e duas pra cá.
> **Pesquisador:** Duas pra lá e duas pra cá. Duas pra lá e duas pra cá. Foi aí que ela identificou que é dois. Pessoal, mais uma ó. Essa música é a Anunciação.
> **Aluna 3:** Que música é essa, Renato?
> **Pesquisador:** Ela foi tocada pela... ela foi tocada por uma... pela Orquestra Ouro Preto. Aquela Orquestra aqui da...
> **Aluna 3:** Ah tá...
> **Pesquisador:** Era da UFOP, né?

No caderno de campo, o pesquisador resumiu suas conclusões a respeito dessa questão:

> Aluna 3 utilizou de seu conhecimento prévio e sua experiência na dança para auxiliá-la na atividade. Ela fez com que o seu conhecimento e experiência na dança fizessem com que ela compreendesse algo que nunca estudou, que é a teoria musical. Ela partiu do conhecimento da dança para compreender e resolver um problema de outra área do conhecimento (a teoria musical). Antes de eu parar a música, eu perguntei qual é a divisão da mesma, ela disse que era dois. Perguntei como ela sabia disso, já que não usou palmas. Ela mostrou balançando o ombro (dançando) o motivo de sua resposta. Aluna 3 faz aulas de dança, porém não sei se ela estudou ritmo na forma de teoria musical em suas aulas. A aluna Júlia, que pouco participou das aulas, durante a música sorriu e tentou, batendo palmas, identificar qual é a divisão do ritmo. Aluna 7, Aluna 5, Aluna 2, Aluna 6, Aluno 3, Aluna 4 optaram em bater palmas para adivinhar. Aluno 2 batucou na carteira.

Após a discussão a respeito da estratégia corporal para marcar a divisão do ritmo, os alunos passaram a adotá-la. Em outro momento da mesma atividade houve registro nesse sentido:

> **Pesquisador:** E essa...
> **Aluna 3:** Nó! Essa aí é linda! (falando da música “Por você” interpretada pelo grupo de pagode Sorriso Maroto).
> **Pesquisador**: Olha o tempo... Essa é fácil de achar, onde que tá? (falando sobre o tempo forte).

Nesse ponto da transcrição, o pesquisador fez outra anotação a respeito:

> Alguns alunos dançaram durante a música, talvez tentando utilizar a mesma estratégia da Aluna 3. Eles bateram palmas de forma sincronizada, porém diferente. Enquanto Aluna 6, Aluna 7 e Aluna 5 batiam 1,2,1,2 (como se fosse palma-palma-palma-palma) Aluna 2 fazia 1 e o 2 dela coincidia com o segundo 2 da sequência anterior, ou seja, o 1 dela coincidia com a primeira palma e o dois dela coincidia com a quarta palma da sequência das três meninas citadas. Aluno 3 e Aluna 1 seguiram o mesmo exemplo que a Aluna 2. Aluno 2 e André ao invés de bater palmas, optaram em batucar na carteira. Na verdade, o ritmo

> dessa música é quaternário, ou seja, dividido contando até quatro e não até 2. Então, na divisão binária funciona como se eu tivesse dividindo cada pulso em dois para inteirar quatro. Quando falei de divisão do ritmo, disse que poderíamos dividir o ritmo em três, mas só apresentei a binária e a ternária para ver em seguida se eles enxergariam a quaternária como se fosse uma binária contada de uma maneira diferente. A Aluna 3 abaixa a cabeça e escuta a música dançando.

Por fim, nos exemplos de dança, essa questão da corporalidade e ritmo acabou se integrando mais naturalmente no decorrer da atividade.

> **Aluno 4**: Isso é uma valsa.
> **Pesquisador**: Sim, mas você conseguiu enxergar qual a divisão através da dança?
> **Aluna 5**: 1, 2, 3, 1, 2, 3... (fazendo contagens usando o exercícios das partituras e afirmando que a divisão é ternária).
> **Aluna 1**: Eles dão três passinhos, Renato.
> **Pesquisador**: Isso.
> **Aluna 6**: Ele dá o passo e acompanha com a mão (falando do casal que está dançando).
> **Pesquisador**: Pessoal, geralmente, quem não sabe dançar, às vezes dança desengonçado, é porque não sabe enxergar essa divisão do ritmo.
> **Aluna 2 e Aluna 5**: é Aluno 4. Não foca na divisão do ritmo, entendeu? (risos).
> **Pesquisador**: Pessoal, tenta enxergar nesse aqui.
> **Aluno 4**: Renato tem que me dar umas aulas de dança. Tomara que tenha forró.
> **Turma**: (risos).
> (coloquei uma música no ritmo de pagode para eles analisarem).

Julgamos que essa questão da corporalidade, na verdade a ausência dela no ensino, além do estímulo que as atividades de percepção sensorial provocaram nos alunos e os incômodos do pesquisador em não conseguir “completar sua aula como previsto” foram os principais elementos que emergiram dos dados.

Em relação ao uso da história da matemática para tratar das razões aplicadas à teoria musical, que compõe o esqueleto das atividades, verificamos ser um meio eficiente não só para a abordagem desses temas, auxiliando na elaboração das tarefas, mas para permitir a interlocução entre as duas concepções de educação.

Contudo, como mostrado no segundo capítulo, o conceito de *mousiké* é muito mais amplo que apenas a reflexão sobre teoria musical, envolvendo aspectos corporais, sensoriais e até mesmo filosóficos, que se mostraram, ao mesmo tempo, com grande potencial pedagógico nas duas primeiras atividades, mas muito mais difíceis de serem trabalhados. Essas dificuldades têm relação com a falta de uma cultura escolar e curricular que valorize esse tipo de conteúdo, de espaços adequados, de material próprio que oriente os professores e em função do tempo compartimentado das aulas. Além disso, falta material humano, ou seja, faltam professores com a sensibilidade musical e, ao mesmo tempo, com capacidade para organizar sua ação pedagógica dentro de um caminho educativo consonante com a formação que se espera da escola.

A partir dessas reflexões julgamos que esse resgaste de elementos da *Paidéia* pode se realizado e a história da matemática e da música se mostraram efetivas para isso. Porém há que se considerar quais são esses elementos a serem resgatados.

Fragmentar a concepção educacional dos gregos, desconsiderando a importância dos aspectos corporais e sensoriais e focando apenas na parte conceitual, da matematização das percepções, pode tornar a abordagem pedagógica estéril do ponto de vista da educação clássica. Para recuperar apenas esse aspecto, a história da matemática pode ser suficiente.

Do mesmo modo, enforcar também apenas na parte corporal e sensorial, sem vinculá-las à perspectiva holística que os gregos tinham do processo educacional, conectado à sua concepção de mundo, poderia ser realizado sem se remeter à *Paidéia*. Apesar de não ser tão comum no currículo atual, aulas de teatro ou de música podem cumprir essa função, sem necessariamente passar pela abordagem clássia.

Assim, concluímos que recuperar essa perspectiva educacional dos gregos em sua completude exigiria uma reorganização escolar muito mais ampla e profunda que apenas atividades pontuais em disciplinas específicas. Seria necessário repensar não só a estrutura curricular, mas também a formação dos docentes, a reorganização do espaço escolar, a compartimentação das aulas em períodos temporais mais flexíveis etc.

Contudo acreditamos que a *Paidéia* pode servir de orientação para projetos pedagógicos que visem trabalhar os conteúdos escolares de forma mais holística, não apenas interconectados por temas específicos ou por atividades interdisciplinares. Essa é uma perspectiva pedagógica que pode dar organicidade à fragmentação disciplinar, não só nas áreas científicas, mas integrada a um todo, dando relevo às artes, à educação física e a própria experiência de vida dos alunos.

5 CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, avaliamos a potencialidade pedagógica para a educação matemática na recuperação de elementos da *Paidéia*. Os gregos desenvolveram um sistema educacional integral perpassado pelo conceito de *mousiké*, que não se reduz apenas ao estudo da música, mas dos ritmos do mundo de uma maneira mais ampla, como foi discutido no segundo capítulo deste estudo.

A descoberta das relações entre matemática e música por Pitágoras de Samos, levou à construção de toda uma perspectiva filosófica que colocava em relevo a matemática como o caminho para a compreensão da harmonia universal. Isso se reflete no processo educacional, pois a matemática e a música são instrumentos fundamentais para a compreensão da realidade. Foi essa perspectiva que tentamos trazer para uma sala de aula moderna, usando a história da matemática e da música como meios de promover a comunicação entre essas duas perspectivas pedagógicas distintas.

Com esse enfoque, elaboramos uma sequência de atividades para serem aplicadas em sala de aula, que envolvia elementos da *Paidéia*, explorando a sensibilidade sonora dos estudantes e como a "música do mundo" pode se expressar na vida humana e na natureza. Para trazer essa perspectiva para uma aula atual de matemática, construímos as atividades em torno do conceito de número racional, trabalhando com razões e proporções.

O objetivo da aplicação das atividades era coletar dados empíricos que nos permitissem responder a questão da pesquisa, a saber: *Como o resgate de elementos da* Paidéia *grega, através do conceito de* mousiké*, pode auxiliar o atual ensino de Matemática na Educação Básica por meio de práticas pedagógicas que explorem a relação entre as histórias da matemática e da música?.*

Para nossa surpresa, os dados conduziram a observação para elementos que não tínhamos imaginado em um primeiro momento, não tão ligados à apreensão dos conceitos de números racionais, suas representações e significados. Essa apreensão conceitual ocorreu e a atividade ajudou mostrando uma abordagem mais concreta desses conteúdos, pelas experiências de medidas e comparações.

Mas o que emergiu dos dados relacionado à questão foi tanto o que falta na escola atual para a incorporação de determinados elementos da *Paidéia*, seus limites curriculares e estruturais, quanto as dificuldade de regatar esses elementos dentro de uma concepção educacional muito fragmentária que valoriza outras habilidades em seu interior. Um grande desafio também é a própria cultura escolar internalizada nos atores atuais.

Aulas compartimentadas, com tempo fixo, e disciplinas isoladas. Mais que uma estrutura externa do ambiente escolar, está impregnada também nos valores da educação atual. Isso ficou muito evidenciado nos incômodos do pesquisador ao não conseguir finalizar determinado conteúdo do roteiro, ou ao priorizar a exposição de um conceito atropelando o processo de reflexão dos alunos, como foi registrado no caderno de campo em vários trechos.

Concluímos que esse resgate de elementos da *Paidéia* precisa ser feito sem perder de vista a noção holística que os gregos desejavam imprimir no processo educacional. Isolar determinados aspectos, como a educação sensorial e corporal é possível, mas não se trata propriamente da perspectiva pedagógica clássica. Trabalhar os aspectos matemáticos da música usando a história da matemática como ferramenta, tem grande papel pedagógico, mas não é apenas isso que caracteriza a noção educativa da *Paidéia*.

Esse resgate poderia ocorrer se for possível usar a perspectiva clássica para dar organicidade ao processo educacional como um todo, do currículo aos espaços de aula. Na atual configuração do modelo escolar, isso poderia ocorrer em um projeto pedagógico, mesmo em uma única escola, orientado nesse sentido de promover uma educação integral que valorize não apenas o carácter lógico e conceitual das disciplinas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música:** o pensamento analógico na construção de significados. 2ª ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

BARNABE, F. M. **A melodia das razões e proporções:** a música sob o olhar interdisciplinar do professor de Matemática. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matematica) – Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

BODGAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 2003.

BRASIL. **Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996,** Lei de Diretrizes e Bases da Educação, para dispor sobre a obrigatoriedade do ensino da música na educação básica.

BRASIL. Lei n° 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Presidência da República. Brasília: **Diário Oficial da União** de 23 de dezembro de 1996.

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura** – SEMTEC - *PCN+ - Ensino Médio,* Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, 2002.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMARGOS, C. B. R. **Música e Matemática:** a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

CAMPOS, G. P. S. **Matemática e Música:** práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação – Universidade Federal do Espírito Santo, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. **Musicalizando a escola:** música, conhecimento e educação. São Paulo: Editora Escrituras, 2006.

JAEGER, W. **Paidéia.** A formação do Homem Grego. Tradução Artur M. Parreira. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

JÚNIOR, F. N. M. Somando Funções Trigonométricas: uma reconstrução didática do conceito de timbre a partir de duas experiências pedagógicas. **Bolema**.v. 23. n. 36. p. 597-624. ago. 2010.

LIMA, A. F. Contribuições da educação integral para a formação humana a partir da visão de integralidade de Ken Wilber. In: IV ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL EM PERNAMBUCO. 2012, Caruaru. **Anais [...]** Caruaru. 2012.

MED, B. **Teoria da música**. Brasília: Musimed, 1996.

MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**.v.5, n. 8, p.73-115, 1997.

MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: Propostas e desafios. Coleção: Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica. 2 ed. 2011.

MIORIM, M. A**. Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual Editora, 1998.

PEREIRA, R. A. **A física da música no Renascimento:** uma abordagem histórico epistemológica. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo 2010.

PATRICK, J. **As origens da educação superior em Atenas.** O Lyceum e a educação ateniense antes de Aristóteles. Trad. Olga Pombo. Cadernos de História e Filosofia da Educação, volume 3 (A invenção da escola Grega). Lisboa, 1996.

PFEIFFER, R. **Os sofistas, seus contemporâneos e alunos nos séculos V e IV.** Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/cadernos/grecia/pfeiffer.pdf. Acesso em: 21 jun. 2020.

POMBO, O. Interdisciplinaridade e Integração dos saberes. **Liinc em Revista**. local, v.1, n.1, março 2005, p. 3-15. Disponível em: http://revista.ibict.br/liinc/article/view/3082. Acesso em: 21 junh. 2020.

PRADO, L. A. G. **Matemática, Física e Música no Renascimento:** uma abordagem histórico – epistemológica para um ensino interdisciplinar. 2010, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

ROCHA, L. J. L. R.; PINHO, M. O. **Música e Matemática** – um minicurso interdisciplinar. **Zetetiké**. v. 19. n. 35. p. 179-194. jan/jun. 2011.

SOUZA, L. G. S. **Uma abordagem didático - pedagógica da racionalidade Matemática na criação musical.** 2012, 296 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

TOMÁS, L. **Ouvindo o logos:** música e filosofia. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(Anuência do participante da pesquisa, criança, adolescente ou legalmente incapaz)

Caro(a) aluno(a),

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "Matemática e Música: práticas pedagógicas interdisciplinares para alunos de uma escola de Ouro Preto/MG".

A Matemática nem sempre é fácil para a maioria dos alunos, porém, dependendo das atividades propostas, podemos aprender de modo mais ativo e criativo! Nossa proposta é desenvolver um trabalho extraclasse no qual a Matemática seja trabalhada a partir da sua relação com a Música e outras disciplinas escolares.

Um de nossos propósitos é contar com seu apoio na avaliação das propostas de modo que possamos melhorá-las. Ou seja, tentaremos desenvolver atividades que lhe permitam aprender Matemática de modo interessante e significativo e você nos dará sugestões para aprimorar a proposta. Faremos um trabalho em conjunto, no qual sua participação será fundamental para o desenvolvimento do material. Nesse projeto, seremos parceiros na construção de uma proposta de ensino de Matemática utilizando como foco central a Música que poderá ser útil para professores e alunos de várias outras escolas.

Planejamos trabalhar através de oficinas que remontam a trajetória que alguns matemáticos seguiram ao perceber a relação entre a Matemática e a Música e a tentativa de solucionar o problema da afinação da escala musical.

O projeto terá duração de um mês e as atividades acontecerão em sua própria escola, uma ou duas vezes por semana, fora do horário das aulas, em dias e horários que definiremos junto com a direção da escola. Você poderá desistir de participar em qualquer momento, sem problemas. Esse projeto faz parte de uma pesquisa, assim, gostaria que você autorizasse a gravação em áudio e vídeo das atividades. Nos comprometemos a não revelar seu nome em nenhuma parte da pesquisa e, ao final, apresentarei os resultados para os participantes do projeto e a todos os interessados, em dia e local que a direção da escola definirá. Para participar, basta desejar fazer parte do projeto e contar com a autorização de seus pais ou responsável.

Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Eu, ____, portador (a) do documento de Identidade ______________________ (se já tiver documento), fui informado (a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi o termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

____

Assinatura do(a) aluno(a)

Professor Renato Alves de Carvalho
renato.carvalho@arquidiocesano.com
(31) 8657-2251

Professor Doutor Dilhermando Ferreira Campos
dilhermando@iceb.ufop.br

Comitê de Ética em Pesquisa – Universidade Federal de Ouro Preto (CEP/UFOP)
Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – ICEB II – sala 29
cep@propp.ufop.br
(31) 3559-1368 / Fax: (31) 3559-1370

Ouro Preto, _______ de ______________________ de 2015.

Renato Alves de Carvalho
Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da
Universidade Federal de Ouro Preto

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(Anuência do responsável do participante menor de idade da pesquisa)

Caro pai, mãe ou responsável,

Estamos convidando o(a) aluno(a) ______________________________ a participar como voluntário (a) da participar da pesquisa “Matemática e Música: práticas pedagógicas interdisciplinares para alunos de uma escola de Ouro Preto/MG”.

A Matemática nem sempre é fácil para a maioria dos alunos, porém, dependendo das atividades propostas, é possível aprendê-la de modo mais ativo e criativo! Nossa proposta é desenvolver um trabalho extraclasse no qual a Matemática seja trabalhada a partir da sua relação com a Música e outras disciplinas escolares.

Um de nossos propósitos é contar com o apoio do aluno na avaliação das propostas de modo que possamos melhorá-las. Ou seja, tentaremos desenvolver atividades que lhe permitam aprender Matemática de modo interessante e significativo e os alunos que participarão da pesquisa nos darão sugestões para aprimorar a proposta. Faremos um trabalho em conjunto, no qual sua participação será fundamental para o desenvolvimento do material. Nesse projeto, seremos parceiros na construção de uma proposta de ensino de Matemática utilizando como foco central a Música que poderá ser útil para professores e alunos de várias outras escolas.

Planejamos trabalhar através de oficinas que remontam a trajetória que alguns matemáticos seguiram ao perceber a relação entre a Matemática e a Música e a tentativa de solucionar o problema da afinação da escala musical.

O projeto terá duração de um mês e as atividades acontecerão em sua própria escola, uma ou duas vezes por semana, fora do horário das aulas, em dias e horários que definiremos junto com a direção da escola. Qualquer aluno poderá desistir de participar em qualquer momento, sem problemas. Esse projeto faz parte de uma pesquisa, assim, gostaria que você autorizasse a gravação em áudio e vídeo das atividades. Nos comprometemos a não revelar o nome dos alunos participantes em nenhuma parte da pesquisa e, ao final, apresentaremos os resultados para os participantes do projeto e a todos os interessados, em dia e local que a direção da escola definirá.

Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Estou realizando uma pesquisa sob orientação do Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Nessa pesquisa, pretendo desenvolver uma proposta de ensino que utilize a relação entre a Matemática e a Música que auxilie os alunos a compreender conceitos que envolvem frações, comensurabilidade e incomensurabilidade e progressões através de oficinas que tenham como fio condutor a história da Matemática.

Participarão dessa pesquisa alunos de uma turma de 1º do ensino médio indicados pelo professor e órgãos competentes da escola, que desejem participar e contem com a autorização dos pais ou responsável.

As atividades acontecerão na própria escola, no 1º semestre de 2015, durante cerca de um mês, uma ou duas vezes por semana em horário diferenciado das aulas, de modo a não prejudicar o andamento das aulas regulares. Por meio de oficinas interdisciplinares, pretendemos auxiliar seu (sua) filho(a) nas tarefas escolares e do dia-a-dia, explorando o espaço em que ele vive, a relação dele com o ambiente que o cerca e com sua vivência. A participação de seu filho não envolverá qualquer gasto para família e nem para a escola, uma vez que o pesquisador providenciará todos os materiais necessários.

Tendo em vista a idade dos participantes, acreditamos que o **único incômodo gerado pela participação no projeto será a necessidade de se deslocar até a escola 1 a 2 vezes/semana, durante um mês, em horário diferenciado das aulas, contudo, planejamos verificar junto à escola a possibilidade de os mesmos – caso assim o desejem – permanecerem na escola e ali se alimentarem, evitando os custos e ônus dos deslocamentos. Além disso, procuraremos conhecer e minimizar qualquer desconforto que por ventura possam experimentar. Nossa intenção é criar um espaço de convívio e estudo agradável, respeitoso, divertido e produtivo no qual seu(sua) filho(a) se sinta estimulado a participar.**

Reafirmamos que, caso o(a) senhor(a) ou seu(sua) filho(a) desejem desistir do projeto, poderão fazê-lo a qualquer momento. Além disso, nem seu nome, nem o nome de se(sua) filho(a), ou de qualquer professor, ou funcionário da escola será citado em nenhum documento produzido nessa pesquisa.

Como tal trabalho fará parte de uma pesquisa de Mestrado, peço sua permissão para gravar em áudio e vídeo alguns momentos das atividades. Todas as gravações e atividades realizadas durante o trabalho estarão à sua disposição e à disposição da escola ao longo do estudo. Essas informações serão salvas em um CD e/ou DVD e será guardado na sala do meu orientador, durante 5 (cinco) anos e, ao final desse período, será destruído. Ao final da pesquisa, os resultados encontrados serão divulgados em reunião com pais, alunos, professores e demais interessados, a ser realizado na escola em data e horário definidos pela direção. Além disso, a pesquisa na íntegra poderá ser acessada na página do programa do Mestrado Profissional em Educação Matemática (www.ppgedmat.ufop.br).

Caso ainda tenha alguma dúvida, por favor, sinta-se à vontade para me consultar, ao meu orientador, ou ainda ao Comitê de Ética em Pesquisa da UFOP, em qualquer momento.

Se você se sentir esclarecido em relação à proposta e concordar em participar voluntariamente desta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar esse termo de assentimento e o termo de consentimento livre e esclarecido, que segue em anexo, e devolver por intermético do seu(sua) filho (a).

____

Assinatura do(a) pai, mãe ou responsável

Professor Renato Alves de Carvalho
renato.carvalho@arquidiocesano.com
(31) 8657-2251

Professor Doutor Dilhermando Ferreira Campos
dilhermando@iceb.ufop.br

Comitê de Ética em Pesquisa – Universidade Federal de Ouro Preto (CEP/UFOP)
Campus Universitário – Morro do Cruzeiro – ICEB II – sala 29
cep@propp.ufop.br
(31) 3559-1368 / Fax: (31) 3559-1370

Ouro Preto, ________ de ________________________ de 2015.

Renato Alves de Carvalho
Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da
Universidade Federal de Ouro Preto