UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

BRUNO DE ALMEIDA DIAS

IMPACTOS DA ADOÇÃO DO ENEM PARA OS ALUNOS QUE INICIAM CURSOS DE CIÊNCIAS EXATAS

Ouro Preto

2018

BRUNO DE ALMEIDA DIAS

IMPACTOS DA ADOÇÃO DO ENEM PARA OS ALUNOS QUE INICIAM CURSOS DE CIÊNCIAS EXATAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, sob orientação do Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos.

Ouro Preto, Minas Gerais

2018

D541i Dias, Bruno de Almeida.
Impactos da adoção do ENEM para os alunos que iniciam cursos de ciências exatas [manuscrito] / Bruno de Almeida Dias. - 2018.
94f.: il.: grafs; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Exame vestibular. 2. Ensino médio. 3. Ensino superior. I. Campos, Dilhermando Ferreira . II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 510:37

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IMPACTOS DA ADOÇÃO DO ENEM PARA OS ALUNOS QUE INICIAM CURSOS DE CIÊNCIAS EXATAS

Autor: Bruno de Almeida Dias

Orientador: Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida por Bruno de Almeida Dias e aprovada pela Comissão Examinadora. Data: 05/10/2018

Orientador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos (orientador)

Participação por vídeo conferência

Profª. Drª. Maria Cristina Costa Ferreira (membro externo)

Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira (membro interno)

2018

Dedico este trabalho aos meu pais, Erick e Bruna!

Agradecimentos

Após um longo caminho percorrido, agradeço aos meus pais pelos valores passados, suporte e apoio.

Ao meu irmão Erick, por estar sempre presente.

À Bruna Mendes Morais, pelo apoio, amor e companheirismo. Obrigado por tudo.

A todos professores do DEEMA e DEMAT da UFOP, todos vocês foram muito importantes em minha vida acadêmica.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, mais do que essenciais em minha formação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos por não ter sido apenas meu orientador e sim um amigo, obrigado pelos ensinamentos.

À banca examinadora, Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira e a Profa. Dra. Maria Cristina Costa Ferreira, pelas contribuições.

Aos amigos conquistados durante o curso, pelo apoio, incentivo e momentos de distração.

A todos amigos, sem a presença de vocês essa caminhada seria ainda mais difícil.

Resumo

Este estudo foi desenvolvido na Linha de Pesquisa 1 - Educação Matemática Superior, Informática Educacional e Modelagem Matemática do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Nossa hipótese de trabalho é que existe uma relação entre o formato da prova de seleção dos calouros, no caso, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), e as dificuldades apresentadas pelos alunos na disciplina de Cálculo I. Partindo dessa hipótese, utilizamos uma base documental constituída de questões do Novo ENEM, do antigo vestibular da UFOP e das listas de exercícios de dois professores da disciplina de Cálculo I do DEMAT/UFOP com o objetivo de observar semelhanças e diferenças entre esses conjuntos de questões. Os resultados evidenciaram uma similaridade entre as questões do antigo vestibular da UFOP e as listas dos professores, mostrando que apesar da mudança no processo seletivo com a adoção do ENEM e adesão da UFOP ao SISU, as ementas das disciplinas e as expectativas dos professores em relação aos conhecimentos prévios que os alunos têm ao ingressar na Universidade parecem estar mais ligados ao antigo formato de processo seletivo do que ao atual.

Palavras-chave: ENEM, vestibular, Ensino Médio, Ensino Superior.

Abstract

This study was developed in Research Line 1 - Higher Mathematics Education, Educational Informatics and Mathematical Modeling of the Professional Masters in Mathematics Education of the Federal University of Ouro Preto (UFOP). Our working hypothesis is that there is a correlation between the format of the entrance exam, in this case ENEM (Nacional High School Exam), and the difficulties presented by the students in the discipline of Calculus I. Starting from this hypothesis, we used a documentary base consisting of questions from the New ENEM, the former UFOP entrance exam and lists of exercises used by two professors of Calculus I in DEMAT/UFOP. The objective was to observe similarities and differences between these sets of questions. The results showed a similarity between questions from the former UFOP's entrance exam and the lists of exercises used by the professors, showing that in spite of the change in the selection process, with the adoption of the ENEM and UFOP's adherence to the Unified Selection System, the syllabus and professors' expectations regarding previous knowledge students should have when entering the University, seem to be more related to the former selective process than the current one.

Key words: ENEM, University Entrance Exam, High School, Higher Education.

Lista de ilustrações

Figura 1.....38

Figura 2.....38

Figura 3.....39

Figura 4.....39

Lista de tabelas

Tabela 1.....34

Tabela 2.....34

Tabela 3.....36

Tabela 4.....36

Tabela 5.....36

Tabela 6.....37

Tabela 7.....37

Lista de quadros

Quadro 1..... 31

Sumário

Introdução 14

Capítulo I 16

1. CONTEXTO HISTÓRICO 16

1.1 Campo de pesquisa 16

1.2 As ementas do Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo a na UFOP 17

1.3 O formato do vestibular da UFOP 18

1.4 O exame nacional do Ensino Médio – ENEM 19

1.5 Objetivos do ENEM 22

1.6 As teorias utilizadas nas correções do antigo e novo ENEM 24

Capítulo II 26

2. A PESQUISA 26

2.1 Pesquisa documental 26

2.2 Currículos 28

2.3 Estudo de caso 31

2.4 Procedimentos metodológicos 32

Capítulo III 35

3. DADOS DA PESQUISA 35

3.1 Levantamento de questões 35

3.1.1 Tópicos matemáticos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral presentes no ENEM 35

3.1.2 Conteúdos presentes nos vestibulares da UFOP relacionados ao cálculo diferencial e integral - (1998.1 a 2010.1) 37

3.2 Questões selecionadas 39

3.2.1 Exponenciais, logaritmos e suas funções 42

3.2.1.1 ENEM 42

3.2.1.2 Vestibular da UFOP 46

3.2.1.2.1 Prova de conhecimentos gerais 46

3.2.1.2.2 Prova de conhecimentos específicos 50

3.2.1.3 Listas de exercícios 54
3.2.1.3.1 Professor I 54
3.2.1.3.2 Professor II 56
3.2.2 Trigonometria e suas funções 57
3.2.2.1 ENEM 57
3.2.2.2 Vestibular da UFOP 58
3.2.2.2.1 Prova de conhecimentos gerais 58
3.2.2.2.2 Prova de conhecimentos específicos 61
3.2.2.3 Listas de exercícios 62
3.2.2.3.1 Professor I 62
3.2.2.3.2 Professor II 64

Capítulo IV 67
4. ANÁLISE DE DADOS 67
4.1 Análise das questões selecionadas 67
4.1.1 Exponenciais, logaritmos e suas funções 67
4.1.2 Funções trigonométricas e trigonometria 77

Considerações Finais 88

Referências Bibliográficas 90

Anexos 93
Anexo 1 - Ementa Cálculo Diferencial e Integral I 93
Anexo 2 - Ementa Cálculo Diferencial e Integral A 94

Introdução

Em minha experiência profissional como professor substituto na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, pude observar que os alunos apresentavam grandes dificuldades em conteúdos da matemática elementar. Em alguns casos, a impressão era de que os estudantes não haviam tido qualquer contato anterior com determinados conteúdos abordados, mesmo tendo sido selecionados em um exame em que tais conteúdos eram cobrados. Pesquisas sobre ensino de Cálculo apontam que esse não é um problema incomum. No entanto, começamos a indagar em que medida, no cenário atual, esse problema poderia estar sendo afetado pela mudança no sistema de seleção dos alunos ocorrida há alguns anos.

O Exame Nacional do Ensino Médio foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino secundário brasileiro. A partir de 2004, passou a ser usado também como forma de seleção de alunos para o Ensino Superior, sendo adotado, atualmente, pela maioria das instituições de Ensino Superior públicas como substituto do vestibular. Apesar de ter passado por várias mudanças, seu formato sempre o diferenciou dos vestibulares tradicionais por trazer questões mais contextualizadas, que exigiam mais capacidade analítica do candidato que propriamente domínio (e memorização) de conteúdos específicos, priorizando as questões interdisciplinares. Foi com base nesse processo seletivo que o Sistema de Seleção Unificada (SISU) se estabeleceu, unificando a seleção e distribuição dos aprovados em uma prova nacional, que foi substituindo os vestibulares elaborados de forma independente por cada instituição de ensino.

Outra diferença surgida com a adoção do ENEM é que no modelo de seleção anterior, os alunos eram submetidos a exames com etapas específicas para cada área do conhecimento. No caso da área de Ciências Exatas, a última etapa exigia não só conhecimentos dos conteúdos que tradicionalmente fazem parte da grade curricular do Ensino Médio, mas que tais conhecimentos fossem, muitas vezes, aplicados em exercícios não necessariamente contextualizados, similares aos que normalmente são apresentados aos alunos nas revisões iniciais dos livros de Cálculo I. Obviamente, as dificuldades apresentadas por alunos no curso de Cálculo I têm origens diversas e seu estudo envolve uma gama complexa de abordagens, sendo o processo seletivo apenas

um desses elementos, não necessariamente o central. No entanto, começamos a levantar hipóteses acerca da influência dessa variável no atual cenário.

Com a hipótese de trabalho de que há certa influência entre o formato das provas de seleção e algumas dificuldades dos alunos no início dos seus cursos de Cálculo, iniciamos uma análise das provas dos antigos vestibulares, das provas do ENEM e das listas de exercícios iniciais de alguns professores do Departamento de Matemática da UFOP, que será nosso campo de pesquisa. A ideia é avaliar as semelhanças e diferenças entre esses três conjuntos de questões, nos guiando pela seguinte pergunta:

Em alguma medida, haveria uma falta de sincronia entre as expectativas da Universidade em relação aos alunos que iniciam seus cursos de Ciências Exatas e as demandas desses alunos, em termos de preparação e conhecimento de determinados conteúdos matemáticos, após passarem pelo processo seletivo?

A formação deficitária em determinados conteúdos matemáticos é, normalmente, o fator mais imediato apontado como elemento principal das reprovações em Cálculo. Pesquisas na área mostram, exaustivamente, que o cenário é muito mais complexo do que se imagina à primeira vista, sendo influenciado por diversos fatores que vão desde questões didáticas, passando por aspectos sociológicos e indo até as políticas educacionais do país. Porém, no momento atual, a pesquisa se justifica pelo fato dos problemas apresentados pelos estudantes poderem sofrer influência, também, dessa nova variável ligada à mudança no processo seletivo, o que não tem sido muito explorado nas pesquisas da área. A escolha pelo Cálculo Diferencial e Integral I como foco da pesquisa se dá por esta ser uma disciplina comum à maioria dos cursos de Ciências Exatas, que demanda conhecimentos prévios relacionados a uma boa parte dos conteúdos que tradicionalmente fazem parte do Ensino Médio e por apresentar grandes índices de retenção e evasão, o que pode apresentar com mais abrangência a possível relação que foi investigada.

Capítulo I

1. CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos o contexto histórico em que a pesquisa se enquadra. Falaremos um pouco sobre a instituição pesquisada, as ementas das disciplinas de Cálculo I da UFOP, dos antigos vestibulares dessa instituição e sobre o ENEM.

1.1 Campo de pesquisa

Para falarmos do surgimento da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), devemos voltar um pouco no tempo e irmos a 1839, quando foi criada a Escola de Farmácia de Ouro Preto – a primeira faculdade do Estado, além de ser a mais antiga da América Latina em sua área. Posteriormente, em 1876, foi fundada a Escola de Minas. Estimulada pelo Imperador Dom Pedro II (1825-1891), a Escola de Minas foi fundada pelo cientista Henri Gorceix (1842-1919), sendo a primeira instituição brasileira dedicada ao ensino de mineração, metalurgia e geologia.

Em 1969, foi criada a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), com a junção das tradicionais Escola de Farmácia e Escola de Minas. Ao longo dos anos, a instituição foi sendo ampliada, aumentando seu espaço físico, quantidade de cursos oferecidos e, consequentemente, seu número de professores e funcionários. Em 1978, surge o curso de Nutrição, sendo inaugurada, em 1994, a Escola de Nutrição. No ano de 1979, na cidade de Mariana-MG, foi fundado o Instituto de Ciências Humanas e Sociais (ICHS). Em 1982, no *campus* Ouro Preto, foi criado o Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB), responsável inicialmente pelas disciplinas básicas de graduação da Escola de Minas, Farmácia e Nutrição, oferecendo, hoje em dia, cursos de graduação na área de Ciência da Computação, Ciências Biológicas, Estatística, Física, Matemática e Química. Em 1994 foi aprovado o curso de Filosofia e, com isso, a criação do Instituto de Artes e Cultura (IAC), hoje conhecido como Instituto de Filosofia, Arte e Cultura (IFAC). No ano de 2000, foram criados cursos de graduação e pós-graduação na modalidade a distância, por meio do Núcleo de Educação Aberta e a Distância,

conhecido hoje como Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD). Em 2002, a UFOP expandiu seus *campi* para mais uma cidade mineira, com a criação do *campus* avançado de João Monlevade, que abriga os cursos de graduação em Engenharia de Produção, Sistemas de Informação, Engenharia de Computação e Engenharia Elétrica. Em 2007, foi criado o curso de Medicina e, em 2012, a Escola de Medicina.

Em 2008, a UFOP teve uma expansão mais acentuada com sua adesão ao Plano de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais (REUNI) apresentado pelo Governo Federal no ano anterior. Com isso, foi fundado, em Mariana, o Instituto de Ciências Sociais Aplicadas (ICSA), que abriga, hoje, quatro cursos de graduação: Administração, Ciências Econômicas, Jornalismo e Serviço Social. Por fim, temos, em 2013, a criação do curso de Museologia e a fundação da Escola de Direito, Turismo e Museologia (EDTM), apesar dos cursos de Direito e Turismo funcionarem desde a década de 1990, o que completa a estrutura atual da Universidade.

Segundo dados oficiais da UFOP, a universidade oferece diversas vagas semestralmente, distribuídas em 52 cursos de graduação, sendo 47 na modalidade presencial e 5 na modalidade a distância, possuindo 14.263 estudantes, dos quais 12.395 são de graduação e 1.868 de pós-graduação, 788 técnicos administrativos e 1.002 professores (945 efetivos e 57 substitutos). Do total de alunos de graduação, 10.977 estão matriculados na modalidade presencial e 1.418 na modalidade a distância, mas esta última podendo ter variações no número de vagas em cada semestre, já que tais vagas dependem de convênios firmados pela UFOP com governos estaduais e municipais. Em relação aos alunos de pós-graduação, 323 estão cursando Especialização, 1.162 cursando o Mestrado e 383 o Doutorado, distribuídos em 13 cursos de doutorado, 30 de mestrado (sendo 23 do mestrado acadêmico e 7 do mestrado profissional) e 6 cursos de especialização.

1.2 As ementas do Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo A na UFOP

Integrando o currículo de diversos cursos, a disciplina de Cálculo I costuma estar presente nos primeiros semestres dos cursos de Engenharia de todas as instituições de Ensino Superior. Na UFOP, as disciplinas MTM 122 - Cálculo Diferencial e Integral I e

MTM 700 - Cálculo Diferencial e Integral A[1] são oferecidas para todos os cursos de Engenharia.

A disciplina MTM 122 está presente em praticamente todos os cursos de Engenharia da UFOP, exceto Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção, que possuem a disciplina MTM 700 em suas grades curriculares. As principais diferenças entre essas duas disciplinas são a carga horária e alguns conteúdos presentes em suas ementas, sendo a primeira uma disciplina de 105 horas e a segunda de 72 horas.

Em relação aos conteúdos, o Cálculo I, de 105 horas, inicia com uma revisão de conceitos como números reais, funções elementares e seus gráficos. Já a disciplina Cálculo A inicia o curso direto no conceito de limite, pressupondo que os alunos já dominem os conjuntos numéricos, com suas propriedades e operações, inequações e valor absoluto, presentes na parte sobre números reais, além das funções (com sua abordagem gráfica) polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, além de suas compostas e inversas.

Após a revisão de conjuntos numéricos, das funções elementares e seus gráficos, as duas disciplinas seguem ementa idêntica, passando pelo conceito de limites e continuidade, derivadas e aplicações, finalizando com as integrais de funções de uma variável. As ementas de ambas as disciplinas constam nos anexos 1 e 2 deste trabalho.

1.3 O formato do vestibular da UFOP

Em relação ao formato das provas de vestibular, como nosso foco é a UFOP, foi avaliada que apenas como se deram as mudanças da prova de seleção dessa instituição. O vestibular possuía duas fases, a primeira de conhecimentos gerais e a segunda de conhecimentos específicos. Até o ano de 1999, na primeira fase, todos os candidatos deveriam fazer 40 questões de múltipla escolha, em provas de Matemática, Física, Química, Biologia, Geografia, História, Língua Portuguesa e Língua estrangeira. Na segunda fase, os alunos faziam uma prova dissertativa que envolvia as disciplinas

[1] Utilizaremos Calculo I para citar as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo Diferencial e Integral A

relacionadas à área de conhecimento do curso escolhido. Nessa fase a prova de Matemática para as áreas de Ciência Exatas possuía 10 questões.

A partir do ano 2000, a primeira fase passou a contar com 62 questões, abrangendo todas as disciplinas do Ensino Médio. A segunda fase manteve o mesmo molde do modelo anterior, excetuando o número de questões que, no caso da prova de Matemática, passaram a ser 4 ao invés de 10. No próximo capítulo, avaliaremos mais detidamente os tipos de questões de Matemática que compunham essas provas, em suas duas etapas, mostrando as diferenças para as questões que são cobradas no ENEM.

1.4 O exame nacional do Ensino Médio – ENEM

De acordo com Vieira (2013) muitos países, como, por exemplo, Estados Unidos, França, Espanha e China adotam, no campo educacional, testes padronizados nacionais. O objetivo, normalmente, é avaliar a qualidade do ensino, servindo também para organizar o ingresso de alunos nas universidades. Nos Estados Unidos, essa avaliação é o *Scholastic Aptitude Test* (SAT) e existe há mais de um século, sendo a prova mais tradicional do país para seleção dos alunos nas Universidades. Na França, o teste é popularmente conhecido como *Le Bac*, no qual os candidatos optam na avaliação pelas três possíveis áreas de interesse, que são a profissional, geral e tecnológica. Na Espanha, é conhecida como *Prueba de Acceso a la Universidad* e é utilizada desde os anos 1980. Já na China essa avaliação é o *Gaokao* e serve como meio de ingresso para as Universidades chinesas, que possuem um sistema unificado de vagas.

No Brasil, com o objetivo de democratizar a entrada dos estudantes nas Universidades, foi criado o Sistema de Seleção Unificada (SISU), com o uso do ENEM como processo seletivo, que veio substituir um sistema independente de provas seletivas que tiveram grandes transformações ao longo do tempo. A história dos processos seletivos no Brasil remonta ao século XIX, quando o ensino secundário chegava a durar de 5 a 7 anos. Após a conclusão do ensino secundário, uma banca examinadora, de acordo com seus critérios, selecionava os alunos aptos a iniciar o Ensino Superior.

Em 1911, foi instaurada a lei Orgânica do Ensino Superior e do Fundamental (conhecida como Reforma Rivadávia), que determinou o ingresso no Ensino Superior

através de provas. Esses testes eram, em sua maioria, compostos de duas fases, uma com questões dissertativas e outra com arguição oral, havendo uma pontuação mínima para aprovação.

Entre 1945 até 1965 houve um crescimento acelerado do Ensino Superior público. Tal crescimento foi responsável pela federalização de instituições estaduais e privadas, formando as universidades (MARTINS, 2009, p. 17). No início da década de 1960, surgiram movimentos que lutavam pela reforma das universidades. Nesses movimentos estavam presentes tanto alunos como professores que, através de seminários, discutiam o formato das universidades na época, sendo críticos à sua forma elitista, aos processos de concursos públicos para efetivação de professores e à atualização dos currículos. Nesse período, as tensões se acentuaram devido a 29 mil estudantes terem sido aprovados no vestibular e não terem conseguido vagas nas universidades, em um período em que as vagas oferecidas não eram fixadas antes da realização dos exames de seleção (MARTINS, 2009, p. 18-19).

No final da década de 60, o número de estudantes que foram aprovados, mas não conseguiram ingressar nas universidades chegou a 162 mil, gerando reivindicações e processos judiciais que obrigavam as faculdades a matricularem todos os aprovados, independentemente do número de vagas disponíveis. Com isso ampliou-se a pressão para expansão do Ensino Superior, surgindo o movimento que ficou conhecido como "Campanha dos Excedentes".

A reforma universitária de 1968, que promoveu grandes mudanças no funcionamento das universidades, com o fim das cátedras vitalícias, por exemplo, institucionalizou um sistema de vestibulares independentes para distribuição de um número de vagas. Estas, passaram a ser pré-fixadas nos processos de seleção. Esse modelo instituído seguiu praticamente inalterado até a criação do Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) no fim dos anos 90.

Com a ideia inicial de avaliar a qualidade do Ensino Médio no Brasil, o Ministério da Educação (MEC) criou, em maio de 1998, o ENEM, através da portaria nº 438. Nessa época, o ENEM tinha os seguintes objetivos:

> *1.1 conferir ao cidadão parâmetro para auto-avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;*

> *1.2 criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do Ensino Médio;*
> *1.3 fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;*
> *1.4 constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes Pós-Médio. (Art. 1º portaria do ENEM) (NUNES, 2011, p.76)*

Ao longo do tempo, a avaliação do ENEM veio sofrendo mudanças na sua forma e nas suas funções, servindo também como meio de seleção dos alunos para as Universidades. No ano de 2004, o ENEM ganhou outra importante função, passando a servir também para seleção dos bolsistas no Programa Universidade para Todos (ProUni). Nessa época, algumas instituições já o aceitavam como forma de ingresso para as vagas de cursos superior, substituindo o vestibular parcialmente ou mesmo integralmente, em alguns casos.

Quanto à sua forma, até o ano de 2008, a avaliação continha 63 questões interdisciplinares de múltipla escolha e uma redação, aplicadas em apenas um dia de prova, com duração máxima de 5 horas. Em 2010, houve uma grande reformulação no ENEM, que passou a contar com 180 questões de múltipla escolha, divididas nas áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias; Linguagem, Códigos e suas Tecnologias e, por fim, Matemática e suas Tecnologias, cada área contando com 45 questões, além da redação em Língua Portuguesa. Essas questões são aplicadas em dois dias, sendo o primeiro para a realização das provas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias, com duração de 4 horas e 30 minutos. No segundo dia, são realizadas as provas de Linguagem, Códigos e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias e a Redação, com duração de 5 horas e 30 minutos. Com essa reformulação, o ENEM passou a ser chamado de "novo ENEM".

Apesar de não ser obrigatório, com o passar dos anos houve um progressivo aumento no número de pessoas que realizam o exame. Segundo o IBGE, a primeira edição, de 1998, contou com 157,2 mil inscritos e 115,6 mil participantes. Na quarta edição, que ocorreu em 2001, foram 1,6 milhão de inscritos e 1,2 milhão de participantes. Na edição de 2014, o ENEM contou com 8,7 milhões de inscritos e 6,2 milhões participantes.

Em 2009, a prova passou a ser utilizada como forma de certificação de conclusão de Ensino Médio em cursos como Educação de Jovens e Adultos (EJA) e supletivos[2]. Mas sua importância se consolidou a partir dessa época, quando as Universidades Públicas Federais começaram a aderir a avaliação do ENEM como única forma de ingresso dos seus estudantes. Esse processo de ingresso unificou o sistema de acesso às universidades federais, através do SISU que permitia o ingresso em qualquer uma das universidades federais brasileiras, a partir da nota da mesma prova.

1.5 Objetivos do ENEM

O objetivo original do ENEM é avaliar o desempenho dos alunos que estão finalizando o Ensino Médio, através de questões contextualizadas ou semicontextualizadas, com foco em 7 competências e 30 habilidades. Os eixos cognitivos utilizados pretendem testar e avaliar a capacidade do aluno em aplicar o conhecimento que foi trabalhado ao longo de sua trajetória escolar, exigindo não só o raciocínio lógico do aluno, como também a percepção e a capacidade de utilizar informações implícitas nas questões. Esses eixos cognitivos, comuns para todas as áreas, são:

> I Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
> II Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
> III Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
> IV Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
> V Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural. (Matriz de Referência para o ENEM 2009)

[2] Essa possibilidade de certificação do Ensino Médio durou até o ano de 2016.

De acordo com a Matriz de Referência para o ENEM, existem diversas competências e habilidades que os alunos devem possuir. Algumas dessas competências e habilidades estão diretamente ligadas aos conteúdos importantes ao curso de Cálculo I. São elas:

> **Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**
>
> H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
>
> H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
>
> H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
>
> H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
>
> **Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**
>
> H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
>
> H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
>
> H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
>
> **Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
>
> H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
>
> H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
>
> H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
>
> **Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
>
> H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
>
> **Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**
>
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
>
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
>
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
>
> **Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.**
>
> H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

> H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
>
> H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos. (Matriz de Referência para o ENEM 2009).

Além dessas competências e habilidades existem ainda alguns objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência:

> - Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
> - Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
> - Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
> - Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações. (Matriz de Referência para o ENEM 2009).

1.6 As teorias utilizadas nas correções do antigo e novo ENEM

A metodologia de elaboração e correção das questões da prova de múltipla escolha do ENEM também sofreu mudanças ao longo do tempo. No ENEM tradicional era utilizada a Teoria Clássica de Medida (TCM), que é normalmente utilizada nas avaliações de múltipla escolha. Com essa teoria é possível contabilizar apenas a quantidade de acertos, sem levar em conta parâmetros de dificuldade (COSTA, 2013, p. 39).

O novo ENEM faz uso da Teoria de Resposta ao Item (TRI). Essa teoria leva em consideração tanto a quantidade de acertos do realizador da avaliação como também a

dificuldade de cada questão. Segundo o portal do MEC, a TRI qualifica o item de acordo com três parâmetros:

- Poder de discriminação, que é a capacidade de um item distinguir os estudantes que têm a proficiência requisitada daqueles quem não a tem;
- Grau de dificuldade;
- Possibilidade de acerto ao acaso (chute).

A TRI não permite a comparação de resultados entre áreas distintas: um acerto maior em uma determinada área não indica um nível mais elevado de proficiência em outra área com menor índice de acerto. Por esse mesmo motivo, não é possível comparar o desempenho de dois alunos apenas pelo resultado global de acertos, sendo necessário discriminar área por área para avaliação, além dos acertos em questões com maior grau de dificuldade.

Uma das vantagens da TRI apontadas pelo site do MEC é:

> a possibilidade de elaboração de provas diferentes para o mesmo exame. Essas provas podem ser aplicadas em qualquer período do ano com grau de dificuldade semelhante e permitem a comparabilidade no tempo. (MEC, 2011)

No novo Enem, somente a prova de Redação não é corrigida através da TRI, possuindo regras de correção próprias e fixas para todo o conjunto de redações.

Essas diferenças no processo de elaboração e correção se refletem nos tipos de questões que aparecem nessas provas e nas que compunham o antigo vestibular. Para realizar essa comparação, apresentaremos no próximo capítulo a metodologia que utilizamos e o enfoque que foi dado na pesquisa.

Capítulo II

2. A PESQUISA

Apresentaremos, neste capítulo, a metodologia que utilizamos para realização deste estudo, que envolve pesquisa documental em provas antigas e listas de exercícios de professores do Departamento de Matemática da UFOP. A nossa hipótese de trabalho é que haveria alguma influência entre o formato das provas de seleção, no caso, o atual do ENEM, e dificuldades apresentadas pelos alunos no início do curso de Cálculo. Partindo dessa hipótese, realizamos uma análise das questões das provas dos antigos vestibulares da UFOP, ENEM, Novo ENEM e das listas de exercícios que alguns professores do DEMAT/UFOP passam a seus alunos no início do curso de Cálculo I. O objetivo dessa comparação é observar se das semelhanças e diferenças entre esses conjuntos de questões, podemos inferir que há divergências entre as habilidades e conhecimentos testados no ENEM e a expectativa dos professores em relação aos seus alunos.

Assim, por meio dessa comparação, queremos responder se *poderíamos dizer que, em alguma medida, haveria uma falta de sincronia entre as expectativas da Universidade em relação aos alunos que iniciam seus cursos de Ciências Exatas e as demandas desses alunos, em termos de preparação e conhecimento de determinados conteúdos matemáticos, após passarem pelo processo seletivo?*

2.1 Pesquisa documental

Para falarmos de pesquisa documental, precisamos também falar um pouco sobre a pesquisa bibliográfica. Para Sá-Silva et al. (2009), ambas as pesquisas utilizam o documento como objeto de investigação, havendo, porém, algumas diferenças entre esses tipos de investigação.

Seguindo a ideia de Figueiredo (2007, apud Sá-Silva et al., 2009, p.5) a concepção de documento não pode ficar presa apenas aos textos escritos e/ou impressos, podendo também estarem relacionadas à outras fontes que servem como fonte de informações como filmes, vídeos, slides, fotografias ou pôsteres. Para Cellard (2008,

apud Kripka et al., 2015, p.244), documento pode ser entendido como algo que serve de registro ou comprovação de fatos ou acontecimentos.

Em relação à diferença entre pesquisa bibliográfica e pesquisa documental, Oliveira (2007, apud Sá-Silva et al., 2009, p.5-6) destaca que a primeira está ligada diretamente ao estudo e análise de documentos científicos, como livros, artigos, periódicos, enciclopédias, revistas científicas, etc. Para essa autora, esse tipo de pesquisa aborda diretamente as fontes científicas, sem a necessidade de explorar os acontecimentos da prática, sendo seu principal objetivo que os pesquisadores tenham contato com materiais já reconhecidos no domínio científico. Já na pesquisa documental são utilizados aqueles materiais que não receberam análise científica prévia.

> ... a natureza das fontes: a pesquisa bibliográfica remete para as contribuições de diferentes autores sobre o tema, atentando para as fontes secundárias, enquanto a pesquisa documental recorre a materiais que ainda não receberam tratamento analítico, ou seja, as fontes primárias (SÁ-SILVA et al., 2009, p.6).

Fontes primárias são todos os dados originais, ou dados brutos, que ainda não foram analisados, ou seja, que ainda carecem de uma primeira análise do pesquisador. Fontes secundárias são trabalhos que já tiveram o tratamento dos pesquisadores, sendo fontes que já são de domínio científico. Kripka se vale dessa diferenciação para caracterizar a pesquisa documental:

> A pesquisa documental consiste num intenso e amplo exame de diversos materiais que ainda não sofreram nenhum trabalho de análise, ou que podem ser reexaminados, buscando-se outras interpretações ou informações complementares, chamados de documentos (KRIPKA et al. 2015, p. 244)

Para escolha e análise dos documentos, segundo Kripka et al. (2015):

> o pesquisador não pode manter o foco apenas no conteúdo, mas deve considerar o contexto, a utilização e a função dos documentos, uma vez que são meios para compreender e decifrar um caso específico de uma história de vida ou de um processo. (...) A escolha dos documentos consiste em delimitar o universo que será investigado. O documento a ser escolhido para a pesquisa dependerá do problema a que se busca uma resposta, portanto não é aleatória a escolha. Ela se dá em função dos objetivos e/ou hipóteses sobre apoio teórico (KRIPKA et al. 2015, p. 245).

Em nossa pesquisa, a base documental consistirá em provas do antigo vestibular da UFOP, provas do Novo ENEM e listas de exercícios de professores, que serão

analisadas, considerando as mudanças nos processos de seleção das Universidades ao longo do tempo e seus possíveis reflexos na conjuntura atual.

2.2 Currículos

Em alguma medida, as reflexões que envolvem nossa análise se relacionam com a questão do currículo escolar, ao tratar de possíveis descontinuidades entre o currículo do Ensino Médio e o currículo do Ensino Superior. Mesmo esse não sendo o foco da pesquisa, é interessante considerarmos a questão de investigação à luz dos estudos curriculares e de como a percepção do currículo escolar também foi sendo alterada ao longo do tempo.

De acordo com Silva (2006, p.4820), a expressão currículo relacionada à educação foi registrada pela primeira vez no século XVI, dando a noção de "ordem como estrutura" e "ordem como sequência". Tal acepção foi sendo alterada ao longo dos anos, sendo mais bem delineada com a consolidação dos Estudos Curriculares como campo de pesquisa. Para Moreira e Silva (2009, p.9) o currículo sempre foi o foco daqueles ligados ao processo educativo escolar, porém foi apenas no final do século XIX, nos Estados Unidos, que os educadores começaram a encarar de forma mais cuidadosa os problemas e questões curriculares, gerando em um curto espaço de tempo, estudos que colaboraram com o surgimento de um novo campo.

Segundo Moreira e Silva (2009, p.9-10), a mudança na economia americana após a Guerra Civil exigiu o aumento do número de empregados e instalações para suprir uma demanda de produção em larga escala. Com a industrialização das cidades e a vinda de pessoas do campo para áreas urbanas, além dos imigrantes, fez-se necessário

> promover um projeto nacional comum, como também restaurar a homogeneidade em desaparecimento e ensinar às crianças dos imigrantes as crenças e os comportamentos dignos de serem adotados (MOREIRA e SILVA, 2009, p.10).

Em grande medida, a escola cumpria a função de adaptação dessas pessoas às transformações econômicas, sociais e culturais que ocorriam, tendo o currículo um papel direto nesse processo.

> Na escola, considerou-se o currículo como o instrumento por excelência do controle social que se pretendia estabelecer. Coube,

> assim, à escola, inculcar os valores, as condutas e os hábitos "adequados" (...) Viu-se como indispensável, em síntese, organizar o currículo e conferir-lhe características de ordem, racionalidade e eficiência (MOREIRA e SILVA, 2009, p.10).

Segundo Pacheco e Pereira (2007, p.199), com o passar do tempo, o estudo dos currículos foi sofrendo transformações, passando a se fundamentar em conceitos rigorosos e em uma metodologia própria que recebeu contribuições de diferentes áreas do conhecimento, como, por exemplo, Filosofia, Administração, Psicologia, Sociologia, Ciência Política, História, Teoria da Leitura, Fenomenologia e Estudos Culturais. A diversidade das áreas que contribuíram para o estudo curricular gera, também, uma diversidade de perspectivas sobre esse objeto de estudo. Os debates em torno dessas diferentes formas de perceber o currículo podem ser sistematizados a partir de quatro pontos de sustentação, que são: os objetivos, os conteúdos, as atividades e as avaliações.

Um dos resultados desses debates foi o surgimento da teoria tradicional, que, para Malta, é uma teoria que:

> (...) procura ser neutra, tendo como principal foco identificar os objetivos da educação escolarizada, formar o trabalhador especializado ou proporcionar à população uma educação geral, acadêmica. (...) O currículo era uma questão de organização e ocorria de forma mecânica e burocrática. A tarefa dos especialistas em currículo consistia em fazer um levantamento das habilidades, em desenvolver currículos que permitissem que essas habilidades fossem desenvolvidas e, finalmente, em planejar e elaborar instrumentos de medição para dizer com precisão se elas foram aprendidas. Essas ideias influenciaram muito a educação, até os anos de 1980, nos EUA e em muitos países, inclusive no Brasil (MALTA, 2013, p.344-345).

No Brasil, de acordo com Moreira (1997, apud Viana, 2002, p.16), durante a década de 20, os estados da Bahia, Minas Gerais e Distrito Federal, foram os primeiros a estruturar o campo curricular, tendo como influência a base filosófica jesuíta. O termo "Currículo e Programas" foi criado nas faculdades de pedagogia no ano de 1962, através da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (lei nº 4024/1961), sendo incorporado apenas no ano de 1968 através da Reforma Universitária de 1968 (lei nº 5540/1968). O foco dos estudos nesse período era:

> Organização curricular e programas da escola dos primeiros anos do Ensino Fundamental; orientação da aprendizagem dos primeiros anos do Ensino Fundamental; currículos e programas de linguagem e leitura na escola de primeiro grau; organização curricular e programas do curso normal, currículos e programas de ciências naturais, sociais e

> matemática elementar no curso normal (MOREIRA, 1997, p.126, tradução nossa).

Segundo Viana (2002, p.17), por ter essa origem muito ligada à padronização do Ensino Fundamental, é muito comum no Brasil, quando se trata de ensino Técnico e Superior, o currículo ser confundido com programa da disciplina. No entanto, os estudos curriculares nessas modalidades de ensino também apresentaram uma evolução a partir da década de 1980. Nesse período, com programas institucionais do Ministério da Educação, como "Integração da Universidade com o Ensino Fundamental" e o "Subprograma Educação para a Ciência", os currículos de alguns cursos superiores passaram a ser objeto dos estudos curriculares, especialmente dos cursos de licenciatura, com a finalidade de aperfeiçoar a formação do professor. Nessas áreas, o currículo deixou de ser visto apenas como programa das disciplinas, passando a ser entendido "em seu sentido estrito como aperfeiçoamento de metodologias de ensino, programas de conteúdos, formação continuada de professores, criação de material institucional e estudos teóricos sobre teorias de aprendizagem" (VIANA, 2002, p.20).

Apesar disso, ainda é muito comum propostas de reestruturação dos cursos de licenciatura que defendem somente mudanças na ordem sequencial dos conteúdos dos currículos ou a introdução de algum conteúdo novo, isolando os assuntos pedagógicos na grade curricular. Nas demais áreas, fora da formação de professores, a perspectiva de currículo como sequência de conteúdos ainda continua sendo a regra.

Nos EUA, no final da década de cinquenta, após a derrota na corrida espacial para os russos, houve uma reação que reforçava a necessidade de recuperar a "qualidade perdida". Com isso, grandes investimentos federais levaram a várias mudanças nos currículos de várias áreas. Mas, no campo dos debates curriculares, essa visão mais tradicional foi perdendo força a partir dos anos 60 e 70. Segundo Silva (2006, p.4823), durante a década de 60 surgiram movimentos sociais e culturais que promoveram uma crítica profunda ao sistema de ensino e aos currículos, afirmando que estes eram tecnicistas e limitados. Esse processo permitiu um avanço do campo do estudo curricular, dando início às análises críticas sobre os currículos escolares, analisadas em um contexto que transcendia apenas a realidade escolar. Em relação ao papel da ideologia na formatação do currículo ganhou relevo, dando origem a toda uma análise crítica da estrutura curricular. Mais recentemente, abordagens culturalistas têm

questionado a própria noção de currículo como forma de padronizar a cultura com fins que estão pouco ligados ao processo educacional.

Nessa perspectiva, segundo Moreira e Silva (2009), o currículo é considerado

> um artefato social e cultural. Isso significa que ele é colocado na moldura mais ampla de suas determinações sociais, de sua história, de sua produção contextual. O currículo não é um elemento inocente e neutro de transmissão desinteressada do conhecimento social. O currículo está implicado em relações de poder, o currículo transmite visões sociais particulares e interessadas, o currículo produz identidades individuais e sociais particulares. O currículo não é um elemento transcendente e atemporal - ele tem uma história, vinculada a formas específicas e contingentes de organização a sociedade e da educação. (MOREIRA e SILVA, 2009, p.7-8)

2.3 Estudo de caso

Nessa pesquisa, nosso foco foi a UFOP. É a partir desse caso que pretendemos tentar responder à questão de investigação. Como mostra R. K. Yin, em seu livro *Estudo de caso: planejamento e métodos*, um estudo de caso pode se adequar a vários tipos de pesquisa, sendo usado

> em muitas situações, para contribuir ao nosso conhecimento dos fenômenos individuais, grupais, organizacionais, sociais, políticos e relacionados. E, naturalmente, é um método de pesquisa comum na Educação, a necessidade diferenciada de estudos de caso surge do desejo de entender os fenômenos sociais complexos (Yin, 2005, p.23).

Yin (2005, p. 29), destaca duas maneiras de entender os fenômenos sociais, o primeiro é o *estudo de caso* e o segundo é o *experimento social*. O *experimento social* consiste na manipulação direta dos eventos comportamentais estudados, exigindo controle e isolamento do fenômeno social, diferentemente dos estudos de caso que possuem poucas intervenções sobre os eventos comportamentais analisados.

Uma das críticas que os estudos de caso recebem é em relação à possibilidade de estender as conclusões do caso estudado para outras situações ou ambientes. Segundo Yin, esse tipo de crítica parte de uma concepção errônea sobre a generalização de resultados em Ciências Sociais. Diferente de um levantamento de dados, em que se busca padrões estatísticos, os resultados de um estudo de caso têm uma função analítica que permite a realização de uma análise generalizante e, não, particularizante. Os

estudos de caso podem ter como objetivo generalizar proposições teóricas, tendo como meta a expansão de teorias e não apenas enumerar frequências, como no caso da generalização estatística CAMPOS (2012, p.55). Por isso, apesar de pretendermos levantar a incidência de questões com determinados conteúdos nas provas de vestibular e do ENEM, tais dados serão usados apenas para ilustrar as mudanças e, não, como elementos conclusivos. Será o estudo de questões selecionadas que abordam conteúdos específicos e a comparação dos estilos das questões nos tipos de provas diferentes, que nos permitirão uma análise qualitativa dos dados da pesquisa.

2.4 Procedimentos metodológicos

Para direcionar essa pesquisa foi feita uma revisão bibliográfica para levantar outros trabalhos sobre o tema. O banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) serviram como fonte para investigar trabalhos relacionados ao tema.

Após realizar as buscas foram encontrados diversos trabalhos relacionados ao tema ENEM, até mesmo comparando a avaliação do ENEM com outros vestibulares. Porem, não estavam ligados diretamente ao que propomos pesquisar, pois continham uma abordagem e objetivos diferentes. Em nosso caso, não pretendemos apenas comparar as questões do vestibular e do ENEM, mas tentar avaliar, utilizando também as listas de exercícios iniciais de professores do DEMAT e focando os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, se poderíamos perceber algum descompasso entre o que se espera de um aluno que ingressa na Universidade através do ENEM e o tipo de preparação que esses alunos podem estar fazendo para ingressar nas Universidades. O quadro a seguir, mostra algumas produções acadêmicas que possuem o mesmo objeto deste estudo, mas com enfoques distintos:

Quadro 1: Trabalhos selecionados sobre possíveis temas relevantes para essa pesquisa

Título	Autor	Instituição	Ano
Contextualização e conteúdo das questões de matemática do ENEM e dos vestibulares da USP, UNICAMP e UFSCAR	José Luciano Santinho Lima	Universidade Federal de São Carlos	2011

Acesso à educação superior: a utilização do ENEM/SISU na universidade federal do recôncavo da Bahia	Janete dos Santos	Universidade Federal da Bahia	2013
Análise comparativa da prova de Matemática do ENEM e do vestibular da UFRJ	André Gaglianone de Almeida Kasprzykowski	Instituto De Matemática - IM/UFRJ	2014
Conteúdos de Matemática do Ensino Médio com abordagem de raciocínio recursivo e questões do ENEM e OBMEP	Ana Patrícia Moreira Santiago	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	2015
Reflexos na práxis do professor de Ciências (Física, Química e Biologia), da cidade de Maceió, após a adoção do ENEM como protagonista no processo de seleção de alunos para o Ensino Superior	Rodrigo Oliveira Ferreira Da Silva	Universidade Federal De Alagoas	2015
Análise do desempenho de alunos calouros de Engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I: Um estudo de caso na UTFPR	Edinéia Zarpelon	Universidade Tecnológica Federal Do Paraná	2016

Fonte: Arquivo do pesquisador

Após ler esses trabalhos, não foi encontrado em nenhum deles comparações de questões do ENEM com questões dos vestibulares relacionadas ao Cálculo I. De modo geral, foram encontrados nesses trabalhos comentários sobre as possíveis formas de resolução de questões dos alunos, assuntos matemáticos presentes na avaliação do ENEM, possíveis motivos para reprovação de alunos de engenharia que estão cursando Cálculo I, verificação de como as escolas de Ensino Médio têm se adequado à nova realidade do ENEM e avaliações do resultado do ENEM/SISU na democratização do acesso à educação superior.

Em nosso estudo, avaliamos as questões e realizamos uma comparação das avaliações dos vestibulares com as provas do ENEM e as primeiras listas de exercícios de alguns professores da UFOP. Porém, devido à quantidade de questões encontradas nessas avaliações e listas, decidimos restringir a análise às questões que abordam os conteúdos sobre exponenciais, logaritmos e suas funções, além da trigonometria e suas funções.

Esses assuntos foram escolhidos pela quantidade de questões presentes nessas avaliações e listas, o que forneceria uma maior quantidade de dados para a pesquisa, além de serem temas que abordam boa parte da revisão inicial feita nos cursos de Cálculo I. O conteúdo sobre exponenciais, logaritmos e suas funções esteve presente em 6 das 10 provas do ENEM analisadas. Nas provas de vestibular da UFOP, esse mesmo conteúdo esteve presente em 13 provas de conhecimentos gerais das 14 analisadas. E, nas provas de conhecimentos específicos, em 11 provas das 16 analisadas. Além disso,

esses conteúdos foram encontrados em grande quantidade nas listas de exercícios dos professores.

Já o conteúdo sobre trigonometria e suas funções esteve presente em apenas uma avaliação do ENEM. No entanto, apareceu em 9 avaliações de conhecimentos gerais do vestibular e em 6 avaliações de conhecimentos específicos, além de ser conteúdo recorrente nas listas de exercício dos professores de Cálculo I.

Inicialmente, houve a tentativa de encontrar todas as avaliações dos vestibulares de 1998 até a sua última versão, que foi no primeiro semestre de 2010. Foi solicitado para a Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD) a busca pelas avaliações que ocorreram nesse período. Porém, nos foi informado que em um processo de migração de sistema da Universidade, grande parte desse material foi perdido, sobrando apenas as avaliações impressas. No arquivo, não conseguimos todas as provas, pois parte do acervo da Universidade foi destruído por roedores, segundo nos informaram. Em buscas no Google, conseguimos algumas dessas provas perdidas. Apesar de não termos conseguido o acervo completo de provas, com o que encontramos foi possível analisar as características do vestibular da UFOP e compará-las com as listas de exercícios dos professores e a avaliação do ENEM.

Capítulo III

3. DADOS DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos e classificaremos os conteúdos presentes nas avaliações do ENEM, vestibulares da UFOP e listas de exercícios dos professores da UFOP. Esses serão os dados que utilizaremos para tentar responder se poderíamos dizer que, em alguma medida, haveria uma falta de sincronia entre as expectativas da Universidade em relação aos alunos que iniciam seus cursos de Ciências Exatas e as demandas desses alunos, em termos de preparação e conhecimento de determinados conteúdos matemáticos, após passarem pelo processo seletivo.

3.1 Levantamento de questões

Iniciamos a pesquisa analisando todas as avaliações do ENEM que foram aplicadas de 2009 a 2016. No ano de 2009, houve uma reformulação da avaliação do ENEM, quando muitas instituições de Ensino Superior, especialmente as públicas, começaram a utilizá-lo como forma de seleção única dos candidatos, distribuídos, posteriormente, pelo SISU. Como faremos uma comparação com os vestibulares, optamos por analisar o ENEM a partir desse período em que ele passou a ser forma de seleção única das principais Universidades.

Utilizaremos uma tabela no seguinte formato para organizar os dados coletados:

AVALIAÇÃO	ANO 1
CONTEÚDO 1	Nº DA QUESTÃO SELECIONADA
CONTEÚDO 2	Nº DA QUESTÃO SELECIONADA

3.1.1 Tópicos matemáticos do ENEM diretamente demandados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral

No ano de 2009, houve uma alteração no formato do ENEM. A prova começou a ser realizada em dois dias e, em cada um deles, o candidato recebia um caderno de determinada cor. A partir dessa mudança as provas foram separadas por áreas, contendo 45 questões cada uma.

Vale ressaltar que, no ano de 2010, houve um vazamento da provas no ENEM, o que fez o processo ser cancelado, tendo sido necessária a realização de uma segunda avaliação. No ano de 2016, também houve duas versões do ENEM devido às ocupações estudantis que ocorreram nas Universidades e nas escolas públicas.

Analisando todas essas provas, selecionamos as questões de matemática do novo ENEM, as quais julgamos estarem de alguma forma relacionadas aos conteúdos iniciais da disciplina de Cálculo I. É importante frisar que o modo como as questões foram classificadas não foi levando em consideração um caminho único de resolução. Muitas questões podem ser resolvidas por modos diferentes, mas acreditamos que a solução pelo caminho apresentado é uma possibilidade razoável para aqueles alunos que dominam o conteúdo matemático levantado.

Seguindo nosso foco, que é o conhecimento prévio dos alunos de determinados conteúdos que estão presentes no início do curso de Cálculo I, a classificação das questões ficou da seguinte forma:

ENEM 2009 a 2012	2009	2010.1	2010.2	2011	2012
Exponenciais, logaritmos e suas funções	137			139	
Função cúbica			161		
Função linear	148		146; 156; 162	155	145
Função quadrática	156				
Função quadrática e função linear		163			
Função trigonométrica		161			
Gráfico de funções lineares, quadráticas ou definidas várias sentenças		142	176	151; 179; 180	179
Relações métricas no triângulo retângulo		160		158	

Tabela 1: Levantamento de questões do ENEM 2009 a 2012

ENEM 2013 a 2016	2013	2014	2015	2016.1	2016.2
Exponenciais, logaritmos e suas funções	162		159	147, 168	141; 174
Função cúbica					
Função linear		157		166; 174	
Função quadrática	136; 142; 165	164	136; 157		147
Função quadrática e função linear				178	
Função trigonométrica					
Gráfico de funções lineares, quadráticas ou definidas várias sentenças					
Relações métricas no triângulo retângulo	156				

Tabela 2: Levantamento de questões do ENEM 2013 a 2016

3.1.2 Conteúdos presentes nos vestibulares da UFOP relacionados ao Cálculo I - (1998.1 a 2010.1)

Na ementa da disciplina MTM 122 - Cálculo Diferencial e Integral I, consta uma breve revisão dos conjuntos numéricos e das funções elementares. Como consta no Anexo I, pode-se ver que a ementa da disciplina não engloba alguns temas que tradicionalmente pertenciam à grade do Ensino Médio, como a teorização sobre os polinômios e suas raízes, por exemplo, que permite a fatoração de algumas expressões algébricas, não estão previstos na revisão. Mesmo o estudo das funções, em uma breve revisão como as que ocorrem em um curso de Cálculo I, que termina com as técnicas de integração, demandam um conhecimento prévio mínimo de trigonometria e logaritmos, por exemplo. Porém, tais conteúdos, como mostraremos abaixo, diferentemente do que ocorria nos processos seletivos via vestibulares independentes, possuem uma presença pequena nas provas do ENEM. No caso estudado da UFOP, analisamos a distribuição dos conteúdos nos dez anos que antecederam sua adesão ao SISU.

Em nosso estudo, classificamos os conteúdos matemáticos que estão relacionados diretamente aos conteúdos que compõem a disciplina de Cálculo I e foram cobrados no vestibular da UFOP até o primeiro semestre de 2010. Como dissemos anteriormente, as avaliações digitalizadas da UFOP se perderam em uma mudança de sistema e parte dos arquivos físicos não foi encontrada, impossibilitando a análise de todas as avaliações.

Para distinguir os dois vestibulares que ocorriam no ano, chamaremos, por exemplo, de 1998.1 a prova referente ao vestibular do primeiro semestre de 1998 e 1998.2 a prova referente ao vestibular do segundo semestre de 1998.

No ano de 1999, o caderno de matemática era o primeiro da avaliação, assim a numeração de questões desse ano foi de 1 a 10. A partir do ano 2000, o caderno de Matemática passou a ser a segunda avaliação e a numeração das questões ficou de 9 a 18.

Prova de conhecimentos gerais do vestibular da UFOP	1999.1	2000.1	2000.2	2001.1	2001.2	2002.1	2002.2
Conjuntos numéricos			12				
Exponenciais, logaritmos e suas funções	2; 5	15	18	17; 18	13; 17	13	13
Fatoração de polinômios e polinômios e suas funções	3			16			
Função afim							
Função composta	1	13	13; 17				
Função inversa							
Função quadrática						10	
Função racional					15		
Função trigonométrica		11					
Função por várias sentenças				10		14	
Inequações, inequação trigonométrica e exponencial	10	14					
Relações métricas no triângulo retângulo							
Translação de gráficos de funções							
Trigonometria	6		9; 16	14	16		17; 18

Tabela 3: Levantamento de questões do vestibular da UFOP 1999 a 2002

Prova de conhecimentos gerais do vestibular da UFOP	2003.1	2003.2	2004.1	2004.2	2008.2	2009.2	2010.1
Conjuntos numéricos							
Exponenciais, logaritmos e suas funções	11	11	18	12	14	16	
Fatoração de polinômios e polinômios e suas funções		16					11
Função afim			12				
Função composta		10					
Função inversa				16			
Função quadrática	9				18		2
Função racional							
Função trigonométrica							
Função por várias sentenças							
Inequações, inequação trigonométrica e exponencial			11				
Relações métricas no triângulo retângulo	13						10
Translação de gráficos de funções	10						
Trigonometria		12	15	10			4

Tabela 4: Levantamento de questões do vestibular da UFOP 2003 a 2010

Apresentamos, na tabela a seguir, a distribuição/organização dos conteúdos nas provas de conhecimentos específicos, que eram aplicadas em uma segunda etapa para aqueles alunos classificados na fase anterior. Como dissemos, as provas de conhecimentos específicos dos vestibulares do primeiro e segundo semestre de 1998 e primeiro semestre 1999 contavam com 10 questões discursivas de matemática.

Prova de conhecimentos específicos do vestibular da UFOP	1998.1	1998.2	1999.1
Equação trigonométrica	8		
Exponenciais, logaritmos e suas funções	6	5	
Fatoração de polinômios	4		3
Função logaritmica, inversa e definida por várias sentenças			6
Função racional	3		
Funções, calculo algébrico, trigonometria, equações exponenciais	1		
Função inversa e composta		2	
Trigonometria		4; 6	

Tabela 5: Levantamento de questões do vestibular da UFOP 1998 a 1999

A partir do vestibular 1999.2, as provas de conhecimentos específicos passaram a contar com 4 questões discursivas de matemática.

Prova de conhecimentos específicos do vestibular da UFOP	1999.2	2000.1	2000.2	2001.1	2001.2	2002.1	2002.2
Exponenciais, logaritmos e suas funções	2	2			3		
Fatoração de polinômios							
Função composta				4			
Função quadrática							
Funções e/ou seus gráficos						1; 2; 3; 4	
Trigonometria	1			2			
Trigonometria e equação exponencial							

Tabela 6: Levantamento de questões do vestibular da UFOP 1999 a 2002

Prova de conhecimentos específicos do vestibular da UFOP	2003.2	2004.1	2004.2	2008.2	2009.2	2010.1
Exponenciais, logaritmos e suas funções		2	3	4		5
Fatoração de polinômios		4				
Função composta						
Função quadrática						7
Funções e/ou seus gráficos						
Trigonometria						
Trigonometria e equação exponencial	4					

Tabela 7: Levantamento de questões do vestibular da UFOP 2003 a 2010

3.2 Questões selecionadas

Para compararmos a incidência de questões que envolvem conteúdos presentes na disciplina Cálculo I em cada tipo de prova, organizamos os dados da tabela anterior em gráficos que permitem uma melhor visualização desse dado.

O gráfico abaixo mostra que, no ENEM, esse tipo de questão que estamos buscando aparece em número reduzido em relação aos demais conteúdos, mas lembrando que no ENEM são cobrados conteúdos do ensino fundamental e médio, o que aumenta o programa da avaliação. No entanto, ressaltamos que todos os dados quantitativos apresentados aqui precisam ser refinados, pois mesmo considerando um tópico igual, há diferenças nos tipos de questões que estão presentes no novo ENEM e nos vestibulares.

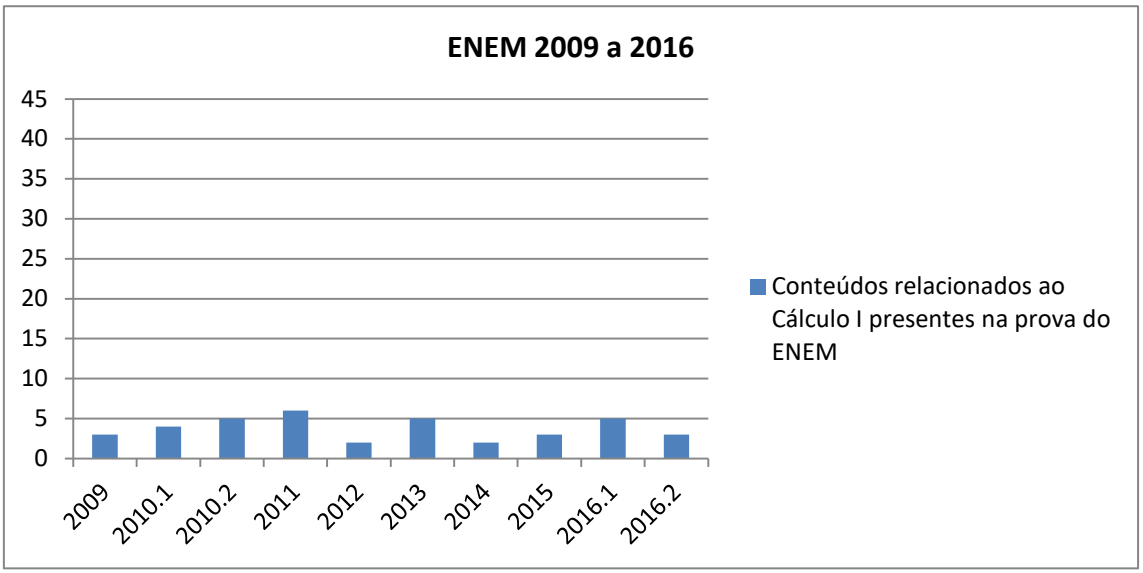


Figura 1

Nos próximos gráficos, apresentamos o número de questões cujos conteúdos estão relacionados ao Cálculo I presentes na prova de conhecimentos gerais da UFOP.

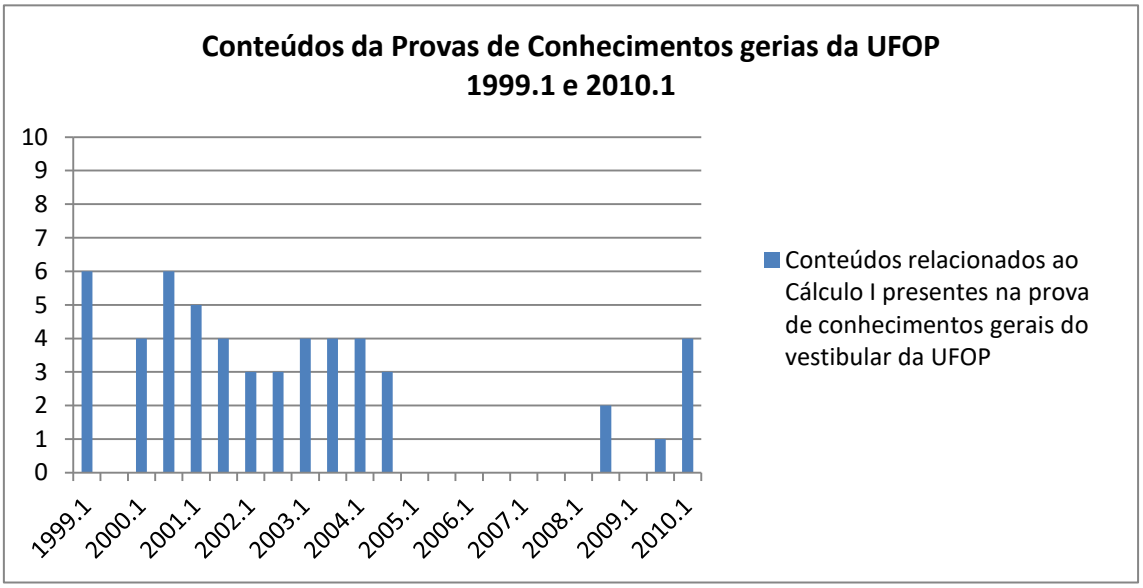


Figura 2

Pode-se observar que na avaliação de conhecimentos gerais, as questões que estamos buscando chegaram a estar presentes em 60% da avaliação do vestibular de 2000.2. Por ser uma avaliação de conhecimentos gerais, ou seja, uma etapa em que todos os concorrentes realizavam a avaliação independente do curso desejado, acreditávamos que esses conteúdos não apareceriam nessa quantidade encontrada.

Por fim, organizamos essa análise para a prova de conhecimentos específicos. Dividimos em dois gráficos, pois até 1999.1 essa etapa continha 10 questões de matemática e a partir desse período, passou a para 4 questões.

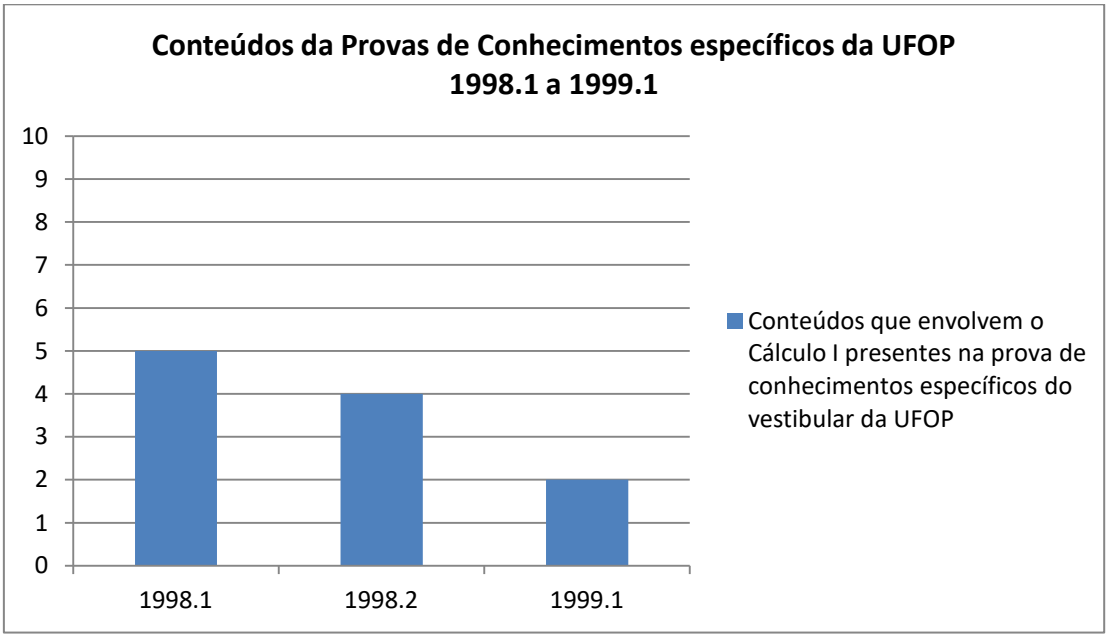


Figura 3

O gráfico mostra que a avaliação de conhecimentos específicos nesse período continua exigindo significativos conhecimentos relacionados ao Cálculo I, visto que essas questões que estamos analisando estavam presentes em pelo menos 30% de cada avaliação.

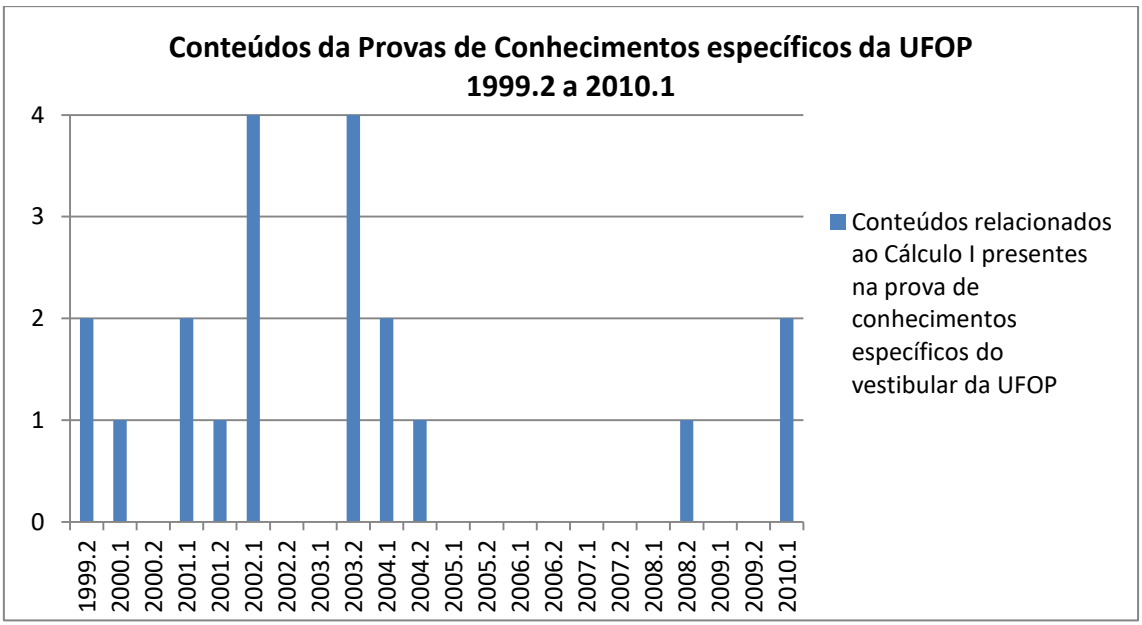


Figura 4

Já no período posterior a 1999.1, nas provas de questões abertas, os conteúdos diretamente relacionados ao Cálculo I continuaram predominando na maioria das provas avaliadas, estando presente em todas as questões da prova em 2002.1 e 2003.2.

Nosso objetivo agora é refinar esses dados, analisando as questões presentes em cada tipo de prova, além das listas de exercícios dos professores. Para realizar essa comparação, optamos por separar os conteúdos em dois blocos que abarcam grande parte desse conteúdo básico presente no curso de Cálculo I, cuja interseção entre as três fontes de dados foi maior. No primeiro bloco de conteúdos inserimos questões que tratam sobre exponenciais, logaritmos e suas funções. O segundo bloco trataremos das questões que envolvem funções trigonométricas e trigonometria.

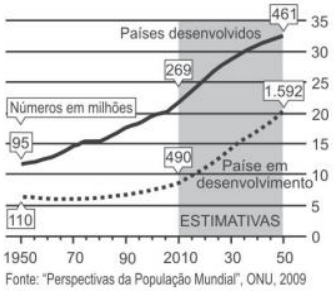
A seguir apresentaremos as questões do ENEM que envolvem os conteúdos sobre exponenciais, logaritmos e suas funções.

3.2.1 Exponenciais, logaritmos e suas funções

3.2.1.1 ENEM

2009 - Versão Amarela

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009

Disponível em: www.economist.com. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

137) Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

A) 490 e 510 milhões

B) 550 e 620 milhões

C) 780 e 800 milhões

D) 810 e 860 milhões

E) 870 e 910 milhões

Para resolver a questão anterior, o aluno precisa saber as propriedades da potenciação, mais precisamente potência de uma potência.

2011 - Versão Amarela

139) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada com M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termo de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(\mathrm{M}_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_w = 7,3.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

a) $10^{-6{,}10}$ b) $10^{-0{,}73}$ c) $10^{12{,}00}$
d) $10^{21{,}65}$ e) $10^{27{,}00}$

Nesta questão, os candidatos devem saber solucionar equações e utilizar a definição de logaritmo.

2013 - Versão Amarela

162) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão o $M(t) = A\,.\,(2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e *k* uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27 B) 36 C) 50
D) 54 E) 100

No exercício anterior, apesar do enunciado fornecer uma equação exponencial e um valor para o logaritmo de 2 na base 10, para resolver essa questão basta o aluno entender o que significa meia vida.

2015 - Versão Amarela

159) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t ≥ 1?

a) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8000$

b) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$

c) $P(t) = 4000 \cdot t^{-1} + 8000$

d) $P(t) = 8000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$

e) $P(t) = 8000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

Já nessa questão, os alunos poderiam utilizar conhecimentos de funções exponenciais.

2016.1 - Versão Cinza

147) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

A) $E_1 = E_2 + 2$

B) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

C) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

D) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

E) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

Para esse exercício, os alunos devem saber a definição de logaritmo e resolver equações logarítmicas.

168) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3.000 ºC e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$. O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 ºC é mais próximo de

a) 22. b) 50. c) 100. d) 200. e) 400.

Assim como na questão anterior, os alunos também precisam saber resolver equações logarítmicas e utilizar algumas propriedades do logaritmo.

2016.2 - Versão Amarela

141) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

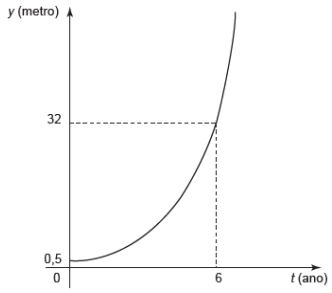
em que *t* é o tempo, em hora, e *p(t)* é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço.
b) reduzida à metade.
c) reduzida a dois terços.
d) duplicada.
e) triplicada

Para essa questão, o aluno deve transformar a unidade de tempo que é dado em minutos para hora. Feito isso, basta utilizar a fórmula presente no enunciado e descobrir a população inicial e população final, a partir da função exponencial dada.

174) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual *y* representa a altura da planta em metro, *t* é considerado em ano, e *a* é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função *y*.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a:

a) 3 b) 4 c) 6 d) $\log_2 7$ e) $\log_2 15$.

Aqui, o aluno precisa interpretar o problema para perceber que a altura no momento de corte será de 8m. Feito isso, ele deverá utilizar a fórmula do enunciado para descobrir o valor da constante *a*, e posteriormente, encontrar o valor de *t*. Para todos esses passos é importante ter conhecimento de potenciação.

Agora apresentaremos as questões do vestibular da UFOP que envolvem os conteúdos sobre exponenciais, logaritmos e suas funções.

3.2.1.2 Vestibular da UFOP

3.2.1.2.1 Prova de conhecimentos gerais

1999.1

2) Sejam $f: \mathcal{R}_+^* \to \mathcal{R}_+$, $f(x) = \log_3 x + \log_2 x$, $\log_6 3 = a$ e $\log_6 2 = b$.

Então o valor de $f(1) + f(2)$ é:

a) $2a$ b) $1 + 2b$ c) $a + b$ d) $\frac{a+b}{a}$ e) $\frac{2a+b}{a}$

Neste exercício, os alunos devem saber mudança de base de logaritmos e ter alguma noção sobre funções logarítmicas.

5) Considere a matriz

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & \log x & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, com $x > 0$.

Sabendo que M é inversível, então podemos afirmar que:

a) $x = 10$
b) $x \neq \sqrt{10}$
c) $x \neq 10$
d) $x = \sqrt{10}$
e) $x \neq 1$

Nesta questão, além de precisar saber o que é uma matriz inversível, como também a definição de logaritmo e suas propriedades.

2000.1

13) A soma das raízes da equação $1 + \log_2(1 + x^2) = \log_2 5 + \log_2 x$ é igual a:

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) 3 e) 5

Para resolver esta questão, os alunos devem ter conhecimento sobre equações logarítmicas e definição de logaritmo.

15) Com relação às afirmativas:

I - Se $x, y \in \mathcal{R}$ e $n \in Z_+^*$ então $(x + y)^n = x^n + y^n$

II - Se $x, y \in \mathcal{R}_+^*$ e $n \in Z_+^*$ então $\log \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{(\log x + \log y)}$

III - Se $x, y \in \mathcal{R}_+$ então $(x - y) = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$

IV - Se $x, y \in \mathcal{R}_+^*$ e $n \in Z_+^*$ então $\log \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{(\log x - \log y)}{n}$

As afirmativas <u>verdadeiras</u> são:

a) I e II b) III e IV c) II e IV d) I e II e) II e III

Aqui, é necessário conhecer as propriedades de logaritmo.

2000.2

18) Se $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(y) = \sqrt{y}$, então podemos afirmar que:

a) $\log\big(f(x)\big) + \log\big(g(y)\big) = \sqrt[3]{\log x} + \sqrt{\log y}$

b) $\log\big(f(x)\big) \cdot \log\big(g(y)\big) = x^3 y^2$

c) $\log\big(f(x)\big) - \log\big(g(y)\big) = \log\big(\sqrt[3]{x} - \sqrt{y}\big)$

d) $\log\big(f(x)\big) \div \log\big(g(y)\big) = \left(\frac{2\log x}{3\log y}\right)$

e) $\log\big(f(x)\big) \div \log\big(g(y)\big) = \left(\frac{\log x^3}{\log y^2}\right)$

Para resolver este exercício, os alunos devem saber as propriedades logarítmicas.

2001.1

17) Se $f(x) = \sqrt{\log\left(2 - \frac{1}{x}\right)}$, então o domínio de f é:

a) $]1, +\infty[$ b) $]0, +\infty[$ c) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ d) $]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ e) $]-\infty, 1[$

Os candidatos devem conhecer o domínio de função logarítmica e de função raiz.

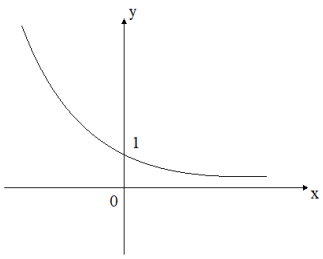
18) Se $a, b, c \in \mathcal{R}_+^*$ e $\log x = a + \frac{\log b}{2} - \log c$, então o valor de *x* é:

a) $\frac{10^a \cdot \sqrt{b}}{c}$ b) $\frac{a^{10} \cdot \sqrt{b}}{c}$ c) $\frac{10a \cdot \sqrt{b}}{c}$ d) $\frac{a \cdot \sqrt{b}}{c}$ e) $\frac{ab^2}{c}$

O conhecimento de propriedades logarítmicas é suficiente para resolver essa questão.

2001.2

13) Considere $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}_+^*$, uma função cujo gráfico esteja representado na figura abaixo:



a) $y = \log_2 x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $y = -x$ d) $y = 2^x$ e) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Nessa última questão, o aluno deve saber aspectos gerais do comportamento das funções.

15) O domínio da função f, definida por $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$, é o conjunto:

a) $\{x \in \mathcal{R} / x \neq -2\}$ c) $\left\{x \in \mathcal{R} / -2 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{x \in \mathcal{R} / x \neq -2 \text{ ou } x \neq \frac{1}{2}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathcal{R} / x < -2 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\right\}$ d) $\left\{x \in \mathcal{R} / x \geq \frac{1}{2}\right\}$

Nesta questão, os alunos devem saber o domínio de uma função envolvendo fração e inequação fracionária.

17) Considere as afirmativas abaixo:

I) Se $\log 5 = a$ e $\log 7 = b$, então $\log 12 = a + b$

II) $\log_7 5 \cdot \log_5 7 = 1$

III) $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 7}\right) = \frac{1}{2}\log 3 - \log 5 + \log 7$

Assinale a alternativa **correta**.

a) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
b) Todas as afirmativas são falsas.
c) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
d) Todas as afirmativas são verdadeiras.
e) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

Os candidatos devem ter conhecimento das propriedades logarítmicas e mudança de base.

2002.1

13) Pedro pretende triplicar o seu capital numa poupança, cujas regras são estabelecidas pela equação: $M(t) = C \,.\, (1{,}25)^t$, em que *t* é o número de anos da aplicação, *C* é o capital aplicado e *M* é o total depois de *t* anos. Supondo que $\log 3 = 0{,}47$ e $\log 1{,}25 = 0{,}09$. Pedro terá triplicado seu capital somente depois de:

a) 3 anos. b) 4 anos. c) 5 anos. d) 6 anos.

Aqui, os candidatos devem saber aplicar a definição de logaritmo e utilizar suas propriedades.

2002.2

13) O número de bactérias *f(t)* de uma cultura cresce com o tempo *t*, dado em horas, de acordo com a lei $f(t) = C \cdot a^{Kt}$, em que *C* e *K* são constantes positivas e $a > 1$. Nos 30 primeiros minutos, verificou-se que o número inicial *f(0)* de bactérias havia duplicado. Sabendo-se que, ao final de 6 horas, havia uma população de 4^{12} bactérias, o número inicial de bactérias era de:

a) 4^6 b) 2^6 c) 4^{12} d) 2^{12}

Nesse exercício, os alunos devem saber sobre funções e operações com potência.

2003.1

11) Suponhamos que *x*, *y* e *z* sejam números reais, positivos e diferentes de 1. Assinale a opção correta:

a) $(x)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log x$

b) $\log(x \cdot y)^n = (\log x + \log y)^n$

c) $\log(x^2 \cdot y^3/z) = (2 \cdot \log x + 3 \cdot \log y)/\log z$

d) $\log x = -\log\left(\frac{1}{x}\right)$

Para resolver esta questão, os alunos devem ter conhecimento das propriedades logarítmicas.

2003.2

11) Se $x > 0$, então $3^{-1} \cdot \log_3(27x^6) - 2 \cdot \log_3(x)$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

O uso das propriedades logarítmicas é suficientes para resolução desta questão.

2004.1

18) Considere estas afirmações:

I) $\frac{\log_c a^m}{\log_{\frac{1}{c}} b^n} = -\frac{m}{n}\log_b a$

II) $\log_c(a^m + b^n) = m \log_c a + n \log_c b$

III) $(\log_c a^m)^n = (\log_c a)^{m\,n}$

IV) $c^{m \log_c \sqrt[n]{ab}} = m \sqrt[n]{ab}$

Das afirmações apresentadas a verdadeira é:

a) I b) II c) III d) IV

Aqui, os conhecimentos das propriedades logarítmicas e mudança de base são suficientes para resolução dessa questão.

2004.2

12) "Da Geometria Euclidiana, sabe-se que, em um triângulo qualquer, a medida do maior lado é menor que a soma das medidas dos outros dois."

Usando essa informação, o menor valor inteiro de *x* tal que um triângulo tenha lados de medidas

$a = \log\ (2 + \sqrt[4]{x}),\ b = \log\ (1 + \sqrt[4]{x})$ e $c = \log\ (\sqrt[4]{x})$ é:

a) 5 b) 4 c) 2 d) 1

Neste exercício, os candidatos devem ter conhecimento sobre as propriedades logarítmicas.

2008.2

14) O conjunto solução da equação $2^{2\log_2 \sqrt{\frac{2+x}{x}}} = x$ é:

a) {1,2} b) {-1} c) {2} d) ∅

Aqui, os candidatos devem ter conhecimento das propriedades de logaritmo e o domínio de uma função envolvendo fração e raiz de índice par.

2009.2

16) Um função tem como domínio os termos da progressão geométrica de razão 4 e primeiro termo 2. Seu conjunto imagem é o conjunto dos números ímpares positivos. Se essa função é crescente, então ela é do tipo:

a) polinomial. b) exponencial c) logarítmica d) trigonométrica.

Nesta questão, os alunos devem ter conhecimento sobre domínio e imagem, bem como saber diferenciar uma função exponencial de uma logarítmica.

3.2.1.2.2 Prova de conhecimentos específicos

1998.1

6) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$$

Aqui, os candidatos devem saber utilizar as propriedades logarítmicas, propriedades de potenciação e resolver sistemas.

1998.2

5) Resolva a inequação: $\log_x(3x+2) < 1$.

Para resolver esta questão, os candidatos devem ter conhecimento de como resolver inequações logarítmicas.

1999.1

6) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} -x-4 & x < -4 \\ -x^2-4x & \text{se } -4 \le x \le 0 \\ \log_2 x & x > 0 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de *f*.

b) *f* é inversível? Justifique.

Aqui, os candidatos devem ter conhecimento sobre retas, parábolas, gráficos de logaritmos e quando uma função é inversível.

1999.2

2) Considere a matriz abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & \log\,(x-2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \log\,(x+2) & 0 \end{bmatrix}$$

Determine os valores de *x*, para os quais *M* seja inversível.

Considerando apenas o que é cobrado de logaritmos, para resolver essa questão, os candidatos precisam saber utilizar as propriedades logarítmicas.

2000.1

2) Resolva a equação logarítmica:

$$(\log_2 8)(\log_8(2-x)) + \log_2(1-x) = 2 + 2(\log_4 3).$$

O conhecimento sobre equações, propriedades logarítmicas e mudança de base, são suficientes para resolver esta questão.

2001.2

3) A massa de certo material radioativo num instante *t* é dada por $m(t) = m_0 10^{-kt}$. Se *t* é dado em anos, $m_0 = m(0) = 500g$ é a massa inicial, $m(20) = 400g$, adotando $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 5 = 0{,}7$, encontre:

a) o valor de k.

b) o tempo necessário para que metade da massa inicial se desintegre.

Aqui, é necessário conhecer as propriedades de logaritmo.

2002.1

Sabe-se que a conta de energia elétrica residencial é calculada por meio de uma taxa variável, de acordo com o consumo de kWh, acrescida de uma taxa fixa por residência, correspondente à iluminação pública.

Suponha que duas cidades A e B são servidas por duas companhias de distribuição de energia distintas, com taxas diferenciadas, cujos valores são:

Companhia da cidade A:

$$\begin{cases} 30 \text{ centavos por kWh} \\ 4 \text{ reais de taxa de iluminação pública} \end{cases}$$

Companhia da cidade B:

$$\begin{cases} 40 \text{ centavos por kWh} \\ 3 \text{ reais de taxa de iluminação pública} \end{cases}$$

1) Faça o que se pede, considerando que o valor da conta de energia elétrica residencial (y) é, portanto, uma função do consumo de **kWh** (x):

A) Dê a expressão de $y(x)$ para as cidade A e B.

B) Diga se pode acontecer que, em determinado mês, duas residências, uma da cidade A e outra da cidade B, tenha pago a mesma conta. Em caso afirmativo, determine o consumo kWh e o valor da conta paga pelas residências.

2) Faça, num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os gráficos das contas de energia elétrica (em R$) de residências das cidades A e B, em função do consumo (em kWh).

3) Suponha que, na residência da família Silva, localizada na cidade A, o consumo dos meses de janeiro, fevereiro e março de 2000 foi, respectivamente, de 300 kWh, 280 kWh e 350 kWh. Com a crise de energia, a partir de 2001, foi fixada uma meta para cada residência, por redução de 20% da média de consumo dos três primeiros meses do ano anterior.

A) Qual o valor máximo (em R$) da conta de abril de 2001, para que a família Silva tenha conseguido cumprir a sua meta?

B) Com esse valor máximo, teria sido possível uma residência localizada na cidade B consumir mais ou menos kWh?

4) Suponhas, a seguir que na residência da família Santos, localizada na cidade B, o consumo de 1.000 kWh, em abril de 2001, foi o dobro da meta prevista. Essa família fez, então, um acordo com a companhia energética de sua cidade, que ofereceu duas possibilidades de redução do consumo:

Opção 1: O consumo de cada mês deveria ser 90% do consumo do mês anterior, até atingir a meta.

Opção 2: Deveria haver uma redução de 90 kWh em cada mês, em relação ao consumo do mês anterior. até atingir a meta.

Pede-se:

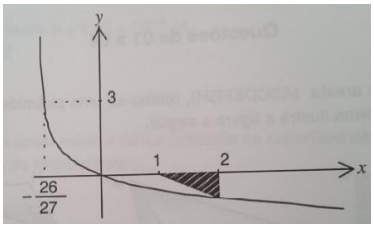
A) Dê a expressão do consumo de kWh (a_n), a partir de abril de 2001, em função do número de meses (n), de acordo com as opções 1 e 2.

B) Dentro de 4 meses, alguma das opções permitiria a essa família cumprir a sua meta?

Nesta questão, os candidatos precisam ter conhecimento sobre função do primeiro grau, sabendo utilizar interseção de retas e fazer esboço de gráfico.

2004.1

2) O gráfico a seguir representa uma função do tipo $f(x) = \log_b(x + a)$.

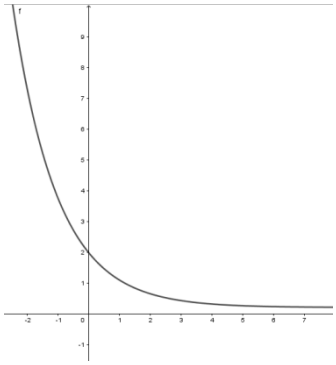


Determine a área do triângulo retângulo hachurado.

Neste exercício, os candidatos precisam utilizar as propriedades logarítmicas.

2004.2

3) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a(2)^{bx}$, conforme o gráfico.



Determine o valor de *x* tal que $f(x) = \frac{1}{16}$.

Para resolver a última questão, o aluno precisa determinar os valores de a e b antes de fazer o mesmo com o valor de *x*, quando $f(x) = \frac{1}{16}$. Para isso, ele pode utilizar equações logarítmicas e propriedades de logaritmo.

2008.2

4) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -3 & x+7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4x & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e responda às questões abaixo:

a) Para que valores reais de x tem-se $\det A > 0$ e $\det B > 1$?

b) Dentre os valores de *x* encontrados no item anterior, quais satisfazem a desigualdade $\log_{\det B} \det A \geq 1$?

Para a última questão, além saber resolver equações do 1º e 2º grau, os candidatos devem saber a determinar o crescimento e decrescimento de uma função logarítmica.

2010.1

5) Para quais valores reais de *k* o determinante da matriz seguinte pertence ao domínio da função *f* dada por $f(x) = \log(x-3)$?

$$\begin{bmatrix} 0 & k-1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & k+1 & 0 \\ k & k & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aqui, é necessário saber o domínio de uma função logarítmica, além de saber calcular determinantes.

A seguir, apresentaremos as questões que envolvem os conteúdos sobre exponenciais, logaritmos e suas funções, que foram retirados das listas de dois professores da UFOP.

3.2.1.3 Listas de exercícios

3.2.1.3.1 Professor I

2) Determine as soluções:

c) $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3$

d) $2\log x = \log\,(2x-3) + \log\,(x+2)$

e) $\log_4 x + \log_x 4 = 2$

Para resolver esse exercício, é necessário conhecer as propriedades de logaritmo e saber fazer mudança de base.

3) Determine as soluções:

b) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$

c) $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$

d) $x^{x^2-5x+6} = 1$

e) $(2^x)^{x+4} = 32$

f) $(0{,}1)^{3-4x} < 0{,}0001$

g) $8 < 2^x < 32$

h) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$

i) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$

j) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

Nessa última questão, os alunos devem ter conhecimento das propriedades logarítmicas, propriedades de potenciação e fazer algumas substituições.

4) Encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Aqui, os alunos devem utilizar as propriedades de exponenciais e fazer algumas substituições.

5) Determine o domínio das funções abaixo:

a) $\log_3 (x-1)$ c) $\log_5 (x^2-4)$

b) $\log_2 \frac{x+1}{x-1}$ d) $\log_{x+1} (2x^2-5x=2)$

Nesta questão, para determinar o domínio é necessário que os alunos saibam a definição de logaritmo.

6) Aplique as propriedades de Logaritmo para desenvolver:

a) $\log_2 \left(\frac{2ab}{c}\right)$ b) $\log_2 \left(\frac{a^3b^2}{c^4}\right)$ c) $\log_3 \sqrt[3]{\frac{a}{b^2\sqrt{c}}}$

Neste exercício, é necessário ter conhecimento das propriedades de logaritmo.

7) Suponha que $\log 9 = a$ e $\log 2 = b$. Use as propriedades de logaritmo para determinar

a) $\log 3$ b) $\log \left(\frac{2}{3}\right)$ c) $\log \sqrt[3]{54}$

Como na questão anterior, é necessário que os alunos saibam utilizar as propriedades de logaritmo.

10) Resolva as equações (aqui você precisará usar o log)

a) $5^x = 4$ b) $3^x = \frac{1}{2}$ c) $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$

Aqui, é necessário que os alunos saibam as propriedades de logaritmo.

11) Encontre o conjunto solução

a) $\log_2(3x+1)=4$

b) $\log_2^2 x - \log_2 x = 2$

c) $x^{\log_x(x+3)} = 7$

d) $\log_x(2x+3)=2$

e) $\log_x^2(5x-6) - 3\log_x(5x-6) + 2 = 0$

f) $\ln(x^2+e)=1$

g) $\ln(x^2-5x) = \ln 6$

Para resolver esse exercício, é necessário que os alunos saibam a definição de logaritmo, utilizar algumas propriedades e que façam algumas substituições como por exemplo na letra b). chamando $\log_2 x = y$.

12) Faça um esboço do gráfico, marcando onde tal gráfico intercepta o eixo *x* e/ou *y*.

a) $f(x) = 2^{x-1}$ b) $f(x) = e^x$

Aqui, é necessário conhecer as características do gráfico de funções exponenciais.

3.2.1.3.2 Professor II

24) Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$. O que as diferencia?

Para resolver essa questão, é necessário que os alunos saibam a diferença entre uma função exponencial e uma função do segundo grau.

25) Faça um esboço dos gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e responda:

a) Em que ponto cada gráfico corta o eixo das ordenadas?

b) De modo geral, quando a função exponencial será crescente? E decrescente?

c) Para que valores de *x* as funções acima estão definidas? Quais os valores que *f(x)* pode assumir?

Esta questão tem o objetivo de fazer o aluno interpretar e comparar gráficos de funções exponenciais.

26) Determine o domínio das funções definidas pelas expressões abaixo.

a) $f(x) = e^{\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$, b) $f(x) = e^{\left(\frac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}\right)}$

Aqui, os alunos devem ter o conhecimento de domínio de uma função envolvendo fração e raiz de índice par.

27) Faça um esboço do gráfico das funções 2^x e $\log_2 x$ e responda:

a) Em que ponto cada gráfico corta o eixo das ordenadas?

b) De modo geral, quando a função exponencial será crescente? E decrescente?

c) Para que valores de *x* as funções acima estão definidas? Quais os valores que $f(x)$ pode assumir?

d) Que conclusões pode-se retirar, observando-se os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \log_2 x$?

Essa questão exige que os candidatos conheçam o gráfico de funções logarítmicas e exponenciais.

28) Sabendo-se que $\log_e 2 \cong 0{,}69$ e $\log_e 3 \cong 1{,}09$ calcule $\log_e 6$ e $\log_e \frac{1}{27}$.

Aqui, é necessário que os alunos saibam as propriedades de logaritmo.

29) Determine o domínio da função definida pela expressão:

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ b) $y = \log_{(x^2-1)}(2 - x)$.

Nesse exercício, é necessário que os alunos saibam a definição de logaritmo.

30) Resolva as equações abaixo:

a) $8^{x+1} = 4^{x+2}$ c) $5^{2x^2-3x-2} = 1$

Para esse exercício, é necessário utilizar as propriedades de potência.

Passaremos agora para as questões que envolvem trigonometria e suas funções, começando pela prova do ENEM, que durante o período selecionado teve apenas uma questão envolvendo funções trigonométricas.

3.2.2 Trigonometria e suas funções

3.2.2.1 ENEM

2010.1 - Versão Amarela

161) Um satélite de telecomunicações, *t* minutos após ter atingido sua órbita, está a *r* quilômetros de distância do centro da Terra. Quando *r* assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de *r* em função de *t* seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15 \,.\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa

calcular a soma dos valores de *r*, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

a) 12.765 km.
b) 12.000 km.
c) 11.730 km.
d) 10.965 km.
e) 5.865 km.

Para resolução desse exercício, o aluno deve ter conhecimento do ciclo trigonométrico para saber o valor máximo e mínimo de *r* e assim poder calcular o valor de S.

Veremos agora as questões do vestibular da UFOP que envolvem os conteúdos sobre trigonometria e suas funções.

3.2.2.2 Vestibular da UFOP

3.2.2.2.1 Prova de conhecimentos gerais

1999.1

6) Se $\text{tg}(x) - \text{cotg}(x) = -2$ e $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ então a solução dessa equação é:

a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{\pi}{8}$ c) $x = \frac{5\pi}{4}$ d) $x = \frac{5\pi}{8}$ e) $x = \frac{3\pi}{8}$

Nessa questão, os alunos devem conhecer as identidades trigonométricas e saber resolver equações trigonométricas.

2000.1

11) Seja $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ onde $f_1(x) = \text{sen}\, x$ e $f_2(x) = \cos x$.

Considere as seguintes afirmações:

I - $[f(x)]^2 = 1 + \text{sen}\, 2x$

II - $[f(x)]^2 = 1$

III - $f(x) + f(-x) = 2\,\text{sen}\, x$

IV - $[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 = \cos 2x$

As afirmativas verdadeiras são:

a) I e IV b) II e IV

c) I e II d) III e IV

Para resolver a questão anterior, é necessário ter conhecimento sobre as relações trigonométricas.

16) Considere a equação:

$$\begin{vmatrix} \text{tg}\,\theta & 2 & 0 \\ 0 & \text{tg}\,\theta & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$$

Se $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então o valor de $\cos\theta$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) 2

Neste exercício, os alunos devem saber os ângulos notáveis, resolver equações trigonométricas, além de ter conhecimento sobre matrizes.

2001.1

14) Considere a matriz $M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \text{sen}\,75° & \text{sen}\,15° & 1 \\ \cos 75° & \cos 15° & 1 \end{vmatrix}$. Então, podemos afirmar que:

a) M é inversível e $\det M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) M é inversível e $\det M = 0$ e) M é inversível e $\det M = \frac{1}{2}$

b) M é inversível e $\det M = \sqrt{3}$ d) M é inversível e $\det M = 1$

Para resolver essa questão, os candidatos devem ter conhecimento de matrizes, como também de resolver equações trigonométricas que envolvem arco duplo.

2001.2

16) As raízes da equação trigonométrica $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - cos^2 x = 0$, inseridas no intervalo $[0, 2\pi]$, são:

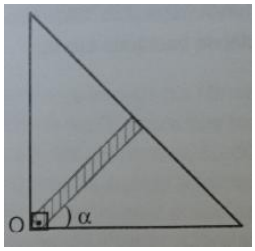
a) $0, \pi, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$

Aqui, é necessário saber resolver equações trigonométricas e utilizar algumas identidades trigonométricas.

2002.2

17) Numa placa em forma de triangulo retângulo cuja área é de 6 m², será colocado um reforço que vai do vértice do angulo reto até o meio da hipotenusa, conforme a figura abaixo.



Sabendo-se que a $tg\ \alpha = 3$, os catetos desse triangulo medem, em metros:

a) 1 e 12 b) 2 e 3 c) 3 e 4 d) 2 e 6

Para resolver esse exercício os alunos devem saber trigonometria no triângulo retângulo, apesar disso não ser suficiente para resolver a questão por completo, já que envolve geometria plana.

2003.2

12) Seja $x = cos\frac{14\pi}{5}$, então pode-se afirmar que:

a) $-x > 0$ b) $x^2 < x$ c) $x \leq -1$ d) $|x| = x$

Aqui, os candidatos devem conhecer a trigonometria do círculo trigonométrico.

2004.1

15) A expressão $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ é equivalente a:

a) tg x b) cotg x c) $-$tg x d) $-cotg\ x$

Para resolver esta questão, os alunos podem resolver através da adição e subtração de dois arcos, e precisam saber os valores dos ângulos notáveis.

2004.2

10) O conjunto de todos os valores possíveis para $\boldsymbol{a}$ tal que sen $x = \boldsymbol{a} - 1$ é:

a) $\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{R} / 1 < \boldsymbol{a} < 2\}$ c) $\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{R} / 1 \leq \boldsymbol{a} \leq 2\}$

b) $\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{R} / 0 < \boldsymbol{a} < 2\}$ d) $\{\boldsymbol{a} \in \mathcal{R} / 0 \leq \boldsymbol{a} \leq 2\}$

Nesta questão, os alunos devem o valor máximo e o valor mínimo que a função seno assume.

2010.1

4) Sendo $1 + \boldsymbol{a} =$ tg θ, marque a alternativa que representa a expressão sen 2θ em função de $\boldsymbol{a}$.

a) $\frac{-2a-a^2}{2+2a+a^2}$ c) $\frac{2+2a}{2+2a+a^2}$ b) $\frac{2+2a}{-2a-a^2}$ d) $\frac{1+a}{\sqrt{2+2a+a^2}}$

Aqui, os candidatos devem ter conhecimento das identidades trigonométricas, relação fundamental trigonométrica e saber resolver equações trigonométricas.

3.2.2.2.2 Prova de conhecimentos específicos

1998.1

8) Resolva a seguinte equação trigonométrica: $tg\ x + cotg\ x = 2$; para $x \in [0, 2\pi]$.

Aqui, é necessário que os candidatos tenham conhecimento das identidades trigonométricas.

1998.2

4) Considerando as seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \cos\theta & 1 \\ \text{sen}\,\theta & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2\cos\theta & 3\cos\theta \\ 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta & 3\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta \end{bmatrix}$

a) Encontre a matriz $M = AB - C$.

b) Calcule o determinante de M.

Nessa questão, os alunos devem saber a relação fundamental trigonométrica.

6) Se tg $x = \frac{5}{12}; x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, calcule sen $\left(\frac{x}{2}\right)$.

Para resolver essa questão, os candidatos devem ter conhecimento da relação fundamental trigonométrica e identidades trigonométricas.

1999.2

1) Determine *m* para que se tenham simultaneamente: sen $x = \frac{m-3}{5}$ e cos $x = \frac{2m+1}{5}$

Nesta questão, os alunos devem conhecer a relação fundamental trigonométrica.

2001.1

2) Considere a matriz

$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ sen\,5x & sen\,x & 3 \\ cos\,5x & cos\,x & 4 \end{bmatrix}$, com $x \in [0,2\pi]$.

Então, resolva a equação[3] det $M = 0$.

Aqui, os alunos devem utilizar a identidade trigonométrica

[3] Há um erro de digitação no arquivo original. Ao invés de equação está escrito inequação.

$-\cos(a)\,sen(b) + \cos(b)\,sen(a) = sen(a-b)$.

2003.2

4) Se $\frac{256^{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}}{16^{\operatorname{sen} x}} = 1$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $tg\ x$.

Já nesta questão, os alunos devem ter conhecimento sobre a trigonometria do círculo trigonométrico.

3.2.2.3 Listas de exercícios

3.2.2.3.1 Professor I

6) Use o ciclo trigonométrico para dizer o valor de $sen\ x$ e $cos\ x$, quando x é igual a (medida em radianos):

a) 0; b) π; c) 2π; d) $\frac{7\pi}{6}$; e) $\frac{25\pi}{3}$; f) $\frac{21\pi}{4}$;

Para resolver essa questão, os candidatos devem ter conhecimento do círculo trigonométrico, das funções seno e cosseno, além de medida angular em radianos.

7) Determine $sen\ x$, $cos\ x$ e $tg\ x$, quando x é igual a:

a) 75° b) 15° c) 105°

Aqui, os alunos devem ter conhecimento do círculo trigonométrico, as funções seno e cosseno e tangente, além do seno e cosseno da soma.

8) Faça um esboço do gráfico das funções abaixo:

a) $sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; c) $\cos(2x)$; e) $\operatorname{sen}(2x + \pi)$;

b) $1 + \cos(x)$; d) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$; f) $2 + sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

Nessa questão, os alunos devem conhecer as funções seno e cosseno, além da adição de arcos.

9) Determine o domínio

a) $tg\ (2x)$; c) $csc\ (2x)$;

b) $sec\ (3x)$; d) $cotg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

Nesta questão, é necessário o conhecimento sobre as funções tangente, cotangente, secante e cossecante.

11) Calcule $sen\ x$ e $\cos x$ sabendo que $3\cos x + sen\ x = -1$.

Aqui, os candidatos devem conhecer a relação fundamental trigonométrica.

12) Mostre as igualdades:

a) $sen\ x = sen\ (\pi - x)$; b) $cos\ x = -cos\ (\pi - x)$.

Como na questão anterior, os alunos devem conhecer o círculo trigonométrico, além da adição de arcos.

13) É verdade que $sen\ 2x = 2\ sen\ x$?

O conhecimento sobre a função seno e de adição de arcos é suficiente para resolver essa questão.

14) Mostre as identidades:

a) $cos^2 x - sen^2 x = cos\ (2x)$;

b) $cos^2 x = \frac{1+cos(2x)}{2}$;

c) $sen^2 x = \frac{1-cos(2x)}{2}$;

d) $tg(2x) = \frac{2\ tg\ (x)}{1-tg^2(x)}$;

e) $sen(2x) = 2\ sen\ (x)\ cos(x)$;

f) $cos^2 x = \frac{1}{1+\ tg^2(x)}$;

g) $sen^2 x = \frac{tg^2(x)}{1+\ tg^2(x)}$;

h) $(1 + cotg^2 x)(1 - cos^2 x) = 1,\ \ x \neq k\pi$

Nesta questão, os alunos devem saber manipular as identidades trigonométricas.

17) Encontre o conjunto solução das equações:

a) $sen\ x = \frac{1}{2}$;

b) $cos\ x = 0$;

c) $tg\ x = 1$;

d) $sen\ x = sen\ \frac{\pi}{5}$;

e) $sen^2 x - sen\ x = 0$

f) $cos\ x = cos\ \frac{\pi}{5}$

g) $cos\ (3x) = cos\ x$

h) $sen\ x - \sqrt{3} cos\ x = 0$;

Aqui, é necessário ter conhecimento dos valores em que as funções seno, cosseno e tangente assumem.

19) Determine:

a) $arcsen\ 1$; d) $arccos\ (-1)$; g) $arctg\ 0$; j) $arcsec\ \sqrt{2}$;

b) $arcsen\ \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $arctg\ 1$; h) $arctg\ \sqrt{3}$; k) $arcsec\ 2$;

c) $arccos\ 1$; f) $arcctg\ 1$; i) $arcsen\ (-1)$; l) $arcsec\ (-2)$.

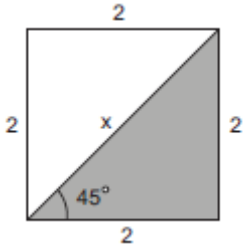
Nessa questão, os alunos devem conhecer as funções trigonométricas para poder entender as funções trigonométricas inversas.

3.2.2.3.2 Professor II

31) Calcule:

a) o valor de *x* no triângulo sombreado da figura abaixo.

b) Utilizando o item (a) mostre que $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}}$ e $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.



Para resolver essa questão, os alunos devem saber trigonometria no triângulo retângulo e medida do ângulo em radianos.

32) Qual o domínio e a imagem da função seno?

Nesta questão, os alunos devem conhecer a função seno e ter conhecimento de domínio e imagem.

33) Usando as relações de seno, cosseno e tangente e observando o triângulo retângulo sombreado na figura abaixo, mostre que:

a) $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Para essa questão, os alunos devem ter conhecimento de trigonometria no triângulo retângulo, conhecer as funções seno, cosseno e tangente e medida do ângulo em radianos.

34) Apenas observando o círculo trigonométrico, determine:

a) $sen(0),\ cos(\pi)$; b) $sen(\pi),\ cos(\pi)$;

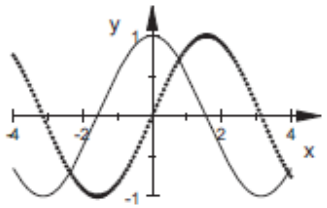
c) $sen\left(\frac{\pi}{2}\right),\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$; d) $sen\left(-\frac{4\pi}{2}\right),\ cos\left(-\frac{4\pi}{2}\right)$;

e) $sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right),\ cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$; f) $sen(2\pi),\ cos(2\pi)$;

g) $sen(k\pi),\ cos(k\pi),\ k \in Z$; h) $sen(x+2\pi),\ cos(x+2\pi)$;

Já nessa questão, os alunos devem conhecer o círculo trigonométrico e adição de arcos.

35) Com base nos resultados do exercício anterior, faça e justifique os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno. Quais são os zeros destas funções? Abaixo temos a função cosseno representada pela linha contínua e a função seno pela linha pontilhada.



Nessa questão, os alunos devem ter conhecimento dos gráficos das funções seno e cosseno para identificar os zeros.

36) Determine, se possível, $tg(0)$; $tg(\frac{\pi}{4})$; $tg(-\pi)$; $tg(2\pi)$; $tg(k\pi), k \in Z$; $tg(\frac{\pi}{2})$ e $tg(\frac{-3\pi}{2})$.

Aqui, os alunos devem conhecer os valores da função tangente.

59) Calcule:

a) $arcsen(0)$, b) $arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, c) $arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

d) $arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e) $arctg(1)$, f) $arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Nessa questão, os candidatos devem conhecer as funções trigonométricas para responder as questões sobre funções trigonométricas inversas.

60) Mostre que:

a) $arccos(-x) = \pi - arccos(x)$ b) $arcsec(x) = arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $arcsec(-x) = \pi - arcsec(x)$

Para resolver essa questão, é necessário conhecer as propriedades trigonométricas e utilizar algumas propriedades das funções trigonométricas inversas.

61) Mostre que $sen(mx)\ sen(nx) = \frac{cos(m-n)x - cos(m+n)x}{2}$.

Nesta questão, os alunos devem ter conhecimento de algumas propriedades trigonométricas.

62) Mostre que $|sen(x) + cos\ (x)| \leq \sqrt{2}$, para todo $x \in \mathcal{R}$.

Já aqui, os candidatos devem ter conhecimento do círculo trigonométrico e resolver inequações modulares.

63) Mostre que $\frac{1-cos\ [2(x-4)]}{(x-4)\ sen(x-4)} = \frac{2\ sen(x-4)}{(x-4)}$, para todo $x \neq 4$.

Nesta questão, é necessário utilizar as identidades trigonométricas.

64) Simplifique, quando possível, a expressão:

a) $cos(arctg\ x)$ b) $tg(arcsen\ x)$ c)$sen(arctg\ x)$ d) $cos(2\ arctg\ x)$

e) $cos(arcsen\ x)$ f) $sen(arccos\ f(x))$ g) $sec^2(arctg\ f(x))$ h) $tg(arcsec\ f(x))$

Para essa questão, os alunos devem saber as definições e propriedades das funções trigonométricas inversas.

65) faça um esboço do gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = arcsen\ (x)$ b) $f(x) = arctg\ (x)$

c) $f(x) = arccos\ (x)$ d) $f(x) = arcsec\ (x)$

Aqui, os candidatos devem ter conhecimento do domínio das funções trigonométricas inversas.

Capítulo IV

4. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, apresentaremos a análise dos dados coletados ao longo da pesquisa. A seguir veremos a comparação entre as questões presentes nas avaliações do ENEM, vestibulares da UFOP e listas de exercícios dos professores da UFOP. É a partir dessa análise que tentaremos responder se é possível afirmar que há, em alguma medida, haveria uma falta de sincronia entre as expectativas da Universidade em relação aos alunos que iniciam seus cursos de Ciências Exatas e as demandas desses alunos, em termos de preparação e conhecimento de determinados conteúdos matemáticos, após passarem pelo processo seletivo.

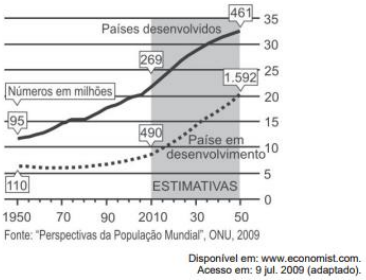
4.1 Análise das questões selecionadas

Para realizar a comparação das questões presentes nas três fontes avaliadas, separaremos os conteúdos em dois blocos, como feito no capítulo anterior, sendo o primeiro bloco de conteúdos questões que tratam sobre exponenciais, logaritmos e suas funções. No segundo, abordaremos as questões que envolvem funções trigonométricas e trigonometria. A seleção e disposição das questões que apresentaremos foi feita buscando a maior similaridade de conteúdo matemático presente em cada uma delas.

4.1.1 Exponenciais, logaritmos e suas funções

No ENEM 2009 (Versão Amarela) temos uma questão que envolve conhecimento sobre funções exponenciais, sendo esta uma questão típica das avaliações do ENEM, envolvendo uma contextualização prévia para aplicação do conteúdo matemático.

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



137) Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

A) 490 e 510 milhões
B) 550 e 620 milhões
C) 780 e 800 milhões
D) 810 e 860 milhões
E) 870 e 910 milhões

Resolução:

Sabe-se que $e^{0,3} = 1,35$ e $x = 30$.
Podemos escrever $x = 30$ como $x = 10 \times 3$

Sendo assim $y = 363 \times e^{0,03\times30} \Rightarrow y = 363 \times e^{0,03\times10\times3} \Rightarrow$

$y = 363 \times e^{0,3\times3} \Rightarrow y = 363 \times (e^{0,3})^3 \Rightarrow$

$y = 363 \times (1,35)^3 \Rightarrow y = 363 \times 2,460375 \Rightarrow$

$y = 893,116125$

No vestibular da UFOP, encontramos uma questão de conteúdo matemático semelhante, em que raras vezes é apresentado um contexto da situação-problema para aplicação dos conceitos matemáticos.

2001.2

3) A massa de certo material radioativo num instante *t* é dada por

$$m(t) = m_0 10^{-kt}$$

Se *t* é dado em anos, $m_0 = m(0) = 500g$ é a massa inicial, $m(20) = 400g$, adotando $\log 2 = 0,3$ e $\log 5 = 0,7$, encontre:

a) o valor de k.

b) o tempo necessário para que metade da massa inicial se desintegre.

Resolução:

a) $m(20) = 500 \cdot 10^{-k\cdot20} \Rightarrow 400 = 500 \cdot 10^{-k\cdot20} \Rightarrow 10^{-k\cdot20} = \frac{400}{500} \Rightarrow 10^{-k\cdot20} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \log 10^{-k\cdot20} = \log\left(\frac{2^2}{5}\right) \Rightarrow -k \cdot 20 \cdot \log 10 = \log 2^2 - \log 5 \Rightarrow$

$-k \cdot 20 = 2(0,3) - 0,7 \Rightarrow -k \cdot 20 = -0,1 \Rightarrow k = \frac{-0,1}{-20} \Rightarrow k = 0,005.$

b) $250 = 500 \cdot 10^{-0,005\cdot t} \Rightarrow 10^{-0,005\cdot t} = \frac{250}{500} \Rightarrow 10^{-0,005\cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\log 10^{-0,005\cdot t} = \log\frac{1}{2} \Rightarrow \log 10^{-0,005\cdot t} = \log 1 - \log 2 \Rightarrow$

$-0,005 \cdot t \cdot \log 10 = 0 - 0,3 \Rightarrow -0,005 \cdot t = -0,3 \Rightarrow t = \frac{-0,3}{-0,005} \Rightarrow t = 60.$

Apresentamos, a seguir, duas questões que envolvem funções exponenciais, nas duas provas analisadas. A questão do ENEM fez parte da prova amarela da segunda versão do ENEM de 2016.

141) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que *t* é o tempo, em hora, e *p(t)* é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

a) reduzida a um terço. b) reduzida à metade. c) reduzida a dois terços.
d) duplicada. e) triplicada.

Resolução:

Como t é dado em horas, convertemos os 20 minutos em horas, e temos $\frac{1}{3}$.

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{1} \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{3}\right) = 80.$$

Ou seja, duplicou.

Na prova de conhecimentos gerais do segundo semestre de 2002 do vestibular da UFOP, localizamos a seguinte questão que envolve função exponencial. Observe que além de prescindir de alguma contextualização, a questão exige do aluno o conhecimento de algumas propriedades de exponenciação.

13) O número de bactérias *f(t)* de uma cultura cresce com o tempo *t*, dado em horas, de acordo com a lei $f(t) = C \cdot a^{Kt}$, em que *C* e *K* são constantes positivas e $a > 1$. Nos 30 primeiros minutos, verificou-se que o número inicial *f(0)* de bactérias havia duplicado. Sabendo-se que, ao final de 6 horas, havia uma população de 4^{12} bactérias, o número inicial de bactérias era de:

a) 4^6 b) 2^6 c) 4^{12} d) 2^{12}

Resolução:

Temos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2C$ segue daí que $C \cdot a^{\frac{k}{2}} = 2C \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{k}{2}} = 2.$ (I)

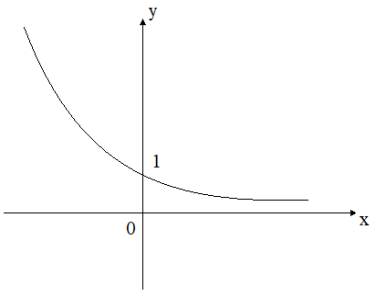
Também temos que $f(6) = 4^{12}$ portanto $4^{12} = C \cdot a^{6k}.$ (II)

Podemos reescrever a equação (II) como $C \cdot a^{\frac{12k}{2}} = 4^{12} \quad \Rightarrow \quad C \cdot \left(a^{\frac{k}{2}}\right)^{12} = 4^{12}.$ (III)

Substituindo (I) em (III), temos que $C \cdot (2)^{12} = 4^{12} \quad \Rightarrow \quad C \cdot 4^6 = 4^{12} \quad \Rightarrow \quad C = 4^6.$

Na prova de conhecimentos gerais do vestibular, o mais comum foi encontrarmos questões que exigem o conhecimento tanto de exponenciais como de logaritmos para sua resolução. A próxima questão, presente na prova do segundo semestre de 2001, mostra bem como eram esses tipos de questões, associando mais conceitos num mesmo problema.

13) Considere $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}_+^*$, uma função cujo gráfico esteja representado na figura abaixo:



a) $y = \log_2 x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $y = -x$ d) $y = 2^x$

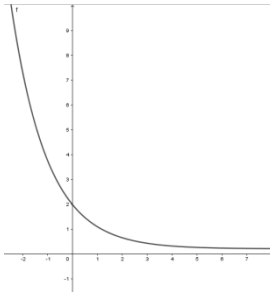
e) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Resolução:

As funções $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ não estão definidas para $x = 0$. A função $y = -x$ é uma reta. Resta analisar as funções $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = 2^x$, sabe-se que a função do gráfico é decrescente, então a única solução possível é $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Na prova de conhecimentos específicos do segundo semestre de 2004, selecionamos uma questão dentro da mesma temática de exponenciação. Como visto no capítulo anterior, as questões da prova de conhecimentos específicos também apareciam descontextualizadas, envolvendo também uma gama maior de conteúdos diferentes em uma mesma questão.

3) Considere a função $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ definida por $f(x) = a(2)^{bx}$, conforme o gráfico.



Determine o valor de *x* tal que $f(x) = \frac{1}{16}$.

Resolução:

$$\begin{cases} f(0) = a(2)^{b\cdot 0} \\ f(1) = a(2)^{b\cdot 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a(2)^0 \\ 1 = a(2)^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a(2)^0 \\ 1 = a(2)^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 1 = a(2)^b \end{cases}$$

substituindo a primeira equação na segunda temos

$1 = 2(2)^b \quad \Rightarrow \quad (2)^b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2^b = 2^{-1} \quad \Rightarrow \quad b = -1.$

Como $f(x) = a(2)^{bx}$, para $f(x) = \frac{1}{16}$ temos.

$\frac{1}{16} = 2(2)^{-1 \cdot x} \quad \Rightarrow \quad 2^{-x} = \frac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad 2^{-x} = \frac{1}{2^5} \quad \Rightarrow \quad 2^{-x} = 2^{-5} \quad \Rightarrow \quad x = 5.$

Esse tipo de exercício aparece regularmente nas listas de Cálculo I dos professores da UFOP, que utilizamos para esta análise. A seguir, apresentaremos alguns exemplos.

Na lista de exercícios do Professor I, selecionamos, como exemplo, a seguinte questão, solucionando a primeira letra do enunciado:

12) Faça um esboço do gráfico, marcando onde tal gráfico intercepta o eixo x e/ou y.

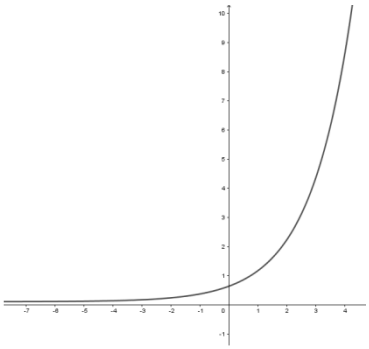
a) $f(x) = 2^{x-1}$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = \ln x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e) $f(x) = \ln\,(x-1)$

Resolução:

a)

x	2^{x-1}
-2	0.125
-1	0.25
0	0.5
1	1
2	2

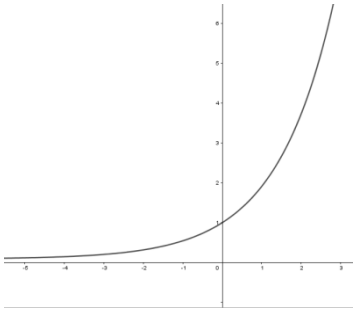
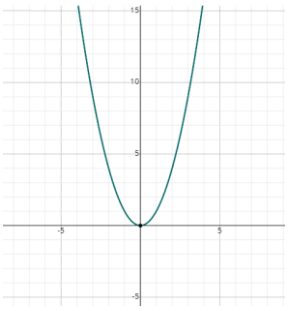


Nessa questão, para esboçar os gráficos, os alunos precisam conhecer as características da função exponencial e logarítmica. Esse tipo de exercício é característico das listas analisadas dos professores, visto que essa capacidade de análise gráfica é muito importante para a disciplina Cálculo I.

Na lista do Professor II, encontramos a seguinte questão que traz abordagem similar ao conceito de função exponencial.

24) Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$. O que as diferencia?

Resolução:

$f(x)$:  $g(x)$: 

Existem várias diferenças entre as funções. Podemos citar como alguns exemplos de diferença entre essas funções, quanto menor o valor de x, a imagem será mais próxima de zero na $f(x)$ e tendendo ao infinito na $g(x)$. Outra diferença é que a imagem da função $f(x)$ chega bem próximo de zero, enquanto a imagem da função $g(x)$ toca a origem. Também pode-se notar a simetria da função $g(x)$, perceba que o primeiro quadrante é simétrico ao segundo, o que não ocorre na função $f(x)$.

Na lista do mesmo professor, encontramos mais questões que enfatizam a capacidade de análise gráfica das funções exponenciais. O exemplo a seguir, exige conhecimentos similares aos exigidos na questão da prova de conhecimentos específicos apresentada anteriormente.

25) Faça um esboço dos gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e responda:

a) Em que ponto cada gráfico corta o eixo das ordenadas?

b) De modo geral, quando a função exponencial será crescente? E decrescente?

c) Para que valores de *x* as funções acima estão definidas? Quais os valores que $f(x)$ pode assumir?

Resolução:

a) Em $f(x)$ e $g(x)$ quando $x = 0$ teremos o ponto (0 , 1).

b) Será crescente quando a base da função exponencial for maior do que 1, e será decrescente quando a base da função exponencial estiver entre 0 e 1.

c) Em ambas as funções o domínio pertence ao conjunto dos números reais. E a imagem é o intervalo aberto $(0, +\infty)$.

Analisando as questões que envolvem os conteúdos de logaritmos nas três fontes analisadas, percebemos que há uma maior similaridade entre as listas de exercícios dos professores e as provas de conhecimentos específicos do vestibular da UFOP. Iniciando pelo ENEM, apresentamos uma questão presente na prova de 2011, que envolve uma equação logarítmica, sendo possível solucioná-la pela aplicação da definição de logaritmo.

139) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada com M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termo de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(\mathrm{M_0})$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_w = 7,3.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

a) $10^{-6,10}$ d) $10^{21,65}$
b) $10^{-0,73}$ e) $10^{27,00}$
c) $10^{12,00}$

Resolução:

$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(\mathrm{M_0}) \quad \Rightarrow \quad 7{,}3 = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(\mathrm{M_0}) \quad \Rightarrow \quad 18 = \frac{2}{3}\log_{10}(\mathrm{M_0}) \Rightarrow$

$18 \times \frac{3}{2} = \log_{10}(\mathrm{M_0}) \quad \Rightarrow \quad \log_{10}(\mathrm{M_0}) = 27 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M_0} = 10^{27}.$

Nos vestibulares da UFOP, as questões que envolvem esse mesmo conteúdo aparecem sem a contextualização e exigem o conhecimento de propriedades específicas para sua solução. No primeiro vestibular do ano 2000, localizamos uma questão que exemplifica o tipo de exercício presente nessa prova.

13) A soma das raízes da equação $1 + \log_2(1 + x^2) = \log_2 5 + \log_2 x$ é igual a:

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) 3 e) 5

Resolução:

$\log_2 2 + \log_2(1 + x^2) = \log_2(5x) \quad \Rightarrow \quad \log_2(2 + 2x^2) = \log_2(5x) \quad \Rightarrow$

$2 + 2x^2 = 5x \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$

Dessa equação temos as raízes $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$, consequentemente $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$.

No vestibular do primeiro semestre de 2001, há outro exercício que expressa bem o tipo de conhecimento que a prova costumava exigir.

18) Se $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e $\log x = a + \frac{\log b}{2} - \log c$, então o valor de *x* é:

a) $\frac{10^a \cdot \sqrt{b}}{c}$ b) $\frac{a^{10} \cdot \sqrt{b}}{c}$ c) $\frac{10a \cdot \sqrt{b}}{c}$ d) $\frac{a \cdot \sqrt{b}}{c}$ e) $\frac{ab^2}{c}$

Resolução:

$\log x = a \cdot \log 10 + \frac{1}{2} \cdot \log b - \log c \Rightarrow \log x = \log 10^a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c \Rightarrow$

$\log x = \log 10^a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c \Rightarrow \log x = \log(10^a \cdot b^{\frac{1}{2}}) - \log c \Rightarrow$

$\log x = \log\left(\frac{10^a \cdot \sqrt{b}}{c}\right) \Rightarrow x = \frac{10^a \cdot \sqrt{b}}{c}$

Nas provas de conhecimentos específicos, assim como mostrado no conteúdo de exponenciação, encontramos questões que envolvem logaritmos, também sem contextualização e envolvendo uma variedade maior de conceitos matemáticos no mesmo exercício.

1998.1

6) Resolva o sistema $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$

Resolução:

$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5 x + y = 7 \\ x = 5^{(\frac{12}{y})} \end{cases}$

Substituindo a segunda equação na primeira temos

$\log_5 5^{(\frac{12}{y})} + y = 7 \Rightarrow \frac{12}{y}\log_5 5 + y = 7 \Rightarrow \frac{12}{y} + y = 7 \Rightarrow 12 + y^2 = 7y \Rightarrow$

$y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(1)(12) \Rightarrow \Delta = 1$

$y_1 = \frac{7-1}{2} \Rightarrow y_1 = 3$ e $y_2 = \frac{7+1}{2} \Rightarrow y_2 = 4$

$x_1 = 5^{(\frac{12}{3})} \Rightarrow x_1 = 5^{(4)}$ e $x_2 = 5^{(\frac{12}{4})} \Rightarrow x_2 = 5^{(3)}$.

Outro exemplo representativo do tipo de questão presente na segunda etapa do vestibular da UFOP apareceu no primeiro vestibular de 1999. Nessa questão, é apresentada uma função formada por três sentenças, que exige do aluno conhecimentos de funções do primeiro grau, do segundo grau e logarítmicas (além do esboço do gráfico de cada uma delas) e propriedades de função inversa. É interessante notar que os

conteúdos presentes nessa questão, são importantes no posterior estudo de limites e continuidade no curso de Cálculo I.

1999.1

6) Seja f: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} -x-4 & x < -4 \\ -x^2-4x & \text{se } -4 \le x \le 0 \\ \log_2 x & x > 0 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de *f*.

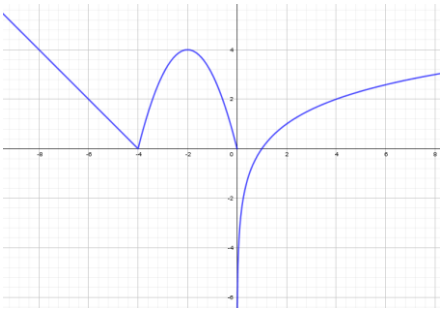
b) *f* é inversível? Justifique.

Resolução

a) $-x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4$

$-x^2-4x=0 \quad \Rightarrow \quad x(-x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ ou $-x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4$

$\log_2 x=0 \quad \Rightarrow \quad 2^0=x \quad \Rightarrow \quad x=1$



b) Não, pois $f(x)$ não é uma bijeção

Operações com logaritmos, uso de propriedades logarítmicas e funções logarítmicas aparecem com muita frequência nas listas de exercícios dos professores de Cálculo I que foram analisadas. A seguir apresentamos alguns exemplos da lista de exercícios do Professor I.

2) Determine as soluções:

c) $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3$ e) $\log_4 x + \log_x 4 = 2$

d) $2\log x = \log\,(2x-3) + \log\,(x+2)$

Resolução:

c) $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3$; chamaremos $y = \log_3 x$

Sendo assim $y^2 - 2y = 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -1$ e $y'' = 3$.

Voltando para $y = \log_3 x$ temos

$\log_3 x = -1 \quad \Rightarrow \quad 3^{-1} = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ e

$\log_3 x = 3 \quad \Rightarrow \quad 3^3 = x \quad \Rightarrow \quad x = 27.$

Nesse primeiro exemplo, assim como no exercício de vestibular da prova de conhecimentos gerais apresentado anteriormente, exige-se o conhecimento das propriedades operatórias dos logaritmos, associadas a outros conteúdos matemáticos. No próximo exemplo, o exercício exige o conhecimento do domínio da função logarítmica, apresentada como composta de funções polinomiais e funções envolvendo frações de termos algébricos.

5) Determine o domínio das funções abaixo:

a) $\log_3\ (x-1)$ b) $\log_2 \frac{x+1}{x-1}$ c) $\log_5\ (x^2-4)$ d) $\log_{x+1}\ (2x^2-5x+2)$

Resolução:

a) Para $\log_3\ (x-1)$ devemos ter $x-1>0 \ \Rightarrow \ x>1$.

Questões que envolvem a determinação do domínio de funções são muito comuns na lista de exercício dos professores, mas não aparecem em nenhuma das provas do ENEM. Já no vestibular da UFOP, esse tipo de questão era comum, tanto na prova de conhecimentos gerais, como na prova de conhecimentos específicos.

No vestibular do segundo semestre de 2001, na prova de conhecimentos gerais, encontramos um exercício muito semelhante aos encontrados nas listas de exercícios dos professores de Cálculo I.

15) O domínio da função f, definida por $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$, é o conjunto:

a) $\{x \in \Re / x \neq -2\}$ b) $\left\{x \in \Re / x<-2 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{x \in \Re / -2<x \leq \frac{1}{2}\right\}$

d) $\left\{x \in \Re / x \geq \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{x \in \Re / x \neq -2 \text{ ou } x \neq \frac{1}{2}\right\}$

Resolução:

$\frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \ \Rightarrow \ 2x-1 \geq 0 \ \Rightarrow \ 2x \geq 1 \ \Rightarrow \ x \geq \frac{1}{2}$.

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
$2x-1$	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{2x-1}{x+2}$	+	indefinido	-	0	+

$S=\left\{x \in \Re / x<-2 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\right\}$

Na lista de exercícios do Professor II, encontramos uma questão similar associada a uma função exponencial.

26) Determine o domínio das funções definidas pelas expressões abaixo.

a) $f(x) = e^{\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$, b) $f(x) = e^{\left(\frac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}\right)}$

Resolução:

Devemos ter $x - \frac{1}{x} \geq 0$, sendo $x \neq 0$, assim devemos ter

$x - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-1}{x} \geq 0.$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x^2 - 1$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2-1}{x}$	-	0	+	indefinido	-	0	+

$D: \{x \in \Re / -1 \leq x < 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 1\}$.

Analisando as últimas questões apresentadas, agora enriquecidas com as que envolvem logaritmo, percebemos que há, de fato, semelhanças entre as questões das listas de exercícios dos professores e das provas de vestibular. Enquanto no ENEM há grande ênfase na contextualização, o que, demanda uma maior capacidade de interpretação do candidato, apesar de exigir propriedades mais simples dos conceitos, nos vestibulares e listas de exercícios as questões presentes são mais conceituais, priorizando as técnicas algébricas, construções de gráficos e memorização de propriedades específicas. Apresentaremos, a seguir, a análise dos dados dessa pesquisa agora abordando o conteúdo de trigonometria e funções trigonométricas.

4.1.2 Funções trigonométricas e trigonometria

Em todas as provas do ENEM analisadas, encontramos apenas uma questão que abordava função trigonométrica. As demais questões, apenas utilizavam trigonometria aplicada nas relações métricas no triângulo retângulo. Mesmo assim, em todas as provas do ENEM só houve três questões em que esse conteúdo foi cobrado, conforme consta nas Tabelas 1 e 2.

Essa única questão envolvendo função trigonométrica, apareceu no ENEM de 2010. Nela, o ponto-chave é saber os valores de máximo e de mínimo assumidos pela função cosseno.

161) Um satélite de telecomunicações, *t* minutos após ter atingido sua órbita, está a *r* quilômetros de distância do centro da Terra. Quando *r* assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de *r* em função de *t* seja dado por:

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15\,.\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de *r*, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

a) 12.765 km. b) 12.000 km. c) 11.730 km.
d) 10.965 km. e) 5.865 km.

Resolução:

1) $r_{máximo} = \frac{5865}{1+0{,}15\,.(-1)} = \frac{5865}{1-0{,}15} = \frac{5865}{0{,}85} = 6.900$

2) $r_{mínimo} = \frac{5865}{1+0{,}15\,.(1)} = \frac{5865}{1+0{,}15} == \frac{5865}{1{,}15} = 5.100$

3) $r_{máximo} + r_{mínimo} = 6900 + 5100 = 12.000$

A seguir, apresentaremos algumas questões do conteúdo selecionado presentes em algumas edições do vestibular da UFOP. No primeiro semestre de 1999, o vestibular trouxe a seguinte questão, que pode ser resolvida com conhecimento de identidades e propriedades trigonométricas.

06) Se $\text{tg(x)} - \text{cotg(x)} = -2$ e $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ então a solução dessa equação é:

a) $x = \frac{\pi}{4}$ c) $x = \frac{5\pi}{4}$ e) $x = \frac{3\pi}{8}$
b) $x = \frac{\pi}{8}$ d) $x = \frac{5\pi}{8}$

Resolução:

$\text{tg(x)} - \text{cotg(x)} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{sen\,x}{\cos x} - \frac{\cos x}{sen\,x} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{sen^2 x - \cos^2 x + 2sen\,x \cdot \cos x}{sen\,x \cdot \cos x} = 0$

$\Rightarrow \quad sen^2 x - \cos^2 x + 2sen\,x \cdot \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad sen^2 x - \cos^2 x + sen(2x) = 0$

$\Rightarrow \quad -\cos(2x) + sen(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad sen(2x) = \cos(2x)$ e no intervalo só pode ser

$2x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8}$.

No vestibular do segundo semestre de 2001, a questão 16 envolve uma equação trigonométrica, sendo demandado dos candidatos um bom domínio da trigonometria no círculo trigonométrico e da medida de ângulos em radiano.

16) As raízes da equação trigonométrica $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - cos^2 x = 0$, inseridas no intervalo $[0, 2\pi]$, são:

a) $0, \pi, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$

Resolução:

$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - cos^2 x = 0 \;\Rightarrow\; \cos x(\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x) = 0 \;\Rightarrow$

$\cos x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\,\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} - 1 = 0$

$\sqrt{3}\,tg\,x = 1 \;\Rightarrow\; tg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$

Em 2004, no vestibular do primeiro semestre, a questão 15 exigia conhecimento de identidades trigonométricas, em especial da soma e adição de arcos.

15) A expressão $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ é equivalente a:

a) tg x c) $-$tg x
b) cotg x d) $-cotg\,x$

Resolução:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{-\,sen\,x}{\cos x} = -\,tg\,x.$$

Agora, apresentaremos as questões presentes nas provas de conhecimentos específicos do vestibular da UFOP. Na prova do primeiro semestre de 1998, consta uma questão de equação trigonométrica restrita em um domínio dado, que exigia do candidato o domínio sobre as identidades trigonométricas para solução desse tipo de equação.

8) Resolva a equação trigonométrica: $tg\,x + cotg\,x = 2$; para $x \in [0,2\pi]$.

Resolução:

$tg\,x + cotg\,x = 2 \;\Rightarrow\; \frac{sen(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{sen(x)} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{sen(x)\cos(x)} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{sen(x)\cos(x)} = 2 \;\Rightarrow$

$sen(x)\cos(x) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2sen(x)\cos(x) = 1 \;\Rightarrow\; sen(2x) = 1 \;\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Assim, temos que $k = 0$ ou $k = 1$. Portando $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

No vestibular do segundo semestre de 1999, a seguinte questão demandava dos alunos o conhecimento da identidade fundamental da trigonometria, associada à equação do segundo grau.

1) Determine *m* para que se tenham simultaneamente:
$\text{sen}\, x = \frac{m-3}{5}$ e $\cos x = \frac{2m+1}{5}$

Resolução:

$sen^2x + cos^2x = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{5}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2-6m+9}{25} + \frac{4m^2+4m+1}{25} = 1 \quad \Rightarrow$
$5m^2 - 2m - 15 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4(5)(-15) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 304$
$m = \frac{2 \pm 4\sqrt{19}}{10} \quad \Rightarrow \quad m' = \frac{1-2\sqrt{19}}{5} \quad \text{e} \quad m'' = \frac{1+2\sqrt{19}}{5}.$

Em 2001, no vestibular do primeiro semestre, na questão 2, como já ressaltado na avaliação sobre a prova de conhecimentos específicos, em que uma mesma questão exige mais de um conteúdo, foi cobrado o conhecimento de identidades trigonométricas associadas ao determinante de uma matriz.

02) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ sen\, 5x & sen\, x & 3 \\ \cos 5x & \cos x & 4 \end{bmatrix}$, com $x \in [0, 2\pi]$.
Então, resolva a inequação $\det M = 0$.

Resolução:

$\det M = 2sen(5x)\cos(x) - 2sen(x)\cos(5x) = 2sen(5x - x) = 2sen(4x) = 0.$
$4x = k\pi, \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ então $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi.$

No vestibular do segundo semestre de 2003, temos um exemplo de questão representativa do modelo comum das provas de conhecimentos específicos do vestibular da UFOP, caracterizadas pela associação de vários conceitos em um mesmo exercício. No caso, uma função exponencial composta com funções trigonométricas.

04) Se $\frac{256^{sen(x)\cdot sen(x)}}{16^{sen(x)}} = 1$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $tg(x)$.

Resolução:

$\frac{256^{sen(x)\cdot sen(x)}}{16^{sen(x)}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 16^{2sen^2(x)-sen(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2sen^2(x) - sen(x) = 0$

Segue daí que $sen(x) = 0$ ou $sen(x) = \frac{1}{2}$. Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos que $sen(x) = \frac{1}{2}$.

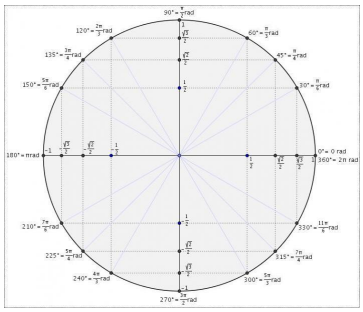
Com isso temos que $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Quanto às listas dos professores, iniciamos apresentando alguns exercícios que envolvem trigonometria presentes na lista do Professor I. No exercício a seguir, exige-se o domínio da trigonometria no círculo trigonométrico e a capacidade em trabalhar com ângulos em radianos.

6) Use o ciclo trigonométrico para dizer o valor de $sen\, x$ e $cos\, x$, quando *x* é igual a (medida em radianos):

a) 0; b) π; c) 2π; d) $\frac{7\pi}{6}$; e) $\frac{25\pi}{3}$; f) $\frac{21\pi}{4}$;

Resolução:



a) $sen\ 0 = 0$
$cos\ 0 = 1$

b) $sen\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
$cos\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

No próximo exercício, leva os alunos a trabalhar com soma de arcos, operando com os arcos notáveis.

7) Determine $sen\ x$, $cos\ x$ e $tg\ x$, quando *x* é igual a:

a) 75° b) 15° c) 105°

Resolução:

a)

- $sen\,(75°) = sen(45° + 30°) = sen(45°)\cos(30°) + sen(30°)\cos(45°) =$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- $\cos(75°) = cos(45° + 30°) = \cos(45°)\cos(30°) - sen(45°)sen(30°) =$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

- $tg\ (75°) = tg(45° + 30°) = \frac{tg(45°)+tg(30°)}{1-tg(45°)\cdot tg(30°)} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} =$
  $= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}.$

Na questão seguinte, os alunos devem abordar as funções trigonométricas graficamente, trabalhando com deslocamentos e esticamentos dos gráficos dessas funções.

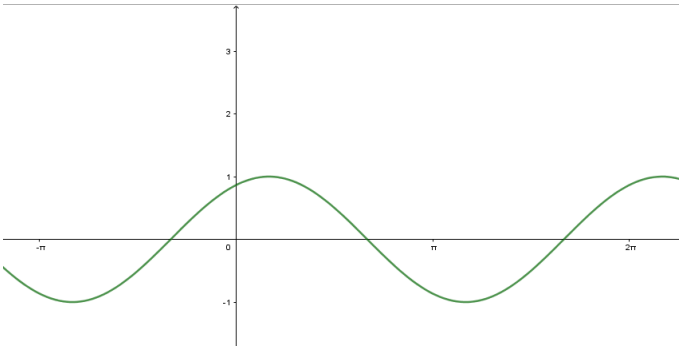
8) Faça um esboço do gráfico das funções abaixo:

a) $sen\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; c) cos $(2x)$; e) sen $(2x+\pi)$;

b) $1+\cos(x)$; d) sen $\left(\frac{x}{2}\right)$; f) $2+sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

Resolução:

a)



No outro exercício apresentado, o objetivo é trabalhar com o domínio das funções trigonométricas.

9) Determine o domínio

a) $tg\ (2x)$; c) $csc\ (2x)$;

b) $sec\ (3x)$; d) $cotg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

Resolução:

a) Temos $tg\ (2x) = \frac{sen\ (2x)}{\cos\ (2x)}$, a restrição para o domínio nesse caso é $\cos\ (2x) \neq 0$.

Ou seja, $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ segue daí que $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ sendo $k \in Z$.

Portanto $D(f) = \left\{x \in \frac{R}{x} \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in Z\right\}$

No exercício 11 da lista do Professor I, as equações trigonométricas estão associadas à solução de um sistema e uma equação do segundo grau.

11) Calcule $sen\ x$ e $\cos x$ sabendo que $3\cos x + sen\ x = -1$.

Resolução:

Chamando $\cos x = X$ e $sen\ x = Y$, temos $3X + Y = -1$.
Utilizando a relação fundamental trigonométrica temos $X^2 + Y^2 = 1$.
$\begin{cases} 3X + Y = -1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = -1 - 3X \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ substituindo a primeira equação na segunda temos:

$X^2 + (-1 - 3X)^2 = 1 \Rightarrow X^2 + 9X^2 + 6X + 1 = 1 \Rightarrow 10X^2 + 6X = 0 \Rightarrow$

$X(10X + 6) = 0 \Rightarrow X = 0 \quad ou \quad 10X + 6 = 0 \Rightarrow X = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$.

Se $X = 0 \Rightarrow Y = -1$; se $X = -\frac{3}{5} \Rightarrow Y = -1 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$. Portanto, se $\cos x = 0$ temos $sen\ x = -1$ e se $\cos x = -\frac{3}{5}$ temos $sen\ x = \frac{4}{5}$.

O conhecimento das identidades trigonométricas é muito exigido durante o curso de Cálculo I. No próximo exercício, exige-se domínio dessas identidades.

14) Mostre as identidades:

a) $cos^2 x - sen^2 x = cos\ (2x)$;

b) $cos^2 x = \frac{1+cos(2x)}{2}$;

c) $sen^2 x = \frac{1-cos(2x)}{2}$;

d) $tg^2 x = \frac{2\ tg\ (x)}{1-tg^2\ (x)}$;

e) $sen(2x) = 2\ sen\ (x)\ cos(x)$;

f) $cos^2 x = \frac{1}{1+\ tg^2\ (x)}$;

g) $sen^2 x = \frac{tg^2\ (x)}{1+\ tg^2\ (x)}$;

h) $(1 + cotg^2 x)(1 - cos^2 x) = 1, \ x \neq k\pi$

Resolução:

a) $cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - sen(x)sen(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$.

b) $\cos\ (2\ x) = cos^2 x - sen^2 x \Rightarrow \cos\ (2\ x) = cos^2 x - (1 - cos^2 x) \Rightarrow$

$\cos\ (2\ x) = cos^2 x - 1 + cos^2 x \Rightarrow \cos\ (2\ x) = -1 + 2cos^2 x \Rightarrow$

$2cos^2 x = 1 + \cos\ (2\ x) \Rightarrow cos^2 x = \frac{1+\cos\ (2\ x)}{2}$.

O exercício 17 trabalha vários tipos de equações trigonométricas, o que exige do aluno capacidade algébrica para lidar com essas equações, conhecimentos da trigonometria no círculo trigonométrico.

17) Encontre o conjunto solução da equações:

a) $sen\ x = \frac{1}{2}$;
b) $cos\ x = 0$;
c) $tg\ x = 1$;
d) $sen\ x = sen\frac{\pi}{5}$;
e) $sen^2\ x - sen\ x = 0$
f) $cos\ x = cos\frac{\pi}{5}$
g) $cos\ (3x) = cos\ x$
h) $sen\ x - \sqrt{3}cos\ x = 0$;

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n$
b) $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

Na última questão selecionada da lista de exercício do Professor I, temos um exercício que trabalha as propriedades operatórias das funções trigonométricas inversas.

19) Determine:

a) $arcsen\ 1$;
b) $arcsen\ \frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) $arccos\ 1$;
d) $arccos\ (-1)$;
e) $arctg\ 1$;
f) $arcctg\ 1$;
g) $arctg\ 0$;
h) $arctg\ \sqrt{3}$;
i) $arcsen\ (-1)$;
j) $arcsec\ \sqrt{2}$;
k) $arcsec\ 2$;
l) $arcsec\ (-2)$.

Resolução:

a) $arcsen\ 1 = \frac{\pi}{2}$; b) $arcsen\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Finalizando, apresentaremos alguns exemplos presentes na lista de exercício do Professor II. No exercício a seguir, o aluno deve determinar o domínio da função seno.

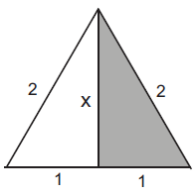
32) Qual o domínio e a imagem da função seno?

Resolução:

Domínio: $\{-\infty < x < \infty\}$; Imagem: $\{-1 \leq x \leq 1\}$

O próximo exercício visa determinar as linhas de arcos notáveis.

33) Usando as relações de seno, cosseno e tangente e observando o triângulo retângulo sombreado na figura abaixo, mostre que:



a) $cos\ \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $tg\ \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $cos\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Resolução:

$2^2 = x^2 + 1^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}$

$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

O exercício 34 desse professor envolve uma revisão da trigonometria no círculo trigonométrico.

34) Apenas observando o círculo trigonométrico, determine:

a) $sen(0),\ cos(0)$;

b) $sen(\pi),\ cos(\pi)$;

c) $sen\left(\frac{\pi}{2}\right),\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

d) $sen\left(-\frac{4\pi}{2}\right),\ cos\left(-\frac{4\pi}{2}\right)$;

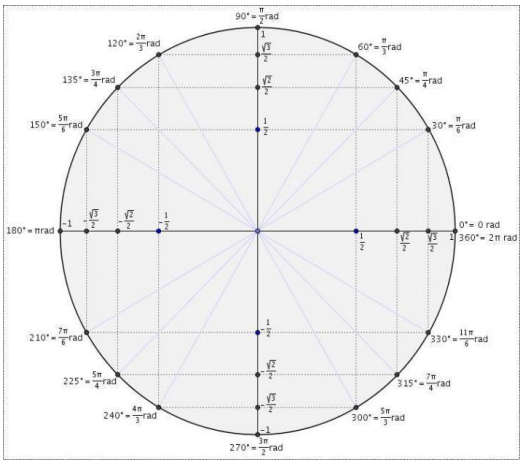
e) $sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right),\ cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

f) $sen(2\pi),\ cos(2\pi)$;

g) $sen(k\pi),\ cos(k\pi),\ k \in Z$;

h) $sen(x + 2\pi),\ cos(x + 2\pi)$;

Resolução:



a) $sen\ 0 = 0$

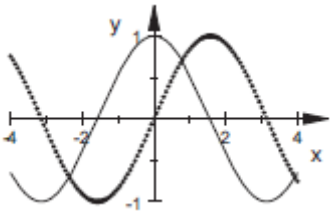
$cos\ 0 = 1$

b) $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

No próximo exercício, pede-se que o aluno analise as semelhanças e diferenças entre os gráficos das funções seno e cosseno

35) Com base nos resultados do exercício anterior, faça e justifique os esboços dos gráficos das funções seno e cosseno. Quais são os zeros destas funções? Abaixo temos a função cosseno representada pela linha contínua e a função seno pela linha pontilhada.



Resolução:

Em ambas as funções o seu valor mínimo e máximo são -1 e 1 respectivamente, porém os zeros da função cosseno são $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e os zeros da função seno são 0 e π.

Assim como na lista do Professor I, a lista de exercícios do segundo professor traz um exercício sobre definição das funções trigonométricas inversas.

59) Calcule:

a) $arcsen(0)$, b) $arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, c) $arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

d) $arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e) $arctg(1)$, f) $arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Resolução:

a) $arcsen(0) = 0$ b) $arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

A questão seguinte, envolve inequação trigonométrica associada à função modular.

62) Mostre que $|sen(x) + cos\,(x)| \leq \sqrt{2}$, para todo $x \in \mathcal{R}$.

Resolução:

Temos que $\left|sen\,\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1$ (pois $-1 \leq sen\theta \leq 1$), logo:

$\left|sen(x)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)\right| \leq 1 \;\Rightarrow\; \left|sen(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(x)\right| \leq 1 \;\Rightarrow$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot[sen(x) + \cos(x)]\right| \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}|sen(x) + \cos(x)| \leq 1 \;\Rightarrow$

$|sen(x) + \cos(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; |sen(x) + \cos(x)| \leq \sqrt{2}$

Observando as questões que envolvem trigonometria, do vestibular, das listas de exercícios dos professores e do ENEM, percebemos similaridades quanto ao tipo de questão, assim como observado nas questões sobre exponenciação e logaritmos. No entanto, no caso da questão do ENEM, o mais expressivo não foi propriamente o seu formato, mas o fato de termos encontrado apenas uma questão envolvendo esse conteúdo em todas as provas do ENEM.

Na comparação entre as listas de exercícios dos professores e as questões de vestibular, há semelhanças observadas entre esses tipos de questões na análise entre exponencial e logaritmo, também verificada nas questões sobre trigonometria. Porém, diferente do primeiro bloco de questões, as questões das listas dos professores apresentavam um caráter mais simples com o objetivo de revisão e fixação do conteúdo

que as questões encontradas no vestibular, especialmente na prova de conteúdos específicos.

No próximo capítulo, apresentaremos de forma mais sistemática as conclusões da pesquisa e a resposta à nossa questão de investigação.

Considerações Finais

Iniciamos nossa pesquisa apresentando o histórico do pesquisador e a motivação para o início deste estudo. Em minha experiência docente como professor da disciplina Cálculo I, percebi que os alunos apresentavam grandes dificuldades nos conteúdos ligados à matemática elementar. Em alguns casos, a impressão era de que eles não haviam tido qualquer contato anterior com os temas abordados, mesmo tendo passado pelo processo seletivo em que tais conteúdos integravam os programas da provas.

Assim, surge a hipótese desta pesquisa, de que há certa influência entre o formato das provas de seleção e algumas dificuldades dos alunos no início dos seus cursos de Cálculo, de um modo geral, tenta problematizar a relação entre o formato das provas de seleção, no caso, o atual do ENEM, e as dificuldades apresentadas pelos alunos no início do curso de Cálculo I.

Partindo dessa hipótese, elaboramos a seguinte questão de investigação: *haveria uma falta de sincronia entre as expectativas da Universidade em relação aos alunos que iniciam seus cursos de Ciências Exatas e as demandas desses alunos, em termos de preparação e conhecimento de determinados conteúdos matemáticos, após passarem pelo processo seletivo?*

Para responder essa questão, escolhemos a análise documental, a saber, das provas do antigo vestibular da UFOP e do novo ENEM, tentando perceber as diferenças dos tipos de questões que aparecem nas duas provas. Para avaliar uma possível falta de sincronia entre a preparação dos alunos para fazerem a prova do ENEM e o que é exigido pelos professores no início do curso de Cálculo I da UFOP, de acordo com a ementa da disciplina, introduzimos na análise comparativa as listas iniciais de exercícios que alguns professores da UFOP passam aos seus alunos no início do curso de Cálculo I.

Para realizar essa pesquisa, apresentamos no Capítulo I, um histórico dos processos seletivos para o Ensino Universitário no Brasil, finalizando com uma análise mais pormenorizada do ENEM, das suas características e dos seus objetivos. O nosso campo de estudo foi a UFOP e seu antigo vestibular aplicado até 2010, tomando como recorte temporal as provas de 1998 até sua última sua aplicação.

Localizadas as provas, com algumas restrições já justificadas anteriormente, iniciamos a classificação das questões presentes no vestibular e no ENEM, a partir do conteúdo matemático contido em cada uma delas. Como nosso objetivo mais geral é analisar as dificuldades dos alunos em Cálculo I, focamos nossa análise nas questões cujo conteúdo estava diretamente ligado aos conteúdos presentes na ementa de Cálculo I.

Após selecionarmos essas questões, classificando-as e dispondo sua incidência nas provas ao longo dos anos, realizamos uma análise do conteúdo matemático presente nessas questões e forma em que ele era avaliado. Por fim, apresentamos uma comparação entre questões representativas de cada uma dessas provas, incluindo também nessa análise comparativa algumas questões presentes nas listas de exercícios de dois professores de Cálculo I da UFOP.

Na comparação realizada observamos que as questões das provas do ENEM são caracterizadas por apresentarem uma contextualização prévia, na qual o candidato deverá aplicar alguns conteúdos matemáticos, normalmente conceitos básicos presentes no currículo do Ensino Fundamental e Médio. As provas do vestibular, em especial as de conhecimentos específicos, apresentam problemas matemáticos raramente contextualizados priorizando as capacidades do aluno em operar algebricamente os conceitos, memorizar propriedades e realizar análises gráficas. Além disso, essas questões também traziam vários conceitos matemáticos distintos estão presentes em uma mesma questão.

As listas de exercícios dos professores, como mostrado, tem grande similaridade com os tipos de questões presentes no antigo vestibular da UFOP. Com isso, concluímos que apesar da mudança no processo seletivo com a adoção do ENEM e adesão da UFOP ao SISU, as ementas das disciplinas e as expectativas dos professores em relação aos conhecimentos prévios que os alunos têm ao ingressar na Universidade parecem estar mais ligados a uma expectativa gerada pelo formato antigo do processo seletivo que pelo atual. Desse modo, acreditamos que, observando a partir da variável analisada nessa pesquisa, a UFOP deveria avaliar a possibilidade de alterar a forma como recebe seus calouros, auxiliando com mais efetividade na preparação destes para o início do curso de Cálculo I.

Referências Bibliográficas

CAMPOS, Dilhermando Ferreira; Análise de uma proposta para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I surgida na UFMG após o REUNI usando o testbench de Engeström como modelo de aplicação da teoria da atividade em um estudo de caso. Tese (Doutorado em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerias). UFMG - Belo Horizonte, Minas Gerais, 2012.

COSTA, Francisco Kaires Braga da. Os Conceitos de Habilidades e Competências Subjacentes ao ENEM e o Livro Didático do 1° Ano do Ensino Médio: Um Estudo Comparativo. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). UFC - Fortaleza, Ceará, 2013.

KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa de Lara. Pesquisa Documental:considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. v. 2: Atas – Investigação Qualitativa na Educação, 2015.
Disponível em:
<https://www.researchgate.net/profile/Rosana_Kripka/publication/280924900_Pesquisa_Documental_consideracoes_sobre_conceitos_e_caracteristicas_na_Pesquisa_Qualitativa_Documentary_Research_consideration_of_concepts_and_features_on_Qualitative_Research/links/55cb950708aea2d9bdce3413/Pesquisa-Documental-consideracoes-sobre-conceitos-e-caracteristicas-na-Pesquisa-Qualitativa-Documentary-Research-consideration-of-concepts-and-features-on-Qualitative-Research.pdf?origin=publication_detail>
Acesso em: 31 mai. 2018.

MALTA, Shirley Cristina Lacerda; Uma Abordagem Sobre Currículo e Teorias Afins Visando à Compreensão e Mudança. Espaço do Currículo, v.6, n.2, p.340-354, Maio a Agosto de 2013.
Disponível em: <http://periodicos.ufpb.br/index.php/rec/article/download/3732/9757>. Acesso em 11 mai. 2016.

MARTINS, Carlos Benedito; A Reforma Universitária de 1968 e a Abertura para o Ensino Superior Privado no Brasil. Educ. Soc., Campinas, vol. 30, n. 106, p. 15-35, jan./abr. 2009.
Disponível em: <http://www.cedes.unicamp.br>
Acesso em 17 mai. 2016

MOREIRA, Antônio Flávio; SILVA, Tomaz Tadeu da (orgs.): Currículo, Cultura e Sociedade; Câmara Brasileira do Livro, São Paulo: Cortez, 1994.
Disponível em:
<http://www.aedmoodle.ufpa.br/pluginfile.php?file=%2F178644%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2F13.%20Curriculo%2C%20Cultura%20e%20Sociedade.pdf>
Acesso em 11 mai. 2016

NUNES, Letícia Bastos; Ambientalização e Ensino Médio: Um Estudo das Provas do Novo ENEM - 2009; Porto Alegre, 2011.

PACHECO, José Augusto; PEREIRA, Nancy. Estudos Curriculares: das teorias aos projectos de escola. Educ. rev., Belo Horizonte, n. 45, p. 197-221, jun. 2007.
Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-46982007000100011&lng=en&nrm=iso>
Acesso em 17 mai. 2016

SÁ-SILVA, Jackson; ALMEIDA, Cristóvão Domingos; GUINDANI, Joel Felipe. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. Revista Brasileira de História & Ciências Sociais. Ano I - Número I - Julho de 2009
Disponível em: <https://www.rbhcs.com/rbhcs/article/view/6/pdf>
Acesso em: 31 mai. 2018.

SILVA, Maria Aparecida da; História do Currículo e Currículo como Construção Histórico-Cultural - Trabalho Comp.. In: VI Congresso luso-brasileiro de História da Educação, 2006, Uberlândia. Anais do VI Congresso Luso-Brasileiro de História da Educação. Uberlândia: EDUFU, 2006. v. 1. p. 4820-4828.
Disponível em:
<http://www2.faced.ufu.br/colubhe06/anais/arquivos/441MariaAparecidaSilva.pdf>
Acesso em: 15 de mai. 2016.

VIANA, Marger da C. V.; Perfeccionamiento del currículo para la formación del profesor de Matemática en la UFOP. Dissertação (Doutorado em Ciências Pedagógicas). ICCP - La Habana, Cuba, 2002.

YIN, R. K. Estudo de caso: planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman, 2005.

Documentos:

Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (MEC). Matriz de Referência para o ENEM 2009. Brasília, Distrito Federal, 2009a.
Disponível em: <http://www.todospelaeducacao.org.br//arquivos/biblioteca/4cfea624-ae19-473b-bb0a-65dcc183313f.pdf >
Acesso em: 15 de mar. 2016.

Sites:

Teoria de resposta ao item avalia habilidade e minimiza o “chute” de candidatos.
Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/389-ensino-medio-2092297298/17319-teoria-de-resposta-ao-item-avalia-habilidade-e-minimiza-o-chute>
Acesso em: 31 mai. 2018.

VIEIRA, Victor. Assim como no Brasil, outros países aplicam exames nacionais para avaliar ensino secundário. Estadão, 2013.
Disponível em: <http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,assim-como-no-brasil-outros-paises-aplicam-exames-nacionais-para-avaliar-ensino-secundario,1078209>
Acesso em: 31 mai. 2018.

UFOP em Números
Disponível em: <http://www.ufop.br/ufop-em-numeros>
Acesso em: 15 de mai. 2016.

Anexos

Anexo 1 - Ementa Cálculo Diferencial e Integral I

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE DISCIPLINA

<table>
<tr><td colspan="5">Disciplina:
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I</td><td>Código:
MTM 122</td></tr>
<tr><td colspan="4">Departamento: MATEMÁTICA
UNIDADE: ICEB</td><td>Duração/Semanas
15</td><td>Carga Horária Semestral
90</td></tr>
<tr><td>Carga Horária Semanal</td><td>Teórica
06</td><td>Prática
00</td><td>Estágio
00</td><td>Créditos
06</td><td>PRÉ-REQUISITOS
--</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ementa: Números Reais; Funções; Limites; Continuidade; Derivada e aplicações; A Integral.</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTEÚDO PRGRAMÁTICO</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. NÚMEROS REAIS
1.1 Conjuntos Numéricos
1.2 Propriedades e Operações
1.3 Inequações
1.4 Valor absoluto
2. FUNÇÕES E GRÁFICOS
2.1 Função de primeiro grau
2.2 Função de segundo grau
2.3 Funções trigonométricas
2.4 Função exponencial
2.5 Funções hiperbólicas
2.6 Funções compostas
2.7 Funções inversas
3. LIMITES, CONTINUIDADE E DERIVADA
3.1 Limite e continuidade
3.2 Limites laterais
3.3 Limites no infinito
3.4 Limites infinitos
3.5 Propriedades do limite e da continuidade
3.6 Limites fundamentais
3.7 Funções deriváveis
3.8 Retas tangentes e retas normais a uma curva
3.9 A diferencial de uma função
4. FUNÇÕES E SUAS DERIVADAS
4.1 Regras de derivação
4.2 Derivada das funções trigonométricas e exponencial
4.3 Derivada da função inversa
4.4 Derivada das funções trigonométricas inversas e logarítmica</td><td colspan="3">5. APLICAÇÕES DA DERIVADA
5.1 Máximos e mínimos de funções
5.2 Teorema do Valor Médio
5.3 Regra de L´Hospital
5.4 Crescimento e concavidade de funções
5.5 Gráficos de funções
5.6 Problemas de máximos e mínimos
5.7 Taxa de variação

6. A INTEGRAL
6.1 A integral indefinida e suas propriedades
6.2 A integral definida e suas propriedades
6.3 Área de regiões planas
6.4 Teorema Fundamental do Cálculo

7. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO
7.1 Integração por substituição
7.2 Integração por partes
7.3 Integração por frações parciais
7.4 Integração de potências e produtos de funções trigonométricas
7.5 Integração por substituições inversas.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Bibliografia
TÍTULO DA OBRA — AUTOR
[1] O cálculo com Geometria Analítica, volume I — LEITOHOLD, Louis.
[2] Cálculo com Geometria Analítica, volume I — SIMMONS, George F.
[3] Cálculo Vol I — MUNEM, Mustafa A.; FLEMING, David J.
[4] Um Curso de Cálculo Vol I — BUCIDORIZZI, H.L.
[5] Cálculo I — ÁVILA, Geraldo S.S.
[6] Introdução ao Cálculo Vol I — BOULOS, Paulo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprovado pelo Colegiado de Curso: COMAT
Reunião: Data:</td><td colspan="3">Resolução CEPE: Nº
Data:</td></tr>
</table>

Anexo 2 - Ementa Cálculo Diferencial e Integral A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE DISCIPLINA

<table>
<tr><td colspan="5">Disciplina:
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A</td><td>Código:
MTM 700</td></tr>
<tr><td colspan="4">Departamento: MATEMÁTICA
UNIDADE: ICEB</td><td>Duração/Semanas
18</td><td>Carga Horária Semestral
72</td></tr>
<tr><td>Carga Horária Semanal</td><td>Teórica
04</td><td>Prática
00</td><td>Estágio
00</td><td>Créditos
04</td><td>PRÉ-REQUISITOS
--</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ementa: Limites; Continuidade; Derivada e aplicações; Integral.</td></tr>
<tr><td colspan="6">CONTEÚDO PRGRAMÁTICO</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. LIMITE
1.1 Definição
1.2 Limites laterais
1.3 Limites no infinito
1.4 Limites infinitos
1.5 Propriedades
1.6 Limites Fundamentais

2. CONTINUIDADE
2.1 Definição
2.2 Propriedades
2.3 Teorema do Valor Intermediário

3. DERIVADAS
3.1 Retas tangentes a curvas
3.2 Definição
3.3 Regras de derivação
3.4 Derivadas de funções trigonométricas e exponenciais
3.5 Derivadas de funções inversas
3.6 Derivadas das funções trigonométricas inversas e logarítmica
3.7 Derivadas de funções compostas (regra da cadeia)</td><td colspan="3">4. APLICAÇÕES DA DERIVADA
4.1 máximos e mínimos
4.2 Teorema do Valor Médio
4.3 Crescimento e Concavidade de Funções
4.4 Gráficos de funções
4.5 Problemas de máximos e mínimos
4.6 Regra de L’Hospital

5. INTEGRAIS
5.1 Integral indefinida e suas propriedades
5.2 Integral definida e suas propriedades
5.3 Técnicas de integração (substituição, por partes, frações parciais, substituição trigonométrica).</td></tr>
<tr><td colspan="6">Bibliografia
TÍTULO DA OBRA — AUTOR
[1] Cálculo vol I — STWART, J.
[2] Cálculo vol I — THOMAS, G.
[3] Cálculo com Geometria Analítica vol 1 — SIMMONS, G.F.
[4] O Cálculo com Geometria Analítica — LEITHOLD, L.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprovado pelo Colegiado de Curso: COMAT
Reunião: Data:</td><td colspan="3">Resolução CEPE: Nº
Data:</td></tr>
</table>